Universidade Federal de São João del-Rei

Jennifer Caroline Maia Cardoso

NÚMEROS IRRACIONAIS E TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO: POSSIBILIDADES DE ENCONTRO

São João del-Rei – MG

2018

Jennifer Caroline Maia Cardoso

NÚMEROS IRRACIONAIS E TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO: POSSIBILIDADES DE ENCONTRO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenadoria do Curso de Matemática, da Universidade Federal de São João del-Rei, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Viviane Cristina Almada de Oliveira

São João del-Rei, 2018.

Banca Examinadora

____
Orientadora: Profª. Drª. Viviane Cristina Almada de Oliveira

____
Profª. Fabíola de Oliveira Miranda

____
Prof. Dr. Francinildo Nobre Ferreira

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, que iluminou o meu caminho e me deu forças para chegar ao final desta jornada.

Agradeço também a todos os professores com os quais tive o prazer de conviver durante este curso, aprendi muito com cada um de vocês. De modo especial, agradeço a minha professora orientadora Viviane, pela paciência, compreensão e por todos os ensinamentos compartilhados durante este percurso.

Agradeço de modo especial também, a minha família, pelo incentivo, por terem acreditado em mim e não terem me deixado desistir.

Agradeço também a todos os amigos com os quais convivi este tempo, vocês foram meu apoio e me ajudaram muito a chegar até aqui.

Enfim gratidão a todos que fizeram parte desta caminhada.

“Quem se atreve a ensinar, nunca deve deixar de aprender”

John Cotton Dana

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo descrever atividades sobre números irracionais que utilizem tecnologias da informação e comunicação (TIC), pois estas constituem uma ferramenta auxiliar no processo de ensino, podendo se tornar grandes aliadas do professor em sala de aula. Inicialmente, foi realizada uma revisão bibliográfica sobre como está sendo desenvolvido o ensino deste conteúdo, nas várias etapas da educação escolar. Diante das dificuldades apontadas por muitos autores em relação ao processo de ensino e de aprendizagem deste tema e de posse de algumas atividades sugeridas por alguns destes autores, realizamos uma análise crítica das atividades encontradas. Ao final do trabalho, optamos também por inserir algumas atividades que podem ser desenvolvidas a partir do uso de outras tecnologias, visto que estas também podem contribuir para o processo de ensino e de aprendizagem deste conteúdo em sala de aula.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Os números irracionais constituem um dos conteúdos escolares que os alunos apresentam considerável dificuldade. Dentre algumas causas destas dificuldades, Mendes (2012) evidencia a falta de construção de significado para esse conjunto numérico, pelos alunos. E acrescenta ainda:

> Os estudantes tornam-se repetidores de mecanismos e nem sempre sabem o motivo da existência dos números irracionais, afirmando, algumas vezes, quando questionados, que “são aqueles que não servem pra nada”. (p. 20)

Como colocado acima, podemos observar que, em relação aos números irracionais, geralmente os alunos simplesmente decoram métodos de resolução e algoritmos, sem compreenderem a razão de utilizar tais métodos e a importância da construção deste conjunto numérico.

Pommer (2012) nos chama a atenção para a complexidade desses números, dizendo que:

> (...) os números irracionais (...), representam uma ideia matemática sofisticada, não trivial e pouco intuitiva, dificultando a abordagem desse assunto em sala de aula. Esta intrínseca característica teórica remete a uma necessária busca de recursos didáticos e epistemológicos para discutir a problemática de introduzir esse campo numérico de modo significativo, no ensino básico. (p. 24)

Entendemos, na direção sugerida por Pommer, ser necessário se buscarem materiais didáticos e metodologias de ensino diferenciadas que tanto auxiliem professores de Matemática na discussão desse conteúdo quanto se convertam em oportunidades para que os alunos compreendam ideias relacionadas aos números irracionais.

Sabemos também que as TIC (Tecnologias da Informação e Comunicação) podem ser grandes aliadas no processo educacional. Kesseler (2010) afirma que:

> As TIC naturalmente avançam em direção ao progresso do sistema educacional brasileiro viabilizando grandes quantidades de informações, ajudando professores na criação de softwares, objetos de aprendizagens que poderão auxiliar no processo de ensino-aprendizagem no ambiente escolar. (p. 05)

Dentre as TIC, podemos dar destaque aos vídeos, à internet e ao computador. Os vídeos, por serem recursos audiovisuais, capazes de reproduzirem imagens em movimento, podem ser utilizados para retratar determinado conteúdo ou partes dele.

Já a internet, como apontado por Moran, Masetto e Behrens (2000), é um recurso dinâmico, atualizadíssimo, de fácil acesso, que possibilita o encontro com um número ilimitado de informações. Ela é um recurso para o desenvolvimento de atividades de pesquisa e de busca de informações, o que a torna um rico instrumento de aprendizagem.

O computador é uma tecnologia que pode ser muito utilizada a favor da educação, como mediador e facilitador da aprendizagem, permitindo a criação de aulas mais dinâmicas, sendo um auxiliador tanto para os alunos como para os professores.

Assim, acreditamos que a utilização das TIC pode contribuir para os processos de ensino e de aprendizagem em sala de aula, desde que elas sejam utilizadas como um meio de promover a construção do conhecimento pelos alunos.

Diante disso, este trabalho **busca apresentar, discutir e propor atividades que sejam interessantes para os processos de ensino e de aprendizagem dos números irracionais e que sejam desenvolvidas com a utilização de TIC**, levantadas a partir de uma revisão bibliográfica de publicações na área de Educação Matemática que discutem essa temática, buscando analisá-las e discuti-las.

2. NÚMEROS IRRACIONAIS

Os números irracionais constituem um dos conteúdos da escolaridade básica de ensino que os alunos apresentam consideráveis dificuldades. Alguns autores nos chamam atenção para a complexidade que cerca este conteúdo. Pommer (2012), por exemplo, afirma que "(...) os números irracionais, (...), representam uma ideia matemática sofisticada, não trivial e pouco intuitiva, dificultando a abordagem deste assunto em sala de aula." (p. 24).

Broetto (2016) considera que:

> (...) os números irracionais passaram por um longo processo de transformação e aceitação até adquirirem o *status* de número. Da história para o ensino, vemos que esse processo de aceitação, já resolvido pelos matemáticos, ainda ronda nossas salas de aula. (p. 336)

Santos (2014) também nos diz que:

> a compreensão dos números irracionais, por exemplo, $\sqrt{2}$, o número π e o número e, representa um pensamento matemático elaborado e pouco intuitivo. Desse modo, essa característica intrínseca dos números irracionais dificulta a abordagem deste tema em sala de aula. (p. 20)

Além desse conjunto dos números irracionais já se constituir como um conteúdo um pouco complexo, a maneira de abordagem deste assunto em alguns livros didáticos também constitui um problema. É o que Santos (2014) concluiu a partir de sua pesquisa:

> a maioria dos alunos apresentam concepções erradas acerca dos números irracionais. Tais concepções adquiridas pelos alunos parecem estar relacionadas ao modo como é introduzido os números irracionais nos livros didáticos no Ensino Fundamental II. (p.40)

Este autor enfatiza que muitos livros didáticos definem o conjunto dos números reais como sendo a união disjunta dos números racionais com os números irracionais. E apresentam também os números irracionais como os números reais que não são racionais. Esta caracterização circular dos números irracionais pode trazer confusões à compreensão desses números.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática do Ensino Fundamental II, sugere que o estudo dos números irracionais seja realizado a partir do quarto ciclo do Ensino Fundamental (8º e 9º anos). Fazendo referência a este estudo, os PCN colocam que:

> Embora o estudo dos números e operações seja um tema importante nos currículos do ensino fundamental, constata-se, com frequência, que muitos alunos chegam ao final desse curso com um conhecimento insuficiente dos números, de como eles são utilizados e sem ter desenvolvido uma ampla compreensão dos diferentes significados das operações. Provavelmente isso ocorre em função de uma abordagem inadequada para o tratamento dos números e das operações e à pouca ênfase que tradicionalmente é dada a este assunto nos terceiro e quarto ciclo [sic]. (p. 95)

Seja pela maneira como geralmente é abordado em sala de aula ou pelas características específicas deste tema, por se tratar de um conteúdo abstrato e com poucas aplicações na vida dos estudantes, podemos perceber que os números irracionais é um conteúdo delicado e isso exige que o seu processo de ensino seja realizado com cautela.

Sales (2015) e Corbo (2012) nos chamam a atenção para outro problema que pode estar relacionado às dificuldades no entendimento dos números irracionais: a não compreensão deste conceito pelos próprios professores. Corbo (2012) aponta que “(...) em geral, não é dada a atenção merecida a esse conteúdo, também nos cursos de formação de professores.” (p.17).´

Em um estudo com cerca de 130 professores da rede estadual de ensino, Boff evidencia que as dificuldades em compreender e conceituar os números irracionais também atingem parte dos professores. Esse autor relata um episódio apresentado em Boff (2008), na qual “(...) alguns professores afirmaram que $\frac{2}{7}$ é um número irracional, pois quando fazem a divisão na calculadora resulta em 0,285714... ‘e como os decimais não se repetem, dois sétimos é irracional’ ”. (SALES, 2015, p.37).

Nota-se, portanto, que as raízes das dificuldades dos alunos na compreensão do conceito de números irracionais são diversas. Em geral elas podem estar relacionadas à incompreensão do conceito pelos alunos e também pelos professores, à maneira como este conceito é abordado nos livros didáticos e às metodologias e atividades adotadas pelo professor no ensino desse conteúdo.

Outras pesquisas evidenciam que a problemática em torno dos irracionais atinge várias etapas da vida escolar. Silva (2006) observou em sua pesquisa com alunos do primeiro ano do Ensino Médio que esses alunos chegam a essa etapa da escolarização “(...) apresentando pouca habilidade com os números irracionais.” (p. 123). Broetto (2016), a partir de sua pesquisa envolvendo alunos ingressantes numa licenciatura em Matemática, também afirma que o “[...] conhecimento prévio dos alunos que participaram de nossa pesquisa em relação aos números irracionais é bastante frágil, superficial, decorado e desconectado de outros conhecimentos.” (p.333).

Rezende (2013), em sua pesquisa com alunos concluintes de três níveis de ensino (Fundamental, Médio e Superior), evidenciou algumas dificuldades desses alunos em relação aos números irracionais. Os alunos investigados apresentaram dificuldades à incompreensão: da noção de infinito, da impossibilidade de representar um número irracional como uma razão de dois números inteiros, da não periodicidade dos irracionais, da diferenciação de números racionais e irracionais, da existência de segmentos de medidas irracionais, entre outras.

Segundo esse autor, dentre os três grupos de alunos de cada nível, os do Ensino Médio apresentaram avanço no desempenho em relação aos alunos do Ensino Fundamental e os alunos do Ensino Superior apresentaram avanços em relação aos do Ensino Médio.

Com isso, percebe-se que as dificuldades em torno dos irracionais não são exclusividade apenas de alunos do Ensino Fundamental, pois elas foram observadas também com alunos do Ensino Médio, do Ensino Superior e com professores da rede básica de ensino. Isto evidencia que essas dificuldades podem se arrastar por todas as etapas de escolarização. Os alunos terminam o Ensino Médio sem compreender bem este tema, passam pelo Ensino Superior e ainda saem de lá com dúvidas. Isso pode acontecer também com alunos de cursos de licenciatura em Matemática que, quando vão atuar na sala de aula, sem se ter tratado adequadamente as ideias relativas a esse tema, se apoiam cegamente nos livros didáticos, que muitas vezes, abordam esse tema superficialmente ou sem problematizá-lo.

Silva (2006) apresenta uma sugestão de como pode ser realizado o processo de ensino dos irracionais:

> Os conteúdos envolvendo os números irracionais devem ser abordados em sala de aula embasados em atividades construtivistas, seguindo uma sequência didática e desenvolvidas em pequenos grupos de estudo. (p.124)

Este autor pontua ainda que as atividades, sendo desenvolvidas em grupo, favorecem a interação dos estudantes. O professor também, neste caso, não é o transmissor do conhecimento, ele é apenas um mediador, que cria condições para que os próprios alunos, interagindo em pequenos grupos, construam seus conhecimentos.

Os PCN de Matemática do Ensino Fundamental também sugerem que:

> Na perspectiva de que o aluno amplie e aprofunde a noção de número, é importante colocá-lo diante de situações em que os números racionais são insuficientes para resolvê-las, tornando-se necessária a consideração de outros números: os irracionais. Recomenda-se, no entanto, que a abordagem destes últimos não siga uma linha formal, que se evite a identificação do número irracional com um radical e que não se enfatizem os cálculos com radicais, como ocorre tradicionalmente. (p.83)

E ainda completam que é importante que os alunos entendam que os irracionais são números constituídos por infinitas casas, não periódicas, que é possível "representá-los" na reta numérica[1], que é impossível exprimi-los como uma razão de inteiros e saibam também localizá-los na reta numérica, além de proporcioná-los contraexemplos para ampliar a compreensão dos números.

Os PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio), tratando do ensino de Matemática nesta etapa da escolaridade, dizem que:

> O currículo do Ensino Médio deve garantir também espaço para que os alunos possam estender e aprofundar seus conhecimentos sobre números e álgebra, mas não isoladamente de outros conceitos, nem em separado dos problemas e da perspectiva sócio-histórica que está na origem desses temas. (p.44)

Ou seja, para o Ensino Médio, o que os PCNEM propõem é que o tópico números seja retomado novamente, para que os alunos aprofundem ainda mais as ideias que já foram inicialmente estudadas no Ensino Fundamental.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento que define o conjunto das aprendizagens essenciais e indispensáveis para cada ano da educação básica. Este documento é uma referência nacional obrigatória para a elaboração ou adequação dos currículos, tanto das escolas públicas quanto das particulares.

A BNCC aponta habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos com relação a cada conteúdo de acordo com o ano escolar. Tratando-se dos números irracionais, a indicação da BNCC para o estudo deste conteúdo é somente a partir do 9º ano do Ensino Fundamental. É apontada como habilidade a ser desenvolvida a partir desse estudo: "Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação

[1] Segundo Moreira e Ferreira (2012) medir um segmento é contar quantas vezes a unidade cabe exatamente no segmento a ser medido. Mas, contar quantas vezes, pressupõe como resultado um número inteiro. Entretanto, existem segmentos cujas medidas não podem ser expressas por uma fração (razão de dois inteiros). Neste caso, temos que considerar uma sequência, infinita de etapas, ou seja, exprimimos o comprimento do segmento em termos da unidade dada, pela soma de infinitas parcelas. Assim temos, que o tamanho de um segmento expresso por um número irracional é uma medida exata, apesar de só podermos exprimi-la como uma soma de infinitas parcelas.

decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica" (BRASIL, 2018, p. 315).

Podemos perceber, tendo por base as pesquisas na área de Educação Matemática que discutem ensino e aprendizagem dos números irracionais, muitos alunos passam por várias etapas de escolarização e ainda não conseguem compreender de maneira adequada este conceito. Jesus (2017) apresentou em seu trabalho de conclusão de curso uma análise de duas coleções de livros didáticos quanto à abordagem dos números irracionais. Diante da pesquisa realizada, a autora concluiu que a dificuldade na compreensão dos irracionais está relacionada ao modo como são definidos os conjuntos numéricos. Ela também aponta o quadro de circularidade envolto na definição dos irracionais. Segundo a autora essa circularidade é identificada quando os reais são apresentados como sendo a união disjunta dos irracionais com os racionas e os irracionais como sendo os reais que não são racionais. Além disso, esta autora também cita que o desenvolvimento das ideias de aproximação e de infinito são fundamentais para a compreensão dos conceitos e das operações que abordam a irracionalidade. Logo, a não discussão destas ideias com os alunos, compromete a compreensão do conceito de irracionalidade.

Jesus (2017) ainda observou nas coleções de livros analisadas em seu trabalho que tais ideias – de aproximação e infinito - são enfatizadas somente durante a abordagem inicial do conteúdo, quando se apresentam os números irracionais para os alunos do 8º ano. No entanto, posteriormente, quando são realizadas operações com os irracionais, verifica-se que estas ideias não são mais tão trabalhadas.

Pommer (2012) também analisou alguns livros didáticos e concluiu que muitos deles valorizam aspectos operatórios, finitos, exatos e determinísticos no trabalho com os números irracionais, o que equivale a estabelecer a predominância da técnica sobre o significado. Segundo esse autor, tais aspectos tratados são insuficientes para a compreensão desse conceito pelos alunos em sala de aula.

Podemos perceber que, o que se espera do ensino dos números irracionais é que o professor utilize metodologias e atividades que permitirão aos alunos a construção de seus conhecimentos e que poderão também auxiliar os próprios professores em suas práticas de ensino. Como exposto anteriormente, não é aconselhável que o professor fique apegado somente ao livro didático e priorize em sua prática apenas o aspecto algoritmo dos irracionais, priorizando cálculos que na maioria das vezes não fazem sentido nenhum para os alunos. Pois de acordo com as várias pesquisas que subsidiam este trabalho, foi possível observar que da maneira, como está sendo realizado o processo de ensino dos irracionais, não está produzindo significados nos alunos, por isso a necessidade de se buscar outras metodologias que contribuam para a realização deste processo de ensino.

3. TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO (TIC)

Tecnologia é uma das palavras que ouvimos muito na atualidade. Mas afinal, como definir tecnologia? De acordo com Veloso (2011):

> São diversas as conceituações de tecnologia. Em uma perspectiva mais superficial, o conceito de tecnologia pode ser aplicado a tudo aquilo que, não existindo na natureza, o ser humano inventa para expandir seus poderes, superar suas limitações físicas, tornar seu trabalho mais fácil e a sua vida mais agradável. Além disso, tecnologia não é apenas instrumento, ferramenta ou equipamento tangível. Ela pode constituir-se por elementos intangíveis, como procedimentos, métodos, técnicas etc. (p. 02)

Apoiados nesta definição, podemos perceber que a tecnologia está presente na vida do homem desde os primórdios, pois desde então o homem se vê na necessidade de desenvolver objetos e ou ferramentas para facilitar sua vida e seu trabalho.

> O que vemos na sociedade atual é um constante aprimoramento de nossas ferramentas de trabalho - e podemos concluir que tem sido assim ao longo da história da humanidade; em diversos aspectos, todas as ferramentas vêm sendo aprimoradas conforme suas funções, e outras vão sendo criadas conforme a demanda de cada época ou momento social. (SANCHES FILHO, 2005, p. 81)

O que aconteceu ao longo do desenvolvimento da humanidade foi uma grande evolução tecnológica. Passamos da idade da pedra, onde o homem criava ferramentas de pedra necessárias para a sua sobrevivência, à era da informação e da tecnologia digital, onde através de um clique temos acesso a um mundo de informações.

Nossa atualidade está marcada pelo uso das TIC. Podemos defini-las de acordo com Ramos (2008):

> Chamamos Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) aos procedimentos, métodos e equipamentos para processar informação e comunicar que surgiram no contexto da Revolução Informática, Revolução Telemática ou Terceira Revolução Industrial, desenvolvidos gradualmente desde a segunda metade da década de 1970 e, principalmente, nos anos 90

> do mesmo século. Estas tecnologias agilizaram e tornaram menos palpável o conteúdo da comunicação, por meio da digitalização e da comunicação em redes para a captação, transmissão e distribuição das informações, que podem assumir a forma de texto, imagem estática, vídeo ou som. Considera-se que o advento destas novas tecnologias e a forma como foram utilizadas por governos, empresas, indivíduos e sectores sociais possibilitaram o surgimento da Sociedade da Informação. (p. 05)

Oliveira e Moura (2015) acrescentam que as TIC:

> Podem ser entendidas como um conjunto de recursos tecnológicos integrados entre si, que proporcionam por meio das funções de software e telecomunicações, a automação e comunicação dos processos de negócios, da pesquisa científica e de ensino e aprendizagem. (p. 78)

Consideraremos como TIC, portanto, todas aquelas tecnologias que permitem criar, modificar ou transmitir as informações, além daquelas usadas também nos processos de automação e comunicação. Como exemplo de TIC temos: computador, televisão, vídeos, internet, calculadoras e softwares.

Apoiando-nos na definição de tecnologia proposta por Veloso (2011), podemos afirmar que as salas de aulas já incorporaram algumas tecnologias, como: giz, lousa, lápis, cadernos e livros.

Borba, Silva e Gadanidis (2014) apresentam o desenvolvimento do uso de tecnologias em Educação Matemática estruturado em quatro fases. Segundo estes autores, uma nova fase surge quando inovações tecnológicas possibilitam uma nova maneira de constituição de cenários de investigação matemática. Mas eles destacam também que o surgimento de uma nova fase não substitui a anterior, pelo contrário, elas se integram.

A primeira fase teve início por volta de 1985 e foi caracterizada pela utilização do software LOGO, que enfatiza relações entre linguagem de programação e pensamento matemático. Esta fase foi apoiada pela perspectiva teórica do construcionismo[2]. Foi nesta época também que surgiu a possibilidade de as escolas serem equipadas com laboratórios de informática.

A segunda fase teve início na segunda metade dos anos 1990, a partir da acessibilidade e popularização dos computadores pessoais. Nesta época, diversos softwares educacionais foram desenvolvidos, voltados às representações de funções e de geometria dinâmica. Nesta fase havia várias perspectivas em relação ao uso do

[2] Segundo Nunes e Santos (2013) Construcionismo é uma teoria que vê o aluno como construtor de sua estrutura intelectual, incluindo para isso a necessidade de materiais para exploração.

computador: muitos nunca haviam utilizado um computador, seja por desinteresse, falta de oportunidade, insegurança, desconhecimento ou medo; outros, utilizavam-no, mas não acreditavam em seu potencial; e outros, acreditando no potencial desta tecnologia, buscaram explorar suas possibilidades de uso didáticas e pedagógicas.

A terceira fase, por sua vez, teve início por volta de 1999, com o advento da internet. Nesta fase a internet começa a ser utilizada como fonte de informações e como meio de comunicação entre professores e estudantes e para a realização de cursos a distância para a formação continuada de professores.

Atualmente estamos vivenciando a quarta fase do uso das tecnologias na Educação Matemática. Esta fase teve início em meados de 2004, marcada pelo advento da internet rápida. Nesta fase a qualidade de conexão, a quantidade e o tipo de recursos disponibilizados pelo acesso à internet têm sido aprimorados, transformando a comunicação online.

Assistimos nas últimas décadas o rápido desenvolvimento das TIC. Nossa sociedade se tornou completamente dependente delas. Estamos tão habituados com essas tecnologias que já não conseguimos nem mesmo imaginar como seria viver sem elas. Já não sabemos viver sem celular, internet, computador, televisão e tantos outros aparelhos tecnológicos que usamos no nosso cotidiano.

Nossas crianças já nascem e crescem inseridas nesta sociedade tecnológica. E quando elas vão para a escola, muitas vezes esta instituição está funcionando em uma direção oposta: a de resistência à incorporação dessas tecnologias. Assim, para estas crianças e jovens, a escola se torna frequentemente algo arcaico e desinteressante.

Acreditamos que a escola, por sua vez, também deva buscar a inserção das TIC nas práticas educativas que ela promove, pois é uma maneira de inovar seu ambiente, tornando-o mais interessante para os alunos, além de ser uma ferramenta que pode potencializar, dinamizar e transformar tais práticas, tornando-as mais significativas. Quando dizemos dessa inserção, remetemo-nos principalmente à utilização de fato das tecnologias nas práticas pedagógicas dos professores, criando assim atividades mais significativas para os alunos.

Temos muitos autores que defendem a inserção das TIC na educação. Entre eles podemos citar Santos, Medeiros e Ribeiro (2017), que nos indicam que:

> É necessário educar as crianças para o consumo adequado e racional das tic's. Isso inclui motivar os alunos a conhecerem e utilizarem as tic's em favor

> do desenvolvimento intelectual e do bem-estar social. Se essas ferramentas forem assim utilizadas poderão permitir maiores possibilidades da garantia de uma educação de qualidade na condução dos alunos na busca de novos conhecimentos. (p.95)

Freitas (2016), considera que: “A realização de tarefas investigativas com recurso às novas tecnologias (...) [é] uma boa alternativa para cativar os alunos, proporcionando-lhes um papel mais ativo na construção do seu conhecimento”. (FREITAS, 2016, p. 01, comentário nosso). Esse mesmo autor acrescenta também que as crianças de hoje interagem de uma forma bastante empenhada e intuitiva com as tecnologias. Elas também não se prendem com tarefas morosas ou rotineiras, preferindo resultados mais imediatos. E as tecnologias conseguem oferecer este rápido *feedback*, contribuindo assim para o processo de aprendizagem destes alunos.

Os PCN também apoiam o uso consciente das TIC na educação, pontuando que a “(...) incorporação das inovações tecnológicas só tem sentido se contribuir para a melhoria da qualidade do ensino.” (BRASIL, 1998, p.140). Ainda nesse documento é apresentada uma importante ressalva, de que:

> A presença de aparato tecnológico na sala de aula não garante mudanças na forma de ensinar e aprender. A tecnologia deve servir para enriquecer o ambiente educacional, propiciando a construção de conhecimentos por meio de uma atuação ativa, crítica e criativa por parte de alunos e professores. (p. 140)

Como vimos, muitos são os benefícios que o uso das tecnologias em sala de aula pode proporcionar. Elas podem beneficiar tanto os alunos na construção de seus conhecimentos quanto os professores no desenvolvimento de sua prática, favorecendo a incorporação de práticas mais significativas para os alunos, além de permitir também um ambiente de visualização, experimentação e dinamismo.

As tecnologias podem ser boas aliadas no processo de ensino e de aprendizagem, tanto para os professores quanto para os alunos, desde que os professores reflitam sobre o seu uso e assim procurem maneiras mais adequadas para utilizá-las em sala de aula.

É importante salientar também que as tecnologias em sala de aula constituem em um meio e não uma finalidade em si. Ou seja, o objetivo não é que o aluno tenha uma aula de informática e sim que, através da utilização das tecnologias, o professor desenvolva sua prática contribuindo para que os alunos se familiarizem com estes recursos e, sobretudo, que eles tenham acesso a ferramentas capazes de proporcionar situações didáticas mais significativas, que se constituam em novas maneiras de olhar/compreender a Matemática.

Ao apoiar o uso das tecnologias em sala de aula, não acreditamos que esta seja a solução para todos os problemas pedagógicos existentes. Esta é apenas uma possível alternativa que, dependendo de como for utilizada pode acarretar um efeito negativo nos processos de ensino e de aprendizagem. Por isso a importância do professor refletir sobre como e quando utilizá-las.

O professor também deve ter consciência de que existem vários instrumentos pedagógicos e metodologias para serem utilizadas em sala de aula. As TIC, constituem apenas mais uma opção. Por isso, cabe ao professor saber adequar, de acordo com os objetivos que ele deseja alcançar, qual a metodologia/ instrumento mais conveniente.

Isso inclui também saber alternar entre as metodologias disponíveis. Por mais que os alunos ou o professor gostem mais de uma determinada metodologia/ instrumento pedagógico, o seu uso excessivo tornará esta metodologia/instrumento cansativo e desinteressante para os alunos. Por exemplo, por mais que os alunos tenham gostado muito de uma aula utilizando TIC e o professor tenham conseguido também atingir todos os seus objetivos propostos nesta aula, se o professor insistir em utilizar apenas este recurso em todas as suas aulas, essas poderão se tornar para os alunos exaustivas e desinteressantes.

Por isso é importante que o professor saiba diversificar os recursos e metodologias que utiliza em suas aulas. É relevante destacar também que a inclusão de novas metodologias e recursos não visa a abandonar os mais antigos. Quando defendemos o uso das TIC em sala de aula não buscamos, por exemplo, o abandono do quadro e do giz. Trata-se apenas de uma incorporação, de uma complementação.

Se nos posicionamos contra a utilização das tecnologias na educação, estamos sendo contra também ao uso do quadro, do lápis, do papel, etc, pois eles também são exemplos de tecnologias que já foram incorporadas à educação. (BORBA e PENTEADO, 2007). O que propomos aqui é a incorporação de TIC nas práticas dos professores em sala de aula, pois, como vimos, elas podem enriquecer muito o ambiente de sala de aula ao disponibilizar novas ferramentas, tanto para os alunos quanto para os professores, podendo resultar em reconfigurações dos processos de ensino e de aprendizagem.

Tendo exposto problemas de ensino que cercam os números irracionais e potencialidades das ferramentas que são as TIC, apresentamos então propostas de atividades para o ensino dos números irracionais baseadas na utilização de TIC, buscando tornar este ensino mais significativo para os alunos.

4. A PESQUISA

Para atender ao propósito do presente trabalho, uma busca no Portal de Periódicos da Capes[3] com a expressão “números irracionais” no campo de pesquisa. O site apresentou 61 resultados para esta busca. Refinamos nossa busca realizando a leitura dos resumos destes 61 trabalhos acadêmicos; deles, selecionamos 13 trabalhos que abordavam o ensino dos números irracionais e/ou apresentavam sugestões de atividades sobre o assunto. Realizada a leitura de todos estes 13 trabalhos, identificamos neles novas referências que discutiam sobre ensino e sobre aprendizagem de números irracionais, algumas das quais foram por nós consultadas para nos auxiliarem na escrita deste trabalho.

No que segue, apresentamos algumas das atividades que abordam números irracionais e que utilizam TIC. A organização das atividades ao longo do texto será feita em função do tipo de tecnologia usada para o tratamento desse conteúdo.

4.1. ATIVIDADES SOBRE NÚMEROS IRRACIONAIS UTILIZANDO O GEOGEBRA

O Geogebra é um software gratuito de geometria dinâmica desenvolvido em 2001, por Markus Hohenwarter, para o ensino e aprendizagem de Matemática, sendo possível sua utilização em todos os níveis de ensino.

Este software reúne recursos de geometria, álgebra, cálculo, gráficos, probabilidade e estatística em uma única plataforma[4]. Ele também é constituído por uma linguagem simples e prática.

Gravina e Contiero (2011) esclarecem que o Geogebra é considerado um software de geometria dinâmica, pois possui o recurso de “estabilidade sob ação de movimento”, ou seja, ao movimentar os pontos que sustentam uma determinada construção ela se modifica quanto ao tamanho e posição, mas suas propriedades geométricas são mantidas.

O Geogebra permite também um cenário de experimentação, no qual o aluno pode testar suas conjecturas e curiosidades, através da exploração do software, sem

---

[3] Disponível em: <http://www.periodicos.capes.gov.br/>
[4] Disponível em: <https://www.geogebra.org/about?ggbLang=pt_BR>

medo de errar. O software por sua vez consegue dar uma rápida resposta ao aluno sobre o resultado de sua ação.

Este software possui outra característica muito importante: a visualização. Esta característica contribui para a estruturação de conceitos matemáticos. Segundo Borba, Silva e Gadanidis (2014),

> A visualização envolve um esquema mental que representa a informação visual ou espacial. É um processo de formação de imagens que torna possível a entrada em cena das representações dos objetos matemáticos para que possamos pensar matematicamente. Ela oferece meios para que conexões entre representações possam acontecer. Assim, a visualização é protagonista na produção de sentidos e na aprendizagem matemática. (p.53)

Compreendemos o GeoGebra como uma rica ferramenta para ser utilizada em aulas de Matemática, desde que usada de maneira adequada, pela estruturação de uma atividade que tenha objetivos claros e seja adaptada às potencialidades e limitações do programa, poderá tanto ajudar o professor em sua prática de ensino quanto o aluno no seu processo de aprendizagem.

Atividade 01

Fonte: (Vasconcelos, 2016, p. 34)

Objetivos:

- Construir um segmento de medida $\sqrt{2}$;

-Observar que a expansão decimal de um número irracional é infinita e não-periódica;

-Observar que números irracionais também são possíveis de ser representados na reta numérica.

Descrição:

Quadro 1 - Atividade 01

Atividades básicas com o uso do geogebra podem dar real significado aos conceitos relacionados aos números irracionais. Por exemplo, com o uso do geogebra criamos um quadrado $ABCD$ de lado 1 com o vértice A na origem e lado AD sobreposto ao eixo x e em seguida criamos uma circunferência com centro em A e raio AC. A interseção da circunferência com o eixo x é o ponto E, como na figura abaixo.

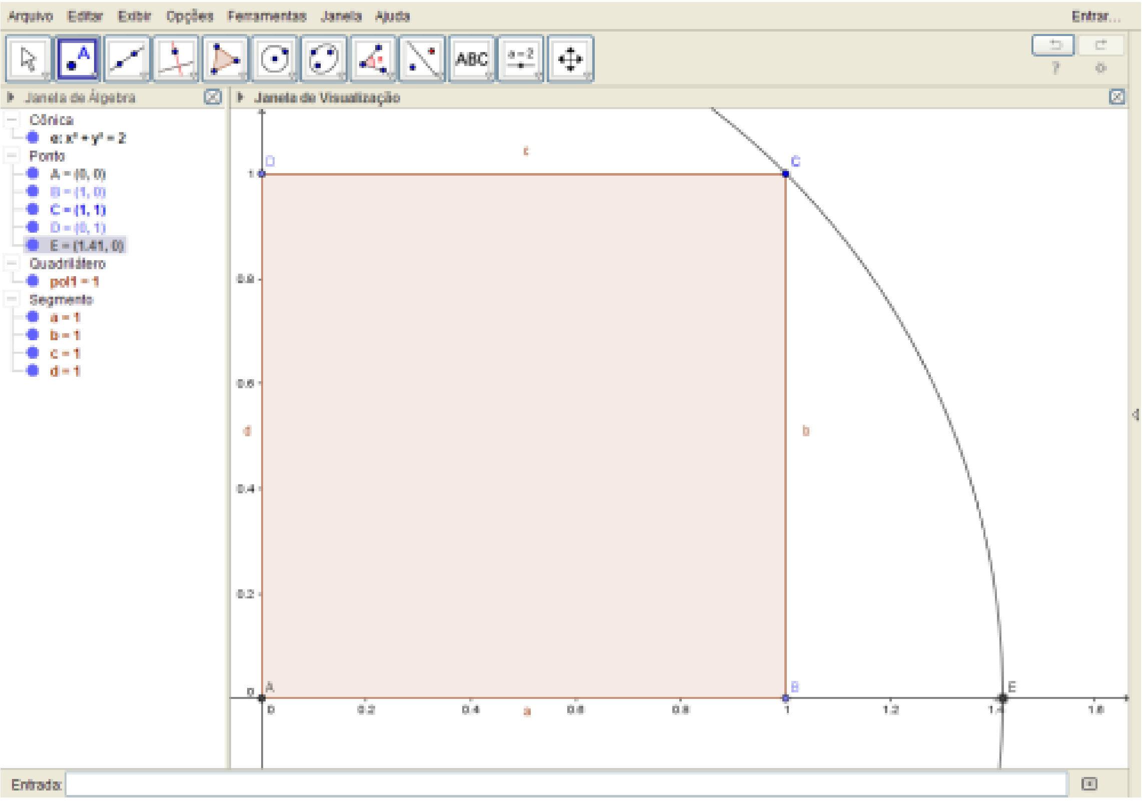


Figura 22: Calculando o valor aproximado de $\sqrt{2}$ utilizando o Geogebra.

