Universidade Federal de São João del-Rei

Universidade Federal de São João del-Rei

Izabela Maura Santos Silva

UMA LEITURA DA PRÁTICA DOCENTE DE UM PROFESSOR DO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: O CASO DAS FRAÇÕES

São João del-Rei

2019

Izabela Maura Santos Silva

UMA LEITURA DA PRÁTICA DOCENTE DE UM PROFESSOR DO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: O CASO DAS FRAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenadoria do Curso de Matemática, da Universidade Federal de São João del-Rei, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Viviane Cristina Almada de Oliveira

São João del-Rei, __ de ____ de ___.

Banca Examinadora

____

Orientadora: Profª. Drª. Viviane Cristina Almada de Oliveira

____

Profª. Drª. Fabíola de Oliveira Miranda

____

Profª. Drª. Flávia Cristina Figueiredo Coura

AGRADECIMENTOS

O percurso até aqui não foi fácil, foram grandes desafios, obstáculos e lutas encontradas pelo caminho, superados e vencidos. Primeiramente agradeço a Deus e a Nossa Senhora pelo dom da vida e por sempre me lembrar que sou mais forte do que penso. A minha mãe, Margarete, que me ensinou a dar os primeiros passos e a viver com dignidade, honestidade e por sempre me apoiar. Ao meu pai, Adilson, que sempre confiou em mim, me motivando a nunca desistir dos meus objetivos, sendo sempre minha inspiração; muito obrigado pelas vezes que abriu mão de seus sonhos para a realização do meu. Está vitória dedico a vocês, meus pais! Aos meus avós, em especial a Vovó Lili, que sempre acreditou em mim e vibrou com minhas lutas e conquistas. A Minha irmã, Izadora, meus tios, minhas primas e namorado pelo carinho e incentivo e por confiarem em mim. Aos grandes professores, principalmente a Viviane, pela sua humanidade e profissionalismo, e àqueles que são verdadeiros mestres, pelo aprendizado e convivência. Aos amigos, que fizeram parte desta trajetória e que lembrarei sempre com muito carinho e saudades. Obrigados a todos, que direta ou indiretamente contribuíram para que o sorriso que hoje trago no meu rosto fosse possível! Valeu a pena!

“Aprendemos a voar como os pássaros,
a nadar como os peixes;
mas não aprendemos a simples arte de vivermos junto
como irmãos.”

Martin Luther King Jr.

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso teve como objetivo constituir uma leitura da prática docente de um professor de Matemática em uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental, em uma escola pública, localizada na cidade de São João del-Rei, na introdução do conteúdo de frações. Para tanto, observamos e registramos as aulas ministradas esse professor, desde a introdução das frações até o estudo das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão e realizamos um estudo bibliográfico de artigos que abordavam o ensino e a aprendizagem de números racionais na forma fracionária em periódicos que possuíam Qualis A_1, A_2, B_1 ou B_2, publicados no período de 2008 a 2018. Esse estudo auxiliou-nos na produção e na discussão do que chamamos de episódios da prática docente, constituídos a partir das observações das aulas observadas. A partir deles, apresentamos considerações acerca do ensino e da aprendizagem de frações.

PALAVRAS-CHAVE: Frações. Prática Docente. Ensino e Aprendizagem.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Os números racionais foram criados em contextos de necessidades humanas em atribuir valores e grandezas não inteiras, fazendo-se, portanto, necessária a criação de outro campo numérico: os números racionais.

Caraça (2005, apud Patrono, 2011) a partir da razão entre a medida de dois segmentos, define número racional “Diz-se que a medida do segmento AB, tomando CD como unidade, é o número $\frac{m}{n}$ e escreve-se $AB = \frac{m}{n}$. CD, quaisquer que sejam os números inteiros m e n (n não nulo)” (p. 21). Os números racionais possuem diferentes representações, como fração, decimal e porcentagem, porém trabalharemos com o número racional na forma de frações.

O ensino de frações[1] é um tema abordado desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. No 6º ano, seu ensino é amplamente abordado, explorando as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com frações e diferentes significados das frações.

Tendo em vista esse quadro, alguns questionamentos surgem a (futuros) professores de Matemática: Como o conceito de fração é abordado por professores de Matemática no 6º ano do Ensino Fundamental? Há dificuldades com relação ao ensino e à aprendizagem de frações? Se sim, o que professores da escola básica fazem para trabalhar com as dificuldades dos alunos em lidar com frações? Isso é possível? O que pode contribuir para o ensino das frações?

No intuito de responder esses questionamentos, optamos por realizar uma leitura da prática docente de um professor de Matemática em uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental em uma escola pública, localizada na cidade de São João del-Rei, no início dos trabalhos com frações nesse ano escolar.

Consideramos o presente trabalho de cunho qualitativo, visto compreendermos, como Flick (2009), que:

> De modo diferente da pesquisa quantitativa, os métodos qualitativos consideram a comunicação do pesquisador em campo como parte explícita da produção de conhecimento, em vez de simplesmente encará-la como uma variável a interferir no processo. A subjetividade do pesquisador, bem como daqueles que estão sendo estudado, tornam-se parte do processo de pesquisa. As reflexões dos pesquisadores

[1] Os números racionais possuem diferentes representações, como fração, decimal e porcentagem. Embora, neste trabalho, tenham sido pesquisados artigos sobre os números racionais, o foco esteve no ensino e na aprendizagem da representação fracionária.

> sobre suas próprias atitudes e observações em campo, suas impressões, irritações, sentimentos, etc., tornam-se dados em si mesmos, constituindo parte da interpretação [...]. (FLICK, 2009, p. 25)

Para o desenvolvimento dessa leitura, foram observadas e registradas – por escrito e em áudio - as referidas aulas e realizada uma revisão bibliográfica de publicações que tratam do tema frações, buscando-se pensar em possibilidades de intervenções em sala de aula e em novos olhares para o ensino desse tema.

Acreditamos que esse olhar para a prática, articulado a produções acadêmicas sobre o ensino e a aprendizagem das frações, possa auxiliar-nos na compreensão das dinâmicas envolvidas em sala de aula e auxiliar na proposição de ações educativas de professores e futuros professores de Matemática que abordem esse conteúdo.

2. REVISÃO DE LITERATURA

2.1. AS FRAÇÕES NOS DOCUMENTOS OFICIAIS

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) é um documento que propõe orientações gerais para o Ensinos Fundamental e Médio no Brasil, tendo como objetivo orientar os professores no planejamento escolar e na organização de currículos.

Os PCN da área da Matemática têm como finalidade a

> [...] construção de um referencial que oriente a prática escolar de forma a contribuir para que toda criança e jovem brasileiros tenham acesso a um conhecimento matemático que lhes possibilite de fato sua inserção, como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura. (BRASIL, 1998, p.15).

No que diz respeito ao estudo das frações, sua abordagem é feita no terceiro ciclo[2] do Ensino Fundamental. Embora esse tema seja apresentado inicialmente nos anos iniciais do Ensino Fundamental), nos anos finais dessa etapa tem-se uma continuidade dessa discussão, retomando-se e aprofundando-se o estudo das frações.

> Embora as representações fracionárias e decimais dos números racionais sejam conteúdos desenvolvidos nos ciclos iniciais, o que se constata é que os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo [...] (BRASIL,1998, p.100-101)

[2] A organização dos PCN é em ciclos, cada um deles correspondendo a dois anos do Ensino Fundamental. Essa disposição possui como objetivo principal superar a segmentação excessiva produzida pelo regime seriado e buscar princípios de ordenação que possibilitem maior integração do conhecimento (BRASIL, 1997).

No terceiro ciclo, os alunos devem ser estimulados a construir, analisar e comparar diferentes processos de resolução de situações-problema envolvendo frações. E, na busca por soluções, o aluno reconhece a necessidade de construção de argumentos plausíveis.

As frações são discutidas dentro do bloco de “números e operações”[3], e nele são apontadas como essenciais:

> - Reconhecimento de números racionais em diferentes contextos - cotidianos e históricos - e exploração de situações-problema em que indicam relação parte/todo, quociente, razão ou funcionam como operador.
> - Localização na reta numérica de números racionais e reconhecimento de que estes podem ser expressos na forma fracionária e decimal, estabelecendo relações entre essas representações.
> - Análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações, envolvendo números naturais, inteiros e racionais, reconhecendo que diferentes situações-problema podem ser resolvidas por uma única operação e que eventualmente diferentes operações podem resolver um mesmo problema. (BRASIL, 1998, p. 71)

No terceiro ciclo, para o desenvolvimento do pensamento numérico, os PCN sugerem a ampliação e a construção de novos significados para os números – naturais, inteiros e racionais – a partir da utilização no contexto social e da análise de alguns problemas históricos que motivaram sua construção; a resolução de situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e, a partir delas, ampliar e construir novos significados de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação; a identificação, a interpretação e a utilização de diferentes representações dos números naturais, racionais e inteiros, indicados por diferentes notações, vinculadas aos contextos matemáticos e não matemáticos. E, por último, selecionar e utilizar dos procedimentos de cálculo (exato ou aproximado, mental ou escrito) em função da situação-problema proposta.

Alguns obstáculos são apontados no documento quanto à aprendizagem dos números racionais, por haver uma ruptura com os conceitos construídos quanto aos números naturais:

> - cada número racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias: por exemplo, são diferentes representações de um mesmo número;
> - a comparação entre racionais: acostumados com a relação $3 > 2$, terão de compreender uma desigualdade que lhes parece contraditória, ou seja, $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$;

[3] “Os blocos de conteúdos são agrupamentos que representam recortes internos à área e visam explicitar objetos de estudo essenciais à aprendizagem” (BRASIL, 1997, p. 79). Os conteúdos de Matemática para o Ensino Fundamental estão organizados em quatro blocos: Números e operações, Espaço e forma, Grandezas e medidas e Tratamento da informação.

- se o "tamanho" da escrita numérica, no caso dos naturais, é um bom indicador da ordem de grandeza ($8345 > 83$), a comparação entre $2{,}3$ e $2{,}125$ já não obedece ao mesmo critério;
- se, ao multiplicar um número natural por outro natural (sendo este diferente de 0 ou 1) a expectativa é a de encontrar um número maior que ambos, ao multiplicar 10 por se surpreenderão ao ver que o resultado é menor do que 10;
- se a seqüência dos números naturais permite estabelecer sucessor e antecessor, para os racionais isso não faz sentido, uma vez que entre dois números racionais quaisquer é sempre possível encontrar outro racional; assim, o aluno deverá perceber que entre $0{,}8$ e $0{,}9$ estão números como $0{,}81$, $0{,}815$ ou $0{,}87$. (BRASIL, 1998, p. 101)

No que tange à abordagem dos números racionais no terceiro ciclo, esse documento indica que é preciso que os alunos sejam levados a perceber que os números naturais são insuficientes para resolução de determinadas situações-problema, principalmente, as que envolvem a medida de uma grandeza e o resultado de uma divisão, necessitando de uma ampliação, que abrangerá os números racionais.

Assim, como forma de contribuir no ensino dos números racionais, os PCN recorrem a problemas históricos envolvendo medidas, como recurso para possibilitar bons contextos para o seu ensino. Indicar que os egípcios já usavam a fração para operar com seus sistemas de pesos e medidas e para exprimir resultados, é um exemplo de contexto.

Os PCN também indicam significados diferentes para as frações, que são: relação parte/todo, quociente, índice comparativo e operador. A relação parte-todo é a fração indicada pela relação que existe entre o todo e suas partes equivalentes. O quociente é o resultado divisão de um número natural por outro ($a: b = \frac{a}{b}, b \neq 0$). Já a fração como índice comparativo entre duas quantidades é interpretado como razão. E, operador é quando a fração exerce um papel de transformação, "algo que atua sobre uma situação e a modifica". (p. 102)

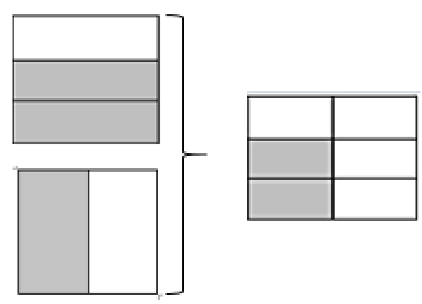
Na perspectiva do ensino dos diferentes significados para frações é necessário que eles sejam tratados acompanhados uns dos outros. O estabelecimento desses significados pelos alunos pressupõe um trabalho sistemático, possibilitando a análise e comparação de diferentes situações-problema, ao longo dos terceiro e quarto ciclos.

Nessa etapa, o conceito de equivalência, como também a construção do procedimento para a obtenção de frações equivalentes, é enfatizado nos PCN como fundamental para a resolução de problemas que envolvem comparações de números racionais na forma fracionária e para efetuar cálculos com esses números.

A adição e subtração de duas frações com denominadores diferentes, a multiplicação e a divisão entre frações também são discutidas no documento. Para o cálculo da soma e da diferença envolvendo frações com denominadores diferentes, são sugeridas transformações em frações cujos denominadores sejam iguais, por meio de frações equivalentes.

A multiplicação com frações, no documento, "pode ser pensada como "partes de partes do total" (neste caso a multiplicação não se apóia na idéia de adição reiterada)" (BRASIL, 1998, p. 104) e recomenda o ensino dessa operação por meio da manipulação em desenhos. Por exemplo, na multiplicação de $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$, significa procurar $\frac{1}{2}$ dos $\frac{2}{3}$, que será igual a $\frac{2}{6}$.

Figura 1 – Multiplicações de frações



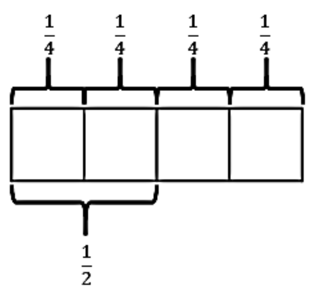
Fonte: autoria própria

No Figura 1, para a representação de $\frac{2}{3}$, usamos um quadrado, o subdividimos em três partes iguais (correspondentes ao denominador da fração $\frac{2}{3}$) e tomamos duas dessas partes (correspondentes ao numerador da fração $\frac{2}{3}$). Para representar $\frac{1}{2}$, usando esse processo, subdividimos o mesmo quadrado em duas partes (correspondentes ao denominador da fração $\frac{1}{2}$) e tomamos uma delas (correspondente ao numerador da fração $\frac{1}{2}$). Pela sobreposição desses dois quadrados, encontramos o mesmo quadrado, agora subdividido em seis partes iguais; a metade de dois terços ($\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$), corresponderá à parte comum tomada nas duas figuras, que é $\frac{2}{6}$.

Ao executarem muitas experiências como as do exemplo acima, os alunos constroem mecanismos suficientes para multiplicar frações – sem que, a todo momento, precisem recorrer à representação pictória. As frações a serem utilizadas para realização da multiplicação por meio de figuras devem ser selecionadas, de modo que permitam a visualização dos alunos do procedimento envolvido para, então, pela análise do que acontece em vários exemplos, estabelecer a relação do numerador do resultado obtido com os numeradores das frações multiplicadas e a relação do denominador do resultado obtido com os denominadores das frações multiplicadas. Desse modo, mais adiante, os alunos não precisarão mais recorrer às representações pictórias para calcular multiplicações com frações.

A divisão de frações pode ser interpretada como "partes que cabem em partes" (BRASIL, 1998, p. 105). Assim, na divisão de $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$, consegue-se pensar em quantas partes de $\frac{1}{4}$ cabem em $\frac{1}{2}$.

Figura 2 – Divisão de frações



Fonte: autoria própria

No exemplo acima, inicialmente, subdividimos o retângulo em duas partes iguais para indicar a fração $\frac{1}{2}$. Para representar a fração $\frac{1}{4}$, pegamos o mesmo retângulo e o subdividimos em quatro partes iguais. A partir dessas representações, conseguimos observar que $\frac{1}{4}$ cabe, exatamente, 2 vezes em $\frac{1}{2}$, ou seja, o resultado da divisão $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$ é 2.

