



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI
CAMPUS ALTO PARAÓPEBA

CLÍCIA GOMES SABARÁ

**MODELAGEM COMPUTACIONAL DO TRATAMENTO DE
ESGOTO EM LAGOAS DE ESTABILIZAÇÃO: UMA
ANÁLISE PARAMÉTRICA**

OURO BRANCO

2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI
CAMPUS ALTO PARAOPÉBA

**MODELAGEM COMPUTACIONAL DO TRATAMENTO DE
ESGOTO EM LAGOAS DE ESTABILIZAÇÃO: UMA
ANÁLISE PARAMÉTRICA**

Trabalho de conclusão de curso
apresentado à Coordenação do
Curso de Graduação em Engenharia
de Bioprocessos da Universidade
Federal de São João del-Rei, Campus
Alto Paraopeba como requisito para
obtenção do grau de Bacharel em
Engenharia de Bioprocessos.

Orientador: Prof. Dr. Edson Romano
Nucci

OURO BRANCO

2025

RESUMO

A crescente necessidade de aumentar a eficiência e reduzir os custos do tratamento de esgoto reforça a importância das lagoas de estabilização, especialmente em regiões tropicais. Nesse contexto, a modelagem matemática surge como ferramenta estratégica para compreender e prever o comportamento desses sistemas sem depender exclusivamente de ensaios experimentais. Este trabalho teve como objetivo analisar a sensibilidade e o desempenho de um modelo matemático preditivo aplicado ao tratamento de esgoto em lagoas de estabilização. O modelo proposto por Fauzi e Jamil (2021) foi implementado no software *SciLab* e é composto por quatro equações diferenciais ordinárias que descrevem a dinâmica de coliformes, bactérias fototróficas, demanda química de oxigênio (DQO) e oxigênio dissolvido (OD). A metodologia baseou-se na realização de simulações computacionais com análise paramétrica, a partir da variação controlada das condições iniciais das variáveis do modelo. Os resultados indicam que pequenas mudanças nas condições iniciais produzem alterações relevantes no comportamento temporal de coliformes, bactérias fototróficas e DQO, enquanto a concentração de oxigênio dissolvido apresentou baixa sensibilidade às variações iniciais, mantendo uma tendência semelhante ao longo do tempo. Apesar de reproduzir tendências gerais coerentes com a literatura e com o artigo base, o modelo apresentou limitações relacionadas à ausência de fenômenos como variações sazonais, radiação solar, estratificação e heterogeneidade espacial. Ainda assim, a abordagem adotada demonstrou a utilidade da modelagem matemática como suporte ao diagnóstico e à otimização de lagoas de estabilização, contribuindo para o desenvolvimento de estratégias mais eficientes, sustentáveis e economicamente viáveis para o tratamento de águas residuais.

Palavras-chave: Tratamento de esgoto; Lagoas de estabilização; Modelagem matemática; Análise paramétrica; Águas residuais.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Fluxograma de uma lagoa facultativa.	11
Figura 2 – Fluxograma de uma lagoa aeróbia (aerada).....	12
Figura 3 – Fluxograma de uma lagoa anaeróbia seguida de uma lagoa facultativa. .	13
Figura 4 – Fluxograma de um sistema de tratamento utilizando lagoas do tipo anaeróbia, facultativa e de maturação.	14
Figura 5 - Fluxograma simplificado do processo de elaboração de uma modelagem matemática.	15
Figura 6 – Variação da concentração de coliformes ao longo de 70 dias considerando alterações de $\pm 10\%$ na condição inicial.	20
Figura 7 - Resultados da simulação da concentração de coliformes microbianos e dados experimentais obtidos pelos autores ao longo do tempo.	21
Figura 8 - Variação da concentração de oxigênio dissolvido ao longo de 70 dias considerando alterações de $\pm 10\%$ na condição inicial da concentração de coliformes.	22
Figura 9 - Variação da concentração de bactérias fototróficas ao longo de 70 dias considerando alterações de $\pm 10\%$ na condição inicial.	23
Figura 10 - Resultado da simulação da concentração de bactérias fototróficas e dados experimentais obtidos pelos autores ao longo do tempo.	24
Figura 11 - Variação da concentração de DQO ao longo de 70 dias considerando alterações de $\pm 10\%$ na condição inicial.	25
Figura 12 - Resultado da simulação da concentração de demanda química de oxigênio (DQO) e dados experimentais obtidos pelos autores em função do tempo.	26
Figura 13 - Variação da concentração de OD ao longo de 70 dias considerando alterações de $\pm 10\%$ na condição inicial.	26
Figura 14 - Resultado da simulação da concentração de oxigênio dissolvido (OD) e dados experimentais obtidos pelos autores em função do tempo.	27

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Parâmetros usados no modelo matemático.	19
---	----

ABREVIATÓES E SIGLAS

DBO – Demanda bioquímica de oxigênio

DQO – Demanda química de oxigênio

OD – Oxigênio dissolvido

P – Concentração de coliformes

M – Concentração de bactérias fototróficas

D – Demanda química de oxigênio

X – Concentração de oxigênio dissolvido

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	OBJETIVO	9
2.1	Objetivos específicos.....	9
3	REFERENCIAL TEÓRICO	10
3.1	Lagoa de estabilização	10
3.2	Classificação das lagoas de estabilização.....	10
3.2.1	Lagoa Facultativa	10
3.2.2	Lagoa Aeróbica	12
3.2.3	Lagoa Anaeróbica	13
3.2.4	Lagoa de Maturação	14
3.3	Modelagem	15
4	METODOLOGIA	18
5	RESULTADOS E DISCUSSÃO	20
5.1	Análise paramétrica	20
5.1.1	Concentração inicial de coliformes	20
5.1.2	Concentração inicial de bactérias fototróficas.....	23
5.1.3	Concentração inicial de demanda química de oxigênio	24
5.1.4	Concentração inicial de oxigênio dissolvido.....	26
5.2	Limitações do modelo	28
6	CONCLUSÃO	30
7	REFERÊNCIAS	31

1 INTRODUÇÃO

De acordo com a UNICEF, em 2023, uma em cada três crianças no mundo vivia em regiões com escassez de água alta ou extremamente alta, um quadro que tende a se agravar diante dos efeitos das mudanças climáticas. No Brasil, esse contexto alcança cerca de 1,1 milhão de crianças e adolescentes expostos ao risco de falta de água. Entre os fatores que intensificam a crise hídrica, destaca-se a poluição dos corpos d'água, decorrente principalmente do descarte inadequado de esgoto. Choudhary e Ray (2024) estimam que aproximadamente 40 milhões de litros de águas residuais sejam despejados diariamente em rios, lagos e represas, dos quais apenas uma fração recebe tratamento adequado.

Nesse contexto, torna-se cada vez mais urgente a adoção de soluções acessíveis e ambientalmente sustentáveis para o tratamento de esgoto. As lagoas de estabilização, também chamadas de lagoas de oxidação, despontam como uma alternativa eficaz, sobretudo em regiões tropicais e de baixa densidade urbana. Além de apresentarem baixo custo de implantação e manutenção, essas lagoas utilizam processos naturais de depuração biológica que envolvem a ação de bactérias e algas, minimizando o impacto ambiental (LUTTA, ADEYEMO e ONG'OR, 2022).

Para ampliar a compreensão do funcionamento desses sistemas e aprimorar sua operação, a modelagem matemática tem se consolidado como uma ferramenta essencial. Neste trabalho, utiliza-se um modelo matemático desenvolvido por Fauzi e Jamil (2021), o qual apresenta um sistema de equações diferenciais ordinárias que descrevem a dinâmica de variáveis como a concentração de coliformes, demanda química de oxigênio (DQO), oxigênio dissolvido (OD) e biomassa microbiana ao longo do tempo. Com base nesse modelo, é possível simular o comportamento das lagoas sob diferentes condições ambientais e operacionais. Essa capacidade de previsão permite otimizar o desempenho do sistema, evitando testes empíricos demorados e dispendiosos.

Aliada à modelagem, a análise paramétrica oferece uma abordagem estratégica para estudar a sensibilidade do sistema frente à variação de seus parâmetros. Ao testar diferentes cenários, torna-se viável prever o comportamento da

lagoa em condições reais, identificar pontos críticos e propor melhorias de forma fundamentada (FAUZI E JAMIL, 2022).

Assim, a integração entre modelagem matemática e análise paramétrica representa uma abordagem robusta para compreender, avaliar e otimizar o funcionamento das lagoas de estabilização, contribuindo para o desenvolvimento de soluções mais racionais, sustentáveis e alinhadas aos desafios atuais da engenharia de bioprocessos.