Sabemos que $\overline{AE} = \sqrt{2}$ (mesma medida que a diagonal do quadrado) e pode ser mostrado ao aluno que a medida que aproximamos a imagem do poto E, podemos perceber que as casas decimais que estão em sua vizinhança vão sempre aumentando, surgindo uma aproximação razoável de $\sqrt{2}$. Isso pode o ajudar a perceber o fato de que a expansão decimal de um número irracional é infinita e não periódica, além disso, ele pode observar que o ponto E corresponde a uma medida no eixo x que não é um número racional.

Fonte: ***Print Screen*** **de Vasconcelos, 2016, p. 34**

Atividade 02

Fonte: Vasconcelos (2016, p. 35)

Objetivos:

-Construir o retângulo áureo[5];

-Obter uma aproximação para o número de ouro.

Descrição:

Quadro 2 - Atividade 02

Ainda se tratando dos números irracionais, podemos mostrar ao aluno o número de ouro através da construção do retângulo áureo e das razões entre duas diagonais de um pentágono regular.

Na próxima figura temos o retângulo de ouro ($ADHG$) construído a partir de um quadrado de lado igual a 1 ($ABCD$).

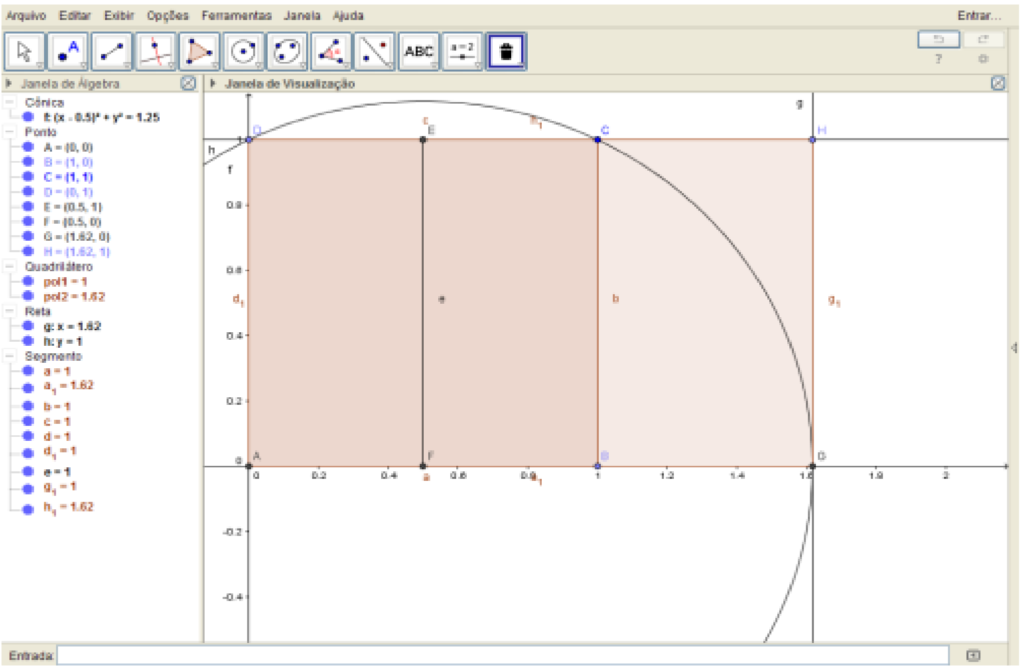


Figura 24: Contrução do retângulo de ouro no Geogebra.

Podemos perceber visualmente que a razão entre os lados $\overline{AG}$ e $\overline{AD}$ é um pouco maior que 1,6 e quando aproximamos a figura no ponto G obtemos uma aproximação do número de ouro $\varphi \cong 1,618$.

Fonte: ***Print Screen*** **de Vasconcelos, 2016, p. 35**

[5] Retângulo áureo é qualquer retângulo cuja razão entre a base e a altura é igual ao número de ouro.

Atividade 03

Fonte: Vasconcelos (2016, p.37)

Objetivos:

-Construir o pentágono regular;

-Mostrar aos alunos que a razão entre a medida dos lados e a medida das diagonais é igual ao número de ouro.

Descrição:

Quadro 3 - Atividade 03

Uma última sugestão de abordagem dos números irracionais em sala de aula com o auxílio do geogebra é a construção do pentágono regular. Este processo pode elucidar ao aluno tanto em aspectos geométricos quanto algébricos. Através do geogebra podemos verificar a medida de dois segmentos afim de calcular a razão entre eles. Em particular, no pentágono regular (vide seção 5.1) a razão entre segmentos contidos nesta figura é igual ao número de ouro.

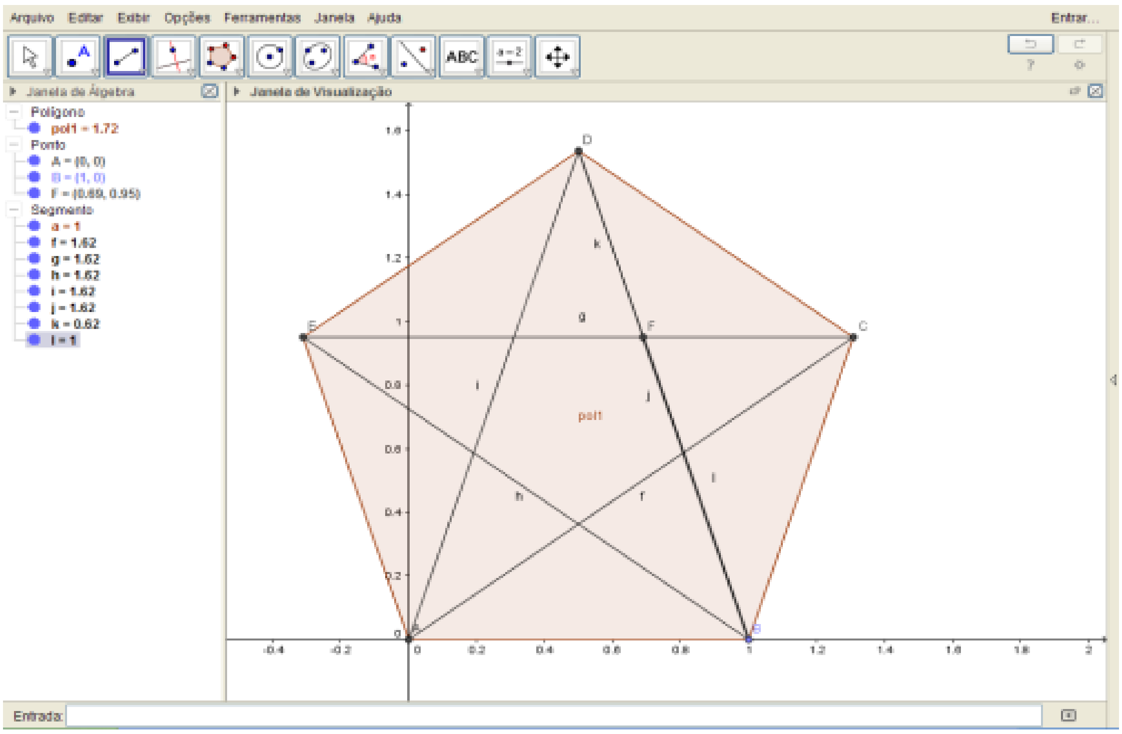


Figura 26: Construção do pentágono regular com a utilização do Geogebra.

Fonte: ***Print Screen*** **de Vasconcelos, 2016, p.37**

4.2. ATIVIDADES SOBRE NÚMEROS IRRACIONAIS UTILIZANDO A CALCULADORA

Como vimos anteriormente, a calculadora também é um exemplo de TIC. Apesar de se constituir um aparato tecnológico muito utilizado no cotidiano das pessoas, principalmente no comércio, ela ainda é pouco utilizada em sala de aula.

Segundo Selva e Borba (2010), muitos professores acreditam que o uso da calculadora em sala de aula impede o aluno de raciocinar. Estes autores desmistificam este ponto de vista, apresentando atividades para serem realizadas com o auxílio da calculadora, que permitem explorar diversas potencialidades deste instrumento.

Os PCN também apontam a calculadora como um recurso para potencializar a aprendizagem de conteúdos matemáticos. Mas enfatizam que seu uso pelos alunos em determinadas situações, deve ocorrer com orientação do professor (BRASIL,1998).

Selva e Borba (2010) apontam como benefícios do uso da calculadora: exploração de conceitos, agilidades nos cálculos, conferência de resultados, jogos, realização de estimativas, entre outros. Os PCN complementam essa listagem apresentando outros benefícios, que são: busca e percepção de regularidades, desenvolvimento de estratégias para resolução de situações problema (pois temporariamente permite pensar apenas nas operações sem preocupar-se com os cálculos) e o papel de revisão na Matemática. (p.146)

É muito importante que os alunos aprendam a fazer contas utilizando lápis e papel. Mas depois que eles já dominarem estes procedimentos de cálculos, eles podem aprender a realizar os mesmos na calculadora também. Em vez de proporcionar uma “preguiça mental” nos alunos, o uso da calculadora pode permitir que eles continuem a desenvolver o raciocínio, pois eles precisam pensar em como realizarão determinado procedimento na calculadora e precisam também saber interpretar o resultado oferecido pela máquina. Além disso, o uso da calculadora pode ser uma maneira de economizar tempo na realização de cálculos.

É importante esclarecer que, a calculadora não veio para substituir o lápis e o papel e sim para enriquecer, oferecendo uma nova possibilidade ao processo de ensino. A calculadora constitui-se então como mais uma alternativa para o processo de ensino, podendo contribuir para tal, desde que o professor faça uso adequado dela, optando por atividades que explorem as potencialidades deste instrumento.

Atividade 04

Fonte: Rezende (2013, p. 128)

Objetivos:

-Mostrar aos alunos que a calculadora faz aproximações quando se trabalha com números irracionais.

Descrição:

Quadro 4 - Atividade 04

a) Tecle o número dois na calculadora seguido da tecla $\sqrt{\ }$. Qual o número que aparece no visor da calculadora?

b) Podemos afirmar que $\sqrt{2}$ é igual ao número que apareceu no visor da calculadora, ou seja, que a igualdade $\sqrt{2} = 1{,}414213562$ é verdadeira?

Bloco I de questões

(Somente para os alunos que afirmaram que a igualdade $\sqrt{2} = 1{,}414213562$ é verdadeira)

c) Quanto é $\sqrt{2}$ elevado ao quadrado?

d) Quanto é $1{,}414213562$ elevado ao quadrado?

e) Compare os valores encontrados no item (c) e no item (d). Por que você acha que os resultados foram diferentes?

Bloco II de questões

(Somente para os alunos que afirmaram que a igualdade $\sqrt{2} = 1{,}414213562$ é falsa)

f) Por que você acha que a igualdade não é verdadeira?

g) Você acha que existem mais alguns ou existem muitos números além destes que aparecem no visor da calculadora?

h) Como são estes números? Você acha que eles apresentam um período ou não apresentam um período?

Fonte: ***Print Screen*** **de Rezende, 2013, p.128**

Atividade 05

Fonte: Garcia, Soares e Fronza (2005, p.41)

Objetivos:

Quadro 5 - Objetivos da atividade 05

1. definir PI como uma constante que representa a relação C/D entre Circunferência e Diâmetro do círculo;
2. marcar na reta real o ponto que corresponde a PI;
3. reconhecer PI como um número real irracional.

Fonte: ***Print Screen*** **de Garcia, Soares e Fronza, 2005, p.41**

Descrição[6]:

Quadro 6 - Atividade 05

Os alunos tomam medidas de circunferência (C) e diâmetro (D) de diferentes objetos circulares e comparam os resultados obtidos para a razão C/D.

Atenda às seguintes questões:

1. Meça a circunferência e o diâmetro de alguns objetos cilíndricos.

2. Divida a medida da circunferência pela medida do diâmetro, e anote os resultados em uma tabela. Utilizando a fórmula do comprimento da circunferência, calcule novamente essas medidas dos objetos usados anteriormente.

Objeto	Medida Circunferência C	Medida Diâmetro D	Cálculo Circunferência $C1 = 2\pi R$	Razão C/D	Razão C1/D
Lata de Nescau					
Lata leite Moça					
Lata azeite					

3. Faça novamente a divisão da medida do perímetro pela medida do diâmetro. Você vai encontrar um número que se repete. Uma constante chamada PI.

5.Calcule o valor de PI na calculadora e compare com os valores obtidos no item (02).

6. Localize PI na reta real. É o ponto D, marcado na reta da atividade 4.

Fonte: ***Print Screen*** **de Garcia, Soares e Fronza, 2005, p.41**

---

[6] A atividade 04 a qual o item 6 desta atividade faz referência consiste na atividade 07 deste trabalho.

Atividade 06

Fonte: Garcia, Soares e Fronza (2005, p.38)

Objetivos:

Quadro 7 - Objetivos da atividade 06

Convencer-se que $\sqrt{2}$ é número irracional.

Fonte: ***Print Screen*** **de Garcia, Soares e Fronza, 2005, p. 38**

Descrição:[7]

Quadro 8 - Atividade 06

01. Calcule o valor de $\sqrt{2}$ na calculadora. É possível aceitar esta resposta? Multiplique este valor por ele mesmo? Esta resposta não é 2, porque o resultado da calculadora para Raiz quadrada de 2 é uma aproximação.

02. Para tentar alcançar o verdadeiro valor de $\sqrt{2}$, pode-se tentar calcular por meio de aproximações sucessivas.

O método de cálculo por aproximações sucessivas é o apresentado a seguir:

Sabemos que $\sqrt{2}$ é um número entre 1 e 2.

a) Tente 1,5. Eleve ao quadrado.

1,5 é maior do que $\sqrt{2}$.

b) Tente 1,4. Eleve ao quadrado.

1,4 é menor do que $\sqrt{2}$.

c) Tente 1,45.

1,45 é maior ou menor do que $\sqrt{2}$?

d) Tente 1,41

1,41 é maior ou menor do que $\sqrt{2}$?

e) Tente 1,42.

1,42 é maior ou menor do que $\sqrt{2}$?

f)Tente 1,415

1,415 é maior ou menor do que $\sqrt{2}$?

f) Tente 1,414.

1,414 é maior ou menor do que $\sqrt{2}$?

g) Tente 1,4145.

1,4145 é maior ou menor do que $\sqrt{2}$?

Fonte: ***Print Screen*** **de Garcia, Soares e Fronza, 2005, p.39**

[7] Uma atividade semelhante a esta foi encontrada em Maffi, Fraga e Matos (2015, p. 04).

Quadro 9 - Continuação da atividade 06

3. Que tipo de número é Raiz quadrada de 2?

Primeira pergunta: $\sqrt{2}$ é inteiro?

Se $\sqrt{2}$ fosse um número inteiro, deveria existir um inteiro n tal que

$$n^2 = 2.$$

Utilize a calculadora para listar, na tabela abaixo, os quadrados dos primeiros vinte números inteiros. Algum destes números quadrados é igual a 2?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

* Conclua: $\sqrt{2}$ é inteiro? Sim ou Não?

Segunda pergunta? $\sqrt{2}$ é racional? Pode ser escrito como uma fração?

Se $\sqrt{2}$ fosse uma fração então existiriam dois inteiros, a e b, tais que $a^2/b^2 = 2$.

Então teríamos, dois inteiros tais que $a^2 = 2.\ b^2$.

Ou seja, teríamos dois números quadrados tais que um é o dobro do outro.

Utilize a calculadora para listar, na tabela acima, o dobro de todos os números quadrados.

Algum destes números é também um número quadrado? Existem dois quadrados tais que um é o dobro do outro?

Conclua: $\sqrt{2}$ é racional? Sim ou não?

