

Eletrodinâmicas não-lineares: explorando nova Física a partir das equações de Maxwell

Nonlinear Electrodynamics: exploiting new physics from Maxwell equations

J.M.A. Paixão^{*1}, L.P.R. Ospedal², M.J. Neves³, J.A. Helayël-Neto²

¹Universidade Federal do Ceará, Departamento de Física, Fortaleza, CE, Brasil.

²Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

³Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Departamento de Física, Seropédica, RJ, Brasil.

Recebido em 20 de outubro de 2025. Revisado em 12 de dezembro de 2025. Aceito em 15 de janeiro de 2026.

Neste trabalho, exploramos os principais aspectos do desenvolvimento das eletrodinâmicas não-lineares quando estas teorias são submetidas a campos elétrico ou magnéticos externos. Introduzimos um formalismo de linearização das eletrodinâmicas não-lineares por meio de campos eletromagnéticos externos. Assim, somos capazes de investigar a propagação de ondas eletromagnéticas submetidas a campo magnético externo, e também a um campo elétrico externo. Obtemos as soluções para as relações de dispersão e os índices de refração para um meio livre e sem fontes, mas na presença de um campo magnético externo uniforme e constante. Fazemos o mesmo para o caso de um campo elétrico externo uniforme e constante. De posse destes resultados, discutimos algumas aplicações importantes nas eletrodinâmicas não-lineares mais conhecidas na literatura. Efeitos ópticos, em particular a birrefringência do vácuo, são investigados nas eletrodinâmicas não-lineares.

Palavras-chave: Eletrodinâmicas não-lineares, relações de dispersão, birrefringência.

In our contribution, we exploit the most salient features of the development of nonlinear electrodynamics whenever these theories are subject to external electric or magnetic fields. A linearization of nonlinear electrodynamics around external electromagnetic fields is carried out. By following this path, we are able to investigate the propagation of electromagnetic waves in the presence of an external magnetic field and an external electric field as well. We work out solutions to the set of dispersion relations and corresponding refractive indices in the case of a medium free from sources, but in the presence of an external constant and nonhomogeneous magnetic field. The same inspection is repeated for an external constant and nonhomogeneous electric field. With these results, we discuss a number of important applications by picking out the most well-known models considered in the literature of the area. Optical effects, in particular vacuum birefringence, are investigated in a scenario of nonlinear electrodynamics.

Keywords: Nonlinear electrodynamics, dispersion relations, birefringence.

1. Introdução

A eletrodinâmica clássica, desenvolvida por Maxwell em quatro equações fundamentais, é extremamente bem sucedida em descrever os fenômenos macroscópicos para campos elétricos e magnéticos [1]. A comprovação experimental veio por meio da existência de ondas eletromagnéticas, produzidas e detectadas por Heinrich Hertz em 1888, confirmando uma das principais previsões da teoria de Maxwell [2, 3]. Uma das características das equações de Maxwell é que são equações diferenciais parciais no espaço e no tempo e lineares nos campos elétricos e magnéticos. Uma consequência direta deste fato é o princípio da superposição. Tal princípio estabelece que uma solução geral para o campo elétrico $\mathbf{E}$, ou para o campo magnético $\mathbf{B}$, pode ser obtida pela soma das

soluções individuais geradas por cada fonte de carga, ou corrente.

Durante o final da década de 20, diversos estudos foram feitos acerca do princípio da superposição [4–7]. Havia dúvidas sobre até que ponto os princípios da óptica clássica, especialmente o da superposição de ondas luminosas, permaneciam válidos em situações de altas intensidade ou em presença de campos externos (elétricos ou magnéticos). Entre as hipóteses levantadas, considerava-se a possibilidade de a luz possuir um momento magnético intrínseco. Nesse caso, ela poderia interagir com campos externos, de forma análoga ao experimento de Stern-Gerlach, previsto pela óptica clássica. Se houvesse um momento de dipolo magnético, o campo externo poderia desviar ou modificar a propagação da luz, ou ainda, dois feixes poderiam interagir entre si. Isso significa que o comportamento do feixe não seria mais puramente linear: a solução já não seria apenas a soma das soluções individuais associadas a cada onda. Portanto, testar o limite do princípio de superposição

*Endereço de correspondência: jeff@fisica.ufc.br

Editor-Chefe: Marcello Ferreira

estava, na prática, testando se a luz tinha propriedades internas (como dipolo magnético) que violariam a óptica linear.

No início do século XX, em paralelo aos avanços da eletrodinâmica de Maxwell, tornou-se evidente que a física clássica falhava ao descrever fenômenos em energias elevadas, e em escalas de comprimento extremamente pequenas. Tais limitações exigiram uma reformulação das teorias físicas até então conhecidas, o que levou ao desenvolvimento de dois novos ramos fundamentais da física moderna: a teoria quântica e a teoria da relatividade [8–10].

Para o eletromagnetismo, o cenário de revolução também foi evidente com o advento da mecânica quântica. Paul Dirac, em dois trabalhos seminais [11, 12], desenvolveu a formulação quântica do campo eletromagnético, contribuindo para a construção da Eletrodinâmica Quântica (EDQ). Nessa abordagem, a interação entre luz e matéria é descrita em termos dos quanta do campo eletromagnético, denominados *fótons*¹. No entanto, vale a pena destacar que a EDQ só foi completamente estabelecida na década de 50, após as contribuições de Dyson, Feynman, Schwinger e Tomonaga [14].

Unificando de forma elegante a mecânica quântica e a relatividade restrita através do conceito de campo quântico, a EDQ tornou-se a base para o entendimento moderno das forças eletromagnéticas em nível microscópico, sendo a teoria física mais bem-sucedida e precisa já desenvolvida. Um exemplo simbólico de suas previsões é a correção ao fator giromagnético do elétron devido ao momento de dipolo anômalo com previsões que concordam com os experimentos em até 12 casas decimais [15, 16].

Além disso, a EDQ previu com sucesso a existência do pósitron, a antipartícula do elétron, cuja descoberta experimental por Carl Anderson em 1932 consolidou o conceito de antimatéria, mostrando que na natureza há uma simetria fundamental entre partícula e antipartícula [17]. Outra ideia importante é o conceito de vácuo quântico. Na EDQ, o vácuo não é um estado de ausência total de partículas e interações, mas sim um meio no qual pares de partícula-antipartícula podem surgir espontaneamente devido as chamadas flutuações quânticas num intervalo de tempo muito curto. Tais flutuações permitem a criação temporária de pares elétrons-pósitrons, que se aniquilam rapidamente, mas deixam efeitos mensuráveis, como o deslocamento de Lamb [18, 19], e a polarização do vácuo [20].

A ideia proposta por Dirac de que o vácuo seria uma estrutura constituída por elétrons e pósitrons (matéria e antimatéria), levou a Otto Halpern em 1933 [21], a apontar (embora sem expor uma descrição matemática) que essas flutuações de pares elétron-pósitron poderiam levar a uma interação fóton-fóton, ou seja, uma autointeração

da luz, que é proibida pelo eletromagnetismo clássico. Nos anos seguintes, Werner Heisenberg, juntamente com seus alunos Hans Euler e Bernhard Kockel, calcularam as primeiras correções não-lineares às equações de Maxwell no vácuo, derivadas do espalhamento fóton-fóton [22, 23]. Diversos esforços experimentais foram feitos na tentativa de verificar o espalhamento fóton-fóton [24–26]. Nas últimas décadas, o espalhamento fóton-fóton, também vem desempenhando um papel importante no *Large Hadron Collider* (LHC) [27–29] e com perspectivas de investigações em futuros colisores [30].

Em 1936, Heisenberg e Euler aprofundaram essa análise para o regime de campos elétricos e magnéticos fracos, onde os efeitos não-lineares da EDQ devido a polarização do vácuo manifestam-se como uma modificação efetiva das equações de Maxwell. Esta teoria não-linear passou a ser conhecida como eletrodinâmica de Euler-Heisenberg [31, 32]. Uma das suas principais características é a previsão do fenômeno da birrefringência do vácuo [33, 34], em que o índice de refração depende da direção de propagação da luz em relação a um campo magnético externo. Embora haja indícios em contextos astrofísicos [35] e esforços experimentais, a birrefringência do vácuo ainda não foi detectada experimentalmente. A principal dificuldade para sua observação está na necessidade de campos magnéticos extremamente intensos, da ordem de 10^9 T, para que o efeito se torne mensurável. Esses campos são tipicamente encontrados em estrelas de nêutrons altamente magnetizadas, conhecidas como magnetares [36]. Em experimentos terrestres, os campos disponíveis são várias ordens de magnitude menores, o que torna a detecção da birrefringência do vácuo um grande desafio [37].

Em outro contexto, Max Born e Leopold Infeld (1933) propuseram uma teoria eletromagnética não-linear, que evita a singularidade do campo elétrico de uma partícula carregada pontual em repouso na origem [38]. Como consequência desta teoria, o elétron tem uma autoenergia clássica finita. Alguns autores discutiram o espalhamento fóton-fóton no contexto da teoria de BI [39–41]. Ressalta-se que a teoria de Born-Infeld (BI) foi rederivada como um efeito de baixas energias da Teoria de Cordas [42].

Durante a década de 1950, uma nova abordagem foi desenvolvida para compreender melhor a interação fóton-fóton. Desenvolvidas independentemente por Ronald Shaw [43] e por Chen Ning Yang e Robert Mills [44], as teorias de Yang-Mills² são uma generalização da estrutura matemática da QED e fornecem um arcabouço que permite a auto-interação de bósons de gauge. Essas teorias estabeleceram o conceito de *grupos de calibre não-abelianos*, nos quais os campos de calibre podem interagir diretamente entre si, ao contrário do fóton na QED, que só interage indiretamente via *loops* quânticos.

¹ O termo *fóton*, contudo, já havia sido introduzido por G. N. Lewis em 1926, e empregado posteriormente por A.H. Compton [13].

² Embora seja mais conhecida como Yang-Mills, R. Shaw também participou da criação, alguns autores referem-se a elas como teorias de Yang-Mills-Shaw.

Essa estrutura tornou-se fundamental para o desenvolvimento do modelo padrão das partículas elementares, permitindo a descrição das interações fortes e fracas mediadas por glúons e bósons $W^\pm$ e Z^0 . Assim, as teorias de Yang-Mills fornecem o mecanismo para entender, em princípio, a auto-interação de bósons de gauge. Nesse contexto, alguns estudos foram realizados para investigar a auto-interação de fótons [45–48].

Atualmente na literatura, existe uma ampla variedade de modelos não-lineares que buscam solucionar questões relacionadas com novas físicas, seja em física dos materiais, plasma, cosmologia, buracos negros, energia escura, entre outros [49–68]. Neste momento, vale a pena ressaltar que algumas eletrodinâmicas não-lineares podem surgir como teorias efetivas de uma descrição mais fundamental. Neste sentido, apontamos algumas extensões no setor de hipercarga $U_Y(1)$ do Modelo Padrão, com motivações na produção de monopolos magnéticos na escala eletrofraca, como uma proposta para explicação da assimetria entre matéria e anti-matéria, e no estudo de acoplamentos anômalos neutros entre o fóton e bóson Z^0 [69–71], bem como em teorias efetivas vindas de correções quânticas do Modelo Padrão [72]. No contexto de Teoria de Cordas e redução dimensional de Teorias de Kaluza-Klein também podemos ter contribuições não-lineares no setor fotônico [73, 74]. Além disso, o acoplamento de eletrodinâmicas não-lineares com candidatos à matéria escura ou campos de fundo (eletromagnéticos ou de outras origens) têm sido objeto recente de investigação, trazendo novos efeitos, como a dispersão nos modos de propagação ou uma massa efetiva para o fóton [75–77]. Portanto, eletrodinâmicas não-lineares são vistas hoje como um vasto campo de pesquisa interdisciplinar, que aparecem em diversas áreas da Física. Para revisões detalhadas sobre EDNLs, indicamos as referências [49, 53, 56, 57].

Neste artigo, as eletrodinâmicas não-lineares são estudadas na presença de um campo eletromagnético externo. O campo eletromagnético de uma teoria não linear geral é expandido em torno de um campo eletromagnético externo até a segunda ordem nos campos propagantes no espaço. Assim, pode-se extrair efeitos de propagação de ondas eletromagnéticas num meio material representado por um campo magnético de fundo, ou por um campo elétrico de fundo. Apresentamos as equações de campo linearizadas em termos de um campo eletromagnético externo geral e extraímos as suas leis de conservação. Fazemos uma interessante conexão destas equações linearizadas com as equações de Maxwell em meios materiais com polarização dielétrica e magnetizados. Posteriormente, estudamos os casos onde os campos externos são uniformes e constantes. Obtemos as relações de dispersão, os índices de refração, e as velocidades de grupo para ondas eletromagnéticas planas se propagando somente num campo magnético externo uniforme, e após isto, as mesmas ondas se propagando somente num campo elétrico externo uniforme. Analisamos o fenômeno óptico da birrefringência para

algumas eletrodinâmicas não-lineares na presença do campo magnético externo uniforme.

O artigo é organizado como segue: na seção (2) mostramos brevemente uma revisão sobre a eletrodinâmica de Maxwell e suas principais características como os invariantes relativísticos, a ação de Maxwell, e a invariância de calibre. A seção (3) é dedicada a generalização da seção anterior para eletrodinâmicas não-lineares com a prescrição da expansão destas teorias em torno de um campo eletromagnético externo. Na seção (4), estudamos as leis de conservação nas teorias linearizadas. Na seção (5), fazemos a conexão das teorias linearizadas com a eletrodinâmica de Maxwell em meios materiais. Na seção (6) mostramos as relações de dispersão, índices de refração, e as velocidades de grupo quando os campos externos são uniformes. A seção (7) é dedicada a birrefringência do vácuo, na presença de campo magnético externo, aplicada para algumas eletrodinâmicas não-lineares da literatura. Por fim, na seção (8), apresentamos nossas conclusões e perspectivas. No apêndice A, apresentamos um breve resumo da notação indicial, algumas notações e convenções, bem como propriedades tensoriais e identidades vetoriais. Em seguida, no apêndice B, apresentamos as passagens intermediárias para a obtenção do tensor de tensões e a correspondente lei de conservação.