2 OBJETIVO

Analisar parametricamente um modelo matemático preditivo para o tratamento de águas residuais em lagoas de estabilização, utilizando simulações computacionais de variáveis ambientais e microbiológicas para avaliar sua sensibilidade e desempenho do modelo.

2.1 Objetivos específicos

- Implementar e validar no *software* SciLab o modelo de equações diferenciais ordinárias proposto por Fauzi e Jamil (2021).
- Avaliar o efeito de variações de $\pm 10\%$ nas condições iniciais do modelo para as variáveis concentração de coliformes, concentração de bactérias fototróficas, DQO e concentração de oxigênio dissolvido sobre a dinâmica do sistema.
- Analisar a sensibilidade do modelo à variação de parâmetros operacionais relevantes, identificando aqueles que exercem maior influência sobre o desempenho da lagoa de estabilização.
- Investigar a interdependência entre as variáveis microbiológicas e ambientais, examinando como alterações em uma variável impactam as demais ao longo da simulação.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

3.1 Lagoa de estabilização

As lagoas de estabilização representam uma forma eficiente de tratar águas residuais, caracterizada por seu baixo custo, baixa necessidade de energia e pouca exigência de manutenção (MARA, 2008). As lagoas de estabilização funcionam de forma autônoma, pois sua eficiência está ligada à manutenção das comunidades microbianas e ao equilíbrio de luz, oxigênio dissolvido, matéria orgânica, nutrientes, temperatura e presença de algas. Dessa forma, os custos operacionais são reduzidos quando comparados a outras formas de tratamento (BUTLER *et al.*, 2015).

Além disso, as lagoas podem ser empregadas como etapa complementar a outros métodos de tratamento de águas residuais, reforçando os métodos convencionais adotados. Essa tecnologia ainda simplifica o processo, pois dispensa a necessidade de diversas fases sucessivas. Por fim, trata-se de uma solução viável para o tratamento de esgoto em regiões onde as abordagens tradicionais apresentam custos elevados (DA SILVA *et al.*, 2015).

Em síntese, as lagoas de estabilização apresentam diversas vantagens para o tratamento de esgoto, como a simplicidade de construção, o baixo custo de operação e manutenção, a dispensa de etapas adicionais de desinfecção do efluente, a adequação para pequenas comunidades e regiões tropicais, a capacidade de tratar diferentes tipos de águas residuais e a elevada remoção de coliformes fecais e DBO quando comparadas a outros métodos, além de se configurarem como uma alternativa ambientalmente sustentável. Como principal desvantagem, destaca-se a necessidade de uma extensa área física para sua implantação (BUTLER *et al.*, 2015).

3.2 Classificação das lagoas de estabilização

As lagoas de estabilização podem ser classificadas em quatro grupos majoritários: lagoa aeróbica, lagoa anaeróbica, lagoa facultativa, lagoa de maturação.

3.2.1 Lagoa Facultativa

As lagoas facultativas recebem essa denominação por possuírem a capacidade de realizar simultaneamente processos aeróbios e anaeróbios (ELLIS; MARA, 2009). Nesses sistemas, ocorrem de forma integrada a oxidação aeróbia e anaeróbia, a

fermentação e respiração anaeróbias, e a redução fotossintética, conduzindo a um tratamento eficiente da matéria orgânica (DA SILVA et al., 2015).

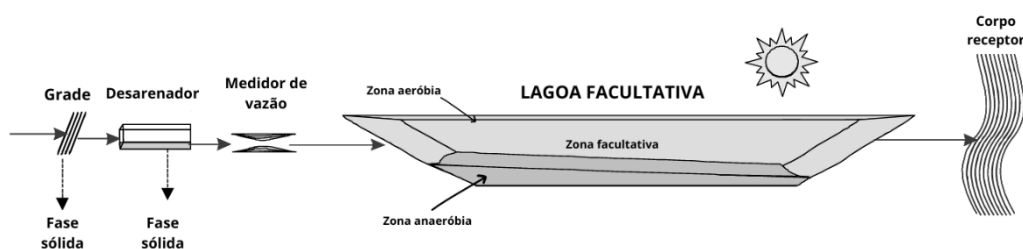
Estruturalmente, uma lagoa facultativa apresenta três zonas distintas:

1. **Zona aeróbia** — localizada na superfície, onde predominam algas e bactérias aeróbias;
2. **Zona anaeróbia** — situada no fundo, composta principalmente por microrganismos anaeróbios;
3. **Zona facultativa** — intermediária, caracterizada pela coexistência de microrganismos aeróbios e anaeróbios (BUTLER et al., 2015).

A profundidade é um parâmetro crítico para o desempenho da unidade. Se muito rasa, pode favorecer o crescimento de plantas enraizadas e algas filamentosas no fundo, contribuindo para retenção de detritos e prejudicando a mistura hidráulica. Por outro lado, profundidades excessivas limitam a penetração da radiação solar, essencial para a fotossíntese das algas, e reduzem a eficiência da mistura natural. Por esse motivo, as lagoas facultativas são geralmente projetadas com profundidades entre 1 e 2 metros (ELLIS; MARA, 2009; BUTLER et al., 2015). Segundo Butler et al. (2015), a eficiência de remoção de DBO em lagoas facultativas pode atingir cerca de 95%, desde que mantidas condições adequadas de operação e exposição solar.

A figura 1 mostra um fluxograma de um sistema de lagoa do tipo facultativa. O esquema ilustra uma lagoa facultativa isolada, precedida por unidades de tratamento preliminar, incluindo grade, desarenador e medidor de vazão. No interior da lagoa, são indicadas três regiões distintas ao longo da profundidade: a zona aeróbia na superfície, a zona facultativa na região intermediária e a zona anaeróbia no fundo. O fluxo do efluente ocorre da entrada até a saída da lagoa, direcionando-se ao corpo receptor.

Figura 1 – Fluxograma de uma lagoa facultativa.



Fonte: Adaptado de Von Sperling (2007)

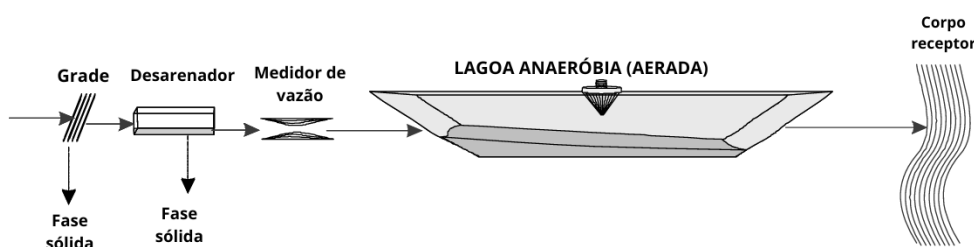
3.2.2 Lagoa Aeróbica

A principal diferença entre a lagoa do tipo facultativa e do tipo aeróbica diz respeito ao modo de suprimento de oxigênio. Nas lagoas facultativas, o oxigênio é produzido naturalmente pela fotossíntese das algas, enquanto nas lagoas facultativas aeradas o aporte ocorre por meio de aeradores mecânicos. Em razão da introdução de equipamentos, as lagoas aeradas apresentam maior complexidade de operação e manutenção quando comparadas às lagoas facultativas convencionais (VON SPERLING, 2007).

Devido à disponibilidade de oxigênio, essas lagoas suportam cargas orgânicas relativamente altas e apresentam elevada eficiência na remoção de DBO (SHAMMAS; WANG; WU, s.d.). Em geral, lagoas aeróbicas operam com tempos de retenção hidráulica entre 2 e 6 dias e podem alcançar eficiências de remoção de DBO próximas a 95% (BUTLER et al., 2015).

A figura 2 apresenta um fluxograma de um sistema de lagoa aeróbia. Constituído por grade, desarenador e medidor de vazão, seguido por uma lagoa do tipo anaeróbia (aerada). Observa-se a presença de um aerador mecânico instalado na superfície da lagoa, responsável pela introdução de oxigênio e pela mistura do efluente. Após o tratamento na lagoa, o efluente é conduzido diretamente ao corpo receptor.

Figura 2 – Fluxograma de uma lagoa aeróbia (aerada).



Fonte: Adaptado de Von Sperling (2007)

Para fins de modelagem, esse tipo de lagoa foi utilizado por Fauzi e Jamil (2021) em seu trabalho. A lagoa está localizada em Johor, Malásia.