Fonte: *Print Screen* de Garcia, Soares e Fronza, 2005, p.40

5. ANÁLISE CRÍTICA DAS ATIVIDADES

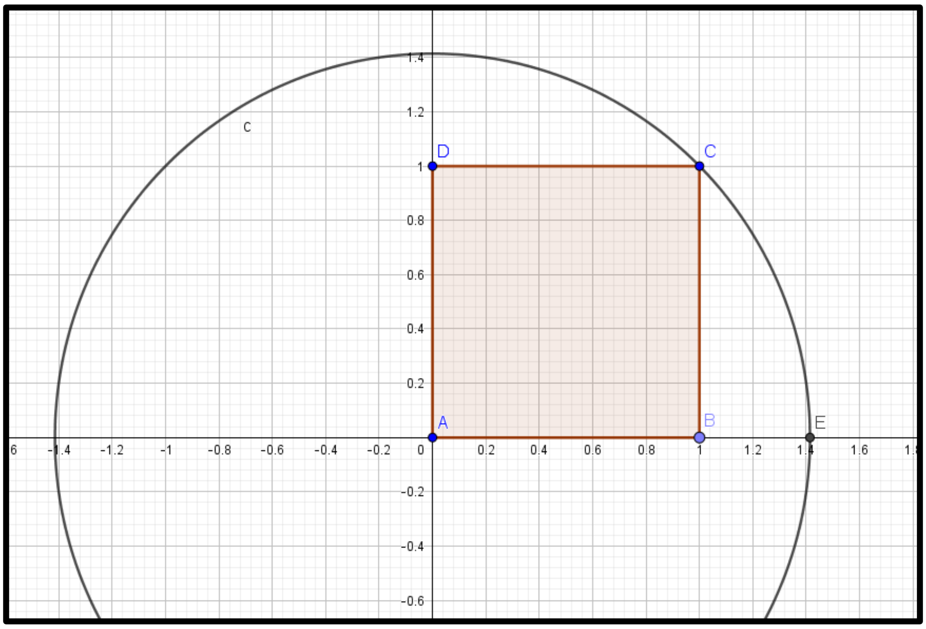
A atividade 01 é uma atividade onde o aluno realizará uma construção no Geogebra obtendo um segmento de medida irracional. Utilizando este software, o aluno deverá criar um quadrado de lado unitário. Segue abaixo o passo a passo desta construção:

1) Utilizando a ferramenta "polígono regular" o aluno deverá criar um quadrado ABCD de lado 1, marcando o vértice A na origem e o vértice B sobre o eixo x. Em seguida, ao abrir a caixa de comando, criar um polígono regular de 04 vértices.

2) Utilizando a ferramenta "Círculo dado centro e raio" criar um círculo de centro A e raio AC.

3) Criar o ponto E, intersecção da circunferência com o eixo x. Segue abaixo a imagem desta construção:

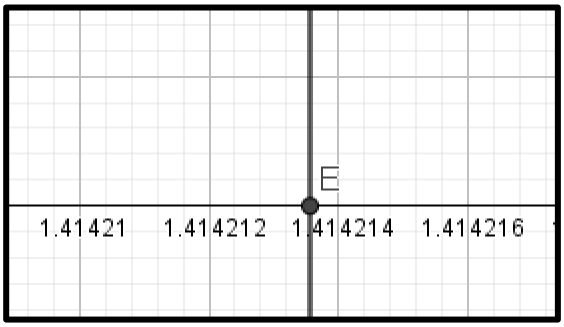
Figura 1 - Construção do segmento de medida $\sqrt{2}$



Fonte: Elaborado pela autora

Nesta construção, o segmento AE possui a mesma medida da diagonal do quadrado, pois AE=AC. E pode ser mostrado ao aluno que a medida que aproximamos a imagem no círculo do ponto E, podemos perceber que as casas decimais que estão em sua vizinhança no eixo x, vão sempre aumentando, surgindo uma aproximação razoável de $\sqrt{2}$. Isso pode o ajudar a perceber o fato de que a expansão decimal de um número irracional é infinita e não-periódica, além disso, ele pode observar que o ponto E corresponde a uma medida no eixo x que não é um número racional.

Figura 2 - Expansão decimal do número $\sqrt{2}$



Fonte: Elaborada pela autora

Esta atividade permite também ao aluno perceber que é possível construir segmentos de reta com medidas irracionais.

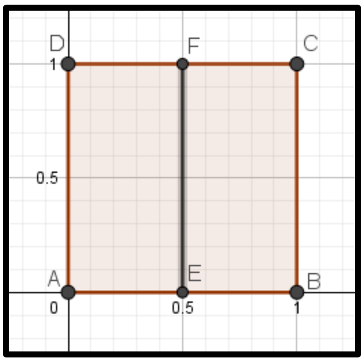
A atividade 02 também faz uso do Geogebra e propõe a construção de um retângulo áureo, que é um retângulo onde a razão da medida do lado maior pela medida do lado menor é igual ao número de ouro. Utilizando o software, esta construção pode ser realizada da seguinte maneira:

1) Com a ferramenta ‘Polígono Regular’ construa um quadrado ABCD de lados medindo 1.

2) Marque os pontos E e F em AB e CD respectivamente, onde E e F sejam os pontos médios destes segmentos. Utilize a ferramenta ‘Ponto Médio ou Centro’

3) Com a ferramenta ‘Segmento’ una os pontos E e F, criando o segmento EF.

Figura 3 - Segmento EF



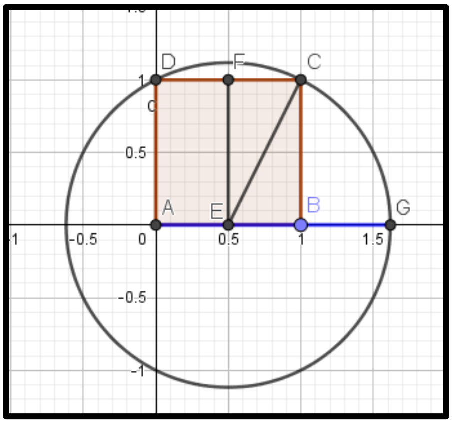
Fonte: Elaborado pela autora

4) Com isso temos agora dois retângulos. Trace a diagonal EC do retângulo EBCF.

5) Construa um círculo com centro em E e raio EC. Utilize a ferramenta 'Círculo dado centro e raio'.

6) Prolongue o segmento AB até encontrar o círculo, chame este ponto de G. Crie um segmento AG.

Figura 4 - Segmento AG

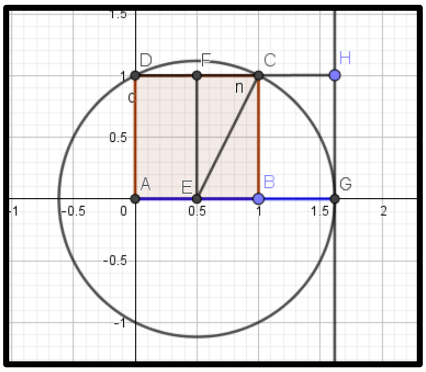


Fonte: Elaborada pela autora

7) Trace uma reta m paralela ao segmento BC passando pelo ponto G, utilizando a ferramenta 'Reta Paralela'.

8) Prolongue o segmento DC até encontrar a reta m. Chame este ponto de encontro de H. Para isso crie um segmento DH.

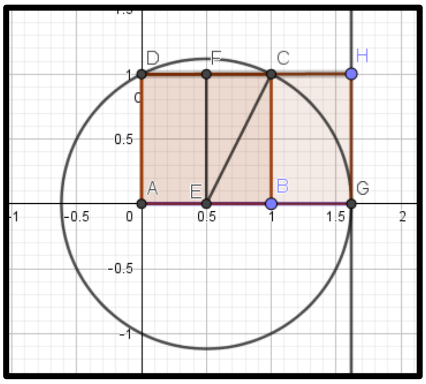
Figura 5 - Segmento DH



Fonte: Elaborada pela autora

9) Forme o retângulo BCHG

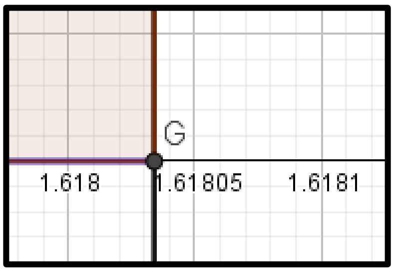
Figura 6 - Retângulo BCHG



Fonte: Elaborada pela autora

O retângulo AGHD é o retângulo áureo, pois a razão entre o lado maior e o lado menor do retângulo é justamente o número de ouro. Os alunos poderão perceber visualmente através desta construção que a razão entre os lados AG e AD é um pouco maior que 1,6 e ao aproximarmos a figura no ponto G, obtemos uma aproximação do número de ouro φ= 1,618...

Figura 7 - Expansão decimal do número de ouro



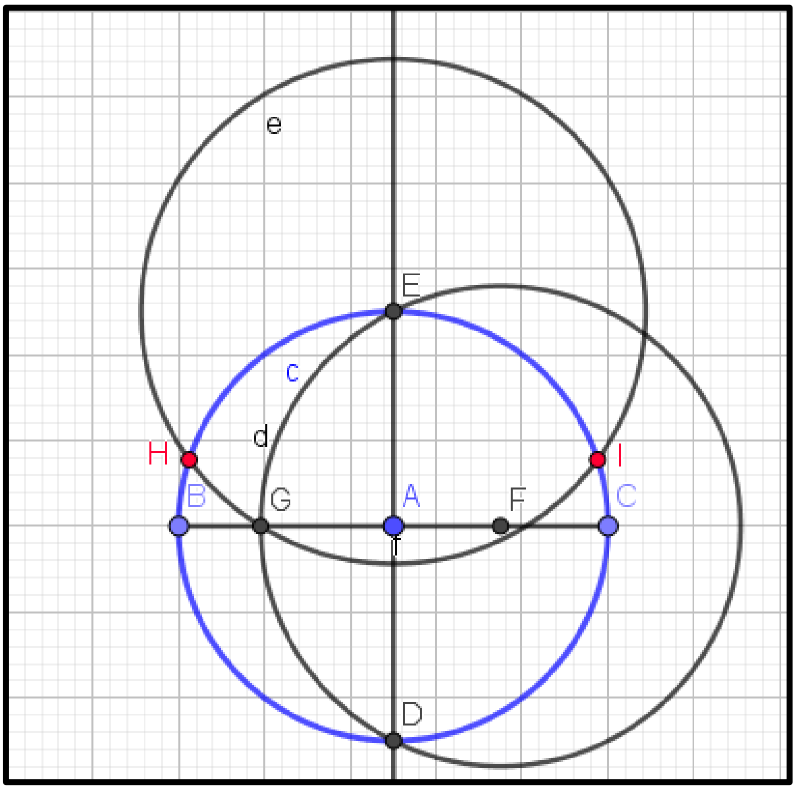
Fonte: Elaborada pela autora

Essa representação pode ajudar os alunos a pensarem na possibilidade de este número possuir infinitas casas decimais e não possuir um período de repetição. Entretanto, visto é importante observar que a representação das casas decimais dos irracionais neste software é limitada.

A atividade 03 também fazendo uso do Geogebra sugere a construção do pentágono regular, que é uma figura geométrica onde a razão entre a medida dos lados e a medida das diagonais é igual ao número de ouro. Segue abaixo os passos desta construção:

1) Trace uma circunferência de raio qualquer e centro em A. Utilize a ferramenta 'Círculo dado centro e raio'.
2) Trace o diâmetro BC da circunferência. Utilize a ferramenta 'Segmento'.
3) Trace um diâmetro perpendicular ao diâmetro BC já traçado, passando pelo ponto A. Utilize a ferramenta 'Reta Perpendicular".
4) Com a ferramenta 'Interseção de dois objetos', defina os pontos D e E que são os pontos de interseção da circunferência com a reta perpendicular construída.
5) Com a ferramenta 'Ponto Médio ou Centro' encontre o ponto F: ponto médio do segmento AC.
6) Construa uma circunferência d com centro em F, passando pelo ponto E, utilizando a ferramenta 'Círculo dado centro e um de seus pontos'.
7) Defina o ponto G: ponto de interseção da circunferência d com o diâmetro BC. Utilize a ferramenta 'Interseção de dois objetos'.
8) Construa uma circunferência (e) com centro em E, passando pelo ponto G. Utilize a ferramenta 'Círculo dado centro e um de seus pontos'.
9) Com a ferramenta 'Interseção de dois objetos', defina os pontos (H e I) de interseção da circunferência e com a circunferência c.

Figura 8 - Pontos H e I



Fonte: Elaborada pela autora

10) Com o mesmo raio EG e com centro em H construa uma circunferência h. Utilize a ferramenta ‘Círculo dados centro e raio’.

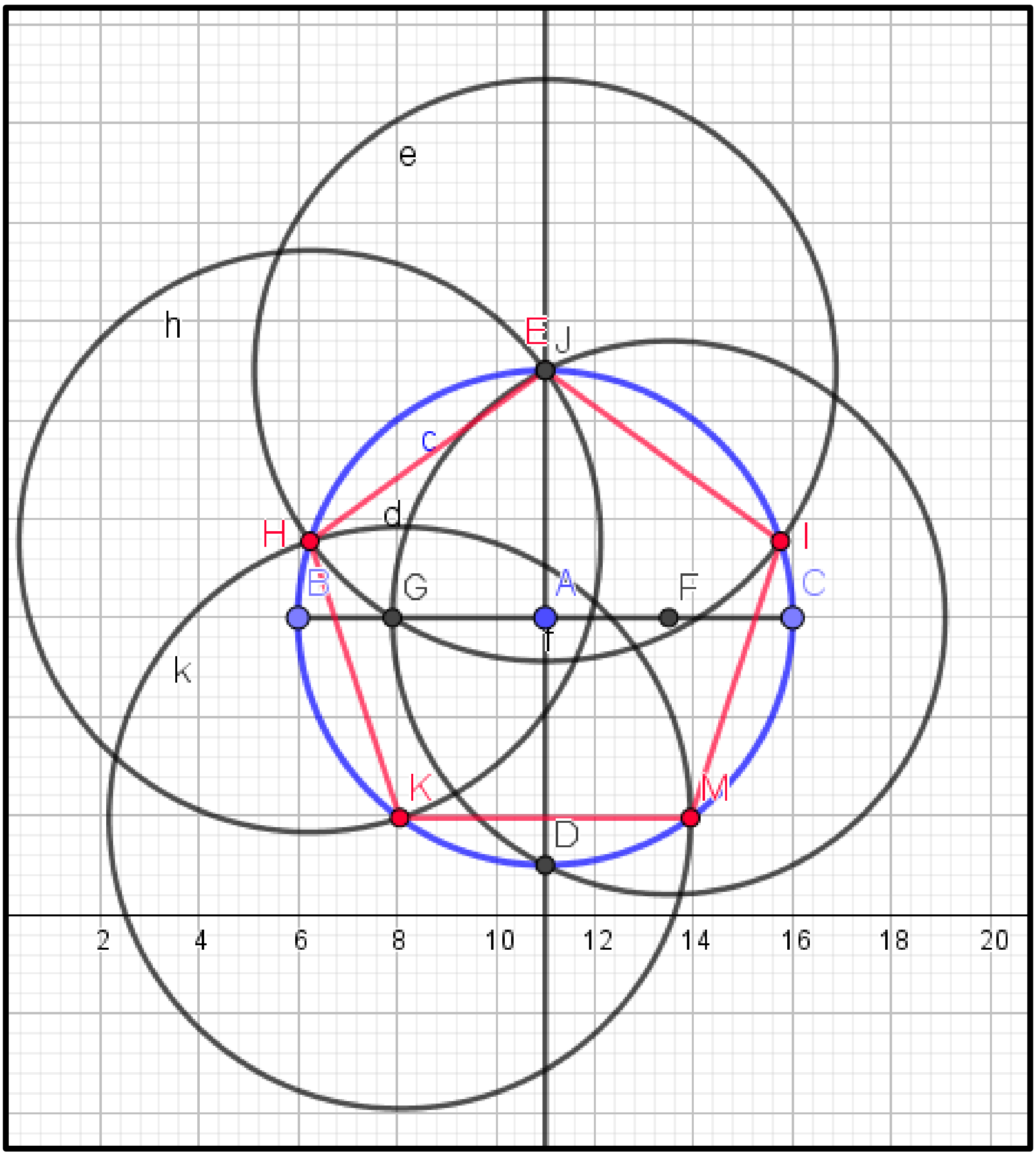
11) Marque os pontos K e J de interseção da circunferência h com a circunferência c. Utilize a ferramenta ‘Interseção de dois objetos’. O ponto J coincide com o ponto E.

12) Com centro em K e com o mesmo raio EG, construa uma nova circunferência k, utilize a ferramenta ‘Círculo dados centro e raio’.

13) Com a ferramenta ‘Interseção de dois objetos’, determine o ponto M de interseção da circunferência k com a circunferência c.

14) Os pontos E, H, K, M e I são os vértices do pentágono regular. Para formar o pentágono construa os segmentos: EH, HK, KM, MI e IE.

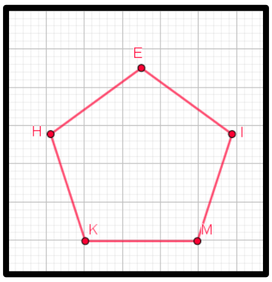
Figura 9 - Vértices e lados do pentágono regular



Fonte: Elaborada pela autora

15) Limpando a janela de visualização:

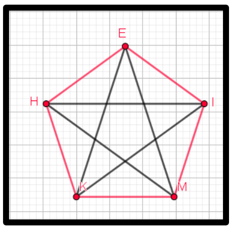
Figura 10 - Pentágono regular



Fonte: Elaborada pela autora

16) Em seguida construímos as diagonais do pentágono.

Figura 11 - Diagonais do pentágono



Fonte: Elaborada pela autora

Assim os alunos poderão realizar a razão entre as medidas das diagonais e dos lados do pentágono e verificarem que esta razão é igual ao número de ouro.

Neste caso os alunos podem chegar ao resultado desta razão utilizando lápis e borracha pois assim eles podem estender a operação até quando eles desejarem, permitindo que eles comecem a observar que o número possui casas decimais não periódicas.

Mas é importante que o professor deixe claro para os alunos que para a verificação da existência de infinitas casas decimais, não é adequado que se realize a operação à mão, pois pode ser que o número decimal apresente um período de repetição após inúmeras casas decimais.