Porém, deve-se pensar em quais frações utilizar para a essa abordagem, visto que nem sempre é possível sua visualização. Assim, é preciso o desenvolvimento de outros argumentos para justificar o procedimento dessa operação, como, por exemplo, pela observação de que "um quociente não se altera quando dividendo e divisor são multiplicados por um mesmo número permitindo obter na divisão de frações, uma fração com denominador 1". (BRASIL, 1998, p. 105)

Dessa forma, as operações com os números racionais, como apresentadas nos PCN, podem proporcionar o abandono da memorização de regras e algoritmos presentes no estudo das frações, contribuindo para que os alunos compreenderem as operações com números racionais, como, por exemplo, no que se refere à divisão com frações.

A Base Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) é um documento que tem o objetivo de orientar equipes pedagógicas na elaboração de currículos para toda a Educação Básica brasileira (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio), na determinação de competências (gerais e específicas), nas habilidades e nas aprendizagens essenciais para todos os alunos em cada uma das etapas.

De acordo com a BNCC,

> O conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais. (BRASIL, 2018, p. 265).

Nesse documento, assim como nos PCN, salienta-se que, nos anos finais do Ensino Fundamental,

> [...] a expectativa é a de que os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos. (BRASIL, 2018, p.269)

As frações, dentro da BNCC, são abordadas segundo uma organização na qual permeiam várias etapas do Ensino Fundamental. Inicia-se no 2º ano dos Anos Iniciais, com introdução de problemas com dobros e metades, triplo e terça parte, e vão até o 7º ano do Ensino Fundamental, na apresentação das quatro operações fundamentais com números fracionários. A cada ano de escolaridade, os números racionais, também em sua representação fracionária, são revistos em contextos distintos, não sendo mais objeto de estudo e sim representando grandezas e quantidades com as quais se opera.

A fração, dentro da BNCC, é abordada desde o 2º ano do Ensino Fundamental, com ideias relacionadas à metade e terça parte. Porém, são nos 6º e 7º anos, na unidade temática[4] dos “números”, que há um aprofundamento no tema. No 6º ano, os objetos de conhecimento para as frações são os significados de parte/todo e quociente, o estudo da equivalência, da comparação, das operações de adição e de subtração, o cálculo da fração

---

[4] “[...] as unidades temáticas definem um arranjo dos objetos de conhecimento ao longo do Ensino Fundamental adequado às especificidades dos diferentes componentes curriculares” (BRASIL, 2018, p.29). São elas: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas e probabilidade e estatística.

de um número natural; na sequência, vêm os objetos de conhecimento operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação com números racionais.

As habilidades a serem desenvolvidas no 6º ano, no que diz respeito às frações são:

> **(EF06MA07)** Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.
> **(EF06MA08)** Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.
> **(EF06MA09)** Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.
> **(EF06MA10)** Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária. (BRASIL, 2018, p. 301)

Para o 7º ano, a BNCC coloca como objetos de conhecimento a serem trabalhados as frações e seus significados (como parte de inteiros, resultados da divisão, razão e operador), os números racionais na representação fracionária e na decimal, com usos, ordenação e associação aos pontos da reta numérica, e operações. As habilidades vinculadas a esses conteúdos são:

> **(EF07MA10)** Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica.
> **(EF07MA11**) Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias.
> **(EF07MA12)** Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais. (BRASIL, 2018, p. 307)

Diante da apresentação das considerações sobre frações feitas nos PCN e na BNCC, percebe-se que há uma discussão em torno do tema, apontando seu ensino como relevante, propondo, no primeiro, orientações pedagógicas aos docentes para o ensino das frações e, no segundo, habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos, durante as etapas de escolarização.

Em ambos os documentos oficiais, PCN e BNCC, os números racionais são abordados com diferentes significados e representações. Em particular, neste trabalho, exploraremos a representação fracionária adotada para os números racionais,

Na próxima seção, discutiremos as perspectivas de autores, dos textos considerados na revisão bibliográfica, que discutem o ensino e a aprendizagem das frações, no que se refere aos significados e possibilidades de abordagem das frações e as dificuldades que professores e alunos encontram ao lidar com o tema.

2.2. AS FRAÇÕES EM PUBLICAÇÕES ACADÊMICAS

Várias são as produções acadêmicas em torno do ensino e da aprendizagem de números racionais. Neste item, buscaremos apresentar e discutir algumas delas.

Nossa revisão compreendeu periódicos das áreas de Educação e de Educação Matemática que apresentavam avaliações QUALIS[5] A_1, A_2, B_1 e B_2 (FUCHS, 2012), com publicações compreendidas entre 2008 e 2018. Para o levantamento das publicações foram utilizadas as palavras-chave: fração, frações e números racionais, totalizando 82 artigos.

Mesmo considerando haver uma definição específica para esses números, existem para eles diferentes representações. Embora a prática docente que analisaremos posteriormente se refira ao ensino das frações, na revisão bibliográfica que fizemos, trataremos dos números racionais em geral e de diferentes abordagens para os mesmos.

Desses documentos, realizamos uma filtragem a partir dos resumos de cada uma das obras, buscando aquelas que abordassem o ensino e a aprendizagem dos números racionais na forma fracionária. Assim, ficaram, ao final, 24 artigos para leitura e estudo.

O quadro abaixo descreve a relação de trabalhos acadêmicos estudados:

Trabalho	Autor	Ano	Revista	Classificação Qualis
A construção do conhecimento sobre número fracionário	Nilza Eigenheer Bertoni	2008	Bolema	A_2
Transpondo obstáculos: da aritmética para a álgebra	Neide SantAnna, Gilda de La Rocque Palis, Maria Apparecida Campos Mamede Neves	2013	Zetetiké	B_1
Utilizando recursos computacionais (Planilha) na compreensão dos números racionais	Rosane Ratzlaff da Rosa e Lori Viali	2008	Bolema	A_2
Uma abordagem geométrica à compreensão dos números racionais	Natercia de Souza Lima Bukowitz	2008	Educação Matemática em Revista	B_2
O que nossos alunos podem estar deixando de aprender	Antônio José Lopes	2008	Bolema	A_2

[5] O Qualis-Periódicos é um sistema usado para classificar a produção científica dos programas de pós-graduação no que se refere aos artigos publicados em periódicos científicos. https://www.capes.gov.br/avaliacao/instrumentos-de-apoio/qualis-periodicos-e-classificacao-de-producao-intelectual Acesso em 08/07/2019

sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações				
Concepções de professores que ensinam matemática sobre números fracionários, suas experiências e as implicações em suas práticas na 5ª série do Ensino Fundamental	Cacilda Tenório Oliveira Machado e Josinalva Estácio Menezes	2008	Educação Matemática em Revista	B_2
As operações com números racionais e seus significados a partir da concepção parte-todo	Maria José Ferreira da Silva e Saddo Ag Almouloud	2008	Bolema	A_2
A hora da fração: pequena sociologia dos vampiros na educação matemática	Carlos Roberto Vianna	2008	Bolema	A_2
As diferentes "personalidades" do número racional trabalhadas através da resolução de problemas	Lourdes de la Rosa Onuchic e Norma Suely Gomes Allevato	2008	Bolema	A_2
A teoria dos subconstrutos e o número racional como operador: das estruturas algébricas às cognitivas	Plínio Cavalcanti Moreira e Maria Cristina Costa Ferreira	2008	Bolema	A_2
As operações com frações e o princípio da contagem	Renato Borges Guerra e Francisco Hermes Santos da Silva	2008	Bolema	A_2
A fração nas perspectivas do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do ensino fundamental	Sandra Magina e Tânia Campos	2008	Bolema	A_2
Articulação entre Literatura Infantil e Matemática: intervenções docentes	Ana Paula Gestoso de Souza e Rosa Maria Moraes Anunciato de Oliveira	2010	Bolema	A_2
Leitura, escrita e matemática: a apropriação de conhecimentos e a receptividade de alunos da 4ª série do ensino fundamental	Ana Paula Gestoso de Souza e Rosa Maria Moraes Anunciato de Oliveira	2010	Zetetiké	B_1
Música e matemática – um minicurso interdisciplinar	Leonardo José Leite da Rocha Vaz e Marcos Oliveira de Pinho	2011	Zetetiké	B_1
Concepções e competências de professores especialista em matemática em relação ao conceito de fração em seus diferentes significados	Fabio Meneses Costa	2011	Educação Matemática Pesquisa	B_2
A divisão e os racionais: revisão bibliográfica e análise	Maria Helena Fávero e Regina da Silva Pina	2012	Zetetiké	B_1

	Neves			
Representações e processos de raciocínio na comparação e ordenação de números racionais numa abordagem exploratória	João Pedro da Ponte e Marisa Quaresma	2014	Bolema	A_2
Formação continuada de professores que lecionam matemática: desenvolvendo a prática reflexiva docente	Angélica da Fontoura Garcia Silva, Maria de Lurdes Serrazina e Tânia Maria Mendonça Campos	2014	Bolema	A_2
As discussões matemáticas na aula exploratória como vertente da prática profissional do professor	João Pedro Mendes da Ponte e Marisa Quaresma	2015	Revista da Faculdade de Educação	B_1
O ensino de frações via resolução de problemas na formação de futuras professoras de pedagogia	Marcelo Carlos de Proença	2015	Bolema	A_2
O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática	João Pedro da Ponte, Marisa Quaresma, Joana Mata-Pereira e Mónica Baptista	2016	Bolema	A_2
Divisão de frações: explorando algoritmos não usuais	Rafael Filipe Novoa Vaz	2016	Educação Matemática em Revista	B_2
Uma trajetória na aprendizagem dos números racionais através da percentagem	Helena Gil Guerreiro, Lurdes Serrazina e João Pedro da Ponte	2018	Educação Matemática Pesquisa	B_2

Nos artigos analisados, observamos dois focos de discussão. O primeiro deles, aponta recomendações ao ensino das frações; e, o segundo, apresenta dificuldades com relação ao seu ensino e à sua aprendizagem. No que segue, discorremos sobre tais focos por nós observados.

2.2.1. Recomendações ao ensino de frações

As publicações levantadas apontam que, para a obtenção de uma compreensão efetiva dos números racionais, é preciso apresentação aos alunos das várias interpretações (personalidades) que esse campo numérico assume. Kieren (1976, apud Moreira e Ferreira, 2008) define essas interpretações (personalidades) por subconstrutos.

O ensino de frações adotando esses subconstrutos é justificado por Moreira e Ferreira (2008) que, ao verificarem publicações sobre os números racionais no período de 1975-1995, expõem que:

> [...] para que desenvolva uma compreensão efetiva desse sistema numérico [racionais], a criança deve ser exposta a uma diversidade de interpretações do que seja uma razão de inteiros (essas interpretações constituem os chamados subconstrutos da noção de número racional). (MOREIRA & FERREIRA, 2008, p. 105)

Assim, algumas publicações (BERTONI, 2008; SILVA & ALMOULOUD, 2008; MOREIRA & FERREIRA, 2008; MACHADO & MENEZES, 2008; MAGINA & CAMPOS, 2008; COSTA, 2011; FÁVERO & NEVES, 2012; SILVA, SERRAZINA & CAMPOS, 2014) trabalharam tendo como referência os subconstrutos dos números racionais, na representação fracionária, de acordo com Kieren (1980, apud Moreira e Ferreira, 2008) Tais subconstrutos são

1. <u>Parte-todo:</u> partindo um todo (discreto ou contínuo) em *n* partes iguais, cada uma das partes representa $\frac{1}{n}$ do todo. A quantidade de partes que o todo foi dividido chama-se denominador e, as partes tomadas, o numerador. Exemplo: uma barra de chocolate foi dividida em cinco partes iguais. Carlos comeu três dessas partes. Que fração representa a parte que Carlos comeu?
2. <u>Medida:</u> envolve ideias de comparação entre duas grandezas. Como, por exemplo, para fazer certa quantidade de suco são necessários 2 medidas de água para 1 medida de concentrado de laranja. Que fração representa a medida da água em relação ao total de suco?
3. <u>Operador:</u> está vinculado com a ideia de transformação, ou seja, "[...] a representação de uma ação que se deve imprimir sobre um número ou uma quantidade, transformando seu valor nesse processo" (SANTOS, 2005, p. 53). Exemplo: João tinha uma coleção de 30 carrinhos e deu a seu amigo $\frac{1}{3}$ dessa coleção. Com quantos carrinhos João ficou?
4. <u>Quociente:</u> envolve situações nas quais a divisão aparece como estratégia bem adaptada para resolver um determinado problema. Por exemplo: Repartir 4 bolos para 3 pessoas.

5. Razão: significa a relação multiplicativa entre duas quantidades de mesma grandeza. Por exemplo: Pedro em um jogo de basquete arremessou 15 bolas à cesta e acertou 9 bolas.

Kieren (1980) justifica o surgimento dos diferentes subconstrutos sendo dado a partir de:

> [...] uma análise matemática dos números racionais (que tipo de objetos são esses?) [a qual] conduz a várias interpretações
> [...] Essas interpretações formam um conglomerado conceitual para a construção das estruturas cognitivas e as estratégias instrucionais associadas (KIEREN, 1980 apud MORREIRA & FERREIRA, 2008, p. 106, comentário nosso)

Segundo Costa (2011), Kieren foi um dos primeiros pesquisadores a chamar atenção da comunidade científica para a complexidade do conceito das frações, “[...] levando em consideração o fato de que os números racionais são constituídos de diversos constructos e que a compreensão destes fará com que o indivíduo entenda com sucesso a natureza do número racional” (COSTA, 2011, p. 36).

Dessa forma, alguns dos estudos visam propor alternativas para o ensino das frações (ONUCHICH & ALLEVATO, 2008; GUERRA E SILVA, 2008; SILVA E ALMOULOUD, 2008; LOPES, 2008; BUKOWITZ, 2008; ROSA & VIALI, 2008; SANTANNA *et al.*, 2013; PONTE & QUARESMA, 2014; PROENÇA, 2015; VAZ, 2016; PONTE *et al.,* 2016), porém, não mais pautada nos subconstrutos de Kieren (1980) e sim de outras alternativas que não se fundam nessa concepção.

Em geral, as publicações lidas levam em conta os contextos no qual os alunos estão inseridos, visando propor uma aprendizagem mais significativa das frações. Destacamos, Vaz e Pinho (2011), que ao trabalharem as frações de forma contextualizada utilizando noções básicas de música, concluíram a importância da contextualização nesse processo:

> [...] a contextualização cada vez mais exigida em uma nova educação. O estudo puramente abstrato da matemática parece ser um dos principais responsáveis pelo fracasso escolar nesta disciplina, comprovado pelas baixas médias obtidas por estudantes brasileiros em exames de proficiência. (VAZ & PINHO, 2011, p. 193)

Outra abordagem de ensino citada como propícia à compreensão do número fracionário é a exploratória, na qual

> [...] os alunos assumem um papel ativo na interpretação das questões propostas e na construção das suas próprias estratégias de resolução, usando com flexibilidade diversas representações matemáticas. Não dispondo de um método imediato de resolução das questões a resolver, os alunos são chamados a mobilizar o seu conhecimento, construindo e aprofundando a sua compreensão de conceitos, representações, procedimentos e outras ideias matemáticas. São também

> encorajados a apresentar e justificar as suas ideias aos colegas, desenvolvendo a sua capacidade de comunicação e de argumentação. (PONTE & QUARESMA, 2015, p. 132)

Os professores, dentro dessa abordagem de ensino, possuem um papel fundamental; não são vistos apenas como transmissores de conhecimentos, e sim como organizadores de situações de aprendizagens que possibilitam aos alunos adquirirem conhecimentos com algum significado. Segundo Ponte e Quaresma:

> O professor, em lugar de ensinar diretamente procedimentos e algoritmos, mostrando exemplos e propondo exercícios para praticar, promove um trabalho de descoberta guiada, ao mesmo tempo que proporciona momentos de negociação de significados e de discussão coletiva. (PONTE & QUARESMA, 2015, p. 132)

Outros autores (BERTONI, 2008; LOPES, 2008; MACHADO & MENEZES, 2008; SILVA & ALMOULOUD, 2008; VIANNA, 2008; MOREIRA & FERREIRA, 2008; MAGINA & CAMPOS, 2008; ONUCHIC & ALLEVATO, 2008; SOUZA & OLIVEIRA, 2010a; SOUZA & OLIVEIRA, 2010b; VAZ & PINHO, 2011; COSTA, 2011; FÁVERO & NEVES, 2012; PONTE & QUARESMA, 2014; PONTE & QUARESMA, 2015; PROENÇA, 2015; QUARESMA, MATA-PEREIRA & BAPTISTA, 2016; VAZ, 2016; GUERREIRO, SERRAZINA & PONTE, 2018) destacam a resolução de problemas como metodologia facilitadora para o processo de ensino e aprendizagem envolvendo as frações, em especial, no tratamento das quatro operações fundamentais, de modo que:

> O trabalho com números racionais precisa ser feito de um modo diferente daquele em que regras de “como fazer” são privilegiadas. Considere-se, então, um trabalho onde um problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem de novos conceitos e conteúdos; a construção do conhecimento far-se-á através de sua resolução. Professor e alunos, juntos, desenvolvem esse trabalho, e a aprendizagem se realiza de modo colaborativo em sala de aula. (ONUCHIC & ALLEVATO, 2008, p. 82)

A utilização de materiais didáticos manipuláveis é também citada na literatura consultada como eficiente para o trabalho das operações com frações. Souza e Oliveira (2010), citando Romanatto (1997), nos apontam que

> O professor deve também apresentar situações-problemas, fazer questionamentos; assim, juntamente com a manipulação, os alunos podem compreender os conceitos e as ideias envolvidos no conteúdo sobre frações. (SOUZA & OLIVEIRA, 2010, p. 193)

Silva, Serrazina e Campos (2014) mencionam que, no uso desses materiais didáticos manipuláveis, o ensino reflexivo é fundamental - não apenas para o ensino de um conteúdo específico, como frações – mas para o exercício da profissão docente.