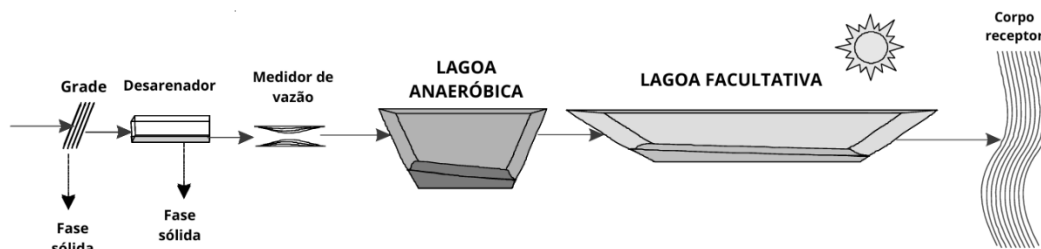
3.2.3 Lagoa Anaeróbica

As lagoas anaeróbicas são empregadas como unidades de pré-tratamento destinadas à remoção de DQO, DBO e sólidos sedimentáveis, podendo ser aplicadas tanto em efluentes domésticos quanto industriais (ALEXIOU; MARA, 2003). Frequentemente, integram sistemas combinados, atuando antes de lagoas aeróbias ou de maturação, de modo a reduzir a carga orgânica afluyente às etapas subsequentes (DA SILVA et al., 2015). Essas lagoas apresentam profundidade típica entre 2 e 5 metros e tempo de retenção hidráulica de 1 a 5 dias (BUTLER et al., 2015). A maior profundidade torna esse sistema particularmente adequado para locais com área disponível limitada, permitindo elevada capacidade de tratamento em menor espaço físico (ELLIS; MARA, 2009).

Quanto ao desempenho, Butler et al. (2015) relatam remoções de DBO em torno de 60%, valores que podem variar conforme as condições climáticas. Em situações de elevada carga orgânica, Shammass et al. (2009) indicam que a eficiência pode alcançar até 80%, embora tal desempenho dependa da estabilidade operacional e das características do afluyente.

A figura 2 mostra um fluxograma de tratamento utilizando uma lagoa do tipo anaeróbia seguido de uma lagoa do tipo facultativa, um sistema comumente adotado. O fluxo se inicia por unidades de tratamento preliminar, compostas por grade, desarenador e medidor de vazão. Na sequência, o efluente é encaminhado para uma lagoa anaeróbia, representada por uma unidade mais profunda, seguida por uma lagoa facultativa de menor profundidade. Após atravessar essas unidades, o efluente tratado é direcionado ao corpo receptor.

Figura 3 – Fluxograma de uma lagoa anaeróbia seguida de uma lagoa facultativa.



Fonte: Adaptado de Von Sperling (2007).

3.2.4 Lagoa de Maturação

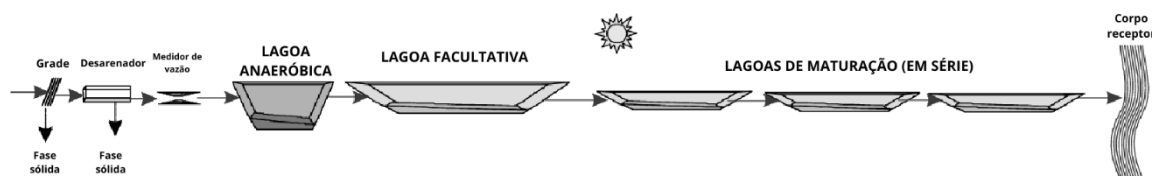
As lagoas de maturação são unidades predominantemente aeróbias destinadas ao polimento final do efluente previamente tratado em processos biológicos de maior carga orgânica (DA SILVA et al., 2015). Seu principal objetivo é aprimorar a qualidade do efluente, reduzindo contaminantes remanescentes após as etapas anteriores de tratamento.

Essas lagoas são amplamente utilizadas para a remoção de coliformes fecais, para a redução de nutrientes solúveis, como nitratos e fosfatos, para a diminuição de sólidos em suspensão e para a oxidação da amônia residual (ELLIS; MARA, 2009). São projetadas com profundidades entre 0,8 e 1,0 metros, sendo estruturalmente mais rasas que as lagoas anaeróbicas e facultativas, o que favorece maior penetração da luz solar e intensifica a atividade fotossintética (VON SPERLING, 2007).

Trata-se de um método de desinfecção natural, seguro, de baixo custo e ambientalmente favorável, representando uma alternativa eficiente a técnicas tradicionais como a cloração, especialmente em regiões de clima quente com boa disponibilidade de área (DA SILVA et al., 2015).

A figura 4 apresenta um esquema linear de tratamento de esgoto utilizando lagoas de maturação em uma configuração comumente adotada. O fluxo inicia-se nas unidades de tratamento preliminar, compostas por grade, desarenador e medidor de vazão, responsáveis pela remoção da fase sólida. Em seguida, observa-se uma lagoa anaeróbia, representada com maior profundidade, conectada a uma lagoa facultativa. Na sequência, o efluente percorre um conjunto de lagoas de maturação dispostas em série, indicadas por unidades rasas sucessivas, até o lançamento final no corpo receptor.

Figura 4 – Fluxograma de um sistema de tratamento utilizando lagoas do tipo anaeróbia, facultativa e de maturação.



Fonte: Adaptado de Von Sperling (2007).

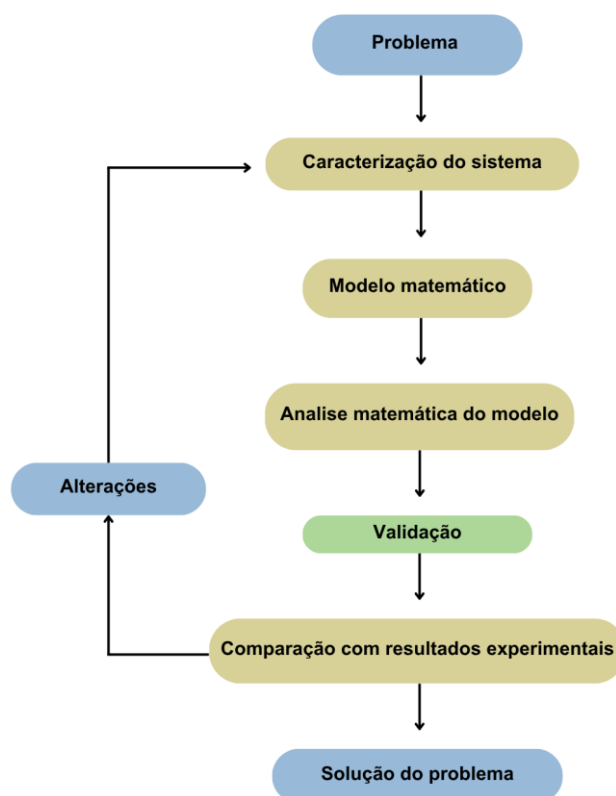
3.3 Modelagem

A modelagem matemática é o processo de formular um modelo abstrato em linguagem matemática para descrever o comportamento do sistema real. Tais modelos são quantitativos e geralmente expressos em equações diferenciais ordinárias e equações diferenciais parciais (YANG, 2017).

A modelagem matemática tem como principal característica a interdisciplinaridade, ou seja, envolve matemática, biologia, química, física, engenharia, computação e outras disciplinas (BANERJEE, 2022).

Segundo Banerjee (2022), a modelagem matemática permite a realização de experimentos de forma simulada, substituindo ou complementando testes reais. Dessa forma, torna-se possível otimizar processos previamente à sua execução prática, reduzindo o tempo necessário para os ensaios, além de economizar recursos e custos operacionais. A Figura 1 apresenta as etapas do processo de modelagem matemática, iniciando pela definição do problema.

Figura 5 - Fluxograma simplificado do processo de elaboração de uma modelagem matemática.



Fonte: Adaptado de Gupta (2022).

Em seguida, realiza-se a caracterização do sistema, identificando suas variáveis, parâmetros e condições. Com base nos resultados, constrói-se o modelo matemático, que traduz o comportamento do sistema em equações. Esse modelo é submetido a uma análise matemática, que permite estudar seu comportamento e prever resultados. A etapa seguinte é a validação, em que se verifica se o modelo representa adequadamente a realidade. Após isso, ocorre a comparação com resultados experimentais, testando a consistência entre a teoria e os dados reais. Caso haja discrepâncias, são feitas alterações e o processo retorna às etapas anteriores, em um ciclo iterativo. Quando o modelo se mostra coerente e validado, chega-se à solução do problema, permitindo seu uso em previsões e tomada de decisão (GUPTA, 2022).