2. Invariantes de Campo e Princípio Variacional no Eletromagnetismo

Para construirmos um lagrangeano coerente com a teoria eletromagnética, é preciso respeitar condições e princípios fundamentais. Primeiramente, o lagrangeano deve produzir exatamente as equações de movimento corretas por meio do princípio da mínima ação. Outro ponto importante é que ele deve ser um invariante sobre transformações de calibre, e transformações de Lorentz. Esta última deve ser satisfeita, pois a teoria eletromagnética é essencialmente uma teoria relativística. Em outras palavras, se mudarmos de referencial, as leis físicas derivadas do lagrangeano devem permanecer as mesmas. Na teoria eletromagnética, há duas grandezas que satisfazem essas condições, que são dadas por

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{E}^2}{c^2} - \mathbf{B}^2 \right), \quad (1a)$$

$$\mathcal{G} = \frac{1}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \quad (1b)$$

em que $c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2} \simeq 2,99 \times 10^8$ m/s é a velocidade da luz no vácuo, com $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F/m (Faraday por metro) e $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m (Henry por metro) sendo a permissividade elétrica e permeabilidade magnética no vácuo, respectivamente.

O primeiro invariante (1a) é um escalar puro, enquanto que o segundo invariante (1b) é uma grandeza pseudo-escalar. Isso acontece pelo fato do campo elétrico trocar de sinal e o campo magnético manter-se invariante

sob a simetria de inversão espacial, *i.e.*, $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$, conhecida como *transformação de paridade*.

A ação invariante para a eletrodinâmica de Maxwell é escrita na forma

$$S = \int_{\mathcal{R}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu_0} \mathcal{F} - \rho \Phi + \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \right) dt d^3\mathbf{r}, \quad (2)$$

onde $\mathcal{R}$ é uma região de integração espacial, ρ é a densidade volumétrica de carga, e $\mathbf{J}$ é o vetor densidade de corrente. Escrevendo os campos em termos dos potenciais Φ e $\mathbf{A}$ pelas relações

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \partial_t\mathbf{A}, \quad (3a)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (3b)$$

as equações de Euler-Lagrange são obtidas por meio das variações em relação a Φ e $\mathbf{A}$ na ação (2), obtém-se as equações de Maxwell com fontes, isto é, a lei de Gauss e a lei de Ampère-Maxwell, respectivamente. O outro par homogêneo das equações de Maxwell, a lei de Gauss para o magnetismo, e a lei de Faraday, não advém de um princípio variacional. Podemos obtê-lo, tomando o rotacional em (3a), e o divergente em (3b). Assim, obtém-se as quatro equações de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E}, \quad (4a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}. \quad (4b)$$

Note que estas são equações diferenciais parciais no tempo e no espaço lineares nos campos elétrico ($\mathbf{E}$) e magnético ($\mathbf{B}$). Estamos usando a notação de $\partial_t \equiv \partial/\partial t$, por simplicidade, para as derivadas parciais em relação ao tempo. Outra importante característica da eletrodinâmica é a invariância de calibre. Considerando as transformações para os potenciais

$$\Phi \mapsto \Phi' = \Phi + \partial_t \Lambda, \quad (5a)$$

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla \Lambda, \quad (5b)$$

para uma função real qualquer Λ das coordenadas do espaço e do tempo, os campos elétrico (3a) e magnético (3b) são invariantes sob as transformações (5a) e (5b), respectivamente. Estas são conhecidas como *transformações de calibre*. Como consequência da invariância de calibre nos campos, as equações de Maxwell (4a) e (4b) também preservam esta simetria. Assim, além da invariância de Lorentz imposta pela relatividade restrita, a ação (2) também é invariante de calibre se as fontes ρ e $\mathbf{J}$ satisfizerem a conservação da carga elétrica:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (6)$$

como um dos princípios fundamentais do eletromagnetismo.

Portanto, qualquer extensão não-linear da eletrodinâmica de Maxwell deve satisfazer os dois princípios básicos do eletromagnetismo: a invariância de Lorentz e a invariância de calibre. O que ficará claro na próxima seção, onde generalizaremos a ação (2) para eletrodinâmicas não-lineares.

3. Generalização para Eletrodinâmicas Não-Lineares

Tendo em vista as diversas possibilidades de contribuições não-lineares para o eletromagnetismo, podemos desenvolver um formalismo que generalize quaisquer efeitos advindos de não-linearidades. Prosseguimos escrevendo a densidade³ lagrangeano em termos dos invariantes $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\mu_0} \mathcal{L}_{NL}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) - \rho \Phi + \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}, \quad (7)$$

onde $\mathcal{L}_{NL}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ representa qualquer eletrodinâmica não-linear na literatura, e os termos de fonte são mantidos como em (2). Seguiremos uma abordagem similar da referência [78]. Para extrair efeitos lineares do lagrangeano (7), vamos expandir os potenciais ($\Phi, \mathbf{A}$) em torno dos potenciais de fundo ($\Phi_B, \mathbf{A}_B$) como

$$\Phi = \phi + \Phi_B, \quad (8a)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} + \mathbf{A}_B, \quad (8b)$$

onde $(\phi, \mathbf{a})$ são os novos potenciais da teoria que dependem das coordenadas do espaço-tempo. A expansão dos campos em torno de campos de fundo pode ser obtida usando (8a) e (8b) nas relações (3a)–(3b), logo

$$\mathbf{E} = \mathbf{e} + \mathbf{E}_B, \quad (9a)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{b} + \mathbf{B}_B, \quad (9b)$$

onde $\mathbf{E}_B$ e $\mathbf{B}_B$ são campos gerais (O índice 'B' vem do inglês '*background*' e é frequentemente utilizado na literatura). Os campos com a notação de $\mathbf{e}$ e $\mathbf{b}$ dependem das coordenadas do espaço-tempo, e carregam consigo a dinâmica da teoria. A partir das definições de (9), podemos substituí-las no invariantes das eqs. (1a) e (1b), e obter as seguintes relações

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_B + \delta\mathcal{F}, \quad (10a)$$

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_B + \delta\mathcal{G}, \quad (10b)$$

nas quais as variações de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são, respectivamente, dadas por

$$\delta\mathcal{F} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{e}^2}{c^2} - \mathbf{b}^2 \right) + \frac{1}{c^2} \mathbf{E}_B \cdot \mathbf{e} - \mathbf{B}_B \cdot \mathbf{b}, \quad (11a)$$

$$\delta\mathcal{G} = \frac{1}{c} \mathbf{e} \cdot \mathbf{b} + \frac{1}{c} (\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{b} - \mathbf{B}_B \cdot \mathbf{e}). \quad (11b)$$

Os termos $\mathcal{F}_B$ e $\mathcal{G}_B$ seguem a mesma forma das eqs. (1a) e (1b) em termos dos campos de fundo $\mathbf{E}_B$ e $\mathbf{B}_B$. O lagrangeano é então expandido $\mathcal{L}(\mathcal{F}_B + \delta\mathcal{F}, \mathcal{G}_B + \delta\mathcal{G})$ até segunda ordem nos campos $\mathbf{e}$ e $\mathbf{b}$, em torno dos

³ o lagrangeano pode ser escrito como a integral da densidade de lagrangeano: $L = \int \mathcal{L} dt d^3\mathbf{r}$.

campos de fundo. Assim, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{NL} = & \mathcal{L}_{NL}(\mathcal{F}_B, \mathcal{G}_B) + \left. \frac{\partial \mathcal{L}_{NL}}{\partial \mathcal{F}} \right|_B \delta \mathcal{F} + \left. \frac{\partial \mathcal{L}_{NL}}{\partial \mathcal{G}} \right|_B \delta \mathcal{G} \\ & + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{NL}}{\partial \mathcal{F}^2} \right|_B (\delta \mathcal{F})^2 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{NL}}{\partial \mathcal{G}^2} \right|_B (\delta \mathcal{G})^2 \\ & + \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{NL}}{\partial \mathcal{F} \partial \mathcal{G}} \right|_B (\delta \mathcal{F})(\delta \mathcal{G}) + \mathcal{O}^3(\delta \mathcal{F}, \delta \mathcal{G}), \end{aligned} \quad (12)$$

onde $\mathcal{O}^3(\delta \mathcal{F}, \delta \mathcal{G})$ denota os termos da ordem cúbica ou superiores em $\delta \mathcal{F}$ e $\delta \mathcal{G}$.

Para simplificarmos a expansão (12), definimos os coeficientes

$$\begin{aligned} c_1 = \left. \frac{\partial \mathcal{L}_{NL}}{\partial \mathcal{F}} \right|_B, \quad c_2 = \left. \frac{\partial \mathcal{L}_{NL}}{\partial \mathcal{G}} \right|_B, \quad d_1 = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{NL}}{\partial \mathcal{F}^2} \right|_B, \\ d_2 = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{NL}}{\partial \mathcal{G}^2} \right|_B, \quad d_3 = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{NL}}{\partial \mathcal{F} \partial \mathcal{G}} \right|_B, \end{aligned} \quad (13)$$

É importante ressaltar que o cálculo dos coeficientes é feito com a função $\mathcal{L}_{NL}$. Assim, o leitor deve ficar atento com o aparecimento do fator μ_0^{-1} ao discutirmos e compararmos os lagrangeanos de algumas eletrodinâmicas não-lineares.

Substituindo os coeficientes (13), e as variações de (11a) e (11b) na eq. (7), obtemos o lagrangeano quadrático nos campos $\mathbf{e}$ e $\mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} \mu_0 \mathcal{L}^{(2)} = & \mathcal{L}_{NL}^{(B)} + c_1 \mathcal{F}(\mathbf{e}, \mathbf{b}) + c_2 \mathcal{G}(\mathbf{e}, \mathbf{b}) + \frac{c_1}{c^2} (\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{e}) \\ & - c_1 (\mathbf{B}_B \cdot \mathbf{b}) + \frac{c_2}{c} (\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{b}) - \frac{c_2}{c} (\mathbf{B}_B \cdot \mathbf{e}) \\ & + \frac{1}{2} \frac{d_1}{c^4} (\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{e})^2 + \frac{1}{2} d_1 (\mathbf{B}_B \cdot \mathbf{b})^2 \\ & - \frac{d_1}{c^2} (\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{e})(\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{b}) + \frac{1}{2} \frac{d_2}{c^2} (\mathbf{B}_B \cdot \mathbf{e})^2 \\ & + \frac{1}{2} \frac{d_2}{c^2} (\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{b})^2 - \frac{d_2}{c^2} (\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{b})(\mathbf{B}_B \cdot \mathbf{e}) \\ & + \frac{d_3}{c^3} (\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{e})(\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{b}) - \frac{d_3}{c^3} (\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{e})(\mathbf{B}_B \cdot \mathbf{e}) \\ & - \frac{d_3}{c} (\mathbf{B}_B \cdot \mathbf{b})(\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{b}) + \frac{d_3}{c} (\mathbf{B}_B \cdot \mathbf{b})(\mathbf{B}_B \cdot \mathbf{e}) \\ & - \mu_0 \rho (\Phi_B + \phi) + \mu_0 \mathbf{J} \cdot (\mathbf{A}_B + \mathbf{a}), \end{aligned} \quad (14)$$

onde $\mathcal{L}_{NL}^{(B)}$ é o lagrangeano escrito somente em termos dos campos de fundo de modo que este não influencia nas equações de campo das flutuações. As expressões de $\mathcal{F}(\mathbf{e}, \mathbf{b})$ e $\mathcal{G}(\mathbf{e}, \mathbf{b})$ são os invariantes de Lorentz como funções dos campos propagantes que já aparecem em (11a) e (11b). A expansão do lagrangeano (14) é válida para todas as eletrodinâmicas não-lineares conhecidas na literatura, onde as características de cada teoria estão contidas nos coeficientes (13). Note que estes coeficientes dependem apenas dos campos elétrico e magnético de fundo, e eventualmente podem depender de campos críticos, ou constantes associadas às eletrodinâmicas não-lineares. Devido a expansão em torno dos campos de fundo até segunda ordem nos campos propagantes, as

equações de movimento produzidas por (14) serão lineares nos campos $\mathbf{e}$ e $\mathbf{b}$, enquanto que a não-linearidade é transferida exclusivamente para os coeficientes (13). Essa formulação permite investigarmos diversos fenômenos de propagação, como as relações de dispersão, as velocidades de grupo, a birrefringência do vácuo, entre outros. Pode-se verificar que, quando $c_1 = 1$ e $d_1 = d_2 = d_3 = 0$, recuperamos eletrodinâmica de Maxwell em termos dos campos propagantes $\mathbf{e}$ e $\mathbf{b}$.

Fazendo a variação da eq. (14) com relação ao potencial escalar ϕ , obtemos a lei de Gauss generalizada dada por

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[c_1 \mathbf{e} + c_2 c \mathbf{b} + \frac{d_1}{c^2} \mathbf{E}_B (\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{e}) \right. \\ \left. - d_1 \mathbf{E}_B (\mathbf{B}_B \cdot \mathbf{b}) + d_2 \mathbf{B}_B (\mathbf{B}_B \cdot \mathbf{e}) \right. \\ \left. - d_2 \mathbf{B}_B (\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{b}) + \frac{d_3}{c} \mathbf{E}_B (\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{b}) - \frac{d_3}{c} \mathbf{E}_B (\mathbf{B}_B \cdot \mathbf{e}) \right. \\ \left. - \frac{d_3}{c} \mathbf{B}_B (\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{e}) + d_3 c \mathbf{B}_B (\mathbf{B}_B \cdot \mathbf{b}) \right] \\ = -\nabla \cdot [c_1 \mathbf{E}_B - c_2 c \mathbf{B}_B] + \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \end{aligned} \quad (15)$$

Observe que, o primeiro termo do lado direito da igualdade pode ser interpretado com uma densidade de carga induzida pelos campos de fundo quando os mesmos não são constantes e uniformes.