Estas três atividades contribuem para que os alunos comecem a desenvolver a noção da infinitude de casas decimais dos irracionais e principalmente compreendam que existem segmentos de medidas irracionais, que entre outras, constituem duas características deste conjunto numérico, que como apontado por Rezende (2013), os alunos em diferentes modalidades da educação, possuem dificuldades em compreender.

Estas são atividades que propõe construções que são possíveis de serem desenvolvidas com compasso e régua, porém a utilização deste software permite ao aluno a exploração da ferramenta zoom em determinados pontos da construção, o que o permite explorar a quantidade de casas decimais de um número irracional de maneira rápida, sem o esforço de realizar a operação com o lápis e o papel, o que não é possível com compasso e régua. Este software também permite que o aluno esconda e exponha objetos da sua construção na janela de visualização, no momento que desejar. Assim o aluno pode "limpar" partes de sua construção, obtendo uma figura somente com os pontos mais importantes. Este rápido feedback que o software oferece ao aluno é uma característica que pode ser muito benéfica no processo de aprendizagem.

A atividade 04 por sua vez, propõe o uso da calculadora. Esta atividade é interessante de ser trabalhada em sala de aula pois claramente leva o aluno a refletir sobre a questão da quantidade de casas decimais que um número irracional possui e a quantidade destas casas que são exibidas no visor da calculadora. Através desta atividade é possível que o aluno desenvolva as ideias de aproximação e de infinito, ideias essas que segundo Jesus (2017) são fundamentais na compreensão do conceito de irracionalidade.

Os números irracionais é um conteúdo abstrato e que possui poucas aplicações na vida dos estudantes. A atividade 05 permite aos alunos que eles tenham um exemplo de um número irracional no cotidiano deles: o número π, resultante da divisão do comprimento da circunferência de alguns objetos circulares pelos seus respectivos diâmetros. Esta atividade permite que os próprios alunos através de suas medições e de seus cálculos observem a obtenção de uma mesma constante sempre que se divide o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro, independentemente do tamanho da circunferência. Esta atividade vai de encontro ao modo com que Silva (2006) sugere que seja realizado o estudo dos irracionais: que o professor não seja um transmissor de conhecimentos e sim que ele seja apenas um mediador, que cria condições para que os próprios alunos construam seus conhecimentos.

A atividade 06 explora o método de obtenção de raízes aproximadas de números irracionais. Além de explorar uma outra característica dos irracionais muito importante: a impossibilidade de escrever um número irracional como a razão de dois números inteiros. Característica essa também apontada por Rezende (2013) e sugerida pelos PCN como um ponto importante que seja trabalhado em sala de aula, no estudo deste conteúdo.

As atividades que fazem uso do Geogebra e da calculadora evidenciam também o caráter limitado destas tecnologias, que permitem a exibição de apenas uma pequena parte das infinitas casas decimais que os irracionais possuem. Por isso, salientamos que o trabalho com estas tecnologias deve estar aliado a discussões que auxiliem os alunos a produzirem significados na direção de que os irracionais possuem infinitas casas decimais não-periódicas.

6. ATIVIDADES SOBRE NÚMEROS IRRACIONAIS QUE FAZEM USO DE OUTRAS TECNOLOGIAS

Apresentamos aqui atividades que fazem uso de outras tecnologias e que também podem ser muito importantes para o processo de ensino e de aprendizagem dos números irracionais.

6.1 ATIVIDADES SOBRE NÚMEROS IRRACIONAIS UTILIZANDO MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Segundo Lorenzato (2006) Maria Montessori foi uma educadora que defendia a aprendizagem através dos sentidos, especialmente do tátil. Por isso ela desenvolveu materiais didáticos manipuláveis para o trabalho em sala de aula. Assim como Maria Montessori muitos outros educadores apoiam o uso de materiais manipuláveis no processo de ensino, visto que estes são considerados facilitadores da aprendizagem. Ainda segundo este autor, o uso de atividades manipulativas não garante por si só a aprendizagem dos alunos. Para que esta realmente aconteça é necessário também a atividade mental do aluno. E o material didático manipulável atua como um catalisador para que o aluno construa seu conhecimento. Apoiando-nos em Veloso (2011), materiais manipuláveis são também tecnológicos por isso apresentamos algumas atividades sobre números irracionais que fazem uso de alguns destes materiais.

Atividade 07

Fonte: Garcia, Soares e Fronza (2005, p.35)

Objetivos:

Quadro 10 - Atividade 07[8]

Objetivo:

a)relacionar medidas geométricas com pontos da reta real;

b) salientar que a unidade de medida escolhida para dar início à construção da reta numerada reta não precisa ser necessariamente 1 cm, e pode ser escolhida, de acordo com a conveniência;

Descrição

Os alunos se dedicam à construção da numerada com diferentes unidades de medida. Começam pela localização dos números inteiros. Logo a seguir, são solicitados a localizar números racionais na sua forma fracionária. Num segundo passo, utilizam figuras geométricas para marcar pontos que correspondem às diagonais de retângulos e ao comprimento do círculo de diâmetro 1, com auxílio de régua e compasso.

Recursos didáticos

Conjuntos com pecinhas coloridas de cartolina. Cada conjunto numa cor diferente. As peças são construídas a partir de uma medida M cm, tomada como unidade de medida.

Construção das peças:

1 barrinha com M cm;

1 quadrado M x M;

1 retângulo M x2M;

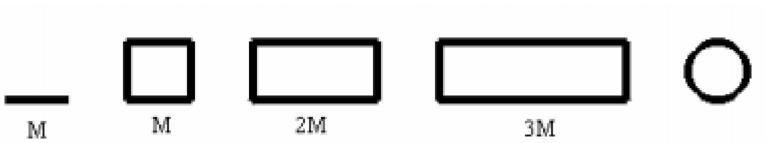
1 retângulo M x 3M;

1 circunferência de diâmetro igual a M.

Cada cor de conjunto tem uma medida M diferente (M=2, 3, 4, 5, 6 cm).

Régua, compasso.

Pequeno barbante (para medir o comprimento da circunferência).



Fonte: *Print Screen* de Garcia, Soares e Fronza, 2005, p.35

[8] A reta numerada que a atividade faz referência é a reta real.

Quadro 11 - Continuação da atividade 07

Desenvolvimento:

1. Trace uma reta qualquer e escolha o ponto de referência para ser o zero.

2. Utilizando a barrinha como unidade, numere a reta a partir do zero no sentido da direita.

3. Marque na reta o lugar dos números: ½; ¾; 1/3; 0,2; 0,5; 0,33333...

4. Utilizando os retângulos, marque a medida de sua diagonal na reta, indicando-os por A, B, C (coloca-se o retângulo com um de seus vértices na origem, e através de uma rotação faz-se coincidir o vértice oposto com a reta, os quais são os extremos da diagonal).

06. Dê o valor aproximado para as medidas das diagonais marcadas.

07. Marque um ponto sobre a circunferência. Utilize o barbante para medir o comprimento da circunferência. Marque esta medida sobre a reta, partindo do zero, indicando o ponto por D.

08. Repita os procedimentos para o lado esquerdo da reta, construindo a parte negativa da reta.

Conclusão da atividade:

Sobre a reta real, marcamos pontos correspondentes a diferentes medidas geométricas. Há pontos que correspondem aos números inteiros e às frações. Há pontos que correspondem às medidas de diagonais e de circunferências. Estes pontos pertencem à reta numerada, portanto correspondem a números reais. Que números são estes?

Fonte: ***Print Screen*** **de Garcia, Soares e Fronza, 2005, p.36**

Atividade 08

Fonte: Maffi, Fraga e Matos (2015, p. 07)

Objetivos:

Quadro 12 - Objetivos da atividade 08

Objetivos: Conhecer a origem do Tangran; reconhecer as figuras geométricas formadas por meio da dobradura; fazer relações entre as figuras para descobrir a medida dos seus lados; utilizar a soma de radicais para calcular o perímetro das figuras do Tangran.

Fonte: ***Print Screen*** **de Maffi, Fraga e Matos, 2015, p.07**

Descrição:

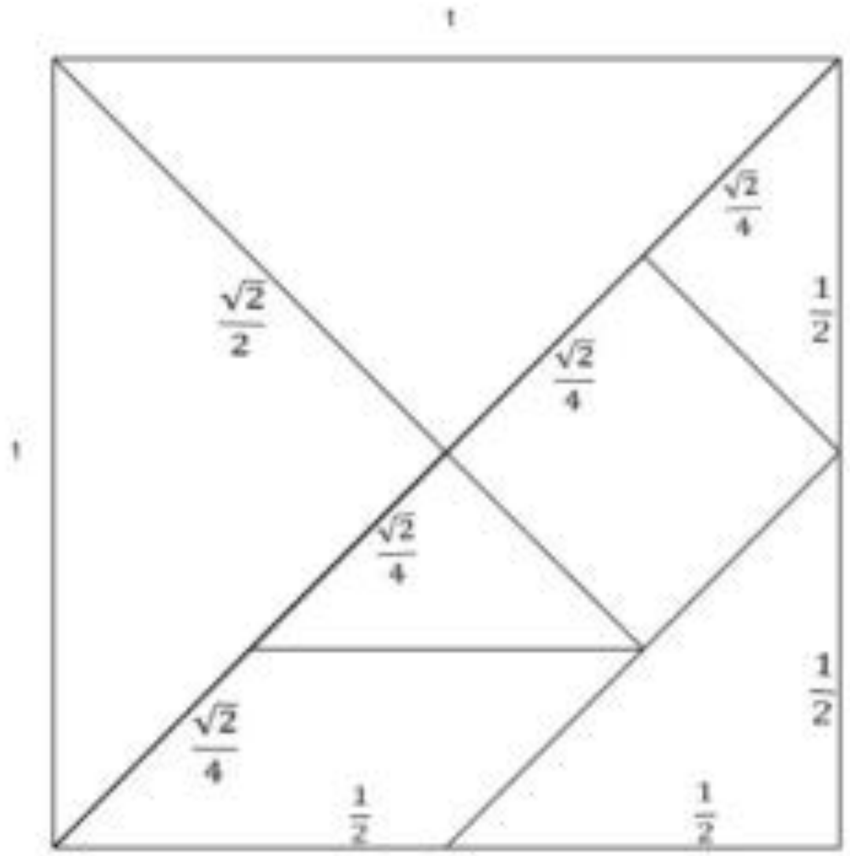
Quadro 13 - Atividade 08

Procedimentos: Inicialmente, contar a lenda do Tangran, discutir e comentar que existem várias lendas sobre o seu surgimento, e que não se sabe ao certo como foi originado.

No segundo momento, realizar a construção do Tangran. Disponibilizar para os estudantes uma folha de ofício e solicitar que tracem um quadrado de $15cm$ por $15cm$, e esta será a unidade de medida (cada $15cm$ do lado do quadrado representa 1 unidade de medida).

O Tangran será construído em conjunto com os estudantes por meio de dobraduras, conforme as instruções de Souza et al. (2006). Após, solicitar que observem todas as figuras formadas e respondam ao questionamento: Quais os nomes das figuras? Desafiar os estudantes para que façam a investigação da medida dos lados e do perímetro das figuras conforme Figura 4.

Figura 4 – Tangran.



Fonte: Elaboração dos autores.

Fonte: ***Print Screen*** **de Maffi, Fraga e Matos, 2015, p.07**

Quadro 14 - Continuação da atividade 08

Medidas dos lados: Para encontrar as medidas os estudantes deverão fazer relações entre os lados das peças. Como já se sabe que a diagonal do quadrado de lado 1 é $\sqrt{2}$ e que o encontro das duas diagonais é o centro do quadrado e também o ponto médio dessas duas retas, pode-se constatar que um lado do triângulo grande é a diagonal dividida pela metade. Assim, as medidas dos lados do triângulo grande são: $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$.

Ao traçar o triângulo médio, encosta-se o vértice no centro do quadrado. Com isso, o lado do Quadrado que tem medida 1 dividi-se ao meio. Desse modo, temos que as medidas dos lados do triângulo médio são $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$. E por meio dessas relações é possível encontrar as medidas das outras figuras: triângulo pequeno: $\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}$; paralelogramo: $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}$; quadrado: $\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Medidas dos perímetros: Para calcular o perímetro, soma-se todos os lados da figura. Desse modo, as medidas dos perímetros das figuras são: triângulo pequeno: $\frac{2\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$; triângulo médio: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$; triângulo grande: $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \sqrt{2} + 1$; paralelogramo: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$; quadrado: $\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = 4\frac{\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$.

Fonte: ***Print Screen*** **de Maffi, Fraga e Matos, 2015, p.07**

Atividade 09

Fonte: Garcia, Soares e Fronza (2005, p. 37)

Objetivos:

Quadro 15 - Objetivos da atividade 09

1. reconhecer o significado e a importância do Teorema de Pitágoras;
2. relacionar Teorema de Pitágoras com raízes inexatas;
3. marcar na reta os pontos que correspondem às raízes inexatas de números inteiros positivos;
4. reconhecer as raízes como números irracionais

Fonte: ***Print Screen*** **de Garcia, Soares e Fronza, 2005, p.37**

Descrição: [9]

Quadro 16 - Atividade 09

Descrição

Os alunos montam quebra-cabeças para chegar à relação entre áreas de quadrados contruídos com os lados de um triângulo retângulo. Chegam à expressão matemática do Teorema de Pitágoras. O professor pode interromper os trabalhos para explicitar o Teorema. Parte-se para aplicações.

Recursos Didáticos:

Quebra-cabeças (em Anexos)

Calculadora.

Folha impressa com a expansão decimal de aproximadamente umas 100 casas da raiz quadrada de 2 (em Anexos).

Desenvolvimento:

Atenda às seguintes questões:

1. Monte os quebra-cabeças e tente mostrar a relação entre as áreas dos quadrados construídos a partir dos lados do triângulo retângulo dado.

2. Calcule as diagonais dos retângulos dados na atividade anterior, usando o Teorema de Pitágoras.

3. Verifique na calculadora o valor das diagonais. Substitua esses valores encontrados na calculadora, na reta real. Estes valores correspondem aos pontos A, B e C.

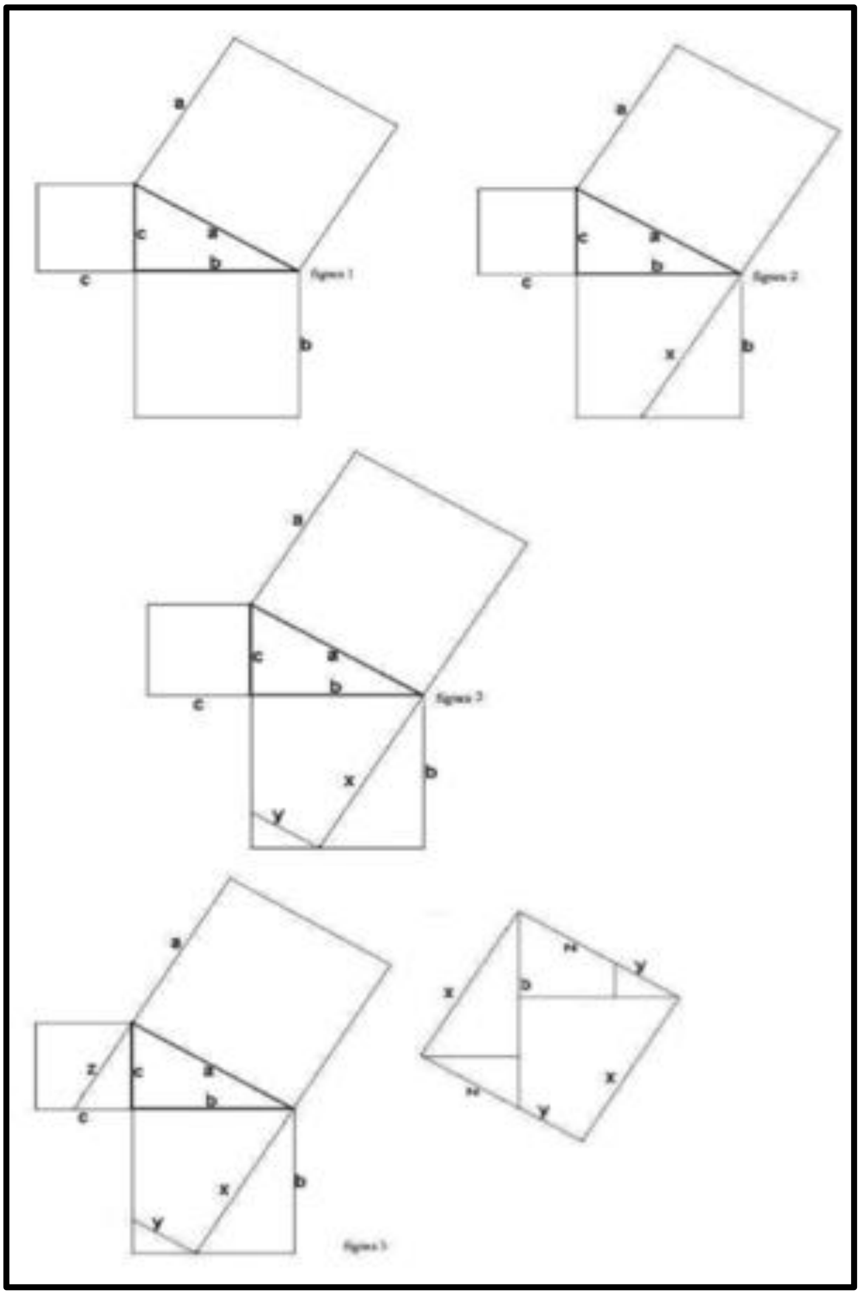
4. Multiplique os valores encontrados na calculadora por ele mesmo. O que você pode concluir com isso? Por que você acha que a multiplicação não resultou no número que estava dentro da raiz?