No contexto de sistemas biológicos, a modelagem matemática enfrenta desafios significativos, especialmente no que se refere à formulação das equações que descrevem o processo. A elevada complexidade inerente a esses sistemas dificulta a obtenção de concordância entre os resultados das simulações e os dados experimentais, tornando a validação de modelos uma etapa particularmente sensível (GUPTA, 2022).

Na literatura é possível encontrar diversos trabalhos envolvendo modelagem matemática. Das (2020) realizou um estudo sobre o *design* e processos bioquímicos para conversão de biomassa em bioenergia e desenvolveu modelos matemáticos que podem ser utilizados para projetar melhores reatores e sistemas de controle. Já Lindamulla e colaboradores (2021) desenvolveram um modelo matemático para biorreator de membrana (usado em tratamento de efluentes) considerando condições negligenciadas em trabalhos anteriores como por exemplo o efeito de produtos microbianos aplicados e o efeito da limpeza periódica. Um estudo foi desenvolvido por Liao Y., Fatehi e Liao B. (2024) modelando matematicamente reatores de membranas microalgais emergentes para tratamento de efluentes. Para além da engenharia de bioprocessos, Shen e seus colaboradores (2021) desenvolveram um estudo com o objetivo de criar um modelo ideal de vacinação contra a Covid-19, onde foi estudada a modelagem matemática da infecção para formular o modelo de vacinação e analisados os parâmetros de ajuste do modelo.

Deste modo, é possível perceber a importância da modelagem matemática para o desenvolvimento de pesquisas e melhoramento de processos já existentes.

4 METODOLOGIA

O presente trabalho baseou-se no estudo de Fauzi e Jamil (2021), cujo objetivo foi formular um modelo preditivo para o tratamento de águas residuais em lagoas de estabilização. O modelo proposto pelos autores é composto por quatro equações diferenciais ordinárias que descrevem a dinâmica da concentração de coliformes, de bactérias fototróficas, da demanda química de oxigênio (DQO) e do oxigênio dissolvido (OD) ao longo do processo.

As equações foram implementadas no *software* SciLab com o objetivo de realizar análises paramétricas do modelo, variando-se as concentrações iniciais (P_0, m_0, D_0, X_0) em $\pm 10\%$, a fim de avaliar o comportamento do sistema frente às perturbações aplicadas.

As Equações 1 a 4 representam o modelo preditivo desenvolvido por Fauzi e Jamil (2021), no qual $P(t)$ corresponde à concentração de coliformes (mg/L), $M(t)$ à concentração de bactérias fototróficas (mg/L), $D(t)$ à demanda química de oxigênio (mg/L) e $X(t)$ à concentração de oxigênio dissolvido (mg/L), considerando-se um intervalo de simulação entre 0 e 70 dias.

$$\frac{dP(t)}{dt} = c_1 P(t) - (c_2 P(t) + c_3 M(t)) P(t) + \frac{c_4 X(t) P(t)}{X(t) + c_{11}} + \frac{v_{in} P_0(t)}{v_p} \quad (1)$$

$$\frac{dM(t)}{dt} = c_5 M(t) - c_6 M^2(t) + \frac{c_8 X(t) M(t)}{X(t) + c_{12}} + \frac{c_{18} v_{in} M_0 U(t)}{v_p} \quad (2)$$

$$\frac{dD(t)}{dt} = -c_9 D(t) - c_7 M(t) + \frac{c_{10} X(t) D(t)}{D(t) + c_{14}} + \frac{v_{in} D_0(t)}{v_p} \quad (3)$$

$$\frac{dX(t)}{dt} = c_{13} (X_{atm} - X(t)) - c_{15} X(t) M(t) - c_{16} X(t) P(t) - c_{17} X(t) D(t) + \frac{v_{in} X_0(t)}{v_p} \quad (4)$$

Os autores consideram dois pontos principais, o afluente (CP1), onde é aplicado o produto à base de microrganismos (mPHO), e o efluente (CP2). Os demais parâmetros são descritos na Tabela 1 e a inoculação de mPHO ao longo dos 70 dias seguiu as recomendações do fabricante.

A Tabela 1 mostra os valores dos parâmetros m , P_0 , D_0 , X_0 , X_{atm} , V_{in} , V_p , disponibilizados por Fauzi e Jamil (2021).

Tabela 1 - Parâmetros usados no modelo matemático.

Símbolo	Descrição	Valor
M_0	Concentração de bactérias fototróficas em um litro de produto a base de microrganismos	19,1 mg/L
P_0	Concentração de coliformes no ponto CP1	0,32 mg/L
D_0	Concentração de DQO no afluente (CP1)	160,8 mg/L
X_0	Concentração de OD no ponto CP1 (afluente e aplicação de mPHO)	2,1 mg/L
X_{atm}	Concentração de oxigênio saturado	10 mg/L
V_{in}	Quantidade média de entrada de esgoto	290304 L/dia
V_p	Volume da lagoa	286430 L
$U(t)$	a quantidade de produto à base de microrganismos (mPHO) aplicada ao lago de acordo com o cronograma da JBMI por litro em 70 dias.	Fauzi e Jamil (2021)
C_1-C_{19}	Coeficientes	Fauzi e Jamil (2021)

Fonte: Adaptado de Fauzi e Jamil (2021).

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

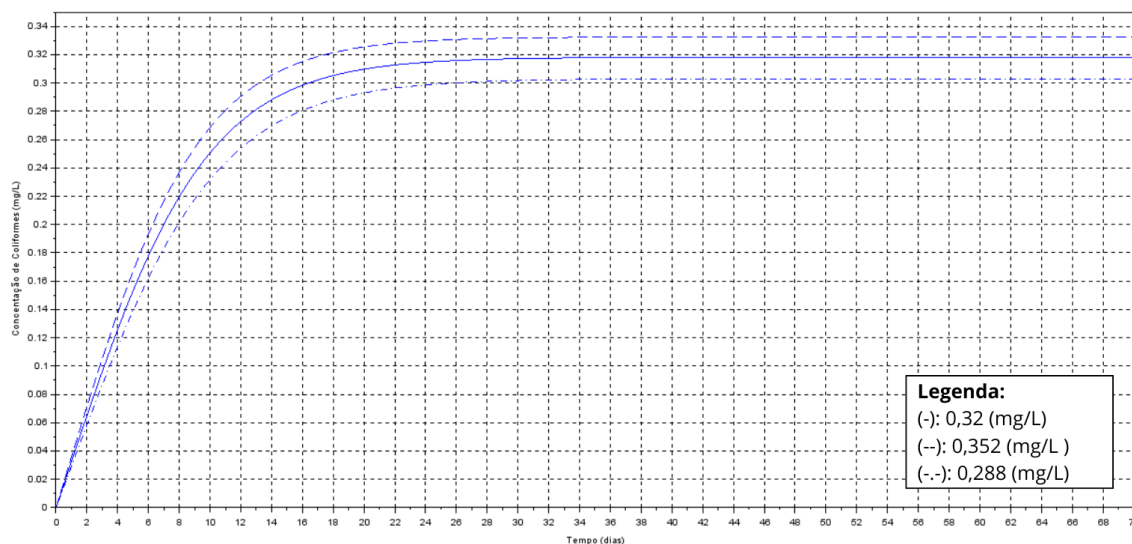
5.1 Análise paramétrica

As equações diferenciais foram implementadas no *software* SciLab, permitindo avaliar a sensibilidade do modelo frente à variação de $\pm 10\%$ nas condições iniciais de coliformes, bactérias fototróficas, demanda química de oxigênio (DQO) e oxigênio dissolvido (OD). Além de analisar a evolução individual de cada variável, investigou-se também como essas alterações repercutem nas demais variáveis do sistema, considerando que o comportamento da lagoa resulta da interação microbiana e físico-química entre todos os componentes.

5.1.1 Concentração inicial de coliformes

A Figura 6 apresenta o efeito da variação inicial de P_0 sobre $P(t)$. Observa-se que a curva se desloca verticalmente para cima quando P_0 aumenta, e para baixo quando é reduzido.

Figura 6 – Variação da concentração de coliformes ao longo de 70 dias considerando alterações de $\pm 10\%$ na condição inicial.