> [...] para que a formação seja entendida como processo contínuo e permanente de desenvolvimento profissional, é necessário que o professor tenha disponibilidade de tempo e de espaço, os quais possibilitem o estudo e a pesquisa in loco, proporcionando-lhe reais condições para continuar aprendendo de forma colaborativa. Concordamos com Tardif , Lessard e Lahaye (1991) quando se referem à maneira como o saber relacionado à prática ou à experiência vai se organizando e estruturando, permitindo que o professor produza algumas ideias pessoais, "das quais a mais importante consiste na confirmação, pelo docente, de sua própria capacidade de ensinar e de sua *performance* na prática da profissão" (TARDIF et al., 1991, p. 229). Essas certezas relativas ao contexto de seu trabalho só podem ser alcançadas se o professor tiver espaço para estudar, analisar e refletir sua prática. (SILVA; SERRAZINA & CAMPOS, 2014, p. 1522)

Salientamos aqui que parte dos artigos lidos e analisados indica a urgência em se refletir e se (re)elaborar o ensino das frações. É preciso propor aos alunos um ensino que o proporcione a construção do conceito, e não que lhes dê tudo pronto e dependendo apenas da aplicação de procedimentos e algoritmos sem nenhum significado, tornando desse modo, cada vez mais, a Matemática, em especial, as frações, objeto de terror em todas as etapas de escolarização.

> Nesse contexto, constata-se a urgência de a escola concretizar caminhos alternativos a um processo de ensino pouco diversificado que dá espaço restrito à experimentação do aluno, pois exige uma única forma de pensar, que não prevê a interação das disciplinas; ocasiona uma excessiva especialização dos conhecimentos; desconsidera as experiências de vida dos alunos; e nega as possíveis relações destas com os saberes escolares. (SOUZA & OLIVEIRA, 2010, p. 178-179)

2.2.2. Dificuldades no ensino e na aprendizagem de frações

Várias são as dificuldades encontradas por professores e alunos, no ensino e na aprendizagem das frações. É possível verificar que, as frações, de acordo com Vianna (2008)

> [...] aterrorizam as crianças há muito tempo. Aterrorizam adultos também, não sendo difícil encontrar pessoas que pararam de estudar e que, ao tentar retomar seus esforços para aprender a "ler e escrever", encontram nas "frações" e suas operações um difícil obstáculo ao objetivo de tornarem-se cidadãos alfabetizados. As frases acima não recorrem à sustentação das autoridades: recorrem à experiência dos leitores que já tiveram pela frente o desafio de ensinar frações a crianças, jovens e adultos; recorre também à experiência daqueles leitores que sendo professores em universidades e cursos os mais diferentes, encontram adultos e profissionais que, embora muito capazes em diversos aspectos de suas relações com o saber, têm nas frações uma dificuldade que nos custa compreender. (VIANNA, 2008, p.165)

Magina e Campos (2008) dizem, em relação à aprendizagem dos números racionais, que os alunos podem apresentar algumas habilidades em manipulá-los, o que não quer dizer que tenham necessariamente uma compreensão clara do conceito. Citam Nunes e Bryant (1997), que afirmam que:

> Com as frações as aparências enganam. Às vezes as crianças parecem ter uma compreensão completa das frações e ainda não a têm. Elas usam os termos fracionários certos; falam sobre frações coerentemente, resolvem alguns problemas fracionais; mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alguns alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades das frações, e sem que ninguém perceba. (NUNES e BRYANT apud MAGINA e CAMPOS, 1998, p.191)

Uma das explicações para as dificuldades dos alunos com as frações ficam à volta da complexidade dos números racionais, no não reconhecimento de uma fração como um número e, nas prescrições de regras e macetes, sem nenhum significado para os alunos, especialmente, no ensino das quatro operações com números racionais na forma fracionária.

Lopes (2008) justifica essas dificuldades dizendo que ensino das frações no século XXI é

> [...] marcado pelo mecanicismo, pelo exagero na prescrição de regras e macetes, aplicações inúteis, conceitos obsoletos, "carroções", cálculo pelo cálculo. Esta fixação pelo adestramento empobrece as aulas de matemática, toma o lugar de atividades instigantes e com potencial para introduzir e aprofundar ideias fortes da matemática. (LOPES, p.20-21, 2008)

Tais dificuldades também vêm sendo refletidas em relatórios de avaliações educacionais em larga escala. Segundo Fávero e Neves (2012):

> Os relatórios de avaliações oficiais, como o Sistema de Avaliação da Educação Básico (SAEB), o Programa Internacional de Avaliação Comparada (PISA) e o Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE), confirmam o consenso apontado nos estudos brasileiros e internacionais entre as décadas de 1980 e 1990: as dificuldades de alunos e de professores em lidar com o conceito de número racional – tomado, no geral, como um procedimento simples de contagem dupla em situações estáticas de parte-todo [...] (FAVERO & NEVES, 2012, p. 34).

A literatura também nos apresenta a existência de dificuldades quanto à aprendizagem das frações (MAGINA & CAMPOS, 2008; ROSA & VALI, 2008; SOUZA & OLIVEIRA, 2010; SANTANNA, PALIS & NEVES, 2013). Esse conteúdo é ensinado aos alunos sem nenhuma conexão com os números naturais, o que pode levar a uma não compreensão das frações como sendo números e, consequentemente, dificultando o entendimento de seus significados.

Magina e Campos (2008) apontam ainda dificuldades quanto ao ensino das frações. Indicam haver um grande enfoque no significado parte-todo, não trabalhando com as outras interpretações que as frações assumem ou as tratando de forma isolada, sem estabelecer conexão entre elas. Destacam, desse modo,

> [...] uma forte tendência para traduzir esse conceito apenas utilizando a exploração do significado parte-todo, a partir de sua representação a/b com a, b naturais e $b \neq 0$. Nesse sentido, Campos e Cols (*apud* NUNES, 1997, p. 191) afirmam que: "O método de ensino (...) simplesmente encoraja os alunos a empregar um tipo de procedimento de contagem dupla – ou seja, contar o número total de partes e então as partes pintadas - sem entender o significado desse novo tipo de número". (MAGINA & CAMPOS, 2008, p. 25-26)

Diante do exposto, como aponta Vianna (2008) é preciso uma "desconstrução" de como as frações são ensinadas para os alunos. A formação do educador não deve ser pensada como suficiente quando o torna alguém com grande domínio do conteúdo matemático, mas também se cria oportunidades ao futuro professor de ser um profissional que possa proporcionar aos alunos o aprendizado de conteúdos matemáticos (IMBERNÓN, 2001, apud BUKOWITZ, 2008); em particular, o dos números racionais.

Conhecidas as perspectivas apontadas por vários pesquisadores na revisão bibliográfica, na próxima seção descreveremos as aulas de um professor de Matemática no ensino de frações para, então, apresentarmos nossa leitura sobre a referida prática docente.

3. UM OLHAR SOBRE A PRÁTICA DOCENTE DE UM PROFESSOR NO ESTUDO DE FRAÇÕES

Como já dissemos, esta seção será dedicada à apresentação e discussão da prática docente de um professor de Matemática em uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental, em uma escola pública, localizada na cidade de São João del-Rei, no início do trabalho com frações.

A coleta dos dados ocorreu nas aulas ministradas para uma turma de 6º ano por esse professor entre os meses de agosto, quando teve início a abordagem do tema frações, e novembro de 2018, totalizando 88 horas/aulas de 50 minutos cada. O registro das aulas foi feito em um caderno de campo, no qual constaram tanto anotações, observações e impressões das aulas, e também em áudios gravados das aulas[6].

Tais dados serviram tanto para produzirmos uma descrição do que vimos acontecer nas aulas sobre frações ministradas pelo referido professor quanto também para discutir a prática docente nelas realizada a partir do que chamamos de episódios. Junto aos episódios faremos reflexões sobre o ensino de frações à luz do levantamento bibliográfico realizado.

3.1. ALGUMAS AULAS SOBRE FRAÇÕES: RETRATO DE UM FILME

No mês de agosto de 2018, teve início a abordagem do conteúdo de frações na turma que observamos. O professor usou, como material de apoio para suas aulas, o livro didático adotado na escola[7].

O modo como o professor trabalhou com o referido conteúdo nas duas turmas de 6º ano era organizado com: leitura de trechos do livro didático, anotando esquemas resumidos do conteúdo no quadro; resolução na lousa, na maioria das vezes pelo professor, de exercícios do livro e de outros materiais, levados pelo professor, e proposição de atividades avaliativas para os alunos desenvolverem.

Para introduzir o tema, foi utilizado, inicialmente, o artifício de perguntar aos alunos o que entendiam e/ou lembravam sobre fração, visto que para os anos iniciais é previsto o tratamento desse conteúdo. “Divisão” foi à resposta predominante dos alunos; porém, surgiram outras como: “dividir alguma coisa em partes”, “dividir uma coisa em partes iguais”, “uma coisa que se divide as partes”. Em seguida, foi explicado pelo professor aos alunos o que representavam o denominador e o numerador em uma fração. O professor realizou essa explicação usando de falas que envolviam pizzas repartidas igualmente entre amigos e partes iguais de retângulos. Inicialmente, os alunos pareceram ter compreendido o conceito, mas, ao resolver os exercícios propostos surgiram dúvidas na interpretação dos últimos.

A correção dos exercícios era, na maioria das vezes, a exposição da resolução no quadro, feita pelo professor, para que os alunos conferissem ou copiassem e, em seguida, eram feitas perguntas para os alunos referentes à matéria já estudada. A todo momento, o

[6] O professor consentiu que fossem gravados os áudios de suas aulas com a finalidade de utilização dos dados para produção deste trabalho.
[7] DANTE, Luiz Roberto. Matemática. Projeto Teláris. 6º ano. Editora Ática: São Paulo, 2015.

professor deixava claro aos alunos que ele não se interessava em que eles copiassem os exercícios e sim que entendessem a matéria.

O livro didático da escola é organizado em unidades e cada unidade é formada por capítulos. O capítulo intitulado “Frações e porcentagens” estão divididos em seis tópicos, os quais são subdivididos em itens, conforme Figura 3.

Figura 3 - Sumário do livro Teláris do 6º ano


sumário

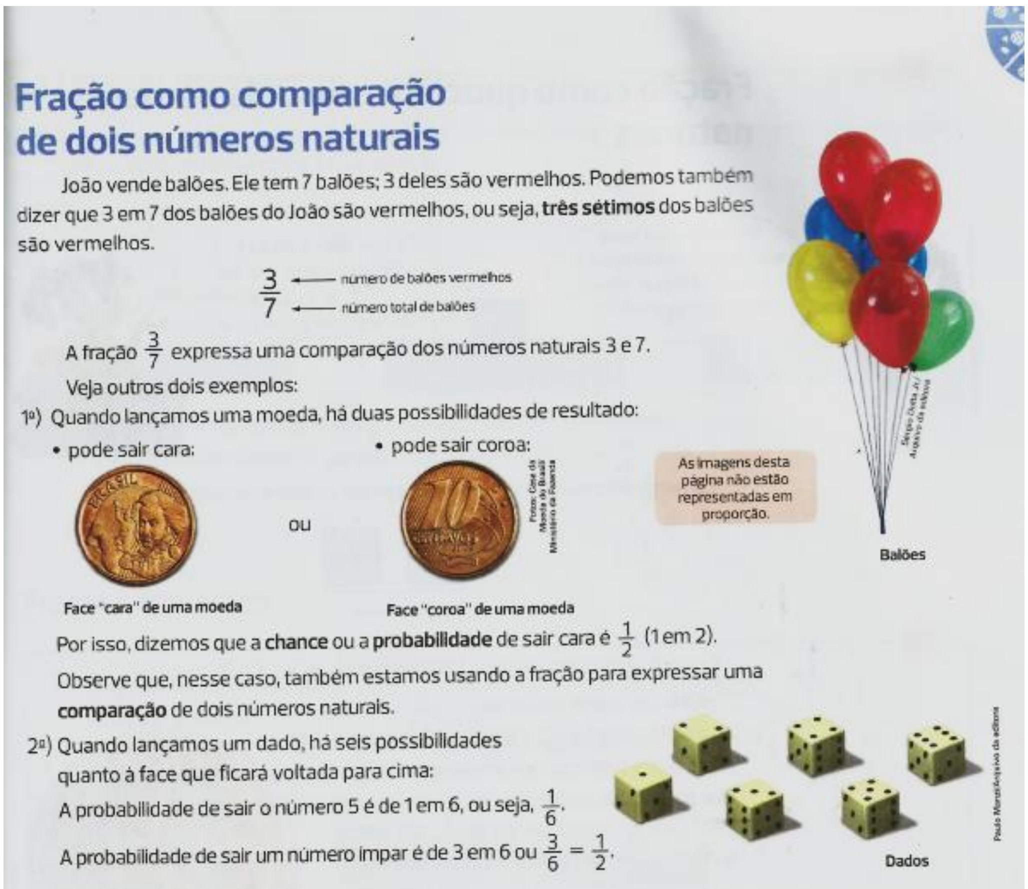
Unidade 3 Frações e números decimais

Fonte: Dante, 2015, p. 8

O tópico 2, *Algumas ideias associadas à fração*, não teve todos os seus itens abordados detalhadamente pelo professor junto aos alunos. *Fração como comparação de dois números naturais*, *Fração como quociente de dois números naturais* e *Fração de um número* tiveram seus textos apenas lidos pelo professor e resolvidos os exercícios que estavam na sequência. O docente não explicou que todas essas ideias se referiam a frações e que tinham significados diferentes.

Em particular, no caso do item *Fração como comparação de dois números naturais*, quando se aborda uma fração como comparação entre grandezas que são de mesma natureza, o professor indicou que, naquelas frações ali indicadas, os denominadores representavam a quantidade total de objetos e o numerador uma parte específica daquele total.

Figura 4 - Fração como comparação de dois números naturais



Fração como comparação de dois números naturais

João vende balões. Ele tem 7 balões; 3 deles são vermelhos. Podemos também dizer que 3 em 7 dos balões do João são vermelhos, ou seja, **três sétimos** dos balões são vermelhos.

$\frac{3}{7}$ ← número de balões vermelhos / ← número total de balões

A fração $\frac{3}{7}$ expressa uma comparação dos números naturais 3 e 7.

Veja outros dois exemplos:

1º) Quando lançamos uma moeda, há duas possibilidades de resultado:

- pode sair cara: ou
- pode sair coroa:

Face "cara" de uma moeda

Face "coroa" de uma moeda

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Balões

Por isso, dizemos que a **chance** ou a **probabilidade** de sair cara é $\frac{1}{2}$ (1 em 2).

Observe que, nesse caso, também estamos usando a fração para expressar uma **comparação** de dois números naturais.

2º) Quando lançamos um dado, há seis possibilidades quanto à face que ficará voltada para cima:

A probabilidade de sair o número 5 é de 1 em 6, ou seja, $\frac{1}{6}$.