Fonte: ***Print Screen*** **de Garcia, Soares e Fronza, 2005, p.37**

[9] A atividade anterior que esta atividade faz referência é a atividade 07.

Quebra-cabeça para a atividade:

Quadro 17 - Quebra-cabeça para a atividade 09



Fonte: ***Print Screen*** **de Garcia, Soares e Fronza, 2005, p.49**

6.1.1. Atividades sobre números irracionais utilizando o geoplano

O geoplano é uma placa de madeira (ou plástico) na qual são cravados pregos (ou pinos), onde se enrolam pequenos elásticos, que permite modelar polígonos cujos vértices são representados por estes pregos (ou pinos). É um material manipulável muito útil no estudo de geometria, pois permite aos alunos a compreensão de propriedades das figuras geométricas ao possibilitá-los desenvolverem capacidades de visualização e também a alteração da posição e da orientação dos objetos estudados. É um material de fácil utilização.

Apoiando-nos na definição de tecnologia proposta por Veloso (2011) o geoplano constitui-se também como um exemplo de tecnologia. Assim, apresentamos abaixo atividades encontradas no levantamento bibliográfico realizado e que são desenvolvidas com base neste instrumento.

Atividade 10

Fonte: Mózer (2013, p. 14)

Objetivos:

- Verificar que não é possível construir um triângulo equilátero no geoplano.

Descrição:

Quadro 18 - Atividade 10

Uma pergunta que surge, neste contexto, é se é possível construir um triângulo equilátero no geoplano. Note que o geoplano pode ser modelado através de uma malha quadrada, isto é, através do conjunto de pontos do plano cartesiano da forma (i, j), com i e j inteiros. Assim, em termos matemáticos, perguntar se é possível construir um triângulo equilátero no geoplano é equivalente a perguntar se existe triângulo equilátero com coordenadas inteiras. Como veremos no próximo teorema, a resposta a esta pergunta é não, porque $\sqrt{3}$ é um número irracional.

Fonte: *Print Screen* de Mózer, 2013, p.14

6.2. ATIVIDADES SOBRE NÚMEROS IRRACIONAIS UTILIZANDO COMPASSO E RÉGUA

Estamos diante de dois simples objetos, mas que, baseando-nos ainda em Veloso (2011), também são tecnologias. O compasso e a régua são instrumentos muito importante na realização de construções geométricas. Segundo Silva (2013) “não se sabe ao certo quando, quem e de que forma os instrumentos régua e compasso foram inventados” (p.22). Mas o que sabemos é que estes dois inventos contribuíram muito para o desenvolvimento da geometria. Seguem abaixo atividades baseadas no uso destes dois instrumentos.

Atividade 11

Fonte: Santos (2013, p. 54)

Objetivos:

Quadro 19 - Objetivos da atividade 11

I. Levar os alunos a compreederem o conceito de segmentos comensuráveis;

II. Fazer os alunos compreenderem que qualquer segmento de medida racional, é comensurável com o segmento unitário;

III. Mostrar que segmentos de medidas irracionais podem ser segmentos comensuráveis com outros segmentos;

IV. Levar os alunos a compreenderem que se dois segmentos são comensuráveis seus múltiplos também são.

Fonte: ***Print Screen*** **de Santos, 2013, p.54**

Descrição:

Quadro 20 - Atividade 11

1. Dados dois segmentos, AB e $CD = u$, vamos verificar se esses dois segmentos possuem uma medida de segmento comum, utilizando apenas uma régua não graduada e um compasso. Os dois segmentos ,AB e CD, estão representados na Figura 5.1:

Figura 5.1: Segmentos AB e CD

Siga os passos a seguir:

- Inicialmente, coloque a ponta seca do compasso no ponto C e abra-o até o ponto D.
- Depois, fixe a ponta seca do compasso no ponto A, com abertura medindo $\overline{CD}$ e marque um ponto E sobre o segmento AB (Veja que $\overline{AE}$=$\overline{CD}$).
- Repita o passo anterior, o número de vezes que forem possíveis marcar segmentos de medida $\overline{CD}$ sobre o segmento AB.

(a) O segmento CD coube um número inteiro de vezes no segmento AB?

(b) Dado o segmento EF (Figura 5.2), verifique se ele cabe um número inteiro de vezes no segmento AB e um número inteiro de vezes no segmento CD.

Figura 5.2: Segmentos AB, CD e EF

2. Seguindo os mesmos passos propostos na questão anterior, vamos verificar se o segmento AB e o segmento CD possuem uma medida de segmento comum. Veja, na Figura 5.3, a representação dos segmentos AB e CD .

Figura 5.3: Segmentos AB e CD

(a) O segmento CD coube um número inteiro de vezes no segmento AB?

- No item "a"acima, verificou-se que após marcar segmentos de medida $\overline{CD}$ sobre o segmento AB, sobra um segmento de medida $\overline{f}$ no segmento AB.

(b) O segmento f coube um número inteiro de vezes no segmento CD? E no segmento AB?

(c) O segmento AB e o segmento CD possuem uma medida de segmento comum?

Fonte: ***Print Screen*** **de Santos, 2013, p.55**

Quadro 21 - Continuação da atividade 11[10]

3. Verifique se o segmento AB de medida $\sqrt{2}$ cabe um número inteiro de vezes no segmento CD de medida $2\sqrt{2}$. Os segmentos AB e CD estão representados na Figura 5.4:

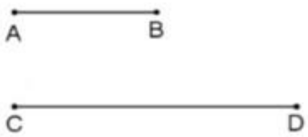


Figura 5.4: Segmentos AB e CD

a)O segmento de medida $\sqrt{2}$ coube um número inteiro de vezes no segmento de medida $2\sqrt{2}$?

b)O segmento AB e o segmento CD possuem uma medida de segmento comum?

c)Sem fazer cálculos, nem utilizar o P.V.C.D.S, você consegue justifiqcar que o segmento de medida $n\sqrt{2}$, com $n \in \mathbb{N}$ e o segmento $\sqrt{2}$ são comensuráveis?

Observação: As atividades acima são variações de uma mesma ideia, que é apresentar ao aluno o conceito de segmentos comensuráveis, fazendo com que os alunos enxerguem o conceito sem que o mesmo tenha sido apresentado previamente, e posteriormente possam aplicar esse conceito no estudo de números racionais .

4. Considere o segmento de reta AB de medida u, representado na Figura 5.5:

Figura 5.5: Segmento AB=u

Veja o processo para obter o ponto C da semirreta AB, tal que $AC = \frac{5u}{3}$.
1°. Divida o segmento u em três partes iguais a $\frac{u}{3}$, com o auxílio de uma par de esquadros e um compasso.
2°. A partir de A medem-se, sobre a semirreta AB, cinco partes iguais a $\frac{u}{3}$, obtendo-se assim o ponto C.
Utilizando o mesmo processo, obtenha, se possível, os pontos D, E e F tal que $\overline{AD} = \frac{8\overline{u}}{5}$, $\overline{AE} = 2\overline{u}$ e $\overline{AF} = \frac{3\overline{u}}{4}$.
Após marcar esses pontos na reta, responda as perguntas a seguir:

a) Os segmentos AB e AC são comensuráveis? Justifique.

b) Os segmentos AB e AE são comensuráveis? Justifique.

c) Os segmentos AE e AF são comensuráveis? Justifique.

d) Agora, utilizando o mesmo processo, justifique como marcar um ponto X qualquer, tal que $AX = \frac{nu}{m}$, com $m, n \in \mathbb{N}$.

Fonte: ***Print Screen*** **de Santos, 2013, p.56**

[10] P.V.C.D.S.: Processo de verificação da comensurabilidade de dois segmentos. É um processo geométrico de verificação da comensurabilidade de dois segmentos que consiste em procurar encontrar um segmento que caiba um número inteiro de vezes em um segmento e um número inteiro de vezes em outro segmento, com o auxílio de um compasso.

Atividade 12

Fonte: Santos (2013, p. 58)

Objetivos:

Quadro 22 - Objetivos da atividade 12

I. Convencer os alunos que o segmento que representa o comprimento do círculo e o segmento que representa seu diâmetro são incomensuráveis.

II. Levar os alunos a concluírem, que segmentos incomensuráveis com o segmento unitário possuem medida irracional.

Fonte: ***Print Screen*** **de Santos, 2013, p.58**

Descrição:

Quadro 23 - Atividade 12

1. Dado um círculo $C = 2\pi r$ de diâmetro $AB = 2r$, representa na Figura 5.6:

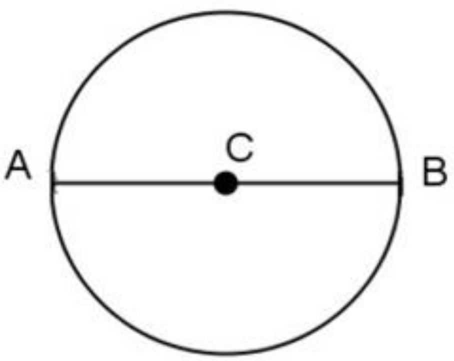


Figura 5.6: Círculo de centro C

Abrindo o círculo no ponto A, obteremos o segmento AA_1, que representa seu comprimento. Veja Figura 5.7, o segmento AA_1 que representa o comprimento do círculo e o segmento AB que representa diâmetro.

Figura 5.7: Comprimento AA_1 e diamentro AB

Verifique se os segmentos AA_1 e AB, representados na figura acima, são incomensuráveis.

Fonte: ***Print Screen*** **de Santos, 2013, p.58**

Atividade 13

Fonte: Santos (2013, p. 59)

Objetivos:

-Levar os alunos a concluírem que o segmento que representa o comprimento do círculo e o segmento unitário que representa o diâmetro do círculo são incomensuráveis.;

-Levar os alunos a concluírem também que segmentos incomensuráveis com o segmento unitário, possuem medida irracional.

Descrição:

Quadro 24 - Atividade 13

Observação: Professor, repita os passos anteriores, agora, utilizando um círculo de diâmetro medindo 1, para mostrar aos alunos que o segmento que representa o comprimento do círculo $C = \pi$ e o segmento unitário que representa o diâmetro do círculo $d = 1$ são incomensuráveis. Assim levar os alunos a concluirem que segmentos incomensuráveis com o segmento unitário, possuem medida irracional.

Fonte: ***Print Screen*** **de Santos, 2013, p.59**

Atividade 14

Fonte: Garcia, Soares e Fronza (2005, p. 30)

Objetivos:

Quadro 25 - Objetivos da atividade 14

a) traçar a reta real usando números decimais;

b) utilizar, ordenar e diferenciar números reais na forma decimal exata, infinita periódica e infinita não periódica;

c) estabelecer relação entre pontos da reta, números decimais e números reais;

d) definir número real a partir dos números decimais.

Fonte: ***Print Screen*** **de Garcia, Soares e Fronza, 2005, p.30**

Descrição:

Quadro 26 - Atividade 14

Seguindo os passos seguintes você irá construir uma reta real.

1. Trace uma linha horizontal.

Escolha um ponto qualquer e marque zero (0).

À direita escolhemos um outro ponto qualquer e marque 1.

Usando a distância entre estes dois pontos como unidade básica, marque pontos adicionais, à direita, 2, 3, 4, 5,...

Faça uma reflexão para a esquerda como se houvesse um espelho no 0, e marque : -2, -3, -4,....

2. Para posicionar outros números, pode-se dividir cada intervalo entre números inteiros da reta em dez parte; em cem partes, em mil partes. Sempre existe um espaço entre os pontos que correspondem a estas subdivisões.

Amplie o intervalo entre 0 e 1, tomando toda o comprimento da folha e divida-o em 10 partes, marcando os pontos de 0,1 a 0,9.

Marque os pontos médios: 0,15; 0,25; 0,35. E assim sucessivamente até 0,95.

3. Vamos marcar números entre 0,1 e 0,15.

Para isto amplie este intervalo, tomando toda o comprimento da folha e divida-o em 10 partes, marcando os pontos de 0,105; 0,110; 0,115; 0,120; 0,125; 0,130 sucessivamente até 0,150.

Nestas divisões sucessivas, aparecem pontos que correspondem a números decimais exatos, aqueles que têm número finito de casas decimais.

3. Marque o número 0,1222, ampliando o intervalo de 0,120 a 0,125, tomando todo o comprimento da folha.

Marque o número 0,12222, ampliando o intervalo de 0,1222 a 0,1223.

Se pudéssemos prosseguir com estas subdivisões, poderíamos marcar na reta o número 0,1222..... com infinitas casas decimais e com o dígito 2 repetido. Números que apresentam repetição de dígitos um número infinito de vezes são dito decimais periódicos.

Poderíamos também marcar um número como 0,12112111211112.....com infinitas casas decimais e sem período. Este é um decimal infinito e não periódico.

Fonte: ***Print Screen*** **de Garcia, Soares e Fronza, 2005, p.31**

6.3. ATIVIDADES SOBRE NÚMEROS IRRACIONAIS UTILIZANDO LÁPIS E PAPEL

Segundo Payo (2000) conta-se que a partir da descoberta da grafite em estado puro, em Borrowdale, Inglaterra, em 1564, ela passou a ser utilizada na fabricação de lápis. Inicialmente pode ter sido utilizada para marcar carneiros, ministrada como medicamento e, por vezes, aplicada como uma substância a que atribuíam poderes de cura especiais. Mas a grafite revelou-se rapidamente enquanto matéria de registro gráfico. É uma substância que permite um registro contínuo, ao contrário dos pincéis, penas e aparos e é de um negro muito próximo do de certas tintas utilizadas para a escrita ou para o desenho. Passou a ser cortada, adaptada a forma da mão e envolta em madeira ou corda. Assim este instrumento foi se desenvolvendo até chegar ao formato que conhecemos hoje.

Segundo Navarro, Navarro e Tambourgi (2007) antes da criação do papel, o material mais utilizado para escrita, foi o pergaminho, feito com peles de animais. Até o século XIX, o papel era fabricado a partir de uma pasta de trapos em um processo artesanal que durava de cinco a trinta dias. Como era um processo muito longo e penoso, pesquisas foram desenvolvidas visando ao seu aprimoramento. Muitos anos depois percebeu-se que era possível obter uma pasta a partir da madeira. A partir desta descoberta a fabricação do papel foi sendo cada vez mais aperfeiçoada.

Estes são dois instrumentos que foram inventados há muitos anos e, mesmo com passar do tempo, ainda continuam sendo muito utilizados, devido à grande importância que esta dupla desempenha. Estes também são dois instrumentos que podemos considerar como tecnológicos; algumas atividades baseadas no uso deles são dadas a seguir.

Atividade 15

Fonte: Rezende (2013, p. 139)

Objetivos:

-Perceber se os alunos concebem a existência de um quadrado, cuja medida de lado é um número irracional e analisar quais são as justificativas relacionadas a este fato.

Descrição:

Quadro 27 - Atividade 15

i) Existe um quadrado cuja medida de área é $A = 25cm^2$?

ii) Existe um quadrado cuja medida de área é $A = 13cm^2$?

Fonte: ***Print Screen*** **de Rezende, 2013, p.139**

Atividade 16

Fonte: Rezende (2013, p. 145)

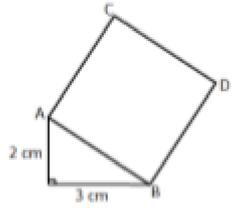
Objetivos:

-Perceber se os alunos compreendem a existência do quadrado com medida do lado irracional.

Descrição:

Quadro 28 - Atividade 16

A área do quadrado ABCD é $13\ cm^2$. Você concorda com esta afirmação?



Fonte: ***Print Screen*** **de Rezende, 2013, p.145**

Atividade 17

Fonte: Rezende (2013, p. 112)

Objetivos:

-Conhecer a percepção dos alunos sobre o conceito de números irracionais;

-Perceber se eles sabem diferenciar os irracionais dos demais conjuntos numéricos existentes;

Descrição: Cartões com os números: $\sqrt{3}$; $\sqrt{9}$; π ; $3{,}14$; $0{,}333\ldots$; $0{,}10100100010000\ldots$; $\frac{2}{3}$; -4; $\sqrt{-4}$; 0 .

Quadro 29 - Atividade 17

Questões do bloco I

1) Você acha que o número 1 e o número 2 existem? Você poderia justificar para quê servem estes números?
2) E quanto aos números representados nos cartões, você acha que eles existem?
3) Você falou que os números 1 e 2 servem para.... E esses números representados nestes cartões, pra que você diria que eles servem?
4) Você se lembra dos conjuntos numéricos? Você poderia classificar os números representados nos cartões em racional, irracional ou nem racional nem irracional?
5) Imagine a quantidade de grãos de arroz que você já comeu na sua vida. Você acha que se trata de uma quantidade finita ou infinita? Por que você acha isto?
6) E sobre a quantidade de grãos de arroz que você ainda vai comer na sua vida. Você acha que será uma quantidade finita ou infinita? Por quê?
7) Você poderia me dizer o que significa os três pontinhos "..." que aparecem em determinados números, tais como nos números $0{,}333\ldots$ e $0{,}101001000\ldots$.
8) Você acha que existem mais casas decimais (mais quantidades de números 3) no número $0{,}333\ldots$ ou mais grãos de arroz que você ainda vai comer na sua vida? Por quê?