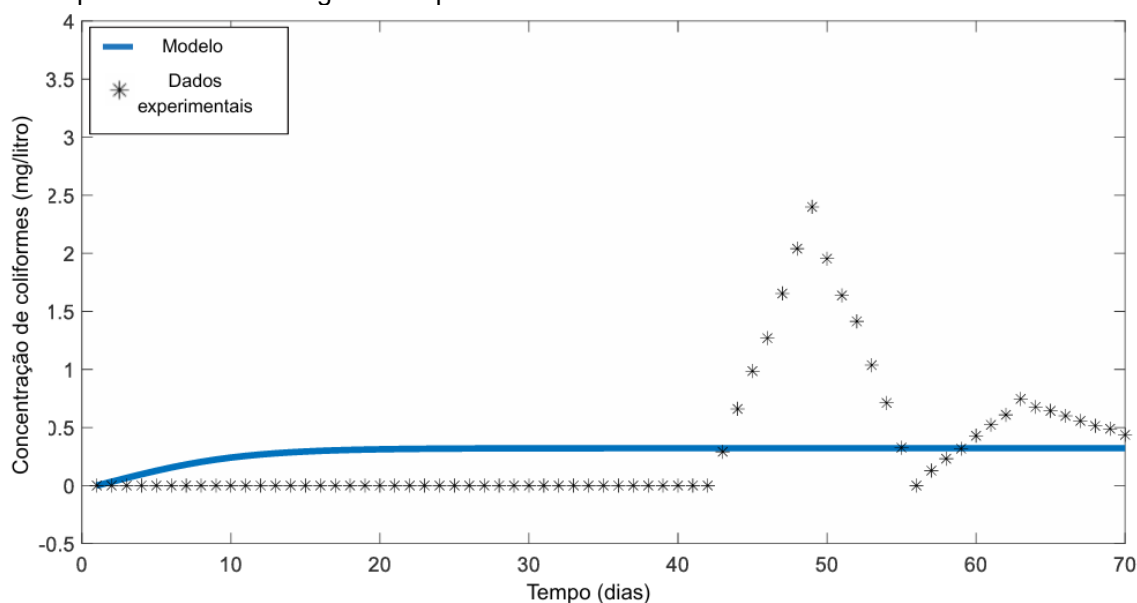
Fonte: Autoria própria.

Observa-se que, independentemente da condição inicial, todas as curvas exibem um crescimento rápido nos primeiros 10 a 15 dias, seguido de aproximação

gradual ao estado estacionário. Esse comportamento indica um regime dominado pelo termo de crescimento microbiano, que atua fortemente no início do processo, enquanto a estabilização posterior reflete o equilíbrio entre crescimento, remoção e limitações ambientais impostas pelo modelo. Esse resultado é coerente com o funcionamento real de lagoas de estabilização, onde, de acordo com Sátiro *et al.* (2025), uma maior abundância inicial de microrganismos tende a antecipar a colonização e acelerar o estabelecimento do equilíbrio microbiológico, ainda que sem modificar significativamente o regime de crescimento após a estabilização.

Ao comparar esses resultados com a Figura 7, adaptada do artigo de Fauzi e Jamil (2021), nota-se uma semelhança qualitativa importante. Ambas as Figuras demonstram que pequenas variações na concentração inicial não alteram a forma geral do comportamento, mas sim os valores absolutos ao longo do tempo.

Figura 7 - Resultados da simulação da concentração de coliformes microbianos e dados experimentais obtidos pelos autores ao longo do tempo.



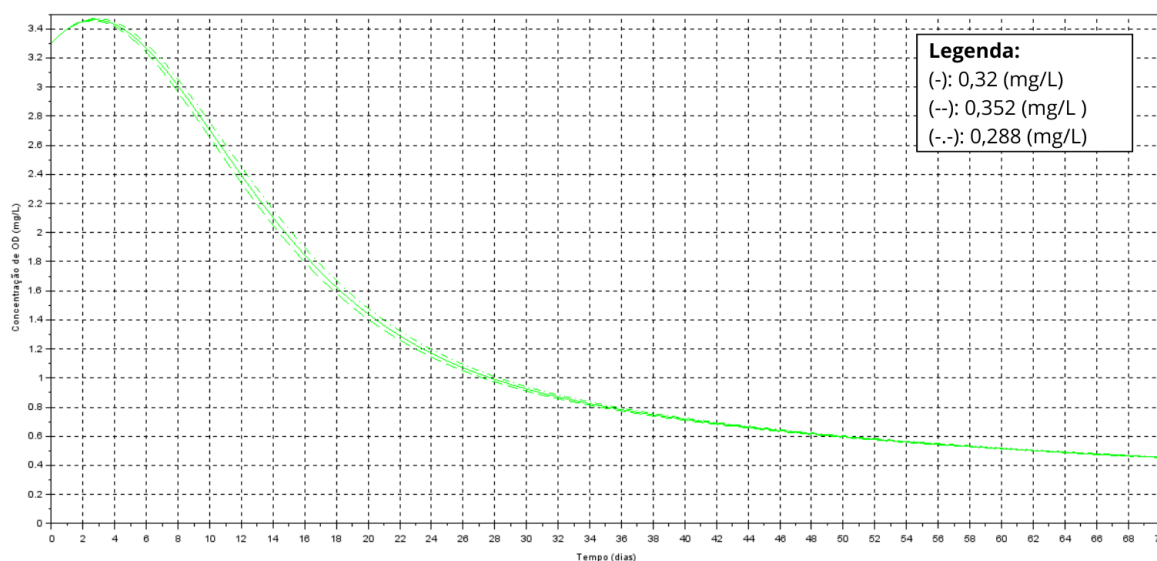
Fonte: Adaptado de Fauzi e Jamil (2021).

No período inicial (0 – 40 dias), os valores experimentais permanecem próximos de zero, indicando baixa concentração de coliformes, possivelmente associada a condições ambientais favoráveis à sua remoção, como intensa radiação solar, boa oxigenação superficial ou predominância de bactérias competidoras. No entanto, a partir de aproximadamente 45 dias, ocorre um pico abrupto de coliformes, seguido por oscilações marcantes. Esses aumentos podem refletir eventos reais de

carga orgânica elevada, entrada de esgoto fresco, redução da incidência solar, ressuspensão de sedimentos ou variações climáticas (VON SPERLING, 2007).

Além disso, a variação da concentração inicial de coliformes também afeta a concentração de oxigênio dissolvido, como ilustra a Figura 8. Foi realizada a mesma análise paramétrica, variando em $\pm 10\%$ a concentração inicial de coliformes (P_0).

Figura 8 - Variação da concentração de oxigênio dissolvido ao longo de 70 dias considerando alterações de $\pm 10\%$ na condição inicial da concentração de coliformes.



Fonte: Autoria própria.

No início da simulação (0–5 dias), observa-se um crescimento rápido do OD, que atinge valores próximos de 3,4 mg/L. Esse pico inicial pode ser associado à predominância dos processos de produção de oxigênio, especialmente devido à atividade fotossintética das bactérias fototróficas presentes no modelo. Após esse ponto máximo, o OD decresce de forma contínua, indicando que o consumo de oxigênio, decorrente da degradação da DQO e da respiração microbiana, passa a superar sua taxa de geração.

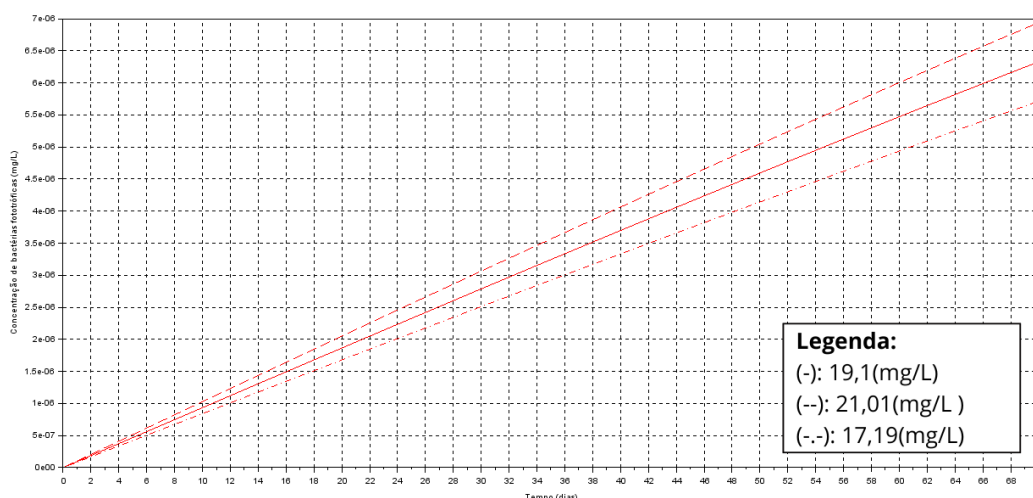
A influência da variação inicial é relativamente pequena: as três curvas permanecem próximas ao longo de toda a simulação, sugerindo que o modelo apresenta baixa sensibilidade às perturbações iniciais de X_0 . Isso indica que, mesmo com variações de $\pm 10\%$, o sistema rapidamente converge para uma trajetória comum, reflexo de uma dinâmica governada majoritariamente pelos termos internos da equação (produção e consumo) e não pela condição inicial.