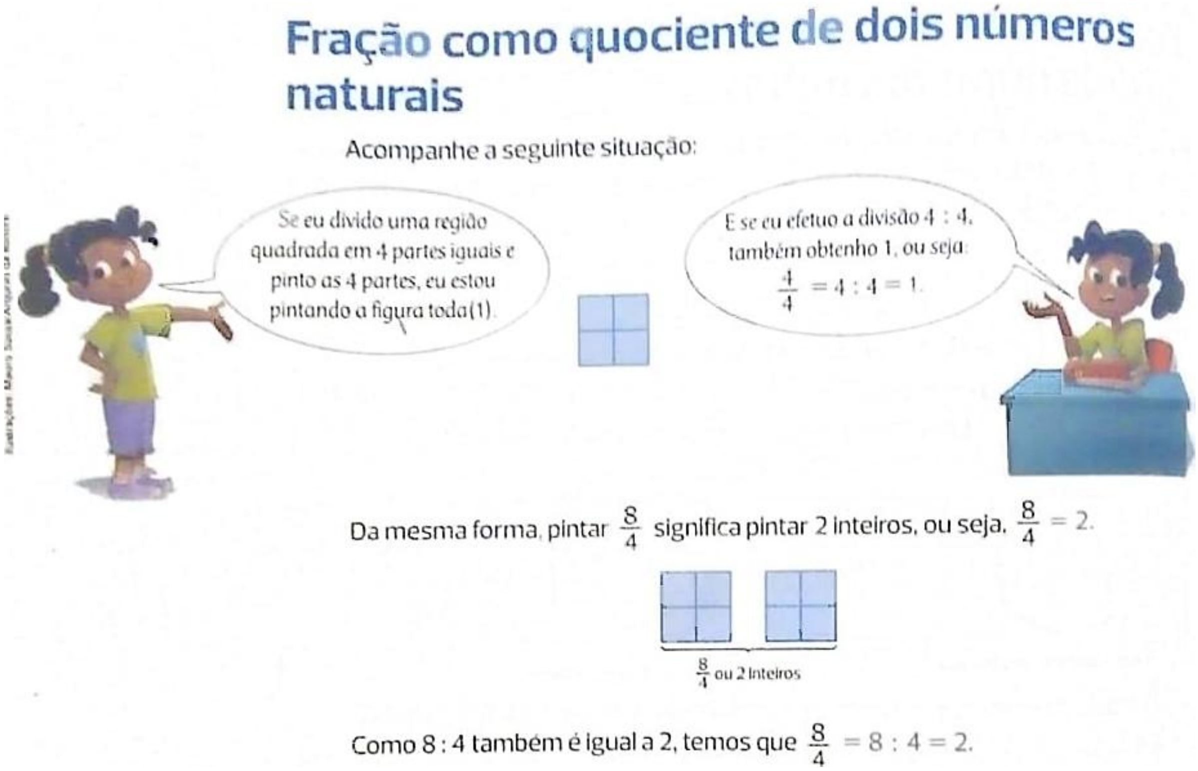
A probabilidade de sair um número ímpar é de 3 em 6 ou $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Dados

Fonte: Dante, 2015, p. 161

A ideia envolvida no item *Fração como quociente de dois números naturais* é a de partição (divisão). No caso apresentado pelo livro didático, pretendia-se mostrar quanto cada indivíduo ganharia na divisão de cada um dos elementos e não, apenas, a parte representa em relação ao todo.

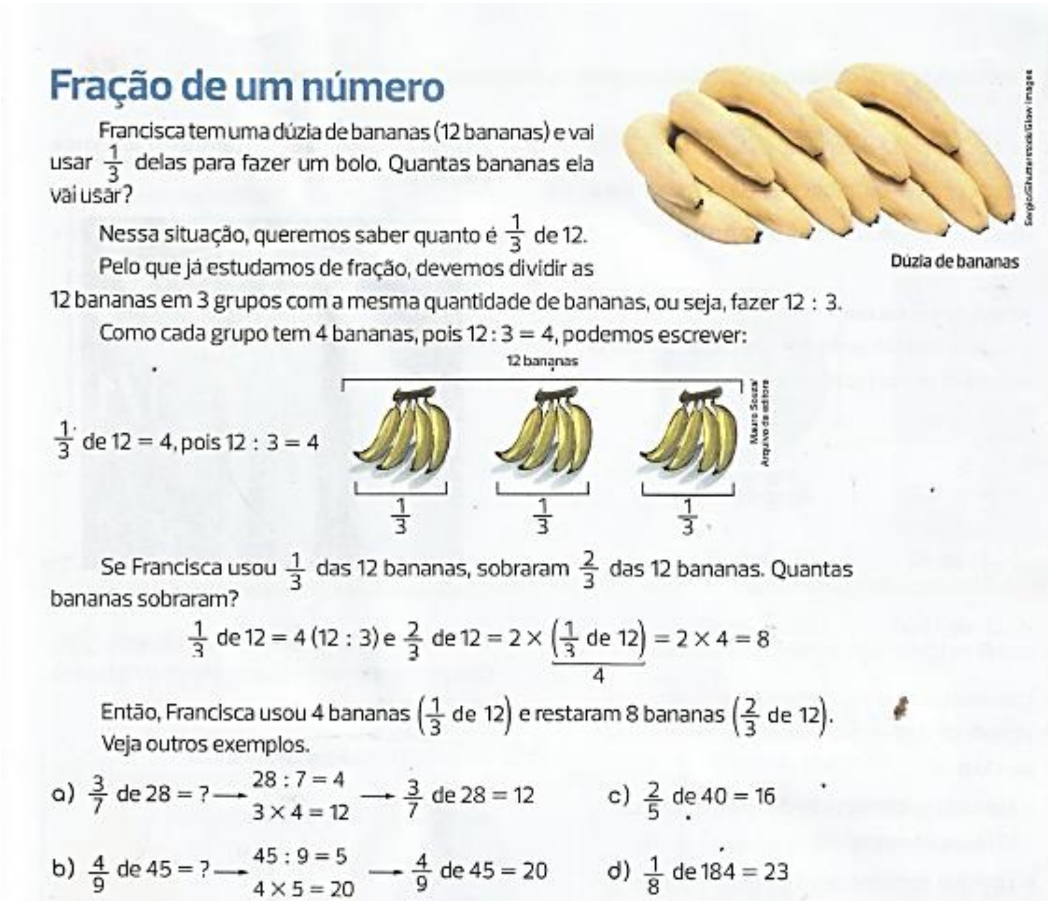
Figura 5 - Fração como quociente de dois números naturais



Fonte: DANTE, 2015, p. 162

Quanto ao item *Fração de um número* sua discussão é importante para encontrar a parte ou o todo de um determinado conjunto de elementos. Esse tópico foi apresentado aos alunos a partir de uma regra para utilizarem ao se efetuarem os cálculos.

Figura 6 - Fração de um número



Fração de um número

Francisca tem uma dúzia de bananas (12 bananas) e vai usar $\frac{1}{3}$ delas para fazer um bolo. Quantas bananas ela vai usar?

Nessa situação, queremos saber quanto é $\frac{1}{3}$ de 12.

Pelo que já estudamos de fração, devemos dividir as 12 bananas em 3 grupos com a mesma quantidade de bananas, ou seja, fazer 12 : 3.

Dúzia de bananas

Como cada grupo tem 4 bananas, pois 12 : 3 = 4, podemos escrever:

$\frac{1}{3}$ de 12 = 4, pois 12 : 3 = 4

12 bananas

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$

Se Francisca usou $\frac{1}{3}$ das 12 bananas, sobraram $\frac{2}{3}$ das 12 bananas. Quantas bananas sobraram?

$$\frac{1}{3} \text{ de } 12 = 4\ (12 : 3) \text{ e } \frac{2}{3} \text{ de } 12 = 2 \times \underbrace{\left(\frac{1}{3} \text{ de } 12\right)}_{4} = 2 \times 4 = 8$$

Então, Francisca usou 4 bananas $\left(\frac{1}{3} \text{ de } 12\right)$ e restaram 8 bananas $\left(\frac{2}{3} \text{ de } 12\right)$.

Veja outros exemplos.

a) $\frac{3}{7}$ de 28 = ? → 28 : 7 = 4; 3 × 4 = 12 → $\frac{3}{7}$ de 28 = 12

b) $\frac{4}{9}$ de 45 = ? → 45 : 9 = 5; 4 × 5 = 20 → $\frac{4}{9}$ de 45 = 20

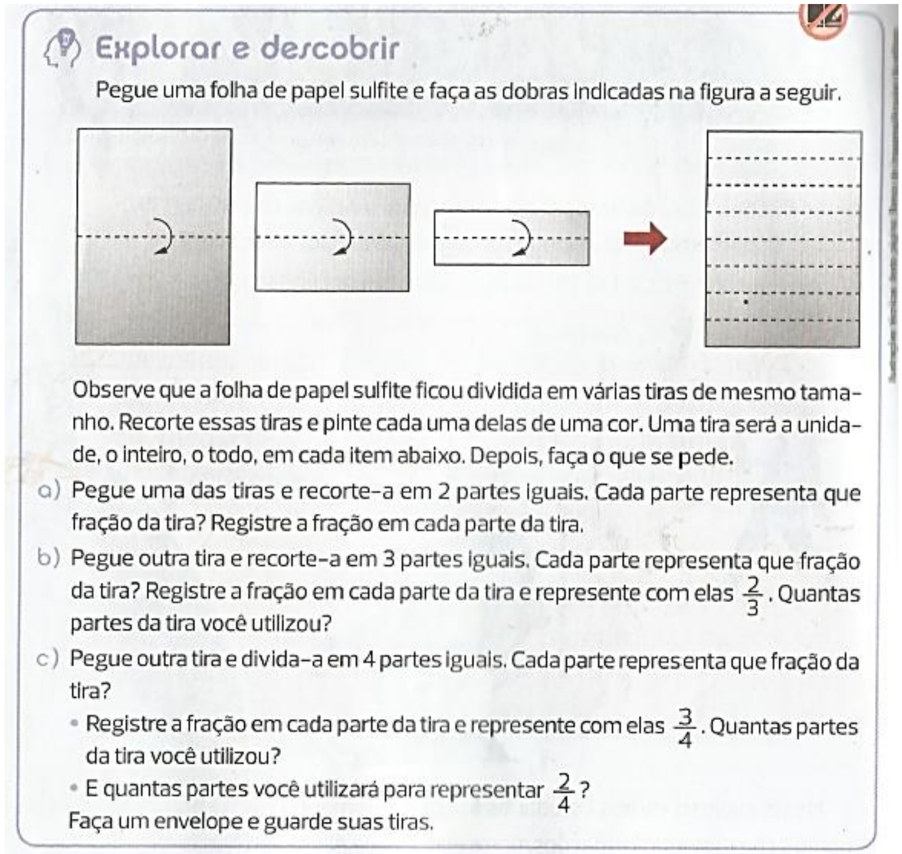
c) $\frac{2}{5}$ de 40 = 16

d) $\frac{1}{8}$ de 184 = 23

Fonte: DANTE, 2015, p. 167

Há no livro didático, após alguns subtítulos, uma proposta de atividade intitulada “Explorar e descobrir”. Pela realização de tal atividade, introduz-se alguma prática que auxilia na compreensão do conteúdo que vem na sequência do livro didático – sem lançar mão do uso de regras ou algoritmos. Na figura 7, vemos um exemplo dessas atividades propostas, que sucedeu a seção *Fração como parte de uma figura ou objeto*.

Figura 7 - Explorar e descobrir



Explorar e descobrir

Pegue uma folha de papel sulfite e faça as dobras indicadas na figura a seguir.

Observe que a folha de papel sulfite ficou dividida em várias tiras de mesmo tamanho. Recorte essas tiras e pinte cada uma delas de uma cor. Uma tira será a unidade, o inteiro, o todo, em cada item abaixo. Depois, faça o que se pede.

a) Pegue uma das tiras e recorte-a em 2 partes iguais. Cada parte representa que fração da tira? Registre a fração em cada parte da tira.

b) Pegue outra tira e recorte-a em 3 partes iguais. Cada parte representa que fração da tira? Registre a fração em cada parte da tira e represente com elas $\frac{2}{3}$. Quantas partes da tira você utilizou?

c) Pegue outra tira e divida-a em 4 partes iguais. Cada parte representa que fração da tira?

- Registre a fração em cada parte da tira e represente com elas $\frac{3}{4}$. Quantas partes da tira você utilizou?
- E quantas partes você utilizará para representar $\frac{2}{4}$?

Faça um envelope e guarde suas tiras.

Fonte: DANTE, 2015, p. 158

O item da *Simplificação de frações* não foi trabalhado pelo professor no tópico 3, Frações equivalentes. Na ocasião, foi dito aos alunos que eles não precisavam se preocupar com o assunto naquele momento, já que só posteriormente usariam o procedimento relativo a ele. Começaram a usar a simplificação de frações na operação de divisão.

No estudo do tópico 4, Comparação de frações, e no primeiro item do tópico 5, Operações com frações, intitulado Adição e subtração de frações, foram usados os mesmos procedimentos operatórios, o qual foi explicado pelo professor com resumo na lousa. O primeiro método explicado para a resolução dos exercícios foi de encontrar um denominador comum a duas frações por meio de múltiplos comuns entre os dois denominadores; ou seja, dadas duas ou mais frações procuravam-se os múltiplos dos respectivos denominadores, a fim de encontrar um que era comum para ambos. Isso valia tanto para a comparação de frações quanto para a adição ou subtração. Chamaremos esse método do múltiplo comum.

O segundo método ensinado foi pela multiplicação entre os denominadores das duas frações (comparadas ou somadas ou subtraídas), encontrando-se frações equivalentes a cada uma delas.

$$\frac{5}{6} \pm \frac{1}{3} = \frac{5 \times 3}{6 \times 3} \pm \frac{1 \times 6}{3 \times 6} = \frac{15}{18} \pm \frac{6}{18} = \frac{15 \pm 6}{18}$$

Chamaremos esse método da multiplicação dos denominadores.

Em ambos os casos, a ideia de fração equivalente foi usada a todo momento na transformação das frações dadas originalmente.

Esse último método ensinado (multiplicação dos denominadores) foi o mais usado pelos alunos. Após ter feitos alguns exercícios utilizando esses dois procedimentos, o professor ensinou aos alunos um terceiro método, que calculava o mínimo múltiplo comum (m.m.c.) dos denominadores.

Sobre esses métodos ensinados, o professor ainda relatou as facilidades de cada um, dizendo que: com o dos múltiplos comuns os alunos iriam operar com números menores, porém, gastariam mais tempo para encontrar o denominador comum; com o método da multiplicação dos denominadores gastariam menos tempo para encontrar o denominador comum, mas os números com os quais trabalhariam iriam ser maiores do que no método dos múltiplos comuns; e, com o método do m.m.c. se gasta menos tempo para encontrar o denominador comum às frações e os números que operariam seriam os menores possíveis.

Ainda, sobre as operações adição e subtração de frações com denominadores diferentes, a partir de perguntas de alguns alunos sobre como as resoluções dos exercícios eram feitas, o professor optou por explicar o procedimento de transformações de cada uma das frações envolvidas em equivalentes que tivessem o mesmo denominador de forma alternativa: com dois recipientes (duas garrafas) diferentes, para representar denominadores diferentes; os numeradores foram representados pelos líquidos que estavam nas garrafas, dizendo que os alunos que, para compararem as quantidades de líquidos, precisariam usar uma garrafa comum (do mesmo tamanho) para colocar o líquido. Ainda, disse que o líquido continuaria o mesmo, porém, o novo recipiente teria outra marca – sendo assim uma mesma referência para a comparação das quantidades dos líquidos.

Na multiplicação de frações, foi explicado aos alunos o procedimento algorítmico dessa operação, ou seja, que se multiplica numerador por numerador e denominador por denominador. Com esta operação, os alunos não apresentaram dificuldades; A dúvida era quando aparecia um número natural como um dos fatores, pois, nesse caso, para transformá-lo em fração, os alunos teriam que acrescentar o 1 como seu denominador. A maioria colocava o 0, necessitando que o professor explicasse a toda vez que, nesse caso, o denominador era 1.