Por outro lado, se fizermos a variação com relação ao potencial vetor $\mathbf{a}$, o resultado será a lei de Ampère-Maxwell generalizada:

$$\begin{aligned} \nabla \times \left[c_1 \mathbf{b} - c_2 \frac{\mathbf{e}}{c} - d_1 \mathbf{B}_B (\mathbf{B}_B \cdot \mathbf{b}) + \frac{d_1}{c^2} \mathbf{B}_B (\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{e}) \right. \\ \left. - \frac{d_2}{c^2} \mathbf{E}_B (\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{b}) - \frac{d_2}{c^2} \mathbf{E}_B (\mathbf{B}_B \cdot \mathbf{e}) \right. \\ \left. + \frac{d_3}{c} \mathbf{B}_B (\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{b}) + \frac{d_3}{c} \mathbf{E}_B (\mathbf{B}_B \cdot \mathbf{b}) \right. \\ \left. - \frac{d_3}{c^3} \mathbf{E}_B (\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{e}) + \frac{d_3}{c} \mathbf{B}_B (\mathbf{B}_B \cdot \mathbf{e}) \right] \\ = \frac{1}{c^2} \partial_t \left[c_1 \mathbf{e} + c_2 c \mathbf{b} + \frac{d_1}{c^2} \mathbf{E}_B (\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{e}) - d_1 \mathbf{E}_B (\mathbf{B}_B \cdot \mathbf{b}) \right. \\ \left. + d_2 \mathbf{B}_B (\mathbf{B}_B \cdot \mathbf{e}) - d_2 \mathbf{B}_B (\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{b}) \right. \\ \left. + \frac{d_3}{c} \mathbf{E}_B (\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{b}) - \frac{d_3}{c} \mathbf{E}_B (\mathbf{B}_B \cdot \mathbf{e}) \right. \\ \left. - \frac{d_3}{c} \mathbf{B}_B (\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{e}) + d_3 c \mathbf{B}_B (\mathbf{B}_B \cdot \mathbf{b}) \right] \\ + \partial_t \left(\frac{c_1}{c^2} \mathbf{E}_B + \frac{c_2}{c} \mathbf{B}_B \right) \\ + \nabla \times \left(\frac{c_2}{c} \mathbf{E}_B - c_1 \mathbf{B}_B \right) + \mu_0 \mathbf{J}. \end{aligned} \quad (16)$$

Analogamente a lei de Gauss (15), os campos de fundo não constantes contribuem com uma densidade de corrente induzida, como está escrito na última linha da lei de Ampère modificada.

As equações (15) e (16) ainda podem ser escritas de maneira simplificada se definimos os vetores de deslocamento elétrico $\mathbf{d}$, e de intensidade de campo magnético

$\mathbf{h}$, como

$$\begin{aligned}\varepsilon_0^{-1} \mathbf{d} = & c_1 \mathbf{e} + c_2 c \mathbf{b} + \frac{d_1}{c^2} \mathbf{E}_B (\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{e}) - d_1 \mathbf{E}_B (\mathbf{B}_B \cdot \mathbf{b}) \\ & + d_2 \mathbf{B}_B (\mathbf{B}_B \cdot \mathbf{e}) - d_2 \mathbf{B}_B (\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{b}) \\ & + \frac{d_3}{c} \mathbf{E}_B (\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{b}) + \frac{d_3}{c} \mathbf{E}_B (\mathbf{B}_B \cdot \mathbf{e}) \\ & + \frac{d_3}{c} \mathbf{B}_B (\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{e}) + d_3 c \mathbf{B}_B (\mathbf{B}_B \cdot \mathbf{b}),\end{aligned}\quad (17a)$$

$$\begin{aligned}\mu_0 \mathbf{h} = & c_1 \mathbf{b} - c_2 \frac{\mathbf{e}}{c} - d_1 \mathbf{B}_B (\mathbf{B}_B \cdot \mathbf{b}) + \frac{d_1}{c^2} \mathbf{B}_B (\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{e}) \\ & - \frac{d_2}{c^2} \mathbf{E}_B (\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{b}) - \frac{d_2}{c^2} \mathbf{E}_B (\mathbf{B}_B \cdot \mathbf{e}) \\ & + \frac{d_3}{c} \mathbf{B}_B (\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{b}) + \frac{d_3}{c} \mathbf{E}_B (\mathbf{B}_B \cdot \mathbf{b}) \\ & - \frac{d_3}{c^3} \mathbf{E}_B (\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{e}) + \frac{d_3}{c} \mathbf{B}_B (\mathbf{B}_B \cdot \mathbf{e}),\end{aligned}\quad (17b)$$

respectivamente. Assim, as equações de Maxwell modificadas podem ser escritas em uma forma mais semelhante ao caso usual

$$\nabla \cdot \mathbf{d} = -\nabla \cdot [\varepsilon_0 c_1 \mathbf{E}_B - \varepsilon_0 c_2 c \mathbf{B}_B] + \rho, \quad (18a)$$

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\partial_t \mathbf{b}, \quad (18b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (18c)$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{h} = & \partial_t \mathbf{d} + \partial_t (\varepsilon_0 c_1 \mathbf{E}_B + c \varepsilon_0 c_2 \mathbf{B}_B) \\ & + \nabla \times \left(\frac{c_2}{c \mu_0} \mathbf{E}_B - \frac{c_1}{\mu_0} \mathbf{B}_B \right) + \mathbf{J}.\end{aligned}\quad (18d)$$

Neste momento, por conveniência, vamos simplificar a notação dos campos de fundo elétrico e magnético redefinindo-os como $\mathbf{E}_B \equiv \mathbf{E}$ e $\mathbf{B}_B \equiv \mathbf{B}$, respectivamente.

Na notação de indicial (veja o apêndice A), podemos expressar os vetores $\mathbf{d}$ e $\mathbf{h}$ das eqs. (17a) e (17b) em termos dos campos $\mathbf{e}$ e $\mathbf{b}$ da seguinte forma

$$d_i = \varepsilon_{ij} e_j + \alpha_{ij} b_j, \quad (19a)$$

$$h_i = \mu_{ij}^{-1} b_j + \beta_{ij} e_j, \quad (19b)$$

onde definimos os tensores (matrizes 3×3) abaixo

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} = & \varepsilon_0 \left(c_1 \delta_{ij} + \frac{d_1}{c^2} E_i E_j + d_2 B_i B_j \right. \\ & \left. + \frac{d_3}{c} E_i B_j + \frac{d_3}{c} B_i E_j \right),\end{aligned}\quad (20a)$$

$$\begin{aligned}\alpha_{ij} = & \varepsilon_0 (c c_2 \delta_{ij} - d_1 E_i B_j + d_2 B_i E_j \\ & + \frac{d_3}{c} E_i E_j - c d_3 B_i B_j),\end{aligned}\quad (20b)$$

$$\begin{aligned}\mu_{ij}^{-1} = & \mu_0^{-1} \left(c_1 \delta_{ij} - d_1 B_i B_j - \frac{d_2}{c^2} E_i E_j \right. \\ & \left. + \frac{d_3}{c} B_i E_j + \frac{d_3}{c} E_i B_j \right),\end{aligned}\quad (20c)$$

$$\begin{aligned}\beta_{ij} = & \mu_0^{-1} \left(-\frac{c_2}{c} \delta_{ij} + \frac{d_1}{c^2} B_i E_j - \frac{d_2}{c^2} E_i B_j \right. \\ & \left. - \frac{d_3}{c^3} E_i E_j + \frac{d_3}{c} B_i B_j \right).\end{aligned}\quad (20d)$$

O tensor ε_{ij} é chamado de tensor de permissividade elétrica, e $(\mu_{ij})^{-1}$ é o inverso do tensor de permeabilidade magnética. No limite onde a não-linearidade é nula, temos o resultado particular de $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \delta_{ij}$ e $\mu_{ij} = \mu_0 \delta_{ij}$ na qual os tensores são reduzidos as permissividade elétrica (ε_0) e permeabilidade magnética (μ_0) do vácuo. Neste mesmo limite, tem-se $\alpha_{ij} = \beta_{ij} = 0$. Portanto, os tensores ε_{ij} e μ_{ij} são generalizações da permissividade elétrica, e da permeabilidade magnética, respectivamente, e dependem apenas dos campos elétrico e magnético de fundo. Os tensores α_{ij} e β_{ij} surgem como consequência da estrutura não-linear do meio. Note que os tensores de permissividade elétrica e permeabilidade magnética são simétricos na troca os índices, isto é $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ e $\mu_{ij} = \mu_{ji}$, enquanto que os tensores α_{ij} e β_{ij} satisfazem a relação $\beta_{ij} = -\alpha_{ji}$.

Esta dependência entre os campos induzidos e os campos aplicados é descrita pelas chamadas *relações constitutivas*, que caracterizam a resposta do meio material aos campos eletromagnéticos propagantes $\mathbf{e}$ e $\mathbf{b}$. Neste contexto, o meio é tratado como um fundo eletromagnético não linear, descrito pelos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, que interage com as perturbações incidentes.

Na maioria dos modelos de eletrodinâmicas não-lineares, temos que a simetria de paridade é preservada. Esta premissa impõe que o lagrangeano da teoria não-linear tenha dependências no invariante $\mathcal{G} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}/c$ elevado a um número par. A simetria de paridade no espaço-tempo quadridimensional é definida como a simetria de reflexão nas coordenadas espaciais $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$, que implica nas transformações no campo eletromagnético $\mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{E}$ e $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$, e consequentemente, o invariante troca de sinal sob transformação de paridade, $\mathcal{G} \rightarrow -\mathcal{G}$. Portanto, nos mais diversos exemplos, as eletrodinâmicas não-lineares devem ser construídas por meio de densidades de lagrangeanos que dependam de $\mathcal{G}^n$, com n sendo um número par. Na formulação apresentada aqui, esta dependência implica que no caso de um campo magnético de fundo uniforme e constante, ou no caso similar com apenas campo elétrico de fundo, o coeficiente c_2 não contribuirá nas equações de movimento, simplificando alguns termos nos tensores de permissividade elétrica e permeabilidade magnética. Além disso, vale a pena mencionarmos que existem exceções, i.e., a partir de novas físicas além do Modelo Padrão é possível obtermos algumas eletrodinâmicas não-lineares com quebra da simetria de paridade. Isso é um tema de pesquisa mais recente, que não abordaremos nesta contribuição introdutória. No entanto, para maiores detalhes sobre o assunto, destacamos o trabalho [79] e suas referências.

4. Leis de Conservação: Transporte de Energia e Momentum

Nesta seção, investigaremos as propriedades de transporte em uma eletrodinâmica não linear geral. Porém, na primeira parte da seção, vamos considerar as

equações (18a)–(18d) no caso em que os campos externos são constantes e uniformes. Com esta premissa, teremos

$$\nabla \cdot \mathbf{d} = \rho, \quad (21a)$$

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\partial_t \mathbf{b}, \quad (21b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (21c)$$

$$\nabla \times \mathbf{h} = \partial_t \mathbf{d} + \mathbf{J}. \quad (21d)$$

Vamos fazer as seguintes manipulações com equações acima. Primeiro, efetuem os produto escalar da Lei de Faraday-Lenz (21b) por $\mathbf{h}$, depois multipliquemos a Lei de Ampère-Maxwell (21d) por $\mathbf{e}$ e, em seguida, subtraímos as duas expressões, de modo que

$$(\nabla \times \mathbf{e}) \cdot \mathbf{h} - (\nabla \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{e} = -(\partial_t \mathbf{b}) \cdot \mathbf{h} - (\partial_t \mathbf{d}) \cdot \mathbf{e} - \mathbf{J} \cdot \mathbf{e}. \quad (22)$$

Após algumas manipulações e uso de identidades vetoriais apresentadas no apêndice A, obtemos a seguinte equação da continuidade:

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \partial_t u = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{e}, \quad (23)$$

onde $\mathbf{S} \equiv \mathbf{e} \times \mathbf{h}$ é o vetor de Poynting, e u é a densidade de energia, dada por

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{b} \cdot \mathbf{h}. \quad (24)$$

A equação (23) representa o balanço de energia considerando às respostas constitutivas do meio não-linear. No limite para eletrodinâmica de Maxwell, $\mathbf{d} \rightarrow \varepsilon_0 \mathbf{e}$ e $\mathbf{h} \rightarrow \mu_0^{-1} \mathbf{b}$, onde o vetor de Poynting, a densidade de energia, e a equação do balanço de energia, reduzem-se para forma usual do teorema de Poynting. Por exemplo, veja a referência [80]. Ao considerarmos os campos de fundo dependentes das coordenadas espaciais, os *tensores constitutivos* ε_{ij} , μ_{ij} , α_{ij} e β_{ij} também apresentam esta dependência. Esse é justamente o caso de sistemas como os *cristais fotônicos*, nos quais a estrutura periódica do índice de refração do meio impõe uma modulação espacial nos parâmetros eletromagnéticos [81]. Neste caso, fazemos a mesma manipulação anterior, mas com as equações (18a)–(18d), que resulta em

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S} + \partial_t u \\ = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{e} - \frac{1}{2} (\partial_t \varepsilon_{ij}) e_i e_j + \frac{1}{2} (\partial_t \mu_{ij}^{-1}) b_i b_j, \end{aligned} \quad (25)$$

Note que, na presença de parâmetros constitutivos dependentes do tempo, surgem termos adicionais que representam a taxa de troca de energia entre os campos propagantes e o próprio meio não linear.

De forma análoga ao que ocorre com a conservação da energia, podemos considerar a conservação do momento linear no caso de campos de fundo uniformes e constantes. Para isso, multiplicamos vetorialmente a equação de Faraday-Lenz (21b) por $\mathbf{d}$ e depois a equação

de Ampère-Maxwell (21d) por $\mathbf{b}$. Somando as duas expressões resultantes, obtemos

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{e}) \times \mathbf{d} + (\nabla \times \mathbf{h}) \times \mathbf{b} \\ = -(\partial_t \mathbf{b}) \times \mathbf{d} - \mathbf{b} \times (\partial_t \mathbf{d}) + \mathbf{J} \times \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (26)$$

No lado esquerdo da eq. (26), devemos fazer algumas simplificações, que encontram-se detalhadas no apêndice B. Já no lado direito, os dois primeiros termos podem ser escritos como uma derivada total no tempo. Com essas manipulações, os termos podem ser escritos na forma

$$\partial_i T_{ij} - \partial_t \mathcal{P}_j = (f_L)_j, \quad (27)$$

onde $(f_L)_j = \rho \mathbf{e}_j + (\mathbf{J} \times \mathbf{b})_j$ é a componente j da *densidade de força de Lorentz*, enquanto que $\mathcal{P}_j$ é a componente do vetor $\mathcal{P} = \mathbf{d} \times \mathbf{b}$, chamado de vetor densidade de momento linear, e T_{ij} é o tensor das tensões, dado por

$$T_{ij} = d_i e_j + b_i h_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{h}). \quad (28)$$

No caso linear, a relação entre o vetor de Poynting e a densidade de momento linear fica

$$\mathbf{S} = c^2 \mathcal{P}, \quad (29)$$

e o tensor das tensões é reduzido para

$$T_{ij} = \varepsilon_0 \left(e_i e_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{e}^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(b_i b_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{b}^2 \right). \quad (30)$$

Pela equação (28), o tensor das tensões não é simétrico, ou seja, $T_{ij} \neq T_{ji}$. Esta propriedade é recuperada somente na equação (30). Para o caso em que os campos externos dependem das coordenadas do espaço e do tempo, teremos a expressão

$$\begin{aligned} \partial_i T_{ij} - \partial_t \mathcal{P}_j = f_{Lj} - \frac{1}{2} (\partial_j \varepsilon_{km}) e_k e_m \\ + \frac{1}{2} [\partial_j (\mu^{-1})_{km}] b_k b_m - (\partial_j \alpha_{km}) e_k b_m. \end{aligned} \quad (31)$$

Os três últimos termos adicionais representam a transferência de momento linear entre o campo eletromagnético e o meio material causada pelas variações espaciais dos parâmetros constitutivos. A obtenção desta lei de conservação do momento linear mais geral está mostrada em mais detalhes no apêndice B.