Questões do bloco II

9) Você saberia dizer se existem mais números racionais ou mais números irracionais. Por quê?
10) Você já estudou sobre conjuntos enumeráveis e não - enumeráveis?
11) Você sabe me dizer se o conjunto dos números racionais é enumerável ou não enumerável? Por quê?
12) E o conjunto dos números irracionais, você acha que ele é enumerável ou não enumerável? Por quê?

Fonte: ***Print Screen*** **de Rezende, 2013, p.112**

Observação: As atividades do bloco II foram destinadas somente para alunos do ensino superior.

Atividade 18

Fonte: Rezende (2013, p. 132)

Objetivos:

-Mostrar aos alunos que alguns números podem ser representados como a razão entre dois números inteiros e outros números (os irracionais) não podem.

Descrição:

Quadro 30 - Atividade 18

a) Existem dois números inteiros p e q, $q \neq 0$ com os quais podemos escrever 3 igual a $\frac{p}{q}$? Se for possível diga quais são os números p e q. Caso contrário, justifique sua resposta.
b) Existem dois números inteiros p e q, $q \neq 0$ com os quais podemos escrever $\sqrt{2}$ igual a $\frac{p}{q}$? Se for possível diga quais são os números p e q. Caso contrário, justifique sua resposta.
c) Você conhece alguma demonstração matemática que comprove que $\sqrt{2}$ não pode ser representado como a razão entre dois números inteiros?
d) Você já estudou e saberia dizer do que se trata: i) segmentos comensuráveis e incomensuráveis; ii) teoria de Eudoxo; iii) Cortes de Dedekind; iii) teoria de Cantor sobre a construção dos números reais?

Fonte: *Print Screen* de Rezende, 2013, p.132

Observação: O item a foi destinado apenas a alunos do Ensino Fundamental e Médio. O item c não foi questionado aos alunos do Ensino Fundamental e o item d foi destinado apenas aos alunos do Ensino Superior.

Atividade 19

Fonte: Rezende (2013, p. 136)

Objetivos:

-Investigar se os alunos consideram, ou não, a existência de solução para as equações da forma $x^2 = a$, com $a \in \mathbb{R}$, sobretudo quando a não é um quadrado perfeito.

Descrição:

Quadro 31 - Atividade 19

As seguintes equações do segundo grau possuem solução no conjunto dos números reais?

a) $x^2 = 16$
b) $x^2 = 17$
c) $x^2 = -9$
d) $x^2 = \pi$

Fonte: *Print Screen* de Rezende, 2013, p.136

Atividade 20

Fonte: Rezende (2013, p. 149)

Objetivos:

-Questionar sobre a existência de quadrados, cuja medida da área não é um quadrado perfeito.

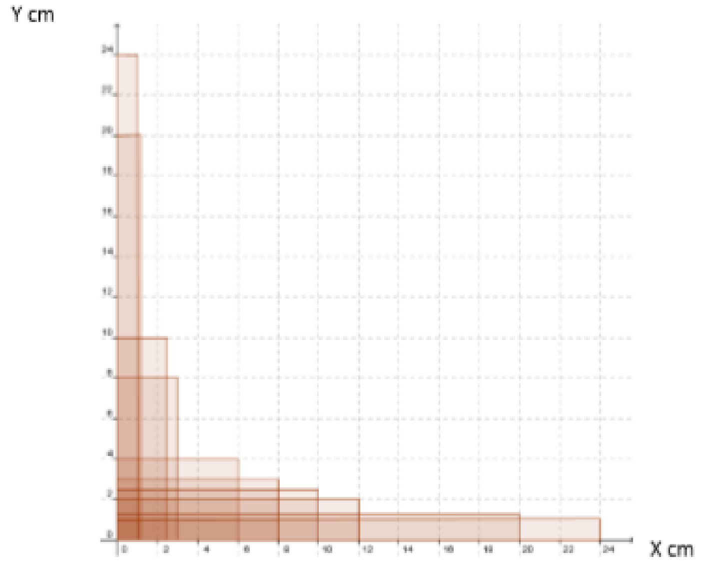
Descrição:

Quadro 32 - Atividade 20

a) No plano cartesiano estão representados alguns retângulos cuja medida de área é $24\,cm^2$. Você acha que existem outros retângulos como esses, que também possuem medida de área $24\,cm^2$? Em caso positivo, quais seriam outras possíveis medidas para os lados dos quadrados?

b) Pinte os pontos de coordenadas (x, y) que são vértices dos retângulos de área $24\,cm^2$ e que não pertençam aos eixos do plano cartesiano (aqui a intenção é que os alunos percebam o comportamento da curva formada por estes pontos).

c) Você acha que é possível representar um quadrado neste mesmo plano cartesiano com as mesmas propriedades destes retângulos: um vértice na origem e outros dois sobre os eixos coordenados, que tenha medida de área igual a $24\,cm^2$? Justifique sua resposta.



Fonte: ***Print Screen*** **de Rezende, 2013, p.149**

Atividade 21

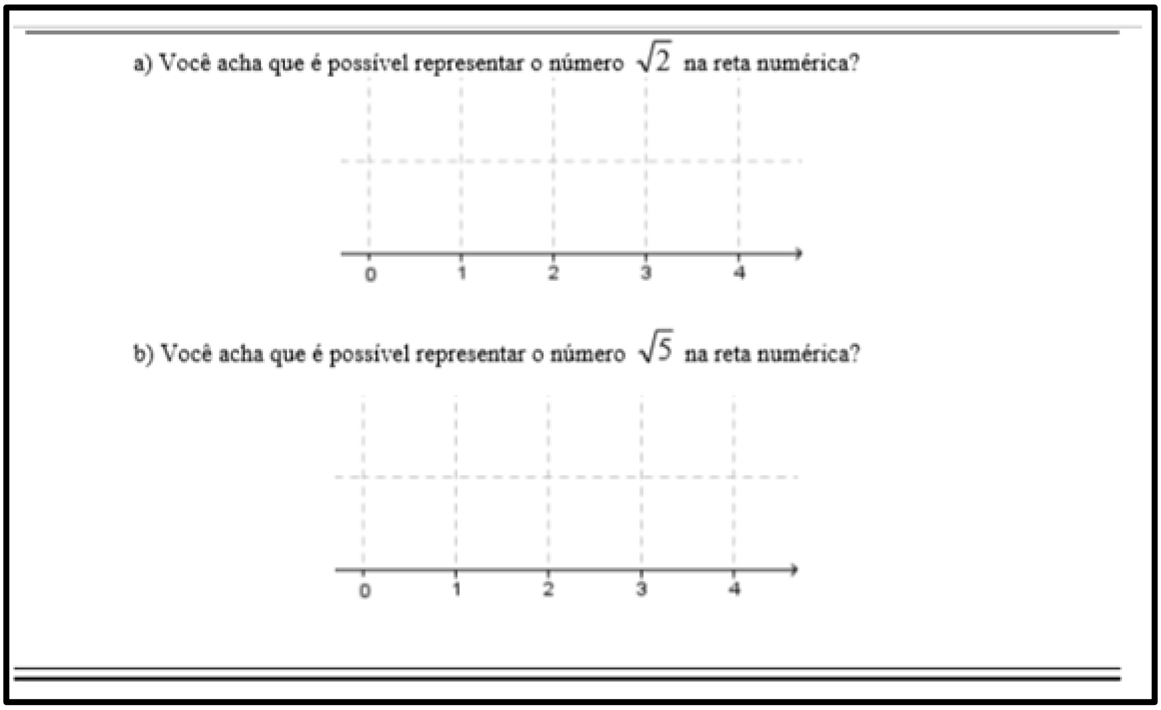
Fonte: Rezende (2013, p. 153)

Objetivos:

-Perceber se os alunos sabem representar um número irracional algébrico na reta numérica.

Descrição:

Quadro 33 - Atividade 21



Fonte: *Print Screen* de Rezende, 2013, p.153

Atividade 22

Fonte: Rezende (2013, p. 157)

Objetivos:

-Mostrar aos alunos a possibilidade de se construir segmentos de medidas irracionais da forma $\sqrt{n}, n \in \mathbb{Z}_+^*$, quando n não é um quadrado perfeito.

Descrição:[11]

[11] Uma atividade semelhante foi encontrada em Maffi, Fraga e Matos (2015, p. 06).

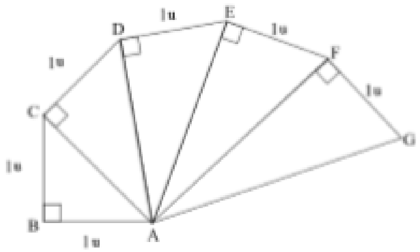
Quadro 34 - Atividade 22

a) Considere o triângulo retângulo ABC de catetos unitários. Qual é a medida da hipotenusa desse triângulo?

b) Considere o triângulo retângulo ACD, no qual um dos catetos tem a mesma medida da hipotenusa do triângulo precedente e o outro cateto é unitário. Qual é a medida da hipotenusa desse triângulo?

c) Considere o triângulo retângulo ADE, no qual um dos catetos tem a mesma medida da hipotenusa do triângulo ACD e o outro cateto é unitário. Qual é a medida da hipotenusa desse triângulo?

d) Agora que você conheceu um método de construção de segmentos de medidas $\sqrt{n}, n \in Z_+^*$, você representaria na reta o número $\sqrt{2}$ (ou $\sqrt{5}$) de um modo diferente que você representou na atividade anterior?



Fonte: ***Print Screen*** **de Rezende, 2013, p.157**

Atividade 23

Fonte: Garcia, Soares e Fronza (2005, p. 43)

Objetivos:

-Reforçar a distinção entre números racionais e irracionais.

Descrição:

Quadro 35 - Atividade 23

1. PI é um número real, pois tem origem na medida da cirunferência e tem um lugar na reta real. PI é racional ou irracional?

2. Decida se o número dado na tabela é racional ou irracional e justifique:

	√225	√2	√3	√2/6	Π/2	0,424242...	0,121221222...
Racional ou Irracional							

3.Trace uma reta e numere-a convenientemente. Tome-a como a reta real. Dê exemplos de racionais e os coloque numa reta numerada. Igualmente dê exemplos de irracionais e os coloque na reta.

4.Justifique porquê cada exemplo que você deu é ou não racional.

Fonte: *Print Screen* de Garcia, Soares e Fronza, 2005, p.43

7. ANÁLISE CRÍTICA DAS ATIVIDADES

Na atividade 07 o aluno poderá perceber que existem segmentos com medidas irracionais e que por isso estes números podem ser utilizados para realizarem medidas. É uma atividade que mostra uma possível aplicação dos irracionais, descontruindo a ideia de que esses números não servem para nada.

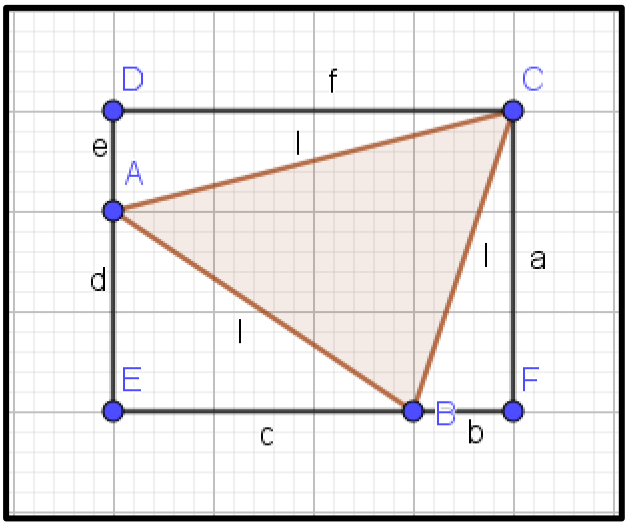
Na atividade 08 os alunos deverão encontrar as medidas dos lados e o perímetro das figuras que compõe o tangram. Para isso é necessário que os alunos busquem relações entre as figuras para descobrirem suas medidas. Algumas destas medidas estão representadas por números irracionais, com isso os alunos terão que operar com os números irracionais. É importante que os alunos aprendam a operar com os números irracionais, mas como alertado pelos PCN de Matemática do Ensino Fundamental, não é interessante que no estudo deste conjunto numérico o professor enfatize apenas os cálculos com radicais. Pommer (2012) também afirma que o professor não deve priorizar o aspecto operatório destes números, pois esta é uma característica insuficiente para a compreensão destes números.

Na atividade 09 os alunos novamente representarão alguns números irracionais na reta numérica, podendo observar que é possível representá-los na reta e também poderão utilizar a calculadora para realizar a multiplicação de um número irracional na sua forma decimal com algumas casas decimais, por ele mesmo, para confrontarem com o número na forma de radical. Com isso esta atividade contribui para que os alunos percebam que é impossível representar todas as casas decimais de um número irracional, pois esta é uma quantidade infinita e que por isso a calculadora apresenta apenas uma aproximação com poucas casas decimais.

Na atividade 10 os alunos deverão tentar construir um triângulo equilátero utilizando o geoplano e deverão chegar à conclusão de que não é possível construir um triângulo equilátero utilizando este material manipulável. O geoplano pode ser modelado através de uma malha quadrada, isto é, através do conjunto de pontos do plano cartesiano da forma (i, j), com i e j inteiros. Assim, em termos matemáticos, perguntar se é possível construir um triângulo equilátero no geoplano é equivalente a perguntar se existe triângulo equilátero com coordenadas inteiras. A resposta a esta pergunta é não, porque $\sqrt{3}$ é um número irracional. A explicação encontra-se abaixo:

Suponhamos, por absurdo, que seja possível construir um triângulo equilátero ABC com coordenadas inteiras: $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ e $c = (x_c, y_c)$ com x_a, y_a, x_b, y_b, x_c, y_c números inteiros. Seja l a medida dos lados desse triângulo equilátero, CDEF o retângulo com vértices $D = (x_a, y_C)$, $E = (x_a, y_b)$ e $F = (x_c, y_b)$ e a, b, c, d, e, f as medidas dos segmentos CF, FB, BE, EA, AD e DC respectivamente.

Figura 12 - Retângulo CDEF



Fonte: Elaborado pela autora

Observe que a, b, c, d, e, f são números inteiros por se tratarem de diferenças de números inteiros (isto é, diferenças das coordenadas de A, B, C, D, E e F). Temos também que a área do retângulo CDEF é um número inteiro por tratar-se de um produto de números inteiros (af). Denotemos por S_{ABC} a área do triângulo ABC. Observe que:

$$S_{ABC} = S_{EDCF} - (S_{BFC} + S_{AEB} + S_{ADC})$$

Assim, $l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = af - \left(\frac{ab}{2} + \frac{cd}{2} + \frac{ef}{2}\right)$, de modo que $l^2\sqrt{3} = 4af - 2(ab + cd + ef)$. Note que o lado direito dessa equação é um número inteiro por tratar-se de somas e produtos entre inteiros. Temos também que l^2 é um número inteiro, uma vez que $l^2 = a^2 + b^2$. Daí, concluímos que:

$$\sqrt{3} = \frac{4af - 2(ab + cd + ef)}{l^2}$$

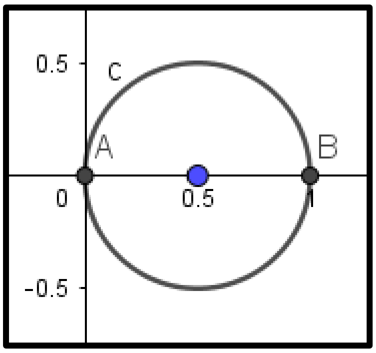
É um número racional, o que é um absurdo! Portanto, não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices com coordenadas inteiras.

Para a resolução desta atividade é preciso que os alunos tenham uma bagagem maior de conhecimento, pois eles precisam ter noção de outros conceitos, como: cálculo de áreas de figuras geométricas e equações. Além disso, ter noção que o conjunto dos inteiros é fechado para soma, subtração e multiplicação. Por isso esta é uma atividade que deve ser destinada para alunos do Ensino Médio e do Ensino Superior.

As atividades 11, 12 e 13 utilizam compasso e régua e exploram os conceitos de segmentos comensuráveis e incomensuráveis. Estas atividades podem ajudar muito os alunos a compreenderem essas ideias. E a partir da compreensão destas ideias o professor poderá também apresentar a ligação do conceito de números racionais e irracionais aos conceitos de segmentos comensuráveis e incomensuráveis. Abaixo está o desenvolvimento da atividade 13 e como pode-se observar segue a mesma ideia das atividades 11 e 12.

1) Dado um círculo de diâmetro medindo 1 unidade e comprimento $C = 2\pi * r = 2\pi * \frac{1}{2} = \pi$.

Figura 13 - Círculo com diâmetro medindo 1 unidade

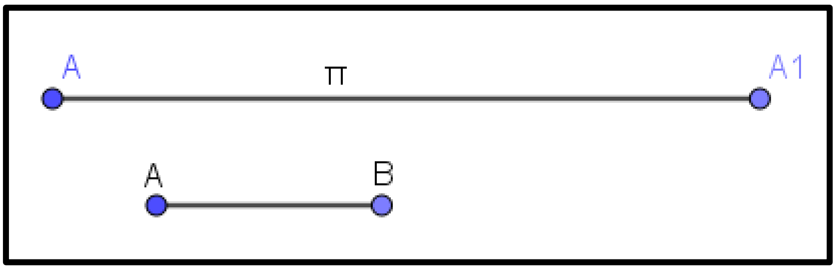


Fonte: Elaborado pela autora

2) Abrindo o círculo, obteremos o segmento AA_1que representa seu comprimento[12]. Veja na figura abaixo, o segmento AA_1 que representa o comprimento do círculo e o segmento AB que representa seu diâmetro. Verifique se estes segmentos são incomensuráveis.