Na divisão de frações, inicialmente foi ensinado o que eram frações inversas e depois o procedimento usado para calcular divisões: repetir a primeira fração (dividendo) e multiplicar pela fração inversa da segunda fração (divisor). Em muitos momentos os alunos mostraram dúvidas com relação ao porquê de o procedimento ser realizado desse modo. Em um exercício avaliativo dado, que tratava apenas de divisões de frações, foi possível notar que o principal erro cometido nas resoluções foi que, ao invés de usarem o inverso multiplicativo da segunda fração (divisor) para multiplicar pela primeira (dividendo), tomavam o inverso multiplicativo da primeira fração (dividendo) e multiplicavam pela segunda (divisor)[8].

Durante a observação das aulas, foram observados assuntos nos quais alguns dos alunos tiveram mais dúvidas, que foram ao estudar frações próprias, impróprias, aparentes e os números mistos, percebemos que as dificuldades dos alunos eram, principalmente, na conversão de fração imprópria para número misto e vice-versa. a transformação de número misto em frações impróprias e vice-versa e a adição e a subtração de frações com denominadores diferentes.

3.2. EPISÓDIOS[9] PRODUZIDOS

Para auxiliar na compreensão do que ocorreu na sala de aula do 6º ano do qual acompanhamos as aulas, criamos, baseados nas observações que fizemos alguns episódios. Segundo Houaiss (2001), episódio é “fato acessório mais ou menos ligado a um conjunto; circunstância, evento”. Assim, utilizamos essa palavra para nos referirmos a passagens das aulas, por nós reproduzidos, com o intuito de sugerir ao leitor a impossibilidade de, pelas observações de algumas (poucas) aulas numa turma de 6º ano, circunscrever, adjetivar ou reduzir a prática profissional daquele professor àquela situação.

[8] Expliquei a uma aluna que era a segunda fração a invertida e ela disse que não fazia diferença em qual fração inverter; sugeri a ela que fizesse o teste com algumas frações e que depois ela dissesse se era a mesma coisa inverter a primeira ou a segunda. No dia seguinte, ela disse que conseguiu perceber que fazia diferença qual fração inverter.

[9] Os nomes dos alunos e do professor adotados, durante a descrição dos episódios, são fictícios.

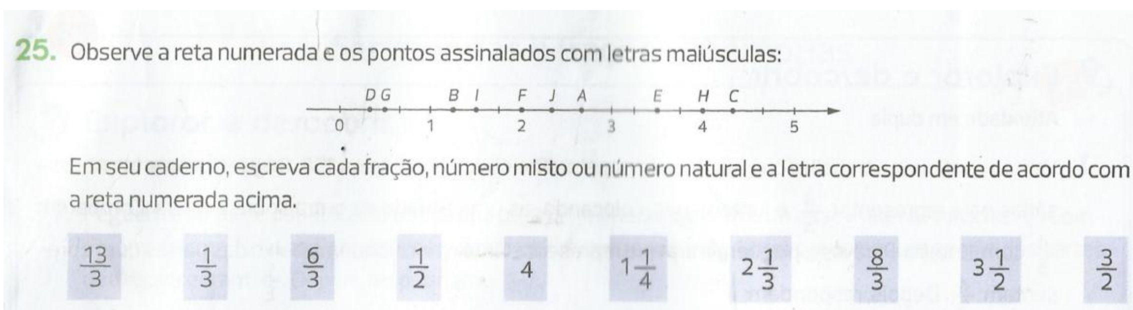
Na sequência, os episódios que produzimos são apresentados em agrupamentos, feitos de acordo com o conteúdo neles abordado. Para cada grupo de episódios, faremos algumas considerações e discussões orientadas pelas leituras realizadas no levantamento bibliográfico.

3.2.1. FRAÇÃO COMO NÚMERO

3.2.1.1. EPISÓDIO 1: ONDE ESTÃO AS FRAÇÕES?

Um dos exercícios corrigidos pelo professor, ao tratar da transformação de fração em número misto e vice-versa, envolvia a localização de frações na reta numérica. A proposta do exercício consistia em localizar na reta cada uma das frações dadas. Havia frações nas formas mista, imprópria e própria. O professor reproduziu a reta numérica do livro didático na lousa, onde os pontos encontravam-se assinalados por letras maiúsculas, conforme constava no livro didático (Figura 8).

Figura 8 – Exercício 25



Fonte: DANTE, 2015, p. 166

3.2.1.2. EPISÓDIO 2: FRAÇÃO É UM NÚMERO?

Figura 9 – Exercício 78

78. De acordo com dados do *site* <www.censo2010.ibge.gov.br> (acesso em: 11 maio 2015), no ano de 2010, a população de Minas Gerais correspondia a, aproximadamente, $\frac{1}{10}$ da população do Brasil. Por sua vez, a população da capital Belo Horizonte correspondia a cerca de $\frac{1}{12}$ da população de Minas Gerais.

Brasil: estado de Minas Gerais

Fonte: IBGE. *Atlas geográfico escolar.* 6. ed. Rio de Janeiro, 2012.

Considerando essas informações, calcule e responda: a população de Belo Horizonte correspondia, em 2010, a que fração da população do Brasil?

Fonte: DANTE, 2015, p. 182

Durante a explicação desse exercício (Figura 9), o professor usou da seguinte fala para tratá-lo: *"[...] quando você não tem número, você tem só fração [...] procurem* [os alunos] *algum número além das frações aí."* Alguns alunos disseram uns números (2010, 11, 2015) que não faziam parte do exercício, mas que estavam como referências dos dados nele indicados. Com isso, o professor continuou a sua fala: "*quero números que vocês* [alunos] *vão usar. Só tem fração, não é? Nesse caso, sempre que você quiser saber a fração de uma fração. Porque eu quero saber quanto que essa fração* [$\frac{1}{12}$] *vale dessa outra* [$\frac{1}{10}$]. *Então, eu quero pegar isto daqui* [referindo-se à população de Minas Gerais ($\frac{1}{12}$)], *dividir em doze pedaços e pegar um só; então isso aqui* [apontou no quadro $\frac{1}{12}$] *é um pedacinho. Imagina o seguinte, o "Brasilzão"; aí tem um pedaço lá, que é Minas Gerais. Aí eu vou pegar esse pedaço* [indicando $\frac{1}{12}$] *dividir em doze; aí, desses doze, eu vou pegar um. Então é isso que você tá querendo fazer. Tem uma fração você quer* *pegar esse pedaço, divide em doze pedaços e pegar um só, então você quer saber quanto vale uma fração de outra fração. Para resolver isto, você usa a multiplicação. Aí, bem simples o jeito de fazer. Então, você multiplica o de cima por de cima e o debaixo por debaixo. Isso daqui* [referindo-se ao resultado $\frac{1}{120}$] *é a população de Belo Horizonte em relação a população do Brasil. Porque aqui* [referindo-se a $\frac{1}{12}$] *era Belo Horizonte em relação a Minas Gerais. Então, agora saiu Belo Horizonte em relação ao Brasil."*

A primeira seção de episódios aborda a representação das frações na reta numérica e o caso da fração como números. Os exercícios neles envolvidos foram oportunidades para os alunos compreenderem as frações como números, deixando de lado a ideia de que as frações são dois números separados por um "tracinho", que é considerado um obstáculo para alunos no início do trabalho com as frações, conforme argumentado por Lopes (2008): "a notação das frações constitui um obstáculo, não é trivial a associação de uma parte através de dois números inteiros separados por um tracinho" (p. 9).

Entendemos que o estudo das frações na reta numérica pode contribuir para a aprendizagem de outros conteúdos escolares. SantAnna, Palis e Neves (2013), por exemplo, após trabalharem com os alunos em atividades envolvendo a ideia de fração como número, concluíram que "[...] os alunos que obtiveram melhor desempenho no campo algébrico foram aqueles que reconheciam fração como número, identificando sua representação na reta numérica" (SANTANNA et al, 2013, p. 193).

Diante disso, entendemos que o início do trabalho com frações nos anos finais do Ensino Fundamental deve ser bem planejado. Docentes devem abordá-las em seus diferentes significados, a fim de proporcionar nos alunos um conhecimento completo sobre as frações. Valera (2003), ao se referir ao ensino das frações, diz que professores devam conhecer as várias maneiras de considerar uma fração, visto que

> Essa multiplicidade de significados dos números racionais e contextos em que eles se manifestam constitui informação essencial ao professor sobre determinado conceito matemático que o instrui para pensar e realizar um diversificado processo pedagógico em sala de aula relativamente a esse conceito. (VALERA, 2003, p. 147)

3.2.2. FRAÇÃO DE UM NÚMERO

3.2.2.1. EPISÓDIO 3: QUANTO VALE $\frac{1}{3}$ DE 12 BANANAS?

Para introduzir o tema "Fração de um número", o livro didático[10] expõe a seguinte situação:

Figura 10 - Fração de um número

Francisca tem uma dúzia de bananas (12 bananas) e vai usar $\frac{1}{3}$ delas para fazer um bolo. Quantas bananas ela vai usar?

Fonte: DANTE, 2015, p. 167

O professor comenta que na fração *"*[o número] *embaixo significa quantas vezes eu dividi meu todo e o de cima é quanto eu peguei"*. Voltando-se para o exemplo das bananas, ele diz: *"então, o total era doze, aí eu dividi em três* [denominador da fração] *grupos; doze dividido por três é igual a quatro e, como eu peguei um* [numerador da fração] *grupo, então peguei quatro bananas".*

Generalizando essa situação, o professor completou afirmando que, para encontrar a fração de um número, *"quando você tem o* todo [o número do qual se quer obter a fração], *você divide pelo debaixo* [denominador] *e multiplica pelo de cima* [numerador]*. Agora, quando você tem o pedaço* [a fração de um número]*, aí é o contrário; você divide pelo de cima* [numerador] *e multiplica pelo debaixo* [denominador]*".*

Na sequência, o professor pediu aos alunos para resolverem exercícios sobre aquele tema. Enfatizou com os alunos que deveriam prestar atenção em qual situação usar cada um dos procedimentos vistos durante sua explicação.

3.2.2.2. EPISÓDIO 4: QUE QUANTIDADE REPRESENTA $\frac{5}{6}$ DE 12 OVOS?

Um dos exercícios propostos no livro didático para a fixação do tema de fração de um número foi o seguinte:

[10] Projeto Teláris: matemática: ensino fundamental 2/ Luiz Roberto Dante. – 2. ed. – São Paulo: Ática, 2015, do 6º ano

Figura 11 – Exercício 28

28. Se Lúcia tem 12 ovos e vai usar $\frac{5}{6}$ deles para fazer quindins, quantos ovos ela vai usar? Faça desenhos em seu caderno para ilustrar.

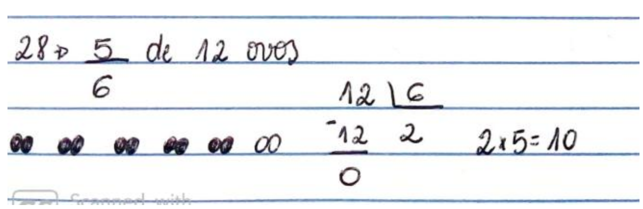
Fonte: DANTE, 2015, p. 168

Durante a correção dessa questão, o professor perguntou aos alunos sobre como o resolveriam. Jonathan respondeu: *"Você pega o doze divide por seis...".* Antes de Jonathan terminar a frase, o professor disse: *"por que divide por seis?"*. Jonathan: *"porque seis é o denominador?"*. O professor insistiu: *"por que ele vai dividir por seis?"*. Respostas como porque seis está embaixo, porque seis é maior, foram surgindo, até que Luana respondeu: "*porque seis é o tanto de grupo que pode dividir os ovos".* De pronto, o professor concordou com Luana, complementando: *"Isso! Porque seis é o tanto de partes que os ovos foram divididos. Entendeu? Porque embaixo indica quantas partes o total foi dividido e em cima, quantas dessas partes você pegou, tomou.*"

Assim, continuando a correção, o professor dividiu doze por seis, encontrando dois como o resultado, e multiplicou esse último valor por cinco, resultando em dez.

Como pedido pelo exercício, após a sua resolução, o professor realizou a ilustração a seguir:

Figura 12 - Resolução do exercício 28



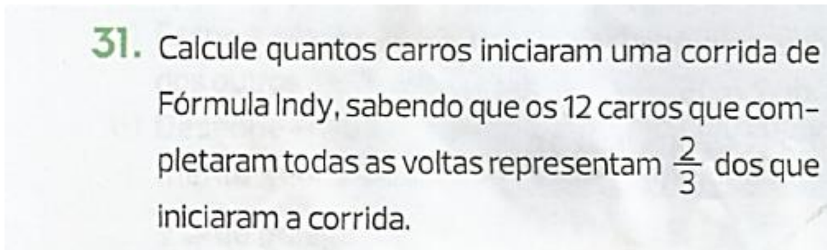
Fonte: Caderno de campo

José, outro aluno da turma, ao observar a ilustração do professor, disse: *"Mas tem dois jeitos de fazer? Esse aí, mais o outro? O resultado* [da divisão] *faz vezes 5, então e vai dá 10, não precisa fazer essas bolinhas*". Em seguida, José complementa: *"ah é, pode fazer isso"*, sugerindo ter percebido que os dois processos de resolução eram semelhantes.

3.2.2.3. EPISÓDIO 5: UM CASO DAS FRAÇÕES DE UM NÚMERO

O exercício a ser corrigido era:

Figura 13 – Exercício 31

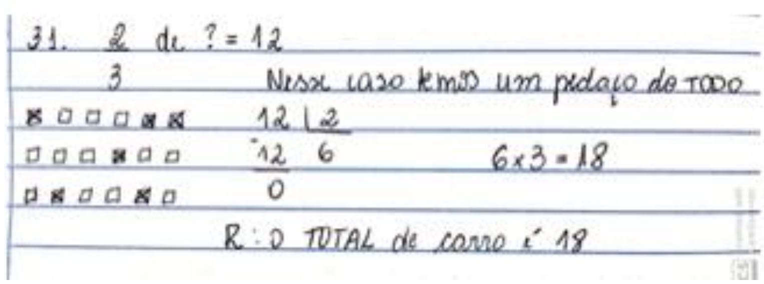


31. Calcule quantos carros iniciaram uma corrida de Fórmula Indy, sabendo que os 12 carros que completaram todas as voltas representam $\frac{2}{3}$ dos que iniciaram a corrida.

Fonte: DANTE, 2015, p. 168

Inicialmente, o professor leu pausadamente o enunciado (Figura 13). De pronto, alertou os alunos quanto ao fato de que doze não era o total de carros e que, naquela situação, o valor dado se referia a um "pedaço". Assim, o todo deveria ser maior. Para calcular essa quantidade, o que deveria ser feito era *"dividir* [o total] *pelo de cima e* [o resultado] *multiplicar pelo debaixo"*. Um aluno manifestou sua incompreensão sobre aquele "novo" modo de resolução do exercício, visto que o único procedimento que haviam usado em exercícios feitos anteriormente para calcular a fração de um número era aquele que, quando é dado o número, ele é dividido pelo denominador e, o resultado dessa divisão, é multiplicado pelo numerador.

Figura 14 - Resolução do exercício 31



Fonte: Caderno de campo

O professor, não satisfeito com a reação de dúvida desse e de outros alguns alunos, recorreu para a representação pictórica daquela situação. Os quadradinhos representavam os carros. Partindo da resposta encontrada na resolução aritmética, disse à turma que, no início da corrida, havia 18 carros e, no decorrer da competição, alguns quebraram ou estragaram, chegando ao final somente $\frac{2}{3}$ dos carros, ou seja, 12 carros.