Por último, passemos para a discussão do momento angular do campo eletromagnético. Este é definido pela expressão

$$\mathbf{L}_{em} = \int d^3 \mathbf{r} (\mathbf{r} \times \mathcal{P}), \quad (32)$$

onde $\mathbf{r}$ é o vetor posição que liga uma origem fixa no espaço com uma distribuição infinitesimal de cargas. A derivada de $\mathbf{L}_{em}$ em relação ao tempo é

$$\frac{d\mathbf{L}_{em}}{dt} = \int d^3\mathbf{r} \mathbf{r} \times \left(\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \times \mathbf{b} \right) + \int d^3\mathbf{r} \mathbf{r} \times \left(\mathbf{d} \times \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right), \quad (33)$$

e usando as equações (21b) e (21d), obtém-se

$$\frac{d\mathbf{L}_{em}}{dt} = \int d^3\mathbf{r} \mathbf{r} \times [(\nabla \times \mathbf{e}) \times \mathbf{d} + (\nabla \times \mathbf{h}) \times \mathbf{b} - \mathbf{J} \times \mathbf{b}]. \quad (34)$$

Precisamos das mesmas identidades vetoriais usadas na conservação do momento linear e demonstradas no apêndice B. Assim, a taxa de variação temporal do momento angular do campo eletromagnético é escrita como

$$\frac{d\mathbf{L}_{em}}{dt} = \int d^3\mathbf{r} \mathbf{r} \times [\hat{\mathbf{e}}_j \partial_i T_{ij}] - \int d^3\mathbf{r} (\mathbf{r} \times \mathbf{f}_L) + \int d^3\mathbf{r} (\mathbf{r} \times \mathbf{N}), \quad (35)$$

onde $\mathbf{N}$ é um vetor que depende apenas das derivadas espaciais dos tensores ε_{ij} , $(\mu^{-1})_{ij}$ e α_{ij} , dado por

$$\mathbf{N} = \frac{1}{2} (\nabla \varepsilon_{ij}) e_i e_j - \frac{1}{2} [\nabla (\mu^{-1})_{ij}] b_i b_j + (\nabla \alpha_{ij}) e_i b_j. \quad (36)$$

O primeiro termo no lado direito da eq. (35) pode ser escrito como

$$\int d^3\mathbf{r} \mathbf{r} \times [\hat{\mathbf{e}}_j \partial_i T_{ij}] = \oint \varepsilon_{kmj} \hat{\mathbf{e}}_k x_m T_{ij} n_i dA - \int d^3\mathbf{r} \hat{\mathbf{e}}_k \varepsilon_{ijk} T_{ij}, \quad (37)$$

no qual usamos o teorema de Gauss da divergência para transformar a integral de volume em uma integral de superfície, e n_i é a componente i do vetor normal a superfície. Tendo em mente que, no limite de grandes distâncias, recuperamos os resultados de Maxwell, teremos que a integral de superfície é nula no infinito. Assim, a eq. (37) se reduz para

$$\int d^3\mathbf{r} \mathbf{r} \times [\hat{\mathbf{e}}_j \partial_i T_{ij}] = - \int d^3\mathbf{r} \hat{\mathbf{e}}_k \varepsilon_{ijk} T_{ij}. \quad (38)$$

O segundo termo no lado direito da eq. (35) é interpretado como o torque mecânico realizado pela densidade de força de Lorentz em relação a um ponto base $\mathbf{r}$, e portanto, pode ser chamado de taxa de variação temporal do momento angular mecânico

$$\frac{d\mathbf{L}_{mec}}{dt} = \int d^3\mathbf{r} (\mathbf{r} \times \mathbf{f}_L). \quad (39)$$

Finalmente, o último termo da eq. (35) é interpretado como o torque realizado pelos campos de fundo em

relação ao ponto base $\mathbf{r}$ devido as suas possíveis variações espaciais, assim como também, devido a mistura de um campo magnético com um campo elétrico de fundo. Assim, definimos

$$\boldsymbol{\tau}_f = \int d^3\mathbf{r} (\mathbf{r} \times \mathbf{N}). \quad (40)$$

Juntando todas estas definições, o teorema do momento angular é dado por

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{L}_{em} + \mathbf{L}_{mec}) = - \int d^3\mathbf{r} \hat{\mathbf{e}}_k \varepsilon_{ijk} T_{ij} + \boldsymbol{\tau}_f. \quad (41)$$

Note que, mesmo se os campos elétrico e magnético de fundo são uniformes, e que tenhamos apenas um campo elétrico ou um campo magnético externo uniforme, o momento angular total não é conservado. O tensor T_{ij} não é simétrico, na qual contração do tensor de Levi-Civita com T_{ij} não é nula, ou seja, $\varepsilon_{ijk} T_{ij} \neq 0$.

5. Classificação de Alguns Meios Materiais via Relações Constitutivas

No eletromagnetismo clássico, distribuições de cargas e correntes movimentam-se no vácuo cujos campos gerados são descritos pelos vetores $\mathbf{d} = \varepsilon_0 \mathbf{e}$ e $\mathbf{h} = (\mu_0)^{-1} \mathbf{b}$ (segundo a notação da seção 3). Assim, pode-se afirmar que o vácuo se comporta como um meio linear, homogêneo e isotrópico. As propriedades eletromagnéticas não dependem da direção do espaço, isso fica evidente pelo caráter escalar das constantes do vácuo ε_0 e μ_0 .

Considerando um meio material, este meio responde à presença de campos externos. Com isso, as equações tornam-se não homogêneas com o surgimento de novos efeitos devido exclusivamente a natureza do meio material estudado. Como é conhecido em eletromagnetismo de meios materiais, os efeitos da polarização dielétrica $\mathbf{P}$, e da magnetização $\mathbf{M}$ do material, representam a contribuição dos dipolos elétricos e magnéticos microscópicos induzidos no material, respectivamente. Portanto, sob esses efeitos, os vetores $\mathbf{d}$ e $\mathbf{h}$ são modificados por

$$\mathbf{d} = \varepsilon_0 \mathbf{e} + \mathbf{P}, \quad (42a)$$

$$\mathbf{h} = \mu_0^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{M}, \quad (42b)$$

respectivamente. Se os campos elétrico ($\mathbf{e}$) e magnético ($\mathbf{b}$) são considerados de fraca magnitude, o meio material é dito linear, e se o mesmo meio é também isotrópico, os vetores $\mathbf{P}$ e $\mathbf{M}$ são, respectivamente, proporcionais aos campos $\mathbf{e}$ e $\mathbf{h}$

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{e}, \quad (43a)$$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{h}, \quad (43b)$$

onde χ_e é chamada de *susceptibilidade elétrica*, e χ_m é a *susceptibilidade magnética* [80]. Note que ambas as grandezas são constantes e adimensionais, e sua origem depende da natureza de cada material. Essas grandezas

quantificam a resposta do material a campos externos: quanto maior a susceptibilidade, maior será a polarização ou magnetização induzida no meio para um mesmo campo aplicado. Nos limites de $\chi_e \rightarrow 0$ e $\chi_m \rightarrow 0$, os efeitos da polarização dielétrica e da magnetização são nulos, e recupera-se o eletromagnetismo no vácuo. Substituindo as relações (43a) e (43b) nas equações (42a) e (42b), os vetores $\mathbf{d}$ e $\mathbf{h}$ são proporcionais aos campos elétrico e magnético do meio material

$$\mathbf{d} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{e} = \varepsilon \mathbf{e}, \quad (44a)$$

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{b}}{\mu_0 (1 + \chi_m)} = \mu^{-1} \mathbf{b}, \quad (44b)$$

nos quais definimos $\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)$ e $\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$ como sendo a permissividade e a permeabilidade do meio material, respectivamente. Note que ambas as equações (43a) e (43b) mostram que a polarização e magnetização são paralelas aos campos. Contudo, se estamos considerando meios materiais lineares e *anisotrópicos*, as componentes dos vetores $\mathbf{P}$ e $\mathbf{M}$ são escritas como combinações lineares das componentes de $\mathbf{e}$ e $\mathbf{h}$. Assim, as relações (43a) e (43b) são estendidas como

$$P_i = \varepsilon_0 \chi_{ij}^e e_j, \quad (45a)$$

$$M_i = \chi_{ij}^m h_j, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (45b)$$

onde as susceptibilidades são promovidas aos tensores χ_{ij}^e e χ_{ij}^m . Mais explicitamente, as relações (45a) e (45b) são escritas como

$$\begin{aligned} P_x &= \varepsilon_0 (\chi_{xx}^e e_x + \chi_{xy}^e e_y + \chi_{xz}^e e_z), \\ P_y &= \varepsilon_0 (\chi_{yx}^e e_x + \chi_{yy}^e e_y + \chi_{yz}^e e_z), \end{aligned} \quad (46a)$$

$$\begin{aligned} P_z &= \varepsilon_0 (\chi_{zx}^e e_x + \chi_{zy}^e e_y + \chi_{zz}^e e_z), \\ M_x &= \chi_{xx}^m h_x + \chi_{xy}^m h_y + \chi_{xz}^m h_z, \\ M_y &= \chi_{yx}^m h_x + \chi_{yy}^m h_y + \chi_{yz}^m h_z, \\ M_z &= \chi_{zx}^m h_x + \chi_{zy}^m h_y + \chi_{zz}^m h_z, \end{aligned} \quad (46b)$$

que mostra claramente a anisotropia do meio material por meio das componentes dos tensores de susceptibilidade. Em cada direção do espaço, as componentes das susceptibilidades apresentam magnitudes distintas, de acordo com a natureza do meio anisotrópico. Substituindo (45a) e (45b) nas componentes de (17a) e (17b), obtém-se as relações

$$d_i = \varepsilon_{ij} e_j, \quad (47a)$$

$$h_i = (\mu_{ij})^{-1} b_j, \quad (47b)$$

onde temos os tensores de permissividade elétrica $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 (\delta_{ij} + \chi_{ij}^e)$, e de permeabilidade magnética $\mu_{ij} = \mu_0 (\delta_{ij} + \chi_{ij}^m)$, em que $(\mu_{ij})^{-1}$ é denotado como o inverso de μ_{ij} . Estes tensores são representados como

as seguintes matrizes 3×3

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 1 + \chi_{xx}^e & \chi_{xy}^e & \chi_{xz}^e \\ \chi_{yx}^e & 1 + \chi_{yy}^e & \chi_{yz}^e \\ \chi_{zx}^e & \chi_{zy}^e & 1 + \chi_{zz}^e \end{pmatrix}, \\ \mu &= \mu_0 \begin{pmatrix} 1 + \chi_{xx}^m & \chi_{xy}^m & \chi_{xz}^m \\ \chi_{yx}^m & 1 + \chi_{yy}^m & \chi_{yz}^m \\ \chi_{zx}^m & \chi_{zy}^m & 1 + \chi_{zz}^m \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (48)$$

Um exemplo de materiais que exibem essas características de anisotropia são os cristais. A classificação dos chamados cristais elétricos está associada aos autovalores da matriz de permissividade ε , quando a parte magnética é a permeabilidade magnética do vácuo, $\mu = \mu_0$. As matrizes abaixo ilustram a classificação dos materiais segundo seu eixo óptico [82]:

$$\begin{aligned} \text{Cúbico : } & \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \text{Uniaxial : } \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}, \\ \text{Biaxial : } & \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (49)$$

Em conexão com os tensores de permissividade elétrica e permeabilidade magnética obtidos na seção (3), por meio das equações (20a)–(20d), o meio material linearizado sob a ação de um campo eletromagnético externo, tem a interpretação de tensores de susceptibilidade que dependem dos campos elétrico e magnético de fundo. Se consideramos uma eletrodinâmica não-linear com $c_2 = 0$, e $d_3 = 0$, num campo magnético extenso uniforme, ou num campo elétrico uniforme, as relações constitutivas (19a) e (19b) reduzem-se a (47a) e (47b), respectivamente.

No caso somente de um campo magnético externo uniforme, $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, os tensores de permissividade elétrica e o inverso do tensor de permeabilidade magnética são reduzidos a

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 (c_1 \delta_{ij} + d_2 B_i B_j), \quad (50a)$$

$$(\mu_{ij})^{-1} = \mu_0^{-1} (c_1 \delta_{ij} - d_1 B_i B_j), \quad (50b)$$

e $\alpha_{ij} = \beta_{ij} = 0$. O inverso da equação (50b) dá a expressão para o tensor de permeabilidade magnética

$$\mu_{ij} = \frac{\mu_0 (c_1 - d_1 \mathbf{B}^2) \delta_{ij} + d_1 B_i B_j}{c_1 - d_1 \mathbf{B}^2}. \quad (51)$$

Os autovalores das matrizes de (50a) e (51) são dados por

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 + d_2 \mathbf{B}^2 \end{pmatrix}, \\ \mu_0 \begin{pmatrix} c_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & c_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (c_1 - d_1 \mathbf{B}^2)^{-1} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (52)$$

que são positivos se $c_1 > 0$ e $c_1 > d_1 \mathbf{B}^2$. Se a condição $c_1 > d_1 \mathbf{B}^2$ garante que $(c_1 - d_1 \mathbf{B}^2)^{-1} > 0$, então o material é um *paramagneto*. Por outro lado, se $c_1 < d_1 \mathbf{B}^2$, o terceiro autovalor é negativo $(c_1 - d_1 \mathbf{B}^2)^{-1} < 0$, e o material se comporta como um *diamagneto*. Esses resultados mostram que o vácuo de uma eletrodinâmica linearizada com um campo magnético externo se comporta como um cristal uniaxial, se compararmos com os elementos da segunda matriz de (49).