Survyla *et al.* (2021) afirma que maior densidade de coliformes implica maior taxa de respiração bacteriana e, portanto, maior consumo de oxigênio. A partir do dia 20, a concentração de OD se normaliza, pois o sistema atinge o equilíbrio.

5.1.2 Concentração inicial de bactérias fototróficas

A Figura 9 ilustra o comportamento de $M(t)$. Assim como no caso dos coliformes, a resposta também foi proporcional: quando ocorreu a variação de 10% em M_0 , aumentou a resposta e, em contrapartida, a redução diminuiu a resposta. Abouhend *et al.* (2019) aponta que populações fotossintéticas apresentam crescimento sensível às condições iniciais, pois o estabelecimento de biomassa afeta diretamente a taxa de produção de oxigênio.

Figura 9 - Variação da concentração de bactérias fototróficas ao longo de 70 dias considerando alterações de $\pm 10\%$ na condição inicial.



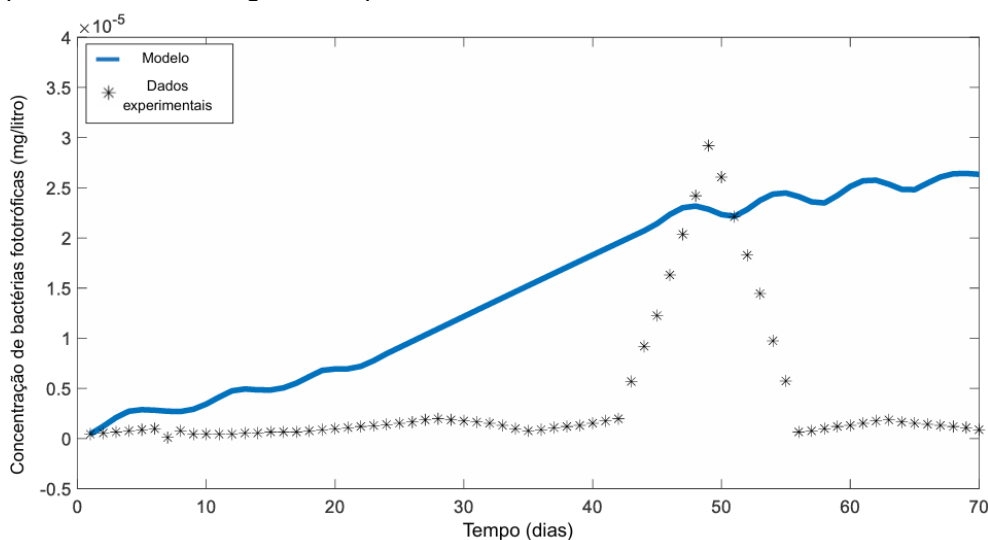
Fonte: Autoria própria.

A Figura 10 ilustra o resultado da simulação da concentração de bactérias fototróficas. A Figura apresenta a comparação entre a concentração simulada de bactérias fototróficas e os dados experimentais ao longo de 70 dias. O comportamento previsto pelo modelo mostra um crescimento gradual, com variações suaves ao longo

do tempo, enquanto os dados experimentais exibem valores menores e maior instabilidade, incluindo um pico acentuado próximo ao dia 50.

A comparação direta evidencia que o modelo superestima o crescimento de bactérias fototróficas e não reproduz eventos transitórios relevantes, como picos ou oscilações bruscas. Além disso, a ausência de mecanismos que representem fatores ambientais variáveis limita a capacidade do modelo de capturar a complexidade da dinâmica microbiana da lagoa. Assim, embora o modelo descreva adequadamente uma tendência geral de crescimento, ele não representa de forma realista a variabilidade observada nos dados experimentais, indicando a necessidade de aprimoramento das equações diferenciais utilizadas ou incorporação de termos adicionais que representem perturbações ambientais típicas desses sistemas.

Figura 10 - Resultado da simulação da concentração de bactérias fototróficas e dados experimentais obtidos pelos autores ao longo do tempo.



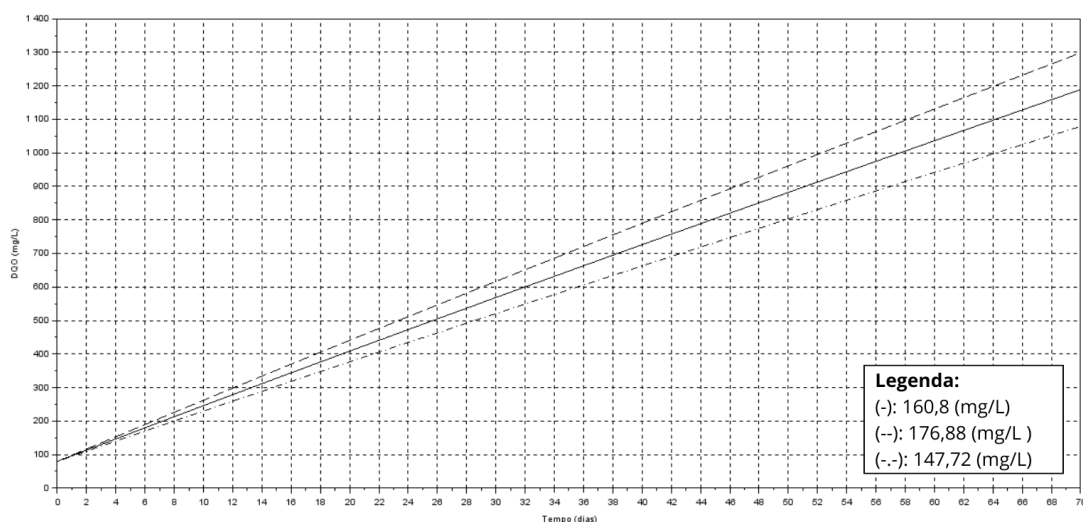
Fonte: Adaptado de Fauzi e Jamil (2021).

5.1.3 Concentração inicial de demanda química de oxigênio

A Figura 11 ilustra o resultado da variação de $\pm 10\%$ na concentração inicial de demanda química de oxigênio (DQO). Por meio da Figura 11, foi possível observar que após um período (fase de adaptação) o aumento de 10% na concentração de DQO desloca a curva para valores mais altos, enquanto a diminuição de 10% provoca o efeito inverso. Essa resposta proporcional era esperada, pois o termo concentração da demanda química de oxigênio na equação de $D(t)$ apresenta dependência direta

da concentração inicial. Esse comportamento é consistente com modelos de consumo de matéria orgânica, em seu trabalho, Alavi e Ansari (2022) mostram que a concentração inicial determina a intensidade e duração da atividade microbiológica.

Figura 11 - Variação da concentração de DQO ao longo de 70 dias considerando alterações de $\pm 10\%$ na condição inicial.



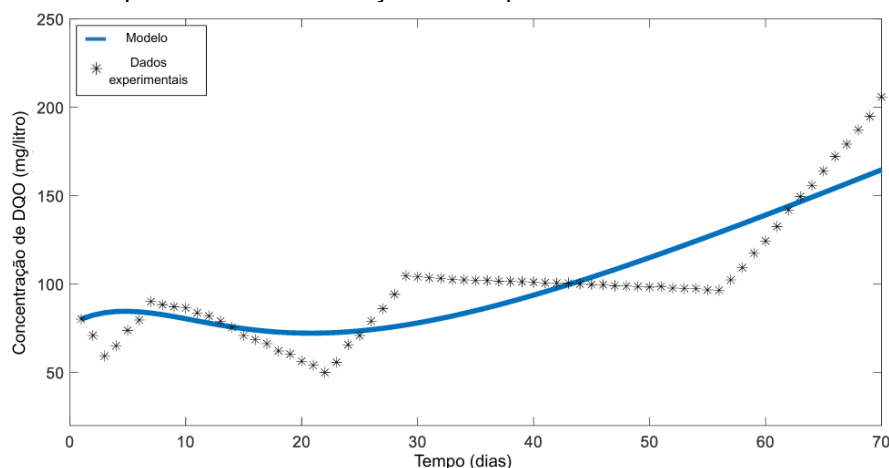
Fonte: Autoria própria.