O segundo bloco de episódios “fração de um número” traz inicialmente a importância da visualização no ensino das frações, seja na introdução ou nas operações. Não significa que com o uso da visualização não haverá mais dificuldades com as frações, e, sim, que ela poderia facilitar a compreensão de determinadas situações envolvendo frações. Nascimento (2008) nos diz que

> É importante, pois, salientar que a aprendizagem de qualquer conteúdo por parte do aluno requer uma fase inicial exploratória e concreta. Antes de adquirir abstrações e generalizações matemáticas a criança precisa manipular e visualizar diferentes tipos de materiais, trabalhar com diferentes situações e problemas que o levem a adquirir abstrações posteriores. Essa fase exploratória e concreta é fundamental para a construção de significados e a formulação de conceitos sobre os números fracionários. (NASCIMENTO, 2008, p. 207)

Os procedimentos adotados para a resolução das situações-problema apresentadas nos episódios deste bloco indicam como as regras envolvendo cálculo com frações aparecem e têm força no contexto da sala de aula. É importante destacar que o problema não está nas regras propriamente, mas na supervalorização do uso das mesmas, deixando de se propor à turma uma abordagem exploratória das atividades propostas, o que poderia ser oportunidade para a compreensão efetiva dos conceitos relacionados às frações.

3.2.3. COMPARAÇÃO DE FRAÇÕES

3.2.3.1. EPISÓDIO 6: MAIOR, MENOR OU IGUAL?

Para explicar a comparação de fração com denominadores diferentes para os alunos, o professor utilizou do seguinte exemplo, que fazia parte de um exercício do livro didático:

$$\frac{7}{8} \blacksquare \frac{17}{20}$$

O início da explicação se deu pela verificação de que os numeradores e os denominadores das duas frações eram diferentes. O professor disse aos alunos que, teriam que “tentar” deixar as duas frações com mesmo denominador e transformá-las cada uma em outra equivalente. Para a transformação das frações dadas com o mesmo denominador foi usada, pelo professor, a seguinte fala: *“Na hora que a gente quer transformar elas* [frações] *em equivalentes, eu vou olhar os números debaixo. Na tabuada do oito, por exemplo, é oito, dezesseis, vinte e quatro, trinta e dois, quarenta, quarenta e oito, cinquenta e seis, sessenta e quatro, setenta e dois, e aí vai, continua. Vocês sabem. A tabuada do vinte, no caso se tivesse, seria vinte, quarenta, sessenta, oitenta, cem..., aí o que acontece, você olhou o debaixo daqui* [apontando para a fração $\frac{7}{8}$] *e o debaixo desse* [apontando para a fração $\frac{17}{20}$]. *Qual o número* [múltiplo] *que eles* [os denominadores das duas frações comparadas] *têm em comum?”* Pedro respondeu: *"oitenta"*. Professor voltou a perguntar: “*qual é o número eles têm em comum?”*. Alguns alunos responderam em coro: *"quarenta"*. A partir dessa resposta, o professor disse*: “Então eu vou virar o debaixo para o número quarenta. Então, você tem que achar o número que eles têm em comum. Só que você olha o número de cima? Não, você olha o número debaixo. Aí, que número que multiplica o vinte que faz ele virar quarenta?”*. Os alunos responderam em coro: *"dois"*. O professor continuou: *“então aqui é vezes dois, então o que eu tenho que fazer em cima?”*. Alunos: *"vezes dois"*. *“Aí vai dar trinta e quatro.”* – disse o professor, que continuou: *“Que número que eu multiplico o oito que faz ele virar quarenta?”*. Muitos dos alunos responderam cinco, e, assim, o professor completou: *“então em cima eu vou ter que multiplicar por cinco* [colocou o resultado na lousa]. *Agora dá para saber quem é maior? Quem é a maior, a primeira ou a segunda?”*. Os alunos responderam: *"A primeira"*.

Ao finalizar essa explicação, o professor disse que esse mesmo procedimento deveria ser feito para se comparar as demais frações. E que, após encontrar as frações equivalentes com os mesmos denominadores, os alunos precisavam colocar, no lugar do quadradinho preto, um dos sinais de desigualdade (< ou >) ou o sinal de igualdade (=).

Ao comparar frações, muitas vezes os alunos ainda as vêm como sendo pertencentes ao conjunto dos números naturais, ocasionando ordenações indevidas de números racionais na forma fracionária.

> A compreensão da ordenação de fração é outra dificuldade. No campo dos números naturais, a concepção desenvolvida é a de que os números são construídos segundo uma ordem, na qual o sucessor de um número é ele próprio acrescido de uma

> unidade, portanto, os números podem ser dispostos segundo uma ordem constante. Essa concepção terá de ser rompida, pois, na comparação de dois números naturais dizemos que, por exemplo, $3 < 4$, já na comparação de duas frações dizemos que $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$. (MERLINI, 2005, p. 21)

Diante disso, para comparar frações que possuem numeradores e denominadores diferentes, usa-se, geralmente, a transformação das frações em outras com denominadores iguais. Ocorre que, em muitas vezes, esse não é o único caminho de comparação. Antes mesmo de o livro tratar a comparação de frações em *Numeradores e denominadores diferentes*, o professor mostrou aos alunos como comparar, por exemplo, frações cujos numeradores são iguais e os denominadores diferentes – para as quais não é necessário serem encontradas frações equivalentes cujos denominadores sejam iguais.

Além disso, não é necessário que os denominadores comuns sejam o mínimo múltiplo comum. A resposta dada por Pedro ao professor no episódio 6 poderia ser considerada, inclusive, para se discutir a possibilidade de outras frações equivalentes serem obtidas a partir de cada uma das frações comparadas.

Ainda, uma alternativa mais interessante para o aluno realizar a comparação de frações é a abordagem exploratória. Nela,

> [...] o professor começa por propor tarefas para os alunos trabalharem, estimulando-os a mobilizar os seus conhecimentos e elaborando soluções originais. Pretende-se que estas tarefas estejam ao alcance dos alunos, interagindo uns com os outros ou contando com uma ajuda discreta por parte do professor (PONTE, 2014, p. 5)

Para se determinar qual das duas frações é a maior em $(\frac{7}{8} \blacksquare \frac{17}{20})$, uma possibilidade para uma abordagem exploratória seria a proposição de perguntas pelo professor aos seus alunos, encorajando-os a apresentarem maneiras de estabelecer tal comparação. Os alunos poderiam, por exemplo, transformado as frações em equivalentes cujos numeradores fossem iguais e, então, determinar qual é a maior – o que seriam matematicamente corretos, embora não usual.

3.2.4. ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES

3.2.4.1. EPISÓDIO 7: "VASILHAS E LÍQUIDOS" - UMA OUTRA ABORDAGEM PARA NUMERADORES E DENOMINADORES

Retornando a explicação do tema "comparação de frações com numeradores e denominadores diferentes", o professor, usou o artifício de trabalhar com objetos do cotidiano dos alunos, como os recipientes (vasilhas, garrafas, jarras, caixas) e líquidos. Fez isso identificando que *"o denominador, ele é como se fosse a vasilha onde está o líquido e, o numerador é o tanto de líquido"*. Assim, para a correção de alguns exercícios propostos sobre a matéria, o professor utilizou do recurso de pensar as frações a partir de "vasilhas" e de "líquidos".

Para corrigir o exercício dado a seguir, o professor, além de usar o recurso das "vasilhas" e "líquidos", retomou outro método de resolução, que chamaremos de multiplicação dos denominadores (já apresentado na seção 3.1).

Compare as frações da mesma unidade, copiando-as em seu caderno e substituindo o ■ pelos sinais >, < ou =. a. $\frac{7}{8}$ ■ $\frac{17}{20}$ b. $\frac{4}{7}$ ■ $\frac{3}{5}$ c. $\frac{23}{15}$ ■ $\frac{7}{5}$ d. $\frac{6}{9}$ ■ $\frac{4}{6}$

Os alunos, durante a própria aula, resolveram esses exercícios encontraram múltiplos comuns entre os denominadores das frações a serem comparadas, pois esse havia sido o único método explicado pelo professor para transformar as frações comparadas em frações com o mesmo denominador até então.

O professor disse: *"Esse aqui* [referindo-se ao método do múltiplo comum] *é o jeito que sempre dá o menor número, mas é o que dá mais trabalho. Agora, vou ensinar, um que na maioria das vezes, dá um número maior, só que dá menos trabalho"*. Para a explicação do outro método, o da multiplicação dos denominadores, o professor utilizou-se das frações $\frac{7}{8}$ e $\frac{17}{20}$. Assim, foi dito pelo professor que: *“Aqui eu tenho que achar o em comum, né? Ai, eu falei, eu vou ensinar um método que dá um número maior, só que é mais fácil de fazer e mais rápido. Aí, o que você faz, você pega esse e este* [referindo aos denominadores 8 e 20] *e faz um vezes o outro, oito vezes vinte* [resolveu a multiplicação na lousa]”. Pedro adiantou-se, dizendo que era *"cento e sessenta".* Professor continuou:

— *“Então, eu disse que a caixa em comum entre eles é cento e sessenta. É a menor caixa em comum? Não, mas você fez bem mais rápido. É isso que eu tô querendo dizer. Então, eu tenho que passar a de oito para caixa de cento e sessenta. ‘Ah, professor, mas eu não sei como que oito virá cento e sessenta!’. Multiplica por vinte*”. José questionou: “Mas por que cento e sessenta?”. A resposta do professor veio como uma pergunta: *“Oito vezes vinte?”*. José respondeu: *"Ah, cento e sessenta".* Dando sequência à sua fala, o professor continuou: *“você tem dúvida, arma aí e efetue. Sete vezes vinte? “Ah, não sei fazer”; você vai armar lá. Sete vezes vinte ou vinte vezes sete, o que você quiser, tanto faz. Você vai armar e vai fazer. Aí, aqui dá cento e quarenta.”* Gabriela perguntou: *"O em comum é o quê? Como assim, o em comum?"*. O professor respondeu para ela: *“A caixa em comum! Qual que é a caixa que dá para colocar os dois e não fica nada de fora, tem certeza disso. Cento e sessenta. É isso! É a mesma coisa, você tá lá com um tanto de coisa, aí você vai pega uma caixa pequena? Não, vai pegar uma caixa que dá pra colocar tudo que tá lá dentro, por isso que é uma caixa em comum. O vinte para virar cento e sessenta multiplica por oito, o dezessete* [fez a multiplicação de dezessete por oito na lousa]”.

Para continuar a correção do exercício, o professor disse: *“O vinte para virar cento e sessenta, multiplica por oito. Aí o dezessete, eu não sei de cabeça, vamos fazer aí* [fez a multiplicação na lousa], *oito vezes sete, cinquenta e seis, vão cinco. Oito vezes um, oito mais cinco, treze. Então é cento e trinta e seis. Quem* [referindo-se as frações $\frac{140}{160}$ e $\frac{136}{160}$] *é o maior dos dois?”*. Alguns alunos responderam: *"cento e quarenta".* Professor continuou: “*É o?”*. Alunos disseram: *"sete sobre oito".* Professor completou: *“Porque são frações equivalentes* [referindo-se as frações $\frac{140}{160}$ *e* $\frac{7}{8}$]”. O professor acrescentou em sua fala: *“É a menor caixa em comum? Não, é por isso que eu tô falando, esse é o mais rápido* [método] *mas nem sempre dá o número menor.”*

3.2.4.2. EPISÓDIO 8: A ATUALIZAÇÃO DAS FRAÇÕES EM "VASILHAS" IGUAIS

Esse episódio refere-se ao ensino de soma e subtração de frações com denominadores iguais e com denominadores diferentes.

Para iniciar a explicação da matéria, o professor utilizou as frações $\frac{3}{10}$ *e* $\frac{4}{10}$, afirmando que essa *"[...] é a situação que eles* [os livros didáticos] *falam denominadores iguais. Então, a gente pode entender que as coisas estão em vasilhas iguais, mas não na mesma vasilha. Então são duas jarras do mesmo tamanho, duas jarras de dez medidas. Qual a ideia de ter duas jarras de dez medidas? Que eu posso colocar tudo em uma jarra só. Então, é por isso que mudou a jarra. Tá vendo, eu só somei a quantidade e põe em uma jarra só. Então, aqui fica como? A jarra mudou? Não, é dez. Aqui* [o resultado]*, vai ficar como?".* Alunos responderam, em coro: *"sete décimos".* O professor continuou*: "Porque embaixo não somou?".* Alguns alunos responderam ser porque elas, as jarras, são iguais. O professor complementou a fala dos alunos dizendo: *"Porque eu estou mantendo a vasilha".* Finalizando a discussão sobre aquela situação, de somar $\frac{3}{10}$ *e* $\frac{4}{10}$, o professor concluiu que: *"Quando as vasilhas são iguais, você repete o debaixo, aumenta ou subtraí o de cima".*

Ao explicar a soma e subtração de frações com denominadores diferentes, o professor usou novamente da ideia de trabalhar com vasilhas. Para fazer tal explicação, o professor anotou na lousa:

Com denominadores "vasilhas" diferentes.

a. $\frac{3}{7}+\frac{1}{4}=$

b. $\frac{2}{10}-\frac{1}{15}=$

c. $\frac{7}{9}+\frac{2}{4}=$

E disse: *"Tá vendo que as vasilhas são diferentes* [apontado para as frações escritas na lousa]*? Eu tenho que achar a vasilha igual primeiro. Como eu ensinei vocês a achar a vasilha igual? Você faz um vezes o outro, só que você tem que atualizar. Ó, vamos ver aqui."*

Enquanto o professor colocava o resultado da multiplicação de sete por quatro na lousa, alguns alunos manifestaram estar lembrando o processo. Um disse: *"Ah sim, sete vezes quatro, que é igual a vinte e oito"*. O professor continuou: *"e então, a vasilha nova aqui é com vinte e oito."* Ao encontrar um denominador comum para as frações da adição do item a, antes de resolver essa operação, o professor encontrou os denominadores comuns das adições de todos os outros itens expostos na lousa (10x15 = 150 e 9x4=36). Enquanto assim o professor procedia, Daniel perguntou: *"Mas não tem que fazer aquela conta lá não [referindo-se à operação $\frac{3}{7}+\frac{1}{4}$]?"*. O professor respondeu: *"Eu tô fazendo para você entender que a primeira coisa que você tem que fazer é isso* [multiplicação dos denominadores]. *Então, o que que acontece, você tá passando tudo para duas vasilhas que você tem iguais, que aqui* [apontando para a operação $\frac{3}{7}+\frac{1}{4}$] *é o caso que você tinha uma de um tipo e outra de outro, aí você passou para duas iguais."*.

Outro aluno, chamado Júnior, manifestou não haver compreendido o que o professor havia feito com os denominadores das frações $\frac{3}{7}$ e $\frac{1}{4}$. Imediatamente, o professor explicou mais uma vez, para ele e para aqueles não haviam entendido, a necessidade de encontrarem vasilhas iguais para a resolução daquela adição.

O professor deu andamento na resolução do primeiro item dizendo: *"Agora, eu vou passar o do primeiro* [a fração $\frac{3}{7}$] *para essa vasilha aqui, 28* [referindo ao denominador da fração], *e do segundo* [fração $\frac{1}{4}$] *eu vou passar para essa vasilha também de 28* [referindo ao denominador encontrado da segunda fração]. *Eu já juntei as duas? Não, é que eu quero saber. Antes: qual dos dois que tinha mais? Porque quando tá diferente eu sei quem que tem mais, se é esse* [fração $\frac{3}{7}$] *ou esse* [fração $\frac{1}{4}$]*? Não, é isso que a gente vai descobrir agora. Que número que faz o sete virar vinte e oito?"*. Os alunos responderam: *"quatro"*. A partir da resposta dos alunos, o professor disse: *"então, multiplica por quatro embaixo"*. Lúcio interrompeu o professor afirmando que *"Por cima também."*; o docente continuou: *"Quatro vezes três?"* e os alunos responderam *"doze"*. *"Por quê?"* – questionou o professor. *"Se a vasilha tá assim* [referindo-se ao denominador 7] *parece que tem muito, se a vasilha aumentou, vai aumentar, mas vai ser a mesma quantidade, não vai parecer a mesma coisa, né? Três na vasilha de sete, tá ok, mas esse três em sete não é a mesma coisa* *que três em vinte e oito. Na vasilha de sete ele ocupa três pedaços, agora essa mesma quantidade na vasilha de vinte e oito, ele ocupa doze pedaços. Agora, essa aqui, era quarto virou...* [fez a conta na lousa e colocou o denominador da fração equivalente a ¼ como 28]. *Quem que era o maior dos dois então?”*. Alguns alunos responderam: *"três sétimos"*. O professor repetiu: *“Três sobre sete.”* E continuou: *“Agora, o que tá pedindo? Para somar, né? Por que virou denominadores iguais, aí eu vou juntar tudo em uma vasilha só.”* Um grupo de alunos completou a fala do professor, dizendo *"Doze mais sete, dezenove"*.