Se o vácuo da teoria linearizada é submetido a somente um campo elétrico externo, os autovalores são obtidos de (52) trocando $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{E}/c$, $d_1 \rightarrow d_2$ e $d_2 \rightarrow d_1$, com a condição de $c_1 > d_2 \mathbf{E}^2/c^2$ para que sejam positivos. A classificação do meio material é então similar ao caso anterior.

6. Relações de Dispersão na Presença de Campos Uniformes de Fundo

Nesta seção, vamos obter as relações de dispersão (RDs), e consequentemente os índices de refração do meio material, na presença de um campo magnético de fundo uniforme e constante, e posteriormente, faremos o caso de um campo elétrico de fundo constante e uniforme. Este cenário pode descrever, por exemplo, uma situação física de um meio interestelar, onde campos magnéticos são intensos e praticamente constantes em escalas locais (da ordem de microgauss) e permeiam toda a galáxia. Esses campos podem ser tratados como um fundo sobre o qual ondas eletromagnéticas se propagam. A propagação de ondas nas proximidades de estrelas de nêutrons é outro exemplo relevante de um sistema com um campo de fundo puramente magnético.

Suponhamos que o meio é livre de fontes externas, ou seja, $\rho = 0$ e $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, de modo que num campo eletromagnético de fundo constante e uniforme, as equações (18a)–(18d) reduzem-se a forma

$$\nabla \cdot \mathbf{d} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{e} + \partial_t \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (53a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{h} - \partial_t \mathbf{d} = \mathbf{0}. \quad (53b)$$

Portanto, podemos estudar os efeitos de propagação para soluções de ondas planas nos campos $\mathbf{e}$ e $\mathbf{b}$.

6.1. Propagação de ondas num campo magnético de fundo uniforme e constante

Nesta subseção, vamos considerar o caso de apenas um campo magnético de fundo, constante e uniforme, onde $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ em todas as expressões anteriores. Outro ponto importante para nossa análise é o fato do coeficiente d_3 ser nulo se o campo de fundo é somente magnético, ou somente elétrico, para todos os exemplos de eletrodinâmicas não-lineares conhecidas na literatura, que foram mencionadas previamente na introdução. Assim, podemos também fazer $d_3 = 0$ a partir deste ponto.

Consideramos então as soluções de ondas planas para os campos propagantes $\mathbf{e}$ e $\mathbf{b}$

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (54a)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (54b)$$

onde ω é a frequência harmônica, $\mathbf{k}$ é o vetor de onda, $\mathbf{e}_0$ e $\mathbf{b}_0$ são amplitudes constantes e uniformes das ondas elétrica e magnética, respectivamente. Substituindo-as nas equações (53a) - (53b), obtemos

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{d}_0 = 0, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{e}_0 - \omega \mathbf{b}_0 = \mathbf{0}, \quad (55a)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}_0 = 0, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{h}_0 + \omega \mathbf{d}_0 = \mathbf{0}. \quad (55b)$$

A lei de Gauss do campo magnético garante que a direção de propagação de onda é sempre perpendicular a amplitude de onda do campo magnético. Mas a lei de Gauss do campo elétrico não garante que $(\hat{\mathbf{k}})$ seja perpendicular a amplitude de campo elétrico da onda plana. Note que as amplitudes $\mathbf{d}_0$ e $\mathbf{h}_0$ estão relacionadas com $\mathbf{e}_0$ e $\mathbf{b}_0$, respectivamente, pelos mesmos tensores de (50a) e (50b).

Multiplicando vetorialmente por $\mathbf{k}$ a lei de Faraday em (55a), e usando a lei de Ampère-Maxwell (55b), a equação de onda para as componentes da amplitude da onda elétrica é

$$M_{ij} e_{0j} = 0, \quad (56)$$

onde os elementos da matriz M_{ij} são dados por

$$M_{ij} = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^2 \right) \delta_{ij} + \frac{d_1}{c_1} (\mathbf{B} \times \mathbf{k})_i (\mathbf{B} \times \mathbf{k})_j + \frac{d_2}{c_1} \left[\frac{\omega^2}{c^2} B_i B_j + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{k}) k_i B_j \right]. \quad (57)$$

A solução não-trivial da eq. (56) implica que o determinante da matriz M_{ij} deve ser nulo. O determinante da matriz M resulta em

$$\det(M) = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^2 \right) \left(P \frac{\omega^4}{c^4} + Q \frac{\omega^2}{c^2} + R \right), \quad (58)$$

onde os coeficientes P , Q e R são definidos por

$$P = 1 + \frac{d_2}{c_1} \mathbf{B}^2, \quad (59a)$$

$$Q = -2\mathbf{k}^2 + \frac{d_1}{c_1} (\mathbf{B} \times \mathbf{k})^2 - \frac{d_2}{c_1} \left[\mathbf{B}^2 \mathbf{k}^2 + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})^2 \right] + \frac{d_1 d_2}{c_1^2} \mathbf{B}^2 (\mathbf{B} \times \mathbf{k})^2, \quad (59b)$$

$$R = \mathbf{k}^4 - \frac{d_1}{c_1} \mathbf{k}^2 (\mathbf{B} \times \mathbf{k})^2 + \frac{d_2}{c_1} \mathbf{k}^2 (\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})^2 - \frac{d_1 d_2}{c_1^2} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})^2 (\mathbf{B} \times \mathbf{k})^2. \quad (59c)$$

A condição de $\det(M) = 0$ tem como a primeira solução $\omega_1(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}|$, que é a mesma relação de dispersão a onda eletromagnética na eletrodinâmica de

Maxwell. Esta é uma solução esperada desde que a simetria de calibre é preservada nas equações linearizadas (18a)–(18d). As outras soluções possíveis são obtidas por meio da equação quártica na frequência ω :

$$P \frac{\omega^4}{c^4} + Q \frac{\omega^2}{c^2} + R = 0, \quad (60)$$

cujas soluções são dadas por

$$\omega_2(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}| \sqrt{1 - \frac{d_1}{c_1} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2}, \quad (61a)$$

$$\omega_3(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}| \sqrt{1 - \frac{d_2 (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2}{c_1 + d_2 \mathbf{B}^2}}. \quad (61b)$$

Estas são as relações de dispersão que dependem do campo magnético de fundo, e também dependem da direção que este campo de fundo faz com a direção de propagação de onda. Note-se que, no caso particular em que o campo $\mathbf{B}$ é paralelo a direção de $\mathbf{k}$, a contribuição dos coeficientes d_1 e d_2 se anulam em (61a) e (61b), e todas as soluções são iguais a frequência da onda eletromagnética usual, ou seja, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = c|\mathbf{k}|$.

Os índices de refração associados as relações de dispersão são definidos por

$$n_{iB} = \frac{c|\mathbf{k}|}{\omega_{iB}} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (62)$$

A primeira solução leva ao resultado do índice de refração do vácuo, $n_1 = 1$, desde que usamos a solução $\omega_1 = c|\mathbf{k}|$. Para as soluções (61a) e (61b), os correspondentes índices de refração têm os resultados

$$n_2^{-1} = \sqrt{1 - \frac{d_1}{c_1} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2}, \quad (63a)$$

$$n_3^{-1} = \sqrt{1 - \frac{d_2 (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2}{c_1 + d_2 \mathbf{B}^2}}. \quad (63b)$$

respectivamente. A interpretação física aqui é a mesma das relações de dispersão. O índice de refração deste meio material apresenta duas possíveis soluções que dependem da direção que o campo magnético de fundo faz com o vetor de onda $\mathbf{k}$. Se o campo $\mathbf{B}$ é paralelo a $\mathbf{k}$, os índices de refração são todos iguais a um, e o meio material comporta-se como no vácuo.

As componentes do vetor velocidade de grupo da onda eletromagnética são definidas pela derivação da frequência ω em relação as componentes do vetor de onda k^i , ou seja,

$$v_g^i = \frac{d\omega}{dk^i}. \quad (64)$$

Esta derivação é obtida tomando a diferencial diretamente da equação $\det(M) = 0$. Assim, obtemos o resultado:

$$\mathbf{v}_g(\omega) = \frac{\omega c^2 \mathbf{K}}{2\omega^2 + Q c^2}, \quad (65)$$

onde o vetor $\mathbf{K}$ é definido por

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = & 2\mathbf{k} \left(1 - \frac{c^2 \mathbf{k}^2}{\omega^2} \right) - \frac{d_1}{c_1} (\mathbf{B} \times \mathbf{k}) \times \mathbf{B} + \frac{d_2}{c_1} \mathbf{B}^2 \mathbf{k} \\ & + \frac{d_2}{c_1} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{B} \left(1 - \frac{c^2 \mathbf{k}^2}{\omega^2} \right) - 2 \frac{d_1 d_2}{c_1^2} \mathbf{B}^2 (\mathbf{B} \times \mathbf{k}) \times \mathbf{B} \\ & + \frac{d_1}{c_1} \mathbf{k} \left(\frac{\mathbf{B} \times c \mathbf{k}}{\omega} \right)^2 + \frac{d_1}{c_1} \frac{c^2 \mathbf{k}^2}{\omega^2} (\mathbf{B} \times \mathbf{k}) \times \mathbf{B} \\ & - \frac{d_2}{c_1} \mathbf{k} \left(\frac{\mathbf{B} \cdot c \mathbf{k}}{\omega} \right)^2 + \frac{d_1 d_2}{c_1^2} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{B} \left(\frac{\mathbf{B} \times c \mathbf{k}}{\omega} \right)^2 \\ & + \frac{d_1 d_2}{c_1^2} \left(\frac{\mathbf{B} \cdot c \mathbf{k}}{\omega} \right)^2 (\mathbf{B} \times \mathbf{k}) \times \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (66)$$

no qual as componentes de $\mathbf{v}_g$ são funções da frequência ω . Usando as soluções para as relações de dispersão, a primeira solução leva a usual velocidade de grupo $\mathbf{v}_g = c \hat{\mathbf{k}}$. As demais soluções de ω_2 e ω_3 dão as seguintes velocidades de grupo

$$\mathbf{v}_g|_{\omega=\omega_2} = \frac{c c_1 \hat{\mathbf{k}} + c d_1 \mathbf{B} \times (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})}{c_1 \sqrt{1 - \frac{d_1}{c_1} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2}}, \quad (67a)$$

$$\mathbf{v}_g|_{\omega=\omega_3} = \frac{c c_1 \hat{\mathbf{k}} + c d_2 \mathbf{B} (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{k}})}{(c_1 + d_2 \mathbf{B}^2) \sqrt{1 - \frac{d_2 (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2}{c_1 + d_2 \mathbf{B}^2}}}, \quad (67b)$$

respectivamente. Notemos aqui a dependência dessas velocidades com direção do campo magnético de fundo, como consequência do meio material governado por $\mathbf{B}$. Numa situação particular, se o campo externo $\mathbf{B}$ é paralelo a $\hat{\mathbf{k}}$, as três soluções para a velocidade de grupo reduzem-se ao resultado de $\mathbf{v}_g = c \hat{\mathbf{k}}$. No caso em que $\mathbf{B}$ é perpendicular a $\hat{\mathbf{k}}$, vamos escolher a situação mais ilustrativa onde a propagação da onda está na direção $\mathcal{X}$, $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{x}}$, e o campo magnético é colocado na direção $\mathcal{Z}$, com $\mathbf{B} = B \hat{\mathbf{z}}$. Os resultados de (67b) e (67b) são reduzidos a

$$\mathbf{v}_g|_{\omega=\omega_2} = c \hat{\mathbf{x}} \sqrt{1 - \frac{d_1}{c_1} B^2}, \quad (68a)$$

$$\mathbf{v}_g|_{\omega=\omega_3} = c \hat{\mathbf{x}} \sqrt{\frac{c_1}{c_1 + d_2 B^2}}, \quad (68b)$$

onde $c_1 > d_1 B^2$ na solução (68a). As velocidades de grupo se propagam na mesma direção do vetor de onda. A solução (68a) tem módulo da velocidade de grupo menor do que a velocidade da luz no vácuo, enquanto que a solução (68b) também apresenta o mesmo comportamento na sua magnitude, se os coeficientes c_1 e d_2 são positivos. Assim, a não-linearidade atua como um fator atenuador a magnitude da velocidade de grupo da onda. No caso em que os vetores $\mathbf{B}$ e $\hat{\mathbf{k}}$ estão numa direção qualquer do espaço, não é difícil mostrar que o quadrado das velocidades de grupo (67b) e (67b) satisfazem as

relações

$$\frac{v_{g2}^2}{c^2} = 1 - \frac{(c_1 - d_1 \mathbf{B}^2) d_1 (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2}{c_1 - d_1 (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2}, \quad (69a)$$

$$\frac{v_{g3}^2}{c^2} = 1 - \frac{c_1 d_2 (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2}{(c_1 + d_2 \mathbf{B}^2) [c_1 + d_2 (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2]}. \quad (69b)$$

Logo, o resultado da eq. (69a) é sempre menor que a velocidade da luz no vácuo ao quadrado (c^2) se $c_1 > d_1 \mathbf{B}^2$, enquanto que a eq. (69b) é sempre menor do que c^2 , respeitando a causalidade.