Entretanto, os resultados evidenciam que a formulação utilizada por Fauzi e Jamil (2021) apresenta limitações importantes, uma vez que não reproduz adequadamente a dinâmica de diminuição da matéria orgânica típica de sistemas reais. A ausência de termos de degradação pode comprometer a validade do modelo como ferramenta preditiva para DQO em lagoas de estabilização, sugerindo a necessidade de ajustes estruturais nas equações diferenciais ou inclusão de novos parâmetros que representem os processos de tratamento de forma mais realista.

A Figura 12 ilustra os resultados da simulação da concentração de demanda química de oxigênio (DQO). A comparação evidencia que, embora a curva simulada acompanhe parcialmente a tendência geral de aumento da DQO observada experimentalmente, o modelo subestima a variabilidade real do sistema e não reproduz comportamentos não lineares e descontínuos típicos de lagoas de estabilização. A discrepância mais evidente ocorre após o dia 55, quando os dados experimentais apresentam forte crescimento enquanto o modelo mantém um ritmo mais moderado. Isso indica que a formulação utilizada, apesar de representar

adequadamente tendências médias, não incorpora mecanismos necessários para captar variações abruptas ou perturbações externas frequentes em sistemas reais.

Figura 12 - Resultado da simulação da concentração de demanda química de oxigênio (DQO) e dados experimentais obtidos pelos autores em função do tempo.

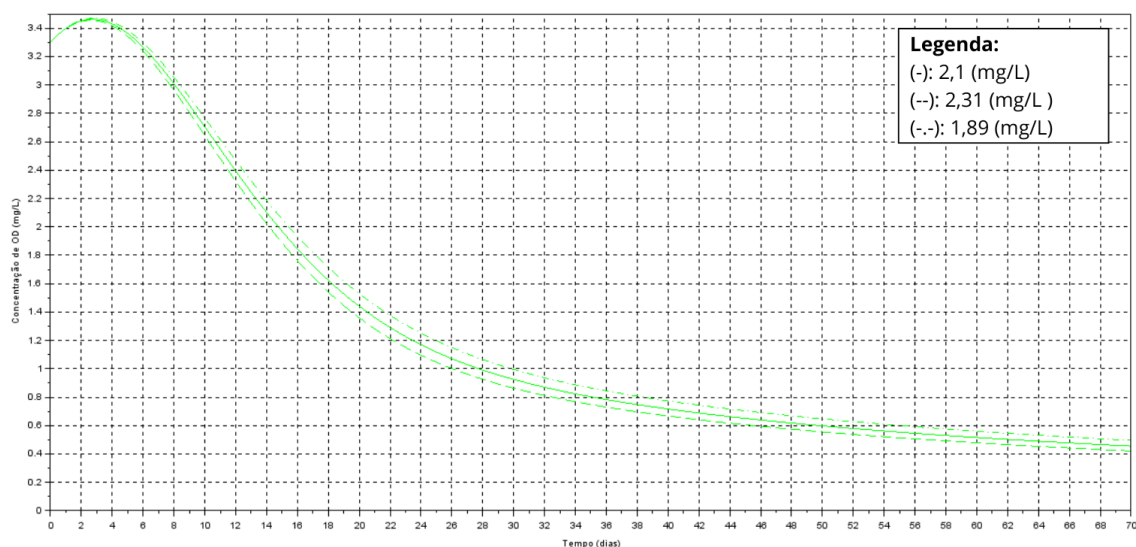


Fonte: Adaptado de Fauzi e Jamil (2021).

5.1.4 Concentração inicial de oxigênio dissolvido

A Figura 13 apresenta o comportamento da concentração de oxigênio dissolvido (OD) ao longo de 70 dias, considerando variações de $\pm 10\%$ na condição inicial. As curvas simuladas apresentam um padrão bastante semelhante entre si, indicando que o modelo possui baixa sensibilidade às perturbações iniciais. Nos primeiros dias, observa-se um rápido aumento da concentração de OD, atingindo valores próximos de 3,4 mg/L, seguido por um declínio contínuo até aproximadamente 0,6 mg/L ao final da simulação. Esse pico inicial sugere que, no modelo, os processos fotossintéticos e de reaeração predominam no início, resultando em elevação temporária dos níveis de oxigênio.

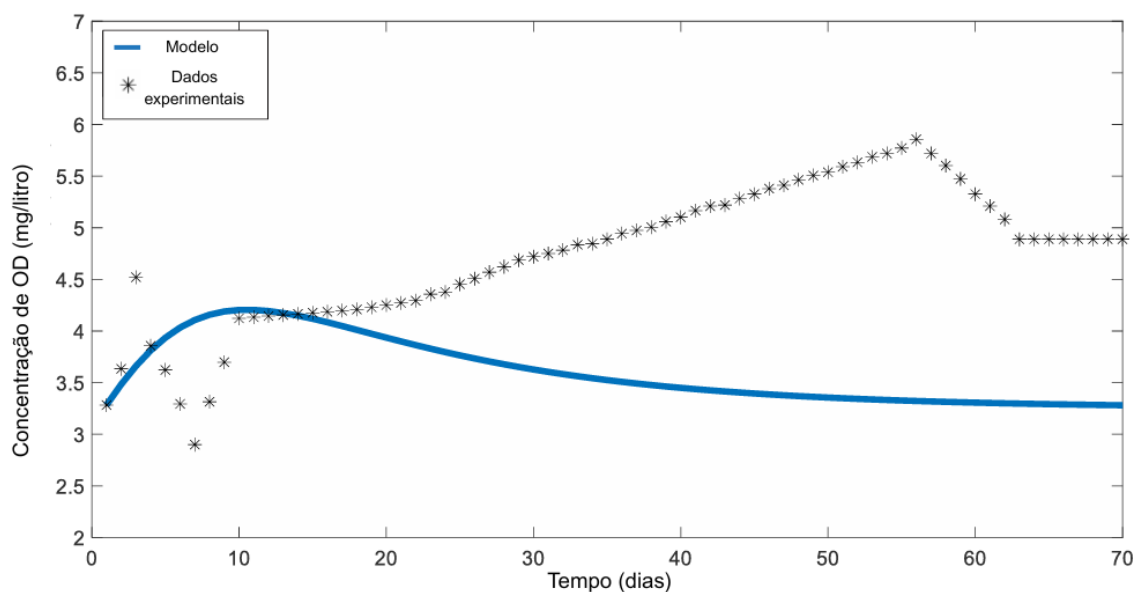
Figura 13 - Variação da concentração de OD ao longo de 70 dias considerando alterações de $\pm 10\%$ na condição inicial.



Fonte: Autoria própria.

A Figura 14 ilustra os resultados obtidos pelos autores.

Figura 14 - Resultado da simulação da concentração de oxigênio dissolvido (OD) e dados experimentais obtidos pelos autores em função do tempo.



Fonte: Adaptado de Fauzi e Jamil (2021).

Pode-se observar que os dados experimentais exibem valores consistentemente superiores aos previstos pelo modelo, além de maior variabilidade temporal. Após o período inicial, os valores medidos mantêm trajetória de crescimento contínuo, alcançando um máximo próximo de 6,5 mg/L por volta do dia 55, seguido de queda abrupta e estabilização em torno de 5 mg/L. De acordo com Von Sperling (2007)

esse padrão sugere que a lagoa experimental apresentou condições ambientais favoráveis à elevação do OD, como elevada incidência solar, intensa fotossíntese por microalgas, boa reaeração superficial e possível redução temporária da carga orgânica, fatores não incorporados ao modelo matemático.

No gráfico de sensibilidade ($\pm 10\%$) ilustrado pela Figura 13, observa-se que as curvas simuladas apresentam um comportamento bastante uniforme: todas seguem a mesma trajetória, variando apenas pela diferença inicial. Em contraste, a Figura 14, que compara o modelo com os dados experimentais, revela um comportamento muito mais complexo e variável. Deste modo, o modelo tende a produzir uma resposta idealizada, com dinâmica simplificada, que não acompanha a complexidade dos processos ambientais que regulam o OD no sistema real.

5.2 Limitações do modelo

O modelo matemático utilizado neste estudo, proposto por Fauzi e Jamil (2021), constitui uma base para representar a dinâmica entre coliformes, bactérias fototróficas, demanda química de oxigênio (DQO) e oxigênio dissolvido (OD) em lagoas de estabilização. Embora seja funcional, o modelo desenvolvido pelos autores, apresenta limitações relevantes que devem ser consideradas na interpretação dos resultados.