[12] Consideramos aqui “abrir” o círculo para medir seu comprimento. Mas segundo Barbosa (2004): “o comprimento de um círculo deve ser o comprimento do segmento que obteríamos se pudéssemos cortando o círculo, desencurvá-lo, como faríamos a um pedaço de arame circular. No entanto esta noção de “desencurvamento” não existe na geometria que construímos. Podemos partir de uma ideia bem mais simples que é de aproximar o círculo por uma poligonal.” (p.153)

Figura 14 - Segmentos AA_1e AB



Fonte: Elaborado pela autora

A atividade 14, é uma atividade simples, mas de grande importância, pois nela os alunos vão construir a reta real e nela inserir alguns números de cada conjunto numérico. É uma atividade que poderá levar o aluno a compreender melhor a distribuição dos números na reta. Além de permitir também que os alunos reconheçam os irracionais como números reais, que é possível representar os irracionais na reta numérica e saibam estimar essa localização. Estes são possíveis benefícios que esta atividade pode proporcionar ao aluno e que estão de acordo com algumas das características do conjunto dos irracionais que se espera, segundo a BNCC e os PCN, que alunos do Ensino Fundamental compreendam no estudo deste assunto.

As atividades 15 e 16 são bastante semelhantes. Elas levam o aluno a refletir se existe ou não um quadrado de área $13\ cm^2$. Estas duas atividades podem ser ideais para introduzir o conjunto dos irracionais, pois tocam em um ponto muito importante citado pelos PCN: "(...)a importância de colocar os alunos diante de situações em que números racionais são insuficientes para resolvê-las, tornando-se necessária a apresentação de outros números: os irracionais" (Brasil, 1998, p.83).

A atividade 17 por sua vez, pede que o aluno classifique cada número de acordo com o conjunto a que pertence. Além disso, esta atividade também explora as noções de finito e infinito, levando o aluno a refletir sobre esta questão de maneira bem dinâmica, a partir de uma situação do seu cotidiano. Ela explora também a questão da enumerabilidade e da não enumerabilidade do conjunto dos racionais e dos irracionais, respectivamente. Esta é uma característica destes conjuntos que geralmente não é trabalhada na educação básica, por isso esta parte da atividade foi destinada exclusivamente para alunos do Ensino Superior. Por fim, esta atividade também poderá ajudar o professor a compreender quais são as dúvidas dos alunos ao classificar números em racionais e irracionais, mediante uma análise das respostas dos alunos na classificação dos números. É importante também que o professor trabalhe com os alunos as noções de finito e infinito, pois muitos deles apresentam dificuldades na compreensão destas noções. Como constatado por Rezende (2013) esta foi uma das dificuldades apresentadas por alunos tanto do ensino fundamental, quanto do ensino médio e superior.

A atividade 18 é bem interessante, pois leva os alunos a refletirem sobre uma questão apontada por Rezende (2013) como embaraçosa para muitos alunos: a impossibilidade de representar um número irracional como uma razão de inteiros. Esta é uma das ideias sugeridas nos PCN de Matemática do Ensino Fundamental, que os alunos devem apresentar domínio ao final desta etapa escolar. Mas como evidenciado por Rezende (2013) nem sempre os alunos saem do Ensino Fundamental compreendendo bem esta e outras ideias relacionadas ao ensino dos irracionais, pois este autor constatou alguns alunos do Ensino Médio e do Ensino Superior que ainda não tinha uma compreensão adequada da impossibilidade de representar os irracionais como uma razão de inteiros, além de apresentar também outras dificuldades.

As atividades 19 e 20, semelhantemente às atividades 01 e 02, coloca o aluno diante de situações onde os racionais são insuficientes para resolvê-las. Como sugerido pelos PCN esta é uma ideia importante de ser trabalhada com os alunos para se introduzir o conjunto dos irracionais.

A atividade 21 é importante para que o aluno compreenda que é possível representar os irracionais na reta numérica. É uma atividade simples, que vai de encontro a mais uma das características que os PCN do Ensino Fundamental e a BNCC esperam que os alunos assimilem ao final do 9º ano.

A atividade 22 ajuda a descontruir a ideia equivocada que muitos alunos constroem dos irracionais, como sendo aqueles números que não servem para nada, pois a partir desta atividade os alunos poderão perceber que existem segmentos de reta com medidas irracionais e que, portanto, eles podem ser usados também como unidade de medidas.

Semelhantemente à atividade 17, a atividade 23 também sugere que os alunos classifiquem os números dados em racionais e irracionais. Pode-se perceber que os números apresentados, são escolhidos estrategicamente, pois são aqueles que podem gerar mais dúvidas nos alunos. Devido a este fato, esta atividade poderá ajudar o professor a perceber quais são as questões deste conteúdo que os alunos ainda não compreenderam corretamente.

8. CONCLUSÃO

Com base na pesquisa realizada foi possível perceber a grande dificuldade que alunos, em diversas etapas da educação, apresentam em relação ao conteúdo dos números irracionais. Vimos também que este conteúdo é apontado por alguns autores como sendo um conteúdo complexo, de difícil entendimento, o que também dificulta a abordagem deste conceito em sala de aula.

Dentre algumas possíveis causas desta dificuldade em torno dos irracionais, podemos citar a maneira de abordagem deste conteúdo nos livros didáticos, que definem este conjunto numérico de maneira confusa. Também podemos citar a não compreensão deste conceito pelos próprios professores e consequentemente a maneira como estes abordam este conjunto em sala de aula, muitas vezes fundamentando-se exclusivamente no livro didático e dando muita ênfase ao trabalho com algoritmos, priorizando cálculos que muitas vezes não fazem sentido para os alunos.

Foi possível observar que existem problemas em torno do processo de ensino e de aprendizagem dos irracionais. A partir daí faz-se necessário dar uma atenção especial a este conteúdo, apresentando metodologias e atividades que permitam aos alunos refletirem e compreenderem as características deste conjunto e que também auxiliem os próprios professores em suas práticas.

As atividades analisadas ao longo deste trabalho, discutem muitas ideias consideradas “problemáticas” referentes aos números irracionais, como: a percepção que os irracionais pertencem ao conjunto dos reais e que podem ser representados na reta numérica, a existência de segmentos com medidas irracionais, a impossibilidade de representar os irracionais como uma fração de inteiros, a noção de que a calculadora ao trabalhar com números irracionais apresenta apenas uma aproximação desses números com poucas casas decimais e as noções de finito e infinito, entre outras.

As TIC constituem-se em uma ferramenta que, se utilizada de maneira adequada, com um planejamento prévio do professor e atentando-se para suas potencialidades e limitações, podem possibilitar a criação de práticas educacionais mais significativas, além de tornar as aulas mais dinâmicas e interessante para os alunos.

Diante de tudo isso, acreditamos que as tecnologias podem auxiliar no processo de ensino dos números irracionais. Por isso, descrevemos ao longo deste trabalho algumas atividades que fazem uso deste recurso e que podem ser utilizadas em sala de aula com o objetivo de contribuir neste processo, tanto para a construção de significados deste conceito pelos alunos, tanto auxiliando os professores em suas práticas.

E, diante das atividades encontradas, percebemos que é possível sim transformar o ensino dos irracionais em sala de aula e torná-lo mais significativo para os alunos. Encontramos atividades que vão ao encontro do que é sugerido nos documentos curriculares da educação e abordam características deste conjunto numérico que muitas das vezes não são trabalhadas de maneira adequada com os alunos. Mas isso exige que o professor reflita sobre quando e como utilizar cada atividade, de acordo com os objetivos que deseja alcançar.

9. REFERÊNCIAS

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática**. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

BORBA, Marcelo de Carvalho; SILVA, Ricardo Scucuglia R. da; GADANIDIS, George. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática**. Sala de aula e internet em movimento. 1. Ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2014.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base>. Acesso em: maio 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** – Brasília: MEC / SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: abr. 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto ciclos do ensino fundamental: Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais** – Brasília: MEC / SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf>. Acesso em: abr. 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: abr. 2018.

BROETTO, Geraldo Claudio**. O ensino de números irracionais para alunos ingressantes na licenciatura em matemática**. 2016. 360 f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2016. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/vewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=3709403>. Acesso em: mar. 2018.

CORBO, Olga**. Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de matemática para a exploração de noções concernentes aos números irracionais na educação básica**. 2012. 289 f. Tese (Doutorado) – Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2012. Disponível em: <https://s3.amazonaws.com/pgsskrotonteses/a718fbf95d4a616aab44c46b799fcbc3.pdf>. Acesso em: mar. 2018.

FREITAS, Maria do Rosário da Silva. **As TIC no estudo de funções: uma experiência com uma turma de 9º ano**. 2016. 174 f. Relatório de Atividade Profissional - Mestrado em Ensino de matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, Universidade do Minho. Disponível em: <http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/45279>. Acesso em: abr. 2018.

GARCIA, Vera Clotilde; SOARES, Débora da Silva; FRONZA, Juliana**. Ensino dos números irracionais no nível fundamental. Coleção Cadernos de Matemática para professores**, Vol. 1. Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 2005. Disponível em: <http://mat.ufrgs.br/~vclotilde/publicacoes/GR%C1FICA-IRRACIONAIS.pdf>. Acesso em: mar. 2018.

GEOGEBRA. **O QUE É O GEOGEBRA?** Disponível em: <https://www.geogebra.org/about?ggbLang=pt_BR>. Acesso em: 02 jun. 2018.

GRAVINA, Maria Alice; CONTIERO, Lucas de Oliveira. Modelagem com o geogebra: uma possibilidade para a educação interdisciplinar? **Revista Novas Tecnologias na Educação (Renote)**, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, v.9, n.1, jul. 2011. Disponível em: <http://www.seer.ufrgs.br/renote/article/view/21917>. Acesso em: jun. 2018.

JESUS, Bárbara Cristina Dâmaso de. **Números irracionais: uma análise de livros didáticos dos ensinos fundamental II e médio**. 2017. 50 f. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal de São João del- Rei, São João del- Rei, 2017. Disponível em: <https://ufsj.edu.br/portal2repositorio/File/comat/TCC%20Barbara.pdf>. Acesso em: mar. 2018.

KESSELER, Leonila Nilse. **O uso das TIC em sala de aula.** 2010. Artigo (Especialização em Tecnologias da Informação e da Comunicação Aplicadas à Educação) – Universidade Federal de Santa Maria, Rio Grande do Sul. Disponível em: <http://repositorio.ufsm.br:8080/xmlui/handle/1/2302>. Acesso em: maio 2017.

LORENZATO, Sérgio. (Org.). Laboratório de Ensino de Matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: __. **O Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. Cap. 01, p. 03-38.

MAFFI, Caroline; FRAGA, Francieli Bandeira de; MATOS, Diego de Vargas. O ensino de Matemática em uma perspectiva investigativa: a construção de alguns números irracionais. **Revista Eletrônica da Matemática**, Caxias do Sul, v. 1, n. 2, 2015. Disponível em <https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/1246/1083>. Acesso em: mar. 2018.

MENDES, Sônia Cristina da Cruz. **Práticas pedagógicas para o ensino dos números irracionais.** 2012. 113f. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* do Mestrado em Educação Matemática, Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2012. Disponível em: <http://www.uss.br/arquivos/posgraduacao/strictosensu/educacaoMatematica/dissertacoes/2012/DISSERTACA_Sonia_Cristina_da_Cruz_Mendes.pdf>. Acesso em: jun. 2017.

MORAN, José Manuel; MASETTO, Marcos T.; BEHRENS, Marilda Aparecida. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. 16. ed. Campinas: Papirus, 2000.

MOREIRA, Plinio Cavalcanti; FERREIRA, Maria Cristina Costa. O que é número real? Os números reais na formação do professor da Educação Básica. In: CURY, Helena Noronha; VIANNA, Carlos Roberto. (Orgs.). **Formação do professor de matemática: reflexões e propostas.** Santa Cruz do Sul: Editora IPR, 2012, Cap. 02, p. 49-94.

MÓZER, Graziele Souza. **Para que servem os números irracionais? Manifestações em Aritmética, Combinatória e Geometria**. 2013. 56 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2013. Disponível em:<https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=93116>. Acesso em: mar. 2018.

NAVARRO, Roberta Maria Salvador; NAVARRO, Fabiana Maria Salvador; TAMBOURGI, Elias Basile. Estudo de diferentes processos de obtenção da pasta celulósica para fabricação de papel. **Revista Ciência e Tecnologia,** Universidade Católica de Pernambuco, n.1, jul./dez. 2007. Disponível em: <http://www.unicap.br/revistas/revista_e/artigo4.pdf>. Acesso em: jul. 2018.

NUNES, Sérgio da Costa; SANTOS, Renato Pires dos. O Construcionismo de Papert na criação de um objeto de aprendizagem e sua avaliação segundo a taxionomia de Bloom. In: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS, 9, 2013, Águas de Lindóia (SP). **Atas**... [S.l.:S.n.]. Disponível em: <http://www.fisica-interessante.com/files/artigoconstrucionismo_papert_objeto_de_aprendizagem.pdf>. Acesso em: maio 2018.

OLIVEIRA, Cláudio de; MOURA, Samuel Pedrosa. Tic's na Educação: A utilização das tecnologias da informação e comunicação na aprendizagem do aluno. **Pedagogia em ação – Revista eletrônica do curso de pedagogia da PUC Minas**, [S.l.], v. 7, n. 1, p. 75-95, 2015. Disponível em: <http://periodicos.pucminas.br/index.php/pedagogiacao/issue/view/741> Acesso em: maio 2018.

PAYO, Manuel San. **Lápis: a linha clara**. 2000. 52f. Universidade de Lisboa, Faculdade de Belas Artes, [S.l.]. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/6852/2/ULFBA_TES54_1.pdf>. Acesso em jun. 2018.

POMMER, Wagner Marcelo. **A construção de significados dos números irracionais no ensino básico: Uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos números reais**. 2012. 235 f. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde23082012092642/ptbr.php>. Acesso em: mar. 2018.

RAMOS, Sérgio. **Tecnologias da Informação e Comunicação. Conceitos básicos**. 2008. Disponível em: <https://pt.scribd.com/document/130513759/TIC-Conceitos-Basicos-SR-Out-2008>. Acesso em: abr. 2018.

REZENDE, Veridiana. **Conhecimentos sobre números irracionais mobilizados por alunos brasileiros e franceses: um estudo com alunos concluintes de três níveis de ensino**. 2013. 209 f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=154112>. Acesso em: mar. 2018.

SALES, Reinaldo Barros. **As contribuições da Escola Pitagórica para a Matemática**. 2015. 50 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2015. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=2571859>. Acesso em: mar. 2018.

SANCHEZ FILHO, Saul Edgardo Mendez. Assimilando a evolução tecnológica – vídeos e caleidoscópios na pós-modernidade. **Lumina – Revista do Programa de Pós-Graduação em Comunicação da Universidade Federal de Juiz de Fora**, Juiz de Fora, v. 8, n. 1/2, p. 79-100, jan-dez 2005. Disponível em: <http://www.uesc.br/icer/artigos/assimilando_evolucao_tecnologica.pdf>. Acesso em: maio 2018.

SANTOS, Ana Cláudia Guedes dos. **Uma contribuição ao ensino de números irracionais e de incomensurabilidade para o ensino médio**. 2013. 147 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2013. Disponível em: <http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/?pag=162>. Acesso em: mar. 2018.

SANTOS, George França dos; MEDEIROS, Thalita Melo de Souza; RIBEIRO, Josivânia Costa Sousa. TICs e educação: desafios e perspectivas no século XXI. **Revista TICs e EAD em Foco**, São Luís, v. 3, n. 2, p. 81-97, jul./dez. 2017. Disponível em: <http://www.uemanet.uema.br/revista/index.php/ticseadfoco/article/download/219/23>. Acesso em: maio 2018.

SANTOS, Josimar José dos. **A conceituação dos números irracionais no primeiro ano do Ensino Médio**. 2014. 43 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT), Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2014. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=2266030>. Acesso em: mar. 2018.

SELVA, Ana Coelho Vieira; BORBA, Rute Elizabete de Souza. **O uso da calculadora nos anos iniciais do ensino fundamental**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

SILVA, Alex Gomes da. **Construções geométricas com régua e compasso.** 2013. 132 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2013. Disponível em: <http://www.repositorio.ufal.br/handle/riufal/2432>. Acesso em: jun. 2018.

SILVA, Gratuliano Erigoi Alves da. **Um estudo sobre a aprendizagem de números irracionais no ensino médio**. 2006. 180 f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006. Disponível em: <http://livros01.livrosgratis.com.br/cp058020.pdf>. Acesso em: mar. 2018.

VASCONCELOS, Daniel Victor Menezes de. **Números irracionais: uma abordagem para o ensino básico**. 2016. 42 f. Dissertação (Magister Scientiae) – Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2016. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=4294207>. Acesso em: mar. 2018.

VELOSO, Renato. **Tecnologias da informação e da comunicação: desafios e perspectivas**. São Paulo: Saraiva, 2011. [E-Book].