6.2. Propagação de ondas num campo elétrico de fundo uniforme e constante

Neste caso, fazemos $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, a equação de onda para a amplitude do campo elétrico e_{0j} é similar à eq. (56), que escrevemos como

$$N_{ij} e_{0j} = 0, \quad (70)$$

onde os elementos da nova matriz N_{ij} são

$$N_{ij} = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^2 \right) \delta_{ij} + \frac{d_2}{c_1 c^2} (\mathbf{E} \times \mathbf{k})_i (\mathbf{E} \times \mathbf{k})_j + \frac{d_1}{c_1 c^2} \left[\frac{\omega^2}{c^2} E_i E_j + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{k}) k_i E_j \right]. \quad (71)$$

Note que, fazendo as substituições de $d_1 \rightarrow d_2$, $d_2 \rightarrow d_1$ e $E_i/c \rightarrow B_i$, os elementos da matriz N_{ij} são iguais aos da matriz M_{ij} , e podemos reobter todos os resultados da subseção anterior. Seguindo o mesmo caminho, o determinante de N fica dado por

$$\det(N) = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^2 \right) \left(P_E \frac{\omega^4}{c^4} + Q_E \frac{\omega^2}{c^2} + R_E \right), \quad (72)$$

onde os coeficientes P_E , Q_E e R_E são definidos como

$$P_E = 1 + \frac{d_1}{c_1} \frac{\mathbf{E}^2}{c^2}, \quad (73a)$$

$$Q_E = -2\mathbf{k}^2 + \frac{d_2}{c_1 c^2} (\mathbf{E} \times \mathbf{k})^2 - \frac{d_1}{c_1 c^2} [\mathbf{E}^2 \mathbf{k}^2 + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{k})^2] + \frac{d_1 d_2}{c_1^2 c^4} \mathbf{E}^2 (\mathbf{E} \times \mathbf{k})^2, \quad (73b)$$

$$R_E = \mathbf{k}^4 - \frac{d_2}{c_1 c^2} \mathbf{k}^2 (\mathbf{E} \times \mathbf{k})^2 + \frac{d_1}{c_1 c^2} \mathbf{k}^2 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{k})^2 - \frac{d_1 d_2}{c_1^2 c^4} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{k})^2 (\mathbf{E} \times \mathbf{k})^2. \quad (73c)$$

Vamos analisar $\det(N) = 0$. A primeira solução é a relação de dispersão usual do campo eletromagnético, $\omega_1(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}|$. As duas novas soluções para a equação quártica na frequência são

$$\omega_2(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}| \sqrt{1 - \frac{d_1 (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{k}})^2}{c_1 c^2 + d_1 \mathbf{E}^2}}, \quad (74a)$$

$$\omega_3(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}| \sqrt{1 - \frac{d_2 (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{k}})^2}{c_1 c^2}}. \quad (74b)$$

Os índices de refração associados a estas soluções resultam em

$$n_2^{-1} = \sqrt{1 - \frac{d_1 (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{k}})^2}{c_1 c^2 + d_1 \mathbf{E}^2}}, \quad (75a)$$

$$n_3^{-1} = \sqrt{1 - \frac{d_2}{c_1 c^2} (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{k}})^2}. \quad (75b)$$

Analogamente, obtemos as velocidades de grupo

$$\mathbf{v}_g|_{\omega=\omega_2} = \frac{c c_1 \hat{\mathbf{k}} + d_1 \mathbf{E} (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{k}})/c}{(c_1 + d_1 \mathbf{E}^2/c^2) \sqrt{1 - \frac{d_1 (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{k}})^2}{c^2 c_1 + d_1 \mathbf{E}^2}}}, \quad (76a)$$

$$\mathbf{v}_g|_{\omega=\omega_3} = \frac{c c_1 \hat{\mathbf{k}} + d_2 \mathbf{E} \times (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{k}})/c}{c_1 \sqrt{1 - \frac{d_2}{c_1 c^2} (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{k}})^2}}. \quad (76b)$$

Similarmente ao caso do campo magnético externo, os resultados das velocidades de grupo são menores do que a velocidade da luz no vácuo se os coeficientes satisfazem à condição de $c_1 > d_2 \mathbf{E}^2/c^2$ na eq. (76b), enquanto que na eq. (76a) é sempre menor do que velocidade da luz no vácuo sob qualquer condição.

7. Birrefringência e os Exemplos de Eletrodinâmicas Não-Lineares

Nesta seção, discutimos a birrefringência e sua aplicação em algumas eletrodinâmicas não-lineares. A birrefringência é um fenômeno óptico que está relacionado a diferença do índice de refração de um meio material quando a polarização da onda muda em relação à direção do campo magnético externo. Um exemplo onde esta definição pode ser usada é considerar o campo magnético externo uniforme na direção Z , $\mathbf{B} = B \hat{\mathbf{z}}$, e a direção de propagação da onda como $\mathbf{k} = k \hat{\mathbf{x}}$. Se a polarização da onda plana é paralela ao campo magnético externo, isto é, $\mathbf{e}_0 = e_{03} \hat{\mathbf{z}}$, a equação de onda (56) é reduzida a

$$\left(\frac{\omega_{\parallel}^2}{c^2} - k^2 + \frac{d_2}{c_1} \frac{\omega_{\parallel}^2}{c^2} B^2 \right) e_{03} = 0. \quad (77)$$

Se $e_{03} \neq 0$, a solução desta equação para o índice de refração $n_{\parallel} = ck/\omega_{\parallel}$ toma a forma

$$n_{\parallel} = \sqrt{1 + \frac{d_2}{c_1} B^2}. \quad (78)$$

Na outra situação, escolhemos a polarização de onda como $\mathbf{e}_0 = e_{02} \hat{\mathbf{y}}$, que agora é perpendicular ao campo magnético externo. Assim, a equação de onda (56) é dada por

$$\left(\frac{\omega_{\perp}^2}{c^2} - k^2 + \frac{d_1}{c_1} B^2 k^2 \right) e_{02} = 0, \quad (79)$$

cujas soluções para $n_{\perp} = ck/\omega_{\perp}$ fica

$$n_{\perp} = \left(1 - \frac{d_1}{c_1} B^2 \right)^{-1/2}. \quad (80)$$

A birrefringência é definida pela diferença entre os índices de refração (78) e (80), de modo que

$$\Delta n = n_{\parallel} - n_{\perp} = \sqrt{1 + \frac{d_2}{c_1} B^2} - \left(1 - \frac{d_1}{c_1} B^2\right)^{-1/2} \quad (81)$$

Como o caso mais simples, a eletrodinâmica de Maxwell é reobtida nos limites de $d_1 = d_2 = 0$ e $c_1 = 1$. Usando estes limites em (81), obtém-se que $\Delta n = 0$, e a eletrodinâmica de Maxwell não apresenta birrefringência, como é bem conhecido na literatura. Diante do resultado (81), vamos aplicá-lo as eletrodinâmicas não-lineares que mencionamos na introdução deste trabalho. Como estamos interessados em efeitos de propagação de ondas livres, consideramos todas as eletrodinâmicas não-lineares sem fontes externas de cargas e correntes.

A primeira eletrodinâmica não-linear que usaremos como exemplo é a eletrodinâmica de Euler-Heisenberg. Esta teoria é obtida por meio de contribuições quânticas quando o elétron é submetido a um campo eletromagnético externo uniforme e constante de baixa intensidade [31]. O lagrangeano efetivo de Euler-Heisenberg é

$$\mathcal{L}_{EH} = \frac{1}{\mu_0} \mathcal{F} + \frac{1}{\mu_0^2} \frac{2\alpha^2 \hbar^3}{45 m^4 c^5} (4\mathcal{F}^2 + 7\mathcal{G}^2), \quad (82)$$

onde $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0 \hbar c) = 1/137$ é a constante de estrutura fina, $m = 0,5 \text{ MeV}/c^2$ (em mega-eletronvolt por c^2) é a massa do elétron. Note que a não-linearidade manifesta-se na eq. (82) pelos termos de $\mathcal{F}^2$ e $\mathcal{G}^2$. Usando este lagrangeano na formulação da expansão num campo magnético de fundo uniforme, apresentada na seção (3), os coeficientes são dados por

$$\begin{aligned} c_{1EH} &= 1 - \frac{8\alpha^2 \hbar^3 B^2}{45\mu_0 m^4 c^5}, \\ d_{1EH} &= \frac{16\alpha^2 \hbar^3}{45\mu_0 m^4 c^5} \quad \text{e} \quad d_{2EH} = \frac{28\alpha^2 \hbar^3}{45\mu_0 m^4 c^5}. \end{aligned} \quad (83)$$

Portanto, a variação do índice de refração (81) com os coeficientes de (83) é dada por

$$\Delta n_{EH} \simeq \frac{2\alpha^2 \hbar^3}{15\mu_0 m^4 c^5} B^2, \quad (84)$$

na qual estamos considerando o campo magnético fraco. Usando os valores de $\alpha = 1/137$ e $m = 0,5 \text{ MeV}/c^2$, obtém-se o resultado numérico da birrefringência por unidade de campo magnético ao quadrado em Euler-Heisenberg

$$\frac{\Delta n_{EH}}{B^2} \simeq 1,32 \times 10^{-24} \text{ T}^{-2}. \quad (85)$$

Este resultado está próximo do obtido pelo experimento da polarização do vácuo com laser (PVLAS) para a birrefringência do vácuo com campo magnético, dado por $\Delta n/B^2 = (19 \pm 27) \times 10^{-24} \text{ T}^{-2}$ [37].

Outra ED não-linear bem conhecida na literatura é a eletrodinâmica de Born-Infeld. Ela é representada pelo lagrangeano [38]

$$\mathcal{L}_{BI} = \frac{\beta^2}{\mu_0} \left[1 - \sqrt{1 - 2 \frac{\mathcal{F}}{\beta^2} - \frac{\mathcal{G}^2}{\beta^4}} \right], \quad (86)$$

onde β é o parâmetro de Born-Infeld, interpretado como um campo crítico de Born-Infeld e tem dimensão de campo magnético. No limite $\beta \rightarrow \infty$, o lagrangeano (86) é reduzido ao lagrangeano de Maxwell (2) sem a presença das fontes. Originalmente, no trabalho de Born-Infeld a estimativa para o parâmetro β é de $c\beta = 1,187 \times 10^{20} \text{ V/m}$, o que mostra que os efeitos desta teoria são sensíveis de fato para campos elétrico e magnético muito intensos. No caso da ED de BI, os coeficientes da expansão desta teoria em torno de um campo magnético de fundo são

$$\begin{aligned} c_{1BI} &= \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + B^2}}, \quad d_{1BI} = \frac{\beta}{(\beta^2 + B^2)^{3/2}}, \\ d_{2BI} &= \frac{1}{\beta \sqrt{\beta^2 + B^2}}. \end{aligned} \quad (87)$$

Usando estes coeficientes na fórmula (81), obtém-se que $\Delta n_{BI} = 0$, o que mostra que a ED de BI não apresenta birrefringência.

Mais recentemente, uma nova ED não-linear foi proposta na literatura como a única ED até então que preserva a invariância conforme e a simetria de dualidade de campo elétrico e magnético. Esta ED não-linear é chamada de ModMax (do inglês *modified Maxwell electrodynamics*) [54]. O seu lagrangeano é definido como

$$\mathcal{L}_{MM} = \frac{1}{\mu_0} \cosh(\gamma) \mathcal{F} + \frac{1}{\mu_0} \sinh(\gamma) \sqrt{\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2}, \quad (88)$$

no qual γ é o parâmetro real de ModMax sempre positivo ($\gamma > 0$) para garantir a propriedade da causalidade da teoria. No limite de $\gamma \rightarrow 0$, o lagrangeano (88) reduz-se a eletrodinâmica de Maxwell da ação (2). Do lagrangeano (88), os coeficientes c_1 , d_1 e d_2 num campo magnético de fundo uniforme são, respectivamente,

$$c_{1MM} = e^{-\gamma}, \quad d_{1MM} = 0, \quad d_{2MM} = \frac{2}{B^2} \sinh(\gamma). \quad (89)$$

A birrefringência (81) para os coeficientes de ModMax é dada por

$$\Delta n_{MM} = e^{\gamma} - 1 \simeq \gamma, \quad (90)$$

onde usamos que é muito pequeno, ou seja, $\gamma \ll 1$. Este resultado mostra que a ED de ModMax é birrefringente, e neste caso, não depende da magnitude do campo magnético. Com a estimativa de $\Delta n/B^2 = (19 \pm 27) \times 10^{-24} \text{ T}^{-2}$ para um campo magnético externo de $B = 2.5 \text{ T}$ da referência [37], o parâmetro de ModMax tem o limite superior de

$$\gamma < 1.18 \times 10^{-22}. \quad (91)$$

Para outros estudos da eletrodinâmica de ModMax na presença de campos elétricos e magnéticos externos juntos, destacamos a referência [83].

Por fim, vale a pena mencionar que existem outros modelos de EDNLs, por exemplo a proposta recente que unifica a ED não-linear a BI e ModMax no mesmo lagrangeano. Este modelo foi proposto pelos mesmos autores da ED de ModMax (Bandos-Lechner-Sorokin-Townsend), e é representado pelo lagrangeano [67]

$$\mathcal{L}_{\gamma-BI} = \frac{\beta^2}{\mu_0} \left[1 - \sqrt{1 - 2\mu_0 \frac{\mathcal{L}_{MM}}{\beta^2} - \frac{\mathcal{G}^2}{\beta^4}} \right], \quad (92)$$

onde $\mathcal{L}_{MM}$ é o lagrangeano de ModMax (88), β é o campo crítico desta teoria. No limite de $\beta \rightarrow \infty$, o lagrangeano (92) reduz-se a teoria de ModMax (88). Se $\gamma \rightarrow 0$, o mesmo lagrangeano reduz-se a teoria de Born-Infeld.

Uma outra possível generalização do modelo de BI é discutida na referência [64], o lagrangeano é dado por

$$\mathcal{L}_{\text{tipo-BI}} = \frac{\beta^2}{\mu_0} \left[1 - \left(1 - \frac{\mathcal{F}}{p\beta^2} - \frac{\zeta\mathcal{G}^2}{2p\beta^4} \right)^p \right], \quad (93)$$

onde p e ζ são parâmetros adimensionais. Born-Infeld é recuperado quando $p = 1/2$ e $\zeta = 1$. No limite $p \rightarrow \infty$, obtemos um modelo chamado de eletrodinâmica exponencial

$$\mathcal{L}_{\text{exp}} = \frac{\beta^2}{\mu_0} \left[1 - \exp \left(1 - \frac{\mathcal{F}}{\beta^2} - \frac{\zeta\mathcal{G}^2}{2\beta^4} \right) \right]. \quad (94)$$

Esse modelo surge no contexto de buracos negros [65]. Além disso, podemos ter outras dependências nos invariantes $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, como, por exemplo, as eletrodinâmicas logarítmica, arco-seno e arco-tangente [63, 84–86]. Um dos principais requisitos é que no limite de campos fracos e baixas energias, temos o termo de Maxwell, $\mathcal{L} = \mathcal{F}/\mu_0$, sendo dominante. Para desenvolvimentos mais recentes sobre eletrodinâmicas não-lineares, recomendamos a leitura da referência [56].