Primeiramente, o modelo não contempla fenômenos característicos de lagoas reais, como sedimentação de sólidos, formação de zonas anóxicas, ciclagem de nutrientes, interações ecológicas entre diferentes comunidades microbianas e efeitos hidrodinâmicos internos. Esses processos influenciam de maneira significativa o comportamento da DQO e do OD, mas são substituídos no modelo por representações simplificadas, baseadas em termos cinéticos generalizados.

Além disso, o modelo assume condições ambientais constantes ao longo de toda a simulação. Variáveis como temperatura, incidência solar, duração do fotoperíodo, turbidez da água, ação dos ventos e variações pluviométricas não são incorporadas. Na realidade, esses fatores modulam diretamente a fotossíntese, a respiração microbiana, a solubilidade do oxigênio e a atividade das bactérias fototróficas, produzindo oscilações diárias e sazonais que não são refletidas nas curvas geradas pela simulação.

Diante dessas simplificações estruturais, o modelo mostra-se apenas para a exploração de tendências gerais, análises paramétricas e compreensão conceitual da dinâmica do sistema. Fauzi e Jamil (2021), concluem que o modelo proposto pode ser utilizado como um modelo preditivo, contudo, seus resultados devem ser interpretados como estimativas qualitativas, e não como uma representação fidedigna do comportamento operacional de uma lagoa de estabilização em condições reais.

Para ampliar a robustez do modelo e aproximá-lo do comportamento real das lagoas de estabilização, recomenda-se que trabalhos futuros incorporem e testem parâmetros adicionais anteriormente citados, como temperatura, incidência solar, turbidez, fotoperíodo e variabilidade hidrodinâmica, uma vez que esses fatores exercem influência direta sobre a dinâmica das lagoas de estabilização. Além disso, a aplicação de um planejamento experimental (como, por exemplo, Plackett-Burman, fatorial completo, Dohelert) permitiria identificar, de forma estatisticamente fundamentada, quais variáveis exercem efeitos significativos sobre a dinâmica dos coliformes, da DQO, do OD e das bactérias fototróficas. Essa abordagem auxiliaria na seleção dos parâmetros mais relevantes para calibração e validação futura do modelo, contribuindo para o desenvolvimento de representações matemáticas mais realistas e aplicáveis ao gerenciamento de lagoas de estabilização.

6 CONCLUSÃO

A análise paramétrica realizada com base no modelo de Fauzi e Jamil (2021) evidenciou que pequenas alterações nas condições iniciais das variáveis exercem influência sobre a dinâmica do tratamento em lagoas de estabilização. Essa sensibilidade reforça a importância de uma definição criteriosa dos parâmetros de entrada, garantindo que as simulações reflitam adequadamente o comportamento do sistema e ofereçam suporte confiável a decisões operacionais. De modo geral, os resultados obtidos acompanharam tendências consolidadas na literatura, especialmente no que se refere à interação entre atividade microbiana, disponibilidade de oxigênio e degradação da matéria orgânica.

A comparação com o estudo original mostrou concordância qualitativa, embora diferenças no formato das curvas indiquem a necessidade de ajustes, seja na formulação numérica, seja nos parâmetros utilizados. Ainda assim, os resultados das simulações confirmam o potencial da modelagem matemática como ferramenta de apoio à engenharia de bioprocessos, permitindo explorar cenários, avaliar a influência de variáveis-chave e compreender mecanismos fundamentais do tratamento biológico sem a necessidade de experimentação extensa.

Essa abordagem destaca-se como contribuição relevante para o aprimoramento e a otimização de lagoas de estabilização, sobretudo em contextos que demandam soluções de baixo custo, simplicidade operacional e sustentabilidade ambiental.

7 REFERÊNCIAS

- ABOUHEND, A. S. et al. Growth Progression of Oxygenic Photogranules and Its Impact on Bioactivity for Aeration-Free Wastewater Treatment. *Environmental Science & Technology*, v. 54, n. 1, p. 486–496, 2 dez. 2019.
- ALAVI, J.; ANSARI, S. Kinetic models evaluation for chemical organic matter removal prediction in a full-scale primary facultative pond treating municipal wastewater. *Water Science and Technology*, v. 85, n. 6, p. 1720–1735, 28 fev. 2022.
- ALEXIOU, G. E.; MARA, D. D. Anaerobic waste stabilization ponds: a low-cost contribution to a sustainable wastewater reuse cycle. *Applied Biochemistry and Biotechnology*, v. 109, p. 241–252, 2003.
- BANERJEE, S. *Mathematical modeling: models, analysis and applications*. 2. ed. Boca Raton: CRC Press, 2022. 433 p.
- BUTLER, E. et al. Oxidation pond for municipal wastewater treatment. *Applied Water Science*, p. 31–51, 23 abr. 2015.
- CHOUDHARY, M.; RAY, S. Sustainable wastewater management: exploring nature-based treatment. *International Journal on Environmental Sciences*, 2024.
- DA SILVA, R. M. et al. Lagoas de estabilização: um estudo de revisão. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE GESTÃO AMBIENTAL E SUSTENTABILIDADE, 2015. *Anais...* [S.l.: s.n.], 2015.
- DAS, S. *Mathematical modelling of bioenergy systems for stability analysis and parametric sensitivity*. 2020. Tese (Doutorado em Engenharia de Ciência e Tecnologia) – Faculty of Engineering Science and Technology, 2020.
- DU, J. et al. Linking Water Quality Indicators in Stable Reservoir Ecosystems: Correlation Analysis and Ecohydrological Implications. *Water*, v. 16, n. 24, p. 3600–3600, 14 dez. 2024.
- ELLIS, K. V.; MARA, D. D. Stabilization ponds: design and operation. *CRC Critical Reviews in Environmental Control*, v. 13, n. 2, p. 69–102, 2009.
- FAUZI, S. H. M.; JAMIL, N. M. Oxi-P GUI: a graphical user interface (GUI) for wastewater treatment process in oxidation pond. *Data Analytics and Applied Mathematics*, v. 3, n. 1, 2022.
- FAUZI, S. H. M.; JAMIL, N. M. Wastewater treatment process: a modified mathematical model for oxidation ponds. *Journal of Advanced Research in Fluid Mechanics and Thermal Sciences*, n. 1, 2021.
- GUPTA, A. P. Mathematical modeling of systems biology. *bioRxiv*, 19 ago. 2022.

SÁTIRO J., et al. Impact of inoculum on domestic wastewater treatment in high-rate ponds in pilot-scale: Assessment of organic matter and nutrients removal, biomass growth, and content. *Algal Research*, p. 103923–103923, 1 jan. 2025.

LIAO, Y.; FATEHI, P.; LIAO, B. A study of theoretical analysis and modelling of microalgal membrane photobioreactors for microalgal biomass production and nutrient removal. *Membranes*, v. 14, n. 12, p. 245–245, 2024.

LINDAMULLA, L. M. L. K. B. *et al.* Integrated mathematical model to simulate the performance of a membrane bioreactor. *Chemosphere*, v. 284, p. 131319, dez. 2021.

LUTTA, V. O.; ADEYEMO, J. A.; ONG'OR, B. T. I. Performance of wastewater stabilization ponds: a case study of Nzoia Sugar Factory wastewater treatment plant, Kenya. *SSRG International Journal of Civil Engineering*, v. 9, n. 5, maio 2022.

MARA, D. Chapter 10 – Waste stabilization ponds: a highly appropriate wastewater treatment technology for Mediterranean countries. In: AL BAZ, I.; OTTERPOHL, R.; WENDLAND, C. (ed.). *Efficient management of wastewater: its treatment and reuse in water scarce countries*. [S.l.: s.n.], p. 113–123.

MARCOS VON SPERLING. Waste stabilisation ponds. London: Iwa Publishing, Gb, 2007.

SHAMMAS, N. K.; WANG, L. K.; WU, Z. Waste stabilization ponds and lagoons. In: WANG, L. K. (ed.). *Handbook of environmental engineering. Volume 8: biological treatment processes*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 316–370.

SHEN, Z.-H. *et al.* Mathematical modeling and optimal control of the COVID-19 dynamics. *Results in Physics*, v. 31, p. 105028, 2021.

SURVYLA, A. et al. An oxygen-uptake-rate-based estimator of the specific growth rate in *Escherichia coli* BL21 strains cultivation processes. *Computational and Structural Biotechnology Journal*, v. 19, p. 5856–5863, 1 jan. 2021.

YANG, X. Chapter 28: mathematical modeling. In: *Engineering mathematics with examples and applications*. [S.l.: s.n.], p. 325–340.