3.2.4.3. EPISÓDIO 9: MMC- NÚMERO MENOR E MENOS TEMPO GASTO

Para somar e subtrair frações cujos denominadores são diferentes, o professor já tinha ensinado para os alunos dois métodos: o de encontrar um denominador comum através dos múltiplos e o da multiplicação dos dois ou mais denominadores de cada fração. Havia ainda outro método a ser ensinado, que constituiria do mínimo múltiplo comum dos denominadores de cada fração.

Para a explicação do método de resolução por meio do mínimo múltiplo comum, o professor relembrou cada método ensinado anteriormente. Com isso, tomou dois denominadores de frações, seis (6) e doze (12), ainda com o propósito de ajudar os alunos quanto ao entendimento das facilidades de cada um dos métodos ensinados, o professor utilizou de setas viradas para baixo ($\downarrow$) e para cima ($\uparrow$) simbolizando menor e maior, respectivamente. Dizendo que: *“Aí, pessoal, o que acontece? Lembra que eu falei para vocês que existe o jeito demorado que é o calcular o múltiplo, por exemplo, aí imagina que os denominadores são* [escreveu na lousa 6 e 12]. *Então, eu falei que os denominadores das frações são seis e doze. Aí, o primeiro método que eu ensinei foi o que, dos múltiplos não foi? Não foi isso? Então, por exemplo, os múltiplos de seis, vai de seis em seis e os múltiplos de doze, vai de doze em doze, então zero, seis, doze, dezoito, aí continua. E aqui* [apontando para os múltiplos de doze], *zero, doze, vinte e quatro, trinta e seis, então aqui deu pra ver que neste caso foi no começo, não foi?”.* Os alunos responderam e o professor continuou: *“Então, o múltiplo comum deles, é o quê?”* Alguns alunos responderam ser doze. Na sequência, o docente complementou sua fala: *“Só que tem hora que você tem que escrever muita coisa, não é isso? No segundo método que eu ensinei para* *vocês, usando os mesmos* [denominadores], *seria qual? Multiplicar. Esse aqui* [apontando para o método dos múltiplos*], dá sempre o menor* [↓número] *mais demora muito* [↑], *então, aqui* [apontando para o método dos múltiplos] *seria o que, número menor* [↓] *e tempo maior* [↑], *então o primeiro* [método] *é isso. Esse daqui* [apontando para o segundo método], *o tempo é menor* [↓], *mas o número é maior* [↑]". Alguns alunos, manifestaram não ter compreendido o uso das setas. O professor disse: *"Não é confusão não. [...] para cima* [referindo-se ↑] *é mais, para baixo* [referindo-se ↓] *é menos, menos tempo* [↓] *mais número* [↑], *então número maior. Como você fazia isso, multiplicava, seis vezes doze, setenta e dois. Então você achou que o múltiplo comum de seis e doze é setenta e dois."* Continuou a explicação dos métodos para somar e subtrair com frações de denominadores diferentes, dizendo: *"Tá vendo, tem um só* [método de escolher o múltiplo]? *Não, tem vários. Você pode usar os vários múltiplos comuns. Então, nesse caso aqui* [referindo-se ao método dos múltiplos] *é o doze, quando você usa, número menor e demora mais tempo. Nesse caso* [referindo ao método da multiplicação dos denominadores*], que você gasta menos tempo, você acha um número grande. Agora, o último* [referindo-se ao terceiro método] *que é do mmc, vocês primeiro têm que lembrar os números primos, quais são?"*. Alguns alunos disseram: *"dois, três, cinco, sete, onze, treze..."*. O professor interrompeu a fala daqueles alunos dizendo que todos deveriam saber de cor os números primos e prosseguiu dizendo: *"Lembram que vocês faziam o mmc, que vocês fatoravam? Aí o que você vai fazer, vocês vão pegar os denominadores e fatorar, que é dividir pelos números primos. Aí, você vai arrumar qual o menor número* [↓] *e vai gastar menos tempo* [↓]. *Então, nesse caso* [referindo ao terceiro método] *você acha sempre o menor* [número] *e gasta menos tempo* [professor fatorou seis e doze na lousa]."

Para finalizar, o professor disse que daria alguns exercícios referentes à matéria nos quais os alunos teriam que usar apenas o método do mínimo múltiplo comum para a resolução.

Sabemos que para efetuar adição e subtração com frações que possuem o mesmo denominador devemos apenas somar ou subtrair os numeradores, conservando os denominadores. Já, para as operações de adição e subtração com frações cujos denominadores são diferentes precisamos transformar as frações de modo que possuam o mesmo denominador para que seja possível operar com elas. Os PCN (1998) recomendam a transformação das frações em equivalentes com o mesmo denominador (não necessariamente o menor), por meio da propriedade de frações equivalentes.

É comum observar que ao somar ou subtrair frações, alunos somam ou subtraem os numeradores e os denominadores isolados, como se estivessem operando com números inteiros. Lopes (2008) chama esse fenômeno de "sobregeneralização".

> Alunos de quase todas as culturas cometem erros padrão no cálculo de adição de frações, trata-se de um fenômeno conhecido como "*sobregeneralização*". Quem nunca viu crianças somarem numeradores e denominadores como fazem nas multiplicações? (LOPES, 2008, p. 10)

Para o estudo dessas operações com denominadores diferentes, na transformação de frações em equivalentes, o professor utilizou uma analogia com "vasilhas" e "líquidos" para ajudar nas dificuldades dos alunos, visto que manifestavam muitas dúvidas na resolução de exercícios. Nesse caso, como já dissemos, as "vasilhas" são os denominadores e os "líquidos" os numeradores. Acreditamos que essa alternativa usada pelo professor auxiliou os alunos na compreensão de que, ao transformar o denominador de uma fração, necessariamente se precisa mudar o numerador - usando a linguagem do professor, essa seria uma "atualização das vasilhas em iguais".

Ainda, no ensino das adições e subtrações de frações com denominadores diferentes, o professor explicou aos alunos sobre três métodos possíveis para a resolução dessas operações: o dos múltiplos comuns, o da multiplicação entre denominadores e do mínimo múltiplo comum, mostrando-lhes que cada qual tem vantagens e desvantagens em se adotar. De todo modo, cada aluno poderia usar aquele método que julgasse mais adequado para fazer tais operações.

É possível verificar, nas leituras e durante a observação das aulas, que os desenhos foram importantes para que os alunos conseguissem entender certas ideias das frações, como visto em alguns episódios. Com isso, percebemos a representação pictória como um artifício poderoso para trabalhar as operações com frações, principalmente ao tratar a adição e a subtração, sendo possível compreender porque os denominadores têm que possuir a mesma unidade.

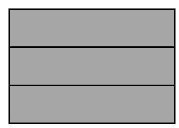
3.2.5. MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES

3.2.5.1. EPISÓDIO 10: MULTIPLICA EM CIMA POR DE CIMA E DE BAIXO POR DE BAIXO

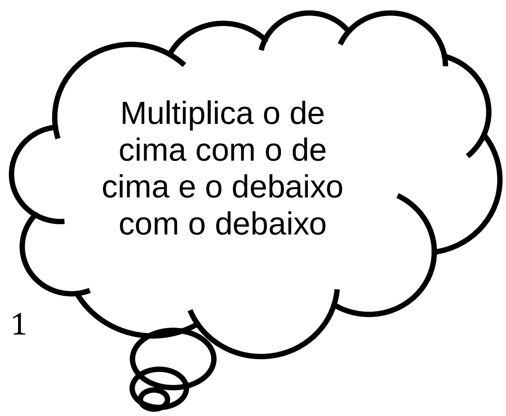
Para trabalhar com a multiplicação de frações, inicialmente, o professor expôs na lousa uma breve explicação do assunto.

Multiplicações de frações

- Frações vezes um número natural

3 ×  =  $= \frac{3}{3} = 1$

$\frac{1}{3}$



Exemplos:

a) $3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 1}{1 \cdot 3} = \frac{3}{3} = 1$

b) $5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 2}{1 \cdot 3} = \frac{10}{3}$

- Fração vezes fração

Exemplos:

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{8}{9} = \frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 9} = \frac{24^{\div 3}}{45^{\div 3}} = \frac{8}{15}$

b) $\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 8} = \frac{3}{40}$

c) $\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{15} = \frac{9 \cdot 1}{10 \cdot 15} = \frac{9^{\div 3}}{150^{\div 3}} = \frac{3}{50}$

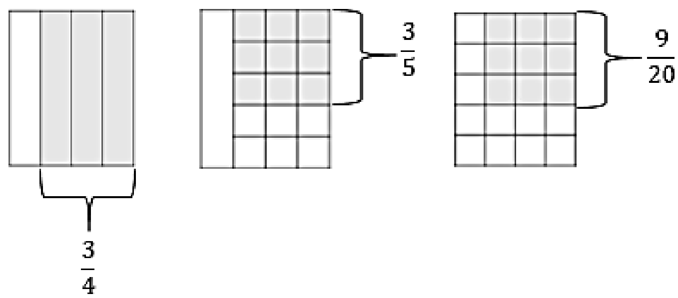
O professor iniciou a explicação do tema dizendo que *"Tem duas situações: quando eu pego uma fração e multiplico por um número só ou quando eu pego uma fração e multiplico por outra fração. Esse pontinho aqui* [apontando para o sinal de multiplicação (.)] *é a mesma coisa que vezes, porque a partir do sétimo ano, a gente não usa o x mais, porque o x a gente vai usar para outra coisa. Então, eu tinha um terço uma vez só, aí eu multipliquei por três, então fiquei com um terço três vezes, que é a mesma coisa que três sobre três. Três dividido para três pessoas, um. Aí deixa eu explicar, quando tá multiplicando aqui* [apontando para a operação $3 \cdot \frac{1}{3}$], *esse número ele multiplica só o de cima".* Rafael, então disse: *"Ah, eu pensei que era os dois".* O professor perguntou: *"Por quê? Porque embaixo, quando não aparece, é um. Qualquer coisa multiplicada por um, muda? Não, por isso que o três só multiplica o de cima, três vezes um* [colocou na lousa o resultado], *um vezes três* [colocou o resultado na lousa]". Enfatizou ainda com os alunos que aquela regra valeria apenas para a multiplicação. Agora, para explicar a multiplicação de fração por fração, o professor disse: *"*[...] *é uma fração vezes outra fração, aí eu faço o de cima com o de cima e o de baixo com o de baixo* [resolveu as operações na lousa]*".*

Ainda, disse aos alunos que teriam a partir daquele momento simplificar os resultados das operações até que encontrassem as suas frações irredutíveis.

Para a multiplicação de frações, o professor inicialmente apresentou aos alunos as multiplicações por um número natural e, em seguida, multiplicações entre frações. Para as multiplicações de fração por número natural, o professor iniciou a explicação a partir da visualização de representações gráficas de frações, permitindo aos alunos perceberem o que estava acontecendo naquela situação. Mas, ao explicar o algoritmo da multiplicação de uma fração por outra fração, não fez nenhuma associação com desenhos.

Ao utilizar o recurso da visualização, professores podem proporcionar nos alunos a compreensão do processo que estava envolvido naquela situação. Não significa que todos os problemas serão solucionados ao utilizarem as visualizações e, sim, que eles são eficientes para que as regras utilizadas nas operações fiquem mais claras para os alunos. Um exemplo seria a multiplicação de $\frac{3}{4} \times \frac{3}{5}$.

Figura 15 - Multiplicação entre frações



Fonte: autoria própria

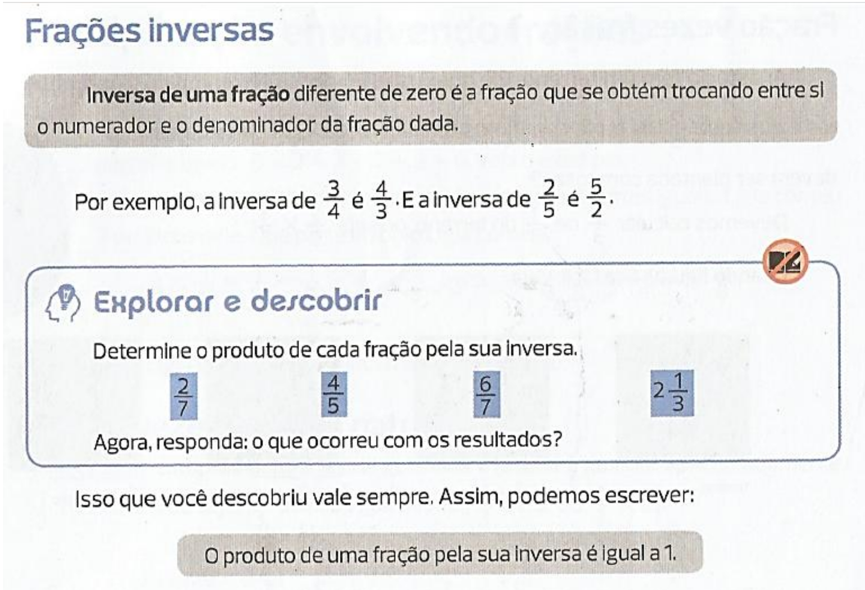
A multiplicação é a operação com frações que os alunos não veem muitas dificuldades, pois seu algoritmo é de fácil compreensão, além, de ser a que mais se aproxima das operações realizadas com os números inteiros. Porém, Kieren (1976 apud COSTA, 2011), ao referir-se que os números racionais não podem ser pensados apenas como uma extensão dos números naturais, pois, nos números naturais a multiplicação sempre resulta em um número maior e, já, nos racionais, nem sempre isso acontece.

3.2.6. DIVISÃO DE FRAÇÕES

3.2.6.1. EPISÓDIO 11: A FRAÇÃO DE CABEÇA PARA BAIXO

O professor solicitou que os alunos lessem no livro didático o conteúdo referente a frações inversas (Figura 16).

Figura 16 - Frações inversas



Frações inversas

Inversa de uma fração diferente de zero é a fração que se obtém trocando entre si o numerador e o denominador da fração dada.

Por exemplo, a inversa de $\frac{3}{4}$ é $\frac{4}{3}$. E a inversa de $\frac{2}{5}$ é $\frac{5}{2}$.

Explorar e descobrir

Determine o produto de cada fração pela sua inversa.

$\frac{2}{7}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{6}{7}$ $2\frac{1}{3}$

Agora, responda: o que ocorreu com os resultados?

Isso que você descobriu vale sempre. Assim, podemos escrever:

O produto de uma fração pela sua inversa é igual a 1.

Fonte: DANTE, 2015, p. 182

João, durante a leitura, perguntou ao professor: *"E quando os denominadores forem diferentes, somam do mesmo jeito?"*. Professor respondeu: *"isso é na soma e subtração. Na divisão o que você tem que fazer: pegar o primeiro* [primeira fração], multiplicar pelo inverso do segundo [segunda fração]*, aí é só multiplicar. Pessoal, como é que faz a divisão: se tá faltando* [denominador das frações]*, o que tá faltando é o um. A divisão vira o quê? Multiplicação. Então você pega o primeiro* [fração] *vezes o segundo* [fração] *de cabeça para baixo. Aí, é só multiplicar, de cima com de cima e debaixo com debaixo."*

3.2.6.2. EPISÓDIO 12: REPETE A PRIMEIRA FRAÇÃO VEZES O INVERSO DA SEGUNDA FRAÇÃO

Para abordar a divisão envolvendo frações, o livro didático subdivide o item em outros três: divisão de fração por número natural; divisão de número natural por fração; divisão de fração por fração; e utilizou da ideia de quantas vezes o dividendo cabia no divisor.