8. Conclusões e Perspectivas

Neste artigo, procuramos apresentar uma introdução sobre eletrodinâmicas não-lineares. De modo geral, uma eletrodinâmica é dita não-linear se o lagrangeano correspondente é função dos invariantes de Lorentz $\mathcal{F} = (\mathbf{E}^2/c^2 - \mathbf{B}^2)/2$ e $\mathcal{G} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}/c$, que são funções quadráticas nos campos elétrico e magnético. Esta é uma das propriedades relativísticas mais importantes dentro do eletromagnetismo. Desde que dependem apenas dos campos elétricos e magnéticos, essas quantidades também são invariantes de calibre. Para extrair efeitos de propagação das eletrodinâmicas não-lineares, expandimos o campo eletromagnético original destas teorias em torno de um campo eletromagnético externo até a segunda ordem no campo propagante. Assim,

obtem-se uma eletrodinâmica linearizada, onde o novo campo eletromagnético propaga-se num campo elétrico e magnético de fundo. No primeiro momento do trabalho, consideramos esses campos externos como dependentes das coordenadas espaço-temporais e obtemos as leis de conservação da teoria linearizada envolvendo o tensor energia-momentum, as densidades de energia e momentum, o vetor de Poynting, o momento angular e os campos de fundo. Há que se ressaltar que procuramos apresentar todos os resultados na formulação não-covariante, i.e., evitando o uso de quadrvetores e tensores da Relatividade Especial, de modo a fornecer um material mais acessível aos estudantes da graduação. Além disso, adotamos uma metodologia de escrever as equações de movimento em termos das relações constitutivas em analogia com meios materiais, procurando tornar a apresentação mais intuitiva.

Posteriormente, consideramos esses campos externos como constantes e uniformes. Nesse contexto, estudamos a propagação de uma onda plana eletromagnética na presença somente de um campo magnético externo, e a seguir, fazemos o estudo similar quando há somente o campo elétrico externo. Com isso, obtemos as possíveis soluções para as relações de dispersão, os índices de refração, e as velocidades de grupo. Nessas situações, a direção de propagação da onda e a direção dos campos externos têm um papel fundamental na interpretação física dos resultados. De modo que os índices de refração e as velocidades de grupo dependem da direção que vetor de onda faz com os campos externos. Por exemplo, se o vetor de onda é paralelo aos vetores de campo externos, as soluções para os índices de refração são iguais a um, a velocidade de grupo reduz-se a velocidade da luz no vácuo, e o meio material se comporta como o vácuo usual da eletrodinâmica de Maxwell. Por outro lado, se a direção de propagação da onda é perpendicular aos campos externos, os efeitos não-lineares advindos das eletrodinâmicas produzem correções aos índices de refração e velocidades de grupo.

Aplicamos nossos resultados no estudo da birrefringência nas eletrodinâmicas não-lineares mais conhecidas na literatura. A birrefringência é um fenômeno óptico onde o índice de refração do meio material muda de acordo com a polarização da onda propagante neste meio em relação ao campo magnético externo. Num exemplo para ilustrar a birrefringência, calculamos o índice de refração da onda quando a amplitude da flutuação do campo elétrico é paralela ao campo magnético externo, e posteriormente, calculamos o índice de refração agora quando a amplitude é perpendicular ao campo magnético externo. A birrefringência é definida como a subtração destes dois índices de refração, e muda de acordo com a eletrodinâmica linearizada. Com isso aplicamos a fórmula da birrefringência para as eletrodinâmicas de Euler-Heisenberg, Born-Infeld e ModMax. Como resultados, obtém-se que a eletrodinâmica de Born-Infeld, assim como a eletrodinâmica de Maxwell, não apresentam birrefringência do vácuo. Por

outro lado, as eletrodinâmicas de Euler-Heisenberg e de ModMax são birrefringentes. Ademais, a partir dos dados do experimento PVLAS, mostramos que o valor experimental para birrefringência do vácuo pode ser utilizado para colocar um limite superior no parâmetro de ModMax.

Por fim, gostaríamos de colocar algumas perspectivas futuras. Neste trabalho inicial, de caráter introdutório sobre eletrodinâmicas não-lineares e efeitos ópticos na presença de campos eletromagnéticos externos, focamos nos conceitos comumente investigados na literatura, i.e., nas relações de dispersão, índices de refração, velocidades de grupo, bem como a obtenção do tensor energia-momentum, vetor de Poynting, momentos linear e angular. Além disso, procuramos dar atenção especial ao efeito da birrefringência na presença de campo magnético externo. No entanto, precisamos deixar claro para o(a) leitor(a) que existem outros assuntos que não foram contemplados nesta primeira contribuição. Por exemplo, a averiguação do índice de refração de um meio material (não mais o vácuo) que pode responder linearmente ou não-linearmente, pois, diferentemente do vácuo, um dado meio responde a campos eletromagnéticos sem que precisemos expandir em torno de um campo externo. Essa não é uma questão imediata. Ressaltamos também uma possível generalização da lei de Snell-Descartes. Além disso, vale a pena ressaltar que existem outros efeitos na presença de campos externos. Dentre estes, destacamos o *photon splitting* devido a um campo magnético externo, bem como a criação de pares elétron-pósitron e efeito Kerr (birrefringência) relacionados a um campo elétrico externo. Tudo isso são questões mais elaboradas, que esperamos discutir em um trabalho futuro.

Appendix

A. Notação Indicial

Neste apêndice, apresentaremos a notação utilizada em grande parte das equações desse trabalho. Para uma abordagem mais detalhada, sugerimos os livros [80, 82, 87, 88].

Consideremos um vetor $\mathbf{A}$ escrito em termos das suas componentes num espaço Euclidiano tridimensional. Podemos escrevê-lo em coordenadas cartesianas como

$$\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{e}}_x + A_y \hat{\mathbf{e}}_y + A_z \hat{\mathbf{e}}_z, \quad (\text{A.1})$$

onde $\hat{\mathbf{e}}_x$, $\hat{\mathbf{e}}_y$ e $\hat{\mathbf{e}}_z$ são vetores unitários associados aos eixos x , y e z , respectivamente, e A_x , A_y e A_z são as componentes reais do vetor. Seja um outro vetor $\mathbf{B}$ dado por $\mathbf{B} = B_x \hat{\mathbf{e}}_x + B_y \hat{\mathbf{e}}_y + B_z \hat{\mathbf{e}}_z$, definido no mesmo espaço. Assim como no caso dos números reais, podemos fazer operações matemáticas com vetores. A soma $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ é um novo vetor em que suas componentes são as somas

das componentes destes vetores:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x) \hat{\mathbf{e}}_x + (A_y + B_y) \hat{\mathbf{e}}_y + (A_z + B_z) \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (\text{A.2})$$

Similarmente, a subtração entre estes vetores é

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_x - B_x) \hat{\mathbf{e}}_x + (A_y - B_y) \hat{\mathbf{e}}_y + (A_z - B_z) \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (\text{A.3})$$

Há duas possibilidades distintas de produto entre vetores: o produto escalar ($\cdot$) e o produto vetorial ($\times$), que são definidos, respectivamente, por

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z, \quad (\text{A.4a})$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{\mathbf{e}}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{\mathbf{e}}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (\text{A.4b})$$

Muitas vezes, para fins de demonstrações de diversas identidades vetoriais, é conveniente escrever esses produtos em uma notação mais compacta. Observe que podemos reescrever a eq. (A.1) como

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 A_i \hat{\mathbf{e}}_i, \quad (\text{A.5})$$

em que trocamos a notação das componentes x , y e z por 1, 2 e 3. Desse modo, os produtos escalar e vetorial podem ser reescritos como

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_i B_j (\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j), \quad (\text{A.6a})$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_i B_j (\hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j), \quad (\text{A.6b})$$

onde os produtos entre os vetores unitários devem obedecer as seguintes relações

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij}, \quad (\text{A.7a})$$

$$\hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_k. \quad (\text{A.7b})$$

A quantidade δ_{ij} é chamada de *delta de Kronecker* e é definida por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

O delta de Kronecker é simétrico perante a troca dos índices i e j , ou seja, $\delta_{ij} = \delta_{ji}$. Já a quantidade ϵ_{ijk} é completamente antissimétrica nos índices i , j e k , chamada de *símbolo de Levi-Civita*, e é definido por

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{se } (i, j, k) \text{ for } (1, 2, 3), (2, 3, 1) \text{ ou } (3, 1, 2). \\ -1, & \text{se } (i, j, k) \text{ for } (3, 2, 1), (2, 1, 3) \text{ ou } (1, 3, 2). \\ 0, & \text{quando houver índices repetidos.} \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Com essas definições, os produtos escalar e vetorial das eqs. (A.6a) e (A.6b) são escritos como

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 A_i B_i, \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} A_i B_j \hat{\mathbf{e}}_k, \quad (\text{A.11})$$

respectivamente. Neste momento, é oportuno alertar o(a) leitor(a) para não confundir a notação do vetor unitário $\hat{\mathbf{e}}_i$ deste apêndice com a flutuação do campo elétrico $\mathbf{e}_i$ utilizada nas demais seções.

Podemos simplificar ainda mais se observamos que os índices de soma sempre aparecem repetidos nas expressões. Por exemplo, na eq. (A.10), temos uma soma no índice i , que surge tanto em $\mathbf{A}$, quanto em $\mathbf{B}$. Portanto, podemos omitir o símbolo do somatório, considerando que quando tivermos índices repetidos, subentende-se que há uma soma. Essa regra é conhecida como a *convenção de Einstein*. Assim, reescrevemos as eqs. (A.10) e (A.11) como

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_i, \quad (\text{A.12a})$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \epsilon_{ijk} A_i B_j \hat{\mathbf{e}}_k. \quad (\text{A.12b})$$

Observe que na eq. (A.12a), como era de esperar, o resultado do produto é um número, isto fica evidente visto que não há vetores unitários do lado direito da igualdade. Enquanto que na eq. (A.12b), o caráter vetorial da expressão fica explícito na soma nos vetores unitários.

Contudo, vale ressaltar que, em muitos contextos, não é necessário manter os vetores unitários explícitos. Quando trabalhamos em uma base cartesiana fixa, os vetores são completamente determinados por suas componentes, e toda a informação geométrica já está contida nos índices, pois já sabemos que os vetores unitários são ortonormais. Assim, podemos operar diretamente com as componentes dos vetores sem escrever $\mathbf{e}_k$. Essa prática simplifica a notação, e deixa os cálculos mais simples. Por exemplo, a componente k do produto vetorial $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ toma a forma

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_k = \epsilon_{ijk} A_i B_j. \quad (\text{A.13})$$

Outra característica interessante da convenção de Einstein é que podemos renomear os índices repetidos sem alterar o significado da equação, isto é, $A_i B_i = A_j B_j = A_k B_k$. Podemos usar qualquer letra, desde que esta já não esteja sendo usada em outra soma na mesma expressão. Esses índices são frequentemente chamados de *índices mudos*. Já os índices que aparecem apenas uma vez, isto é, que não representam uma soma, são chamados de *índices livres*, e indicam a natureza da grandeza física. Grandezas físicas sem índices livres são consideradas escalares; com um índice livre são consideradas vetores (observe na eq. (A.5), se omitirmos o vetor

unitário, o índice i permanece livre). Dois índices livres, caracterizam um tensor de segunda ordem, como a delta de Kronecker, e assim sucessivamente. Por exemplo, na eq. (A.13), os índices i e j são mudos, e k é um índice livre (não representa uma soma).

Uma relação muito útil usada em alguns desenvolvimentos nas equações desse trabalho é dada por

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{kmn} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}. \quad (\text{A.14})$$

Note que o índice k do lado esquerdo de (A.14) é mudo. O leitor pode checar a validade desta equação por meio das definições nas eqs. (A.8) e (A.9).

Naturalmente, podemos estender essa notação para os operadores diferenciais tridimensionais. Seja Φ um campo escalar, e $\mathbf{A}$ um campo vetorial. Na notação indicial, os operadores gradiente, divergente e rotacional assumem a forma

$$(\nabla \Phi)_i = \partial_i \Phi, \quad (\text{A.15a})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_i A_i, \quad (\text{A.15b})$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_k = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k, \quad (\text{A.15c})$$

onde adotamos a forma compacta $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$. Nesse contexto, a identidade

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B} \quad (\text{A.16})$$

é usada na obtenção da eq. (23). A demonstração dessa expressão é simples se usarmos a relação (A.14). De fato, abaixo realizamos isso,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \partial_i (\epsilon_{ijk} A_j B_k) \\ &= \epsilon_{ijk} (\partial_i A_j) B_k + \epsilon_{ijk} A_j (\partial_i B_k) \\ &= \epsilon_{ijk} (\partial_i A_j) B_k - \epsilon_{ikj} (\partial_i B_k) A_j \\ &= B_k (\nabla \times \mathbf{A})_k - A_k (\nabla \times \mathbf{B})_k \\ &= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}), \end{aligned}$$

onde utilizamos a propriedade de antissimetria $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj}$.

B. A Obtenção do Tensor de Tensões

Neste apêndice, vamos apresentar as principais passagens para a obtenção do tensor de tensões (28) e, consequentemente, do teorema de momento linear do campo eletromagnético num campo de fundo eletromagnético externo variável, apresentado na eq. (31). Para isso, na eq. (26) será útil reescrevermos os termos do lado esquerdo da igualdade em componentes de acordo com as identidades vetoriais

$$\begin{aligned} [(\nabla \times \mathbf{e}) \times \mathbf{d} + (\nabla \times \mathbf{h}) \times \mathbf{b}]_i \\ = \epsilon_{ijk} \epsilon_{jmn} (\partial_m e_n) d_k + \epsilon_{ijk} \epsilon_{jmn} (\partial_m h_n) b_k. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Note que i é o índice livre, que representa a i -ésima componente do vetor no lado esquerdo. Nesta etapa,

utilizamos a eq. (A.14) nos produtos dos símbolos de Levi-Civita,

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{jmn} = -\epsilon_{ikj} \epsilon_{jmn} = -\delta_{im} \delta_{kn} + \delta_{in} \delta_{km}. \quad (\text{A.18})$$

Assim, a eq. (A.17) adquire a forma

$$\begin{aligned} & [(\nabla \times \mathbf{e}) \times \mathbf{d} + (\nabla \times \mathbf{h}) \times \mathbf{b}]_i \\ &= -(\partial_i e_k) d_k + (\partial_k e_i) d_k - (\partial_i h_k) b_k + (\partial_k h_i) b_k \\ &= -\partial_i (e_k d_k) + e_k (\partial_i d_k) + \partial_k (e_i d_k) - e_i (\nabla \cdot \mathbf{d}) \\ &\quad - \partial_i (h_k b_k) + h_k (\partial_i b_k) + \partial_k (h_i b_k) - e_i (\nabla \cdot \mathbf{b}). \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Com o uso da Lei de Gauss (21a), o quarto termo da segunda linha pode ser escrito como $-\rho e_i$. Já o último termo da terceira linha se anula, pois $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$. Agora, com relação aos termos $e_k (\partial_i d_k)$ e $h_k (\partial_i b_k)$, utilizamos as definições de d_i e h_i fornecidas pelas eqs. (19), bem como as propriedades $\beta_{km} = -\alpha_{mk}$, $\varepsilon_{km} = \varepsilon_{mk}$ e $\mu_{km}^{-1} = \mu_{mk}^{-1}$. Deste modo é possível mostrar que a expressão (26) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} & \partial_k (e_i d_k + h_i b_k) - \partial_i (\mathbf{e} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{h}) \\ &+ \frac{1}{2} \partial_i (e_k \varepsilon_{km} e_m + b_k \mu_{km}^{-1} b_m) + \frac{1}{2} e_k (\partial_i \varepsilon_{kj}) e_j \\ &- \frac{1}{2} b_k [\partial_i (\mu^{-1})_{kj}] b_j + e_k (\partial_i \alpha_{kj}) b_j \\ &= \partial_t (\mathbf{d} \times \mathbf{b})_i + \rho e_i + (\mathbf{J} \times \mathbf{b})_i. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Por outro lado, utilizando novamente as eqs. (19), a expressão entre parênteses no terceiro termo na primeira linha da eq. (A.20) toma a forma

$$\begin{aligned} & e_k \varepsilon_{km} e_m + b_k \mu_{km}^{-1} b_m \\ &= e_k (d_k - \alpha_{km} b_m) + b_k (h_k - \beta_{km} e_m) \\ &= \mathbf{e} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{h}, \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

onde as contribuições em α_{km} e β_{km} se cancelaram devido a propriedade $\beta_{km} = -\alpha_{mk}$. Inserindo o resultado (A.21) na eq. (A.20), e simplificando os termos, obtemos

$$\begin{aligned} & \partial_k (e_i d_k + h_i b_k) - \frac{1}{2} \partial_i (\mathbf{e} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{h}) + \frac{1}{2} e_k (\partial_i \varepsilon_{kj}) e_j \\ &- \frac{1}{2} b_k [\partial_i (\mu^{-1})_{kj}] b_j + e_k (\partial_i \alpha_{kj}) b_j \\ &= \partial_t (\mathbf{d} \times \mathbf{b})_i + \rho e_i + (\mathbf{J} \times \mathbf{b})_i. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Por último, basta renomearmos os índices $i \rightarrow j$, em seguida de $k \rightarrow i$, e definindo as grandezas físicas como a densidade de momento linear do campo eletromagnético, a densidade da força de Lorentz, e o tensor de tensões (28), que chegaremos na eq. (31).

Agradecimentos

L.P.R. Ospedal agradece o suporte da *Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro* (FAPERJ) por sua bolsa de pós-doutorado sênior. Os autores dedicam este trabalho a Chen Ning Yang *in memoriam*.

Disponibilidade de Dados

Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

Referências

- [1] J.C. Maxwell, Phil. Trans. R. Soc. Lond. **155**, 459 (1865).
- [2] H. Hertz, em: *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin VI. VII* (Königlichen Akademie der Wissenschaften, Berlin, 1888).
- [3] H. Hertz, *Electric waves* (Macmillan, London, 1893).
- [4] K. Shaposhnikov, *On the article by S.I. Vavilov: "Remarks on the empirical accuracy of the optical superposition principle"* [Engl. transl. of Zh. Russk. Fiz.-Khim. Obshch., Ch. Fiz. 61(1929)215], disponível em: <https://hal.science/hal-01620890>.
- [5] S.I. Vavilov, Phys. Rev. **36**, 1590 (1930).
- [6] S.I. Vavilov, *Reply to the remarks by K. N. Shaposhnikov* [Engl. transl. of Zh. Russk. Fiz.-Khim. Obshch., Ch. Fiz. 61 (1929) 393], disponível em: <https://hal.science/hal-01631223>.
- [7] W.H. Watson, Proc. R. Soc. Lond. A **125**, 345 (1929).
- [8] M. Planck, Ann. Physik **1**, 719 (1900).
- [9] M. Planck, em: *The Old Quantum Theory* (Pergamon Press, Oxford, 1967).
- [10] A. Einstein, Ann. Physik **17**, 891 (1905).
- [11] P.A.M. Dirac, Proc. R. Soc. Lond. A **114**, 243 (1927).
- [12] P.A.M. Dirac, Proc. R. Soc. Lond. A **114**, 710 (1927).
- [13] G. Bacciagaluppi e A. Valentini, arXiv:quant-ph/0609184 (2006).
- [14] S.S. Schweber, *QED and the Men Who Made It: Dyson, Feynman, Schwinger, and Tomonaga* (Princeton University Press, Princeton, 1994).
- [15] S.J. Brodsky e S.D. Drell, Phys. Rev. D **22**, 2236 (1980).
- [16] T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita e M. Nio, Phys. Rev. Lett. **109**, 111807 (2012).
- [17] C.D. Anderson, Phys. Rev. **43**, 491 (1933).
- [18] W.E. Lamb e R.C. Retherford, Phys. Rev. **72**, 241 (1947).
- [19] H.A. Bethe, Phys. Rev. **72**, 339 (1947).
- [20] J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
- [21] O. Halpern, Phys. Rev. **44**, 855 (1933).
- [22] H. Euler e B. Kockel, Naturwiss. **23**, 246 (1935).
- [23] H. Euler, Ann. Physik. **26**, 398 (1936).
- [24] G.E.M. Jauncey e A.L. Hughes, Phys. Rev. **35**, 1439 (1930).
- [25] A.L. Hughes e G.E.M. Jauncey, Phys. Rev. **36**, 773 (1930).
- [26] A.K. Das, Phys. Rev. **37**, 94 (1931).
- [27] W.T. Hill III e L. Roso, J. Phys.: Conf. Ser. **869**, 012015 (2017).
- [28] ATLAS Collaboration, Nature Phys. **13**, 852 (2017).
- [29] ATLAS Collaboration, Phys. Rev. Lett. **123**, 052001 (2019).
- [30] J. Ellis, N.E. Mavromatos, P. Roloff e T. You, Eur. Phys. J. C **82**, 634 (2022).

- [31] W. Heisenberg e H. Euler, arXiv:physics/0605038 (2006).
- [32] G.V. Dunne, Int. J. Mod. Phys. conf. Ser. **14**, 42 (2012).
- [33] J.J. Klein e B.P. Nigam, Phys. Rev. **135**, B1279 (1964).
- [34] R. Baier e P. Breitenlohner, Il Nuovo Cimento **47**, 117 (1967).
- [35] R.P. Mignani, V. Testa, D. Gonzalez Caniulef, R. Taverna, R. Turolla, S. Zane e K. Wu, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **465**, 492 (2017).
- [36] V.M. Kaspi e A.M. Beloborodov, Annual Review of Astronomy and Astrophysics **55**, 261 (2017).
- [37] A. Ejlli, F. Della Valle, U. Gastaldi, G. Messineo, R. Pengo, G. Ruoso e G. Zavattini, Phys. Rept. **871**, 1 (2020).
- [38] M. Born e L. Infeld, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A **144**, 425 (1934).
- [39] B. Kwal e J. Solomon, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences (Paris) **202**, 933 (1936).
- [40] C.D. Thomas, Phys. Rev. **50**, 1046 (1936).
- [41] S. Tomonaga e M. Kobayashi, Sci. Pap. Inst. Phys. Chem. Res. **34**, 1643 (1938).
- [42] C. Callan e J. Maldacena, Nucl. Phys. B **513**, 198 (1998).
- [43] R. Shaw, *The Problem of Particle Types and Other Contributions to the Theory of Elementary Particles*. Doctoral Thesis, Cambridge University, Cambridge (1955).
- [44] C.N. Yang e R. Mills, Phys. Rev. **96**, 191 (1954).
- [45] V.G. Skobov, J. Exptl. Theoret. Phys. **8**, 919 (1959).
- [46] A. Minguzzi, Il Nuovo Cimento **4**, 476 (1956).
- [47] A. Minguzzi, Il Nuovo Cimento **6**, 501 (1957).
- [48] A. Minguzzi, Il Nuovo Cimento **19**, 847 (1961).
- [49] J. Plebanski, *Lectures on nonlinear Electrodynamics* (Nordita, Copenhagen, 1968).
- [50] Z. Bialynicka-Birula e I. Bialynicki-Birula, Phys. Rev. D **2**, 2341 (1970).
- [51] G. Boillat, J. Math. Phys. **11**, 941 (1970).
- [52] G. Boillat, Lett. Nuovo Cim. **4**, 274 (1972).
- [53] I. Bialynicki-Birula, em: *Quantum Theory of Particles and Fields: Birthday volume dedicated to Jan Łopuszański*, editado por B. Jancewicz e J. Lukierski (World Scientific, Singapore, 1983).
- [54] I. Bandos, K. Lechner, D. Sorokin e P.T. Townsend, Phys. Rev. D **102**, 121703(R) (2020).
- [55] K. Lechner, P. Marchetti, A. Sainaghi e D. Sorokin, Phys. Rev. D **106**, 016009 (2022).
- [56] D. Sorokin, Fortsch. Phys. **70**, 2200092 (2022).
- [57] R. Battesti e C. Rizzo, Rep. Prog. Phys. **76**, 016401 (2013).
- [58] H. Babaei-Aghbolagh, K.B. Velni, D.M. Yekta e H. Mohammadzadeh, Phys. Rev. D **106**, 086022 (2022).
- [59] H. Babaei-Aghbolagh, K.B. Velni, D.M. Yekta e H. Mohammadzadeh, Phys. Lett. B **829**, 137079 (2022).
- [60] R. Conti, J. Romano e R. Tateo, JHEP **09**, 085 (2022).
- [61] A.C. Keser, Y. Lyanda-Geller e O.P. Sushkov, Phys. Rev. Lett. **128**, 066402 (2022).
- [62] M.J. Neves, P. Gaete, L.P.R. Ospedal e J.A. Helayël-Neto, J. Phys. A **56**, 415701 (2023).
- [63] F. Haas, P. Gaete, L.P.R. Ospedal e J.A. Helayël-Neto, Phys. Plasmas **26**, 042108 (2019).
- [64] L.P.R. Ospedal e F. Haas, Phys. Plasmas **30**, 062112 (2023).
- [65] P. Gaete e J.A. Helayël-Neto, Eur. Phys. J. C **74**, 3182 (2014).
- [66] P. Gaete e J.A. Helayël-Neto, Eur. Phys. J. C **74**, 2816 (2014).
- [67] I. Bandos, K. Lechner, D. Sorokin e P.K. Townsend, JHEP **10**, 031 (2021).
- [68] I. Bandos, K. Lechner, D. Sorokin e Paul K. Townsend, JHEP **06**, 171 (2023).
- [69] S. Arunasalam e A. Kobakhidze, Eur. Phys. J. C **77**, 444 (2017).
- [70] P. De Fabritiis e J.A. Helayël-Neto, Eur. Phys. J. C **81**, 788 (2021).
- [71] M.J. Neves, L.P.R. Ospedal, J.A. Helayël-Neto e P. Gaete, Eur. Phys. J. C **82**, 327 (2022).
- [72] G.N. Remmen e N.L. Rodd, JHEP **12**, 032 (2019).
- [73] G.W. Gibbons e C.A.R. Herdeiro, Phys. Rev. D **63**, 064006 (2001).
- [74] R. Kerner, arXiv: 2303.10603 [math-ph] (2023).
- [75] J.M.A. Paixão, L.P.R. Ospedal, M.J. Neves e J.A. Helayël-Neto, JHEP **10**, 160 (2022).
- [76] J.M.A. Paixão, L.P.R. Ospedal, M.J. Neves e J.A. Helayël-Neto, JHEP **05**, 029 (2024).
- [77] E. Neres Júnior, J.C.C. Felipe e A.P.B. Scarpelli, J. Phys. A **57**, 225401 (2024).
- [78] M.J. Neves, J.B. Oliveira, L.P.R. Ospedal e J.A. Helayël-Neto, Phys. Rev. D **104**, 015006 (2021).
- [79] L.P.R. Ospedal, R. Turcati e S.B. Duarte, arXiv:2512.02054v1 [physics.gen-ph] (2025).
- [80] J.D. Jackson, *Classical electrodynamics* (John Wiley & Sons, Roboken, 1999), 3 ed.
- [81] M.A. Butt, S.N. Khonina e N.L. Kazanskiy, Optics & Laser Technology **142**, 107265 (2021).
- [82] A. Zangwill, *Modern electrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2012).
- [83] M.J. Neves, P. Gaete, L.P.R. Ospedal e J.A. Helayël-Neto, Phys. Rev. D **107**, 075019 (2023).
- [84] P. Gaete, J.A. Helayël-Neto e L.P.R. Ospedal, EPL **125**, 51001 (2019).
- [85] S.I. Kruglov, Annalen Phys. **527**, 397 (2015).
- [86] S.I. Kruglov, Int. J. Mod. Phys. D **26**, 1750075 (2017).
- [87] J. Barcelos Neto, *Matemática para físicos com aplicações* (Livraria da Física, São Paulo, 2010), v. 1.
- [88] G. Arfken e H.H. Weber, *Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física* (Elsevier, Rio de Janeiro, 2007).