O procedimento usado para o cálculo de divisão de frações já havia sido lido pelos alunos em aulas anteriores, na sala de aula. O professor utilizou de exercícios do livro didático para fixação do conteúdo. Inicialmente, disse: *"Para resolver a divisão, eu vou usar a multiplicação."*

Gabriel perguntou: *"Vezes? Mas não era **dividir**?".* Respondendo o aluno, o professor afirmou: "*Pra fazer* [a conta], *eu transformo a divisão em multiplicação."*

Ao terminar a revisão da operação de divisão entre frações, o professor solicitou que os alunos fizessem alguns exercícios. Após decorridos alguns minutos da aula, o professor iniciou a correção desses exercícios. O exercício que envolvia a operação $4 \div \frac{3}{5}$, iniciou sua fala da seguinte forma: "*Aqui, quando não aparece aqui embaixo* [referindo-se ao que seria o denominador de 4] *é o um*." Gabriel manifestou-se: *"Eu achei que tinha que fazer assim: quantas vezes o três cabe dentro do quatro."* Professor disse: *"Mas isso é divisão normal, né? Aqui não é, aqui é com fração, né? Aí você escreve a primeira* [fração $\frac{4}{1}$] *vezes o inverso da segunda* [fração $\frac{5}{3}$]. *Quatro vezes cinco, vinte. Um vezes três, três. Tem como simplificar? Não né, mas dá para gente escrever como número misto. Quantas vezes o três cabe dentro do vinte?"*. Vinícius respondeu: *"Seis".* Professor continuou a dizer: *"seis e sobra dois. Seis inteiros e dois sobre três."* Pedro questionou o professor sobre uma divisão corrigida anteriormente, que era $\frac{3}{8} \div \frac{2}{5}$: *"Mas na primeira você não tinha que fazer três vezes dois, não?"* O professor perguntou: *"Três vezes dois? Por quê?"*. Pedro continuou: *"Três oitavos vezes dois quintos." "Qual é o resultado? É três vezes cinco e oito vezes dois. De cima com de cima e debaixo com debaixo."* – disse o professor. Pedro, novamente, questionou: *"Aí tem que inverter a fração?".* O professor respondeu: *"É, você pega a primeira [fração] e inverte a segunda".* [...] *então, a fórmula é qual: escrever a primeira* [fração] *do mesmo jeito e inverter a segunda* [fração]".

A divisão, mesmo com os números naturais, é a operação que causa maiores dificuldades aos alunos, com os números fracionários, não seria diferente.

A explicação das divisões com frações apenas pelo seu algoritmo, de multiplicar a primeira fração pelo inverso da segunda fração, cria para o aluno mais uma regra a ser memorizada, sem nenhum significado. Acreditamos que o uso de desenhos e a ideia de "quantos cabem?" auxilia os alunos a, pelo menos, entenderem essa regra.

4. CONCLUSÕES

A introdução do conceito de fração na turma de 6º ano foi por meio da pergunta aos alunos do que era frações para eles; surgiram respostas como: divisão, dividir algo em partes e dividir alguma coisa em partes iguais. Dessa forma, aqueles alunos pareciam aceitar aquela representação com sendo legítima e não a questionavam, aparentando já saberem o que eram as frações. Esse fato pode levar professores de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, notadamente os do 6º ano, a subestimarem a necessidade e importância de se discutir a ideia de fração com seus alunos em todos os seus subconstrutos.

Podendo ser observado no uso da regra de multiplicar o número inteiro do número misto pelo denominador da fração e, ao resultado, somar o numerador, pode não fazer sentido para os alunos. Atividades que explorem a visualização ou resoluções de situações-problema são alternativas que podem auxiliar os alunos a entenderem o processo de transformar números mistos em frações impróprias.

Ao longo de nosso trabalho, entendemos, assim como aponta Perin (2009), ao citar Fiorentini e Lorenzato (2006), ser importante se criar um contexto para apresentar conteúdos referentes a frações, com a finalidade de produzir nos alunos conhecimentos com significados:

> No ensino voltado para crianças, jovens e adolescentes, é preciso ensinar os temas de maneira contextualizada, levando em consideração as condições sociais e históricas, articulando teoria e experimentação e mediando, adequadamente, junto a seus futuros alunos, o acesso à construção de conhecimentos científicos. (FIORENTINI & LORENZATO, 2006 apud PERIN, 2009, p. 13-14)

Pela observação da prática do professor, percebemos que apenas a leitura do conteúdo exposto no livro didático em sala de aula pode não ser suficiente para que os alunos compreendam ideias referentes a frações; é necessário que se utilizem outros recursos no ensino desse conteúdo. Souza (2013) reforça essa ideia ao nos dizer que

> [...] em se tratando do ensino aprendizagem de frações, se faz necessário analisar a abordagem dos conceitos de fração nos livros didáticos, pois observamos que existem caminhos diferentes aos quais podemos recorrer para um aprendizado eficaz, tendo em vista que muitos livros não abordam tais conceitos de forma clara, que permitam ao aluno uma melhor compreensão acerca do conteúdo. (SOUZA, 2013, p. 5)

Ainda julgamos ser importante que os exercícios envolvendo frações devam ter suas resoluções discutidas mais a fundo, permitindo aos alunos oportunidades de pensar sobre frações e se manifestarem a respeito – formulando conjecturas e apresentando suas considerações a respeito. Por meio da discussão dos exercícios realizados pelos alunos – e não somente pelo professor – é possível também que a turma observe erros que são cometidos e possa, a partir deles, buscar repensar afirmações feitas por colegas e ajudem na reformulação das mesmas. Desse modo, o erro pode ser um caminho para o desenvolvimento de outras estratégias de pensar com frações, bem como oportunidade de (re)aprender.

Foi possível observar, nas leituras dos artigos revisados, a crítica em torno do estudo dos números racionais na forma fracionária nos casos em que as frações são ensinados sem nenhum problema introdutório, apenas pela definição e pela memorização das regras (LOPES, 2008; MACHADO & MENEZES, 2008; SANTANNA, PALIS, & NEVES, 2013)

No estudo da equivalência de frações com a turma de 6º ano observada teve ênfase o processo para se encontrarem frações equivalentes a uma dada fração multiplicando o numerador e denominador dessa fração por um mesmo número. Tal ideia e o respectivo procedimento para transformação foram muito utilizados durante as aulas e constituíram uma ferramenta importante para estudar a comparação entre frações, bem como as operações com as frações. Consideramos, com Silva, Serrazina e Campos que, de fato, a "[...] equivalência é uma das ideias principais quando lidamos com frações." (2014, p. 1519) e, portanto, precisa ser enfatizada nas aulas sobre frações.

As operações com frações são responsáveis por grandes debates dentro da literatura revisada, talvez por ser um dos conteúdos em que se verifica maior mecanização de regras operatórias. Para o estudo das adições e subtrações com frações de denominadores diferentes, o professor utilizou de uma analogia (garrafas e líquidos), a fim de possibilitar aos alunos uma outra maneira de compreender o porquê de os denominadores das frações somadas ou subtraídas serem iguais.

Outra observação valiosa quanto o ensino da adição e da subtração envolvendo frações feita pelo professor foi a apresentação aos alunos de três maneiras para o cálculo do denominador comum, sem exigir dos alunos o uso exclusivo de algum deles, deixando escolherem qual fazia mais sentido. O método que os alunos mais utilizaram foi o da multiplicação entre os denominadores; os alunos, ao realizarem vários exercícios utilizando esse método, tiveram oportunidades para fazer uma generalização desse processo operatório, como apontado por Silva & Almouloud (2008):

> Entendemos que esse procedimento [multiplicação dos denominadores] auxilia o aluno a construir um significado para a operação de adição com números fracionários, além da compreensão do algoritmo que se utiliza para realizá-la, pois já sabemos que, geralmente, o aluno não tem uma compreensão clara do papel do mínimo múltiplo comum nesse tipo de cálculo. (SILVA & ALMOULOUD, 2008, p. 65)

A partir dos textos lidos observamos algumas metodologias para o ensino das operações com as frações, buscando maior compreensão por parte dos alunos. Uma delas é a proposição de situações-problema aos alunos, desde que, como apontam Souza e Oliveira (2010), elas originem no aluno

> [...] o motivo para aprender e a necessidade de o fazer, acarretando definições de ações, levantamento de hipóteses, escolha dos dados e dos procedimentos a serem utilizados na busca pela solução do problema e gerando a aprendizagem. (SOUZA & OLIVEIRA, 2010, p. 973)

Nessa direção, é importante que o professor, no processo de desenvolvimento dessas atividades, seja um orientador – e não quem oferece aos alunos as respostas e os modos de proceder nas resoluções das situações-problema.

No estudo das frações, professores e alunos podem encontrar obstáculos no ensino e na aprendizagem. Abordagens não significativas, como, por exemplo, a exposição de exercícios na lousa sem uma discussão para os alunos, podem possibilitar esses obstáculos. Diante disso, fica evidente a necessidade de uma abordagem exploratória para esse conteúdo, presente em toda a escolarização básica.

Por fim, destacamos a importância e necessidade da reflexão do professor sobre sua prática docente.

> No sentido de organizar o trabalho pedagógico e proporcionar aos alunos oportunidades que favoreçam, efetivamente, a compreensão da Matemática como ciência harmônica, fruto da criação do homem, consideramos a importância do papel do professor. Muitas são as expectativas sobre o perfil desse profissional em face da tarefa de realizar um ensino de qualidade, e, certamente, uma formação inicial adequada poderia ser um bom começo, mas não o suficiente. Nesse sentido, ações estratégicas de formação continuada se fazem necessárias. (SILVA, SERRAZINA & CAMPOS, 2014, p. 1506)

Diante do apresentado, para que haja uma compreensão do conceito de fração é preciso uma construção desde o seu conceito, que os alunos construam o significado de número racional na forma fracionária, os professores possam propor atividades na qual os alunos precisam criar estratégias para o desenvolvimento, tanto dos subconstrutos dos números racionais como, também, das operações de soma, subtração, multiplicação e divisão.

5. REFERÊNCIAS

BAPTISTA, M. et al. Estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática. **Bolema**, v. 30, n. 56, p. 868 - 891, 2016.

BERTONI, N. E. A construção do conhecimento sobre número fracionário. Boletim de Educação Matemática**, v. 21, n. 31, p. 209-237, 2008.**

BRASIL. Parâmetros curriculares nacionais: matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf . Acesso em: abr. 2019.

BRASIL. Parâmetros curriculares nacionais: matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: .http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf Acesso em: abr. 2019.

BRASIL. Secretária de Educação Básica. Base Nacional Curricular Comum: educação é a base. Brasília: MEC; SEB, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf Acesso em: abr. 2019.

BUKOWITZ, N. S. L. Uma abordagem geométrica à compreensão dos números racionais**.** **Educação Matemática em Revista**, Brasília, ano 13, n. 24, p. 07-15, jun. 2008

COSTA, F. M. Concepções e competências de professores especialista em Matemática em relação ao conceito de fração. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 13, n. 3, 2011.

DE LA ROSA ONUCHIC, L; ALLEVATO, N. S. G. As diferentes" personalidades" do número racional trabalhadas através da resolução de problemas. **Boletim de Educação Matemática**, v. 21, n. 31, p. 79-102, 2008.

FÁVERO, M. H.; Pina Neves, RS. A divisão e os racionais: revisão bibliográfica e análise. Zetetiké (UNICAMP), v. 20, p. 35-72, 2012.

FLICK, U. **Introdução à pesquisa qualitativa**. Tradução: Joice Elias Costa. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

FUCHS, M. J. REVISTAS NA ÁREA DA EDUCAÇÃO E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: Espaços para Socialização-Discussão-Aprendizado. 2012. (Desenvolvimento de material didático ou instrucional – Material Instrucional).

GARCIA-SILVA, A. F.; SERRAZINA, M. L.; CAMPOS, T. M. M. Formação Continuada de Professores que Lecionam Matemática: desenvolvendo a prática reflexiva docente. **Bolema**. 2014, vol.28, n.50, pp.1505-1524

GUERRA, R. B.; SILVA, F. H. S. da. As Operações com Frações e o Princípio da Contagem. **Bolema**. Rio Claro, v. 21, n. 31, 2008.

HOUAISS, A. e VILLAR, M. de S. **Dicionário Houaiss da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001.

LOPES, A. J. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **Bolema**. Rio Claro. v. 21, n. 31, p. 1-22. 2008.

MACHADO, C. T. O.; MENEZES, J. E**.** Concepções de professores que ensinam matemática sobre números fracionários, suas experiencias e as implicações em suas práticas na 5ª serie do ensino fundamental**. Educação Matemática em Revista** (São Paulo). v. 25, p. 05-20, 2008

MAGINA, S.; CAMPOS, T. A fração nas perspectivas do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do ensino fundamental. **Bolema**, v. 21, n. 31, p. 23-40, 2008.

MOREIRA, P. C.; FERREIRA, M. C. C. A Teoria dos Subconstrutos e o Número Racional como Operador: das estruturas algébricas às cognitivas. **Bolema**, v. 21, n. 31, p. 103-127, 2008.

OLIVEIRA, R. G. **Aprendizagem de frações:** uma análise comparativa de dois processos diferentes de ensino na 5ª série do 1º grau. Campinas, SP: [s.n], 1996. Disponível em: http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/251272 . Acesso em: abr. 2018.

ONUCHIC, L. I. R.; BOTTA, L. S. Uma nova visão sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais. **Revista de Educação Matemática**. São Paulo: SBEM, ano 5, n. 3, p. 5-8, 1997.

PATRONO. R. M. Aprendizagem de números racionais na forma fracionária no 6º ano do Ensino Fundamental: análise de uma proposta de ensino. Dissertação (Mestrado de Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Porto Alegre, 2011.

PONTE, J. P. D.; QUARESMA, M. As discussões matemáticas na aula exploratória como vertente da prática profissional do professor. **Revista da Faculdade de Educação** (Univ. do Estado de Mato Grosso), vol. 23, ano 13, n.1, p. 131-150, jan./jun. 2015.

PONTE, J. P. (Org.). Práticas profissionais dos professores de Matemática. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. (Encontros de educação). Disponível em: https://repositorio.ul.pt/handle/10451/15310 Acesso: agosto/2019

PONTE, J. P.; QUARESMA. M. Representações e processos de raciocínio na comparação e ordenação de números racionais numa abordagem exploratória. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 28, n. 50, p. 1464-1484, dez. 2014.

PROENÇA, M. C. O ensino de frações via resolução de problemas na formação de futuras professoras de pedagogia. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 52, ago., p.729-755, 2015.

ROSA, R. R.; VIALI, L. Utilizando recursos computacionais (planilha) na compreensão dos Números Racionais. **Bolema** (Boletim de Educação Matemática). n. 31, Dez/08.

SANTANNA, N. F. P.; PALIS, G. L. R., NEVES, M. A. C. M. Transpondo obstáculos: da Aritmética para a Álgebra**. Zetetiké**. FE/Unicamp, v. 21, n. 39 – jan/jun 2013, p. 169-195.

SANTOS, A. (2005). O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico junto a professores que atual no ensino fundamental. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SILVA, M. J. F; ALMOULOUD, S. A. As Operações com Números Racionais e seus Significados a partir da Concepção Parte-todo. **Bolema**, São Paulo, nº 31, p. 55-78, 2008.

SOUZA, A. P. G.; OLIVEIRA, R. M. M. A. Articulação entre literatura infantil e matemática: intervenções docentes. **Bolema**, Rio Claro, v.23, n. 37, p. 955-975, dez. 2010.

SOUZA, A. P. G.; OLIVEIRA, R. M. M. A. Leitura, escrita e Matemática: a apropriação de conhecimentos e a receptividade de alunos da 4ª série do Ensino Fundamental. **Zetetiké** – FE – UNICAMP, v. 8, n. 33, jan/jun. 2010. p. 173 – 210.

SOUZA, Â. T. S. Abordagem do conceito de fração: uma análise de livros didáticos. In: XI Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013, Curitiba. Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. ISSN 2178-034X, 2013

PERIN, A. P. Dificuldades vivenciadas por professores de matemática em início de Carreira. Dissertação (Mestrado), Faculdade de Ciências Humanas, Universidade Metodista de Piracicaba, 2009.

VALERA, A. R. Uso social e escolar dos números racionais: representação fracionária e decimal. Marília: 2003, 164p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Filosofia e Ciências, Marília. Disponível em: http: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/90210/valera_ar_me_mar.pdf?sequence=1&isAllowed=y . Acesso em: agosto/2019.

VAZ, R. F. N. Divisão de frações: explorando algoritmos não usuais. **Educação Matemática em Revista**, p. 59-66, 2016.

DA ROCHA VAZ, L. J. L.; DE OLIVEIRA PINHO, M. Música e matemática–um minicurso interdisciplinar. **Zetetiké**, v. 19, n. 1, p. 179-194, 2011.