UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI

Alexandre Alves Oliveira

CÁLCULO DE ORDEM REAL

São João del-Rei

Dezembro de 2017

Alexandre Alves Oliveira

CÁLCULO DE ORDEM REAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenadoria do Curso de Matemática, da Universidade Federal de São João del-Rei, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Andréia Malacarne

São João del-Rei, _____ de __________ de _______

Banca Examinadora

____

Orientadora: Profa. Dra. Andréia Malacarne

____

Prof. Dr. Fábio Alexandre de Matos

____

Prof. Dr. Waliston Luiz Lopes Rodrigues Silva

São João del-Rei

Dezembro de 2017

Agradecimentos

Inicialmente, agradeço a Deus por proporcionar a nós o estudo de suas obras e deixar-nos ousar a entender suas construções. Agradeço, também por abençoar minha trajetória nesta Universidade que se encerra neste trabalho.

Agradeço à minha mãe, Aparecida, pelo carinho e preocupação comigo durante minha graduação. A meu pai, Antônio, pelo companheirismo e exemplo ao qual me espelho. À minha irmã, Aline, que me motivou a ingressar em um Curso Superior mostrando-me que tudo é possível quando a dedicação prevalece. E a meu irmão, André Luiz, que me mostrou as verdades do mundo tão mascaradas das mais diversas formas. De maneira geral, agradeço a todos pelo amor incondicional, pelo apoio e confiança que depositaram em mim.

Agradeço à Profa. Dra. Andréia Malacarne pela orientação na execução deste trabalho, elaboração deste texto, apresentação do tema, além de sua dedicação e preocupação. Agradeço ao Prof. Dr. Fábio Alexandre de Matos pela orientação durante os projetos de Iniciação Científica, pela paciência e conselhos. Agradeço ao Prof. Dr. Waliston Luiz Lopes Rodrigues Silva pelo exemplo profissional e pessoal que cativou a mim e a meus colegas de curso. Agradeço ao privilégio de ter como mestres os professores do Departamento de Matemática e Estatística da Universidade Federal de São João del-Rei que influenciaram de forma significativa minha formação acadêmica.

Agradeço a meus amigos Lucas e Samuel pelo companheirismo e pela partilha de experiências e conhecimentos que fomentaram minha construção cognitiva, bem como possibilitaram meu crescimento pessoal. E, de igual forma, agradeço a meus colegas de Curso pela inesquecível experiência de tê-los como companheiros de caminhada e poder participar da construção de profissionais íntegros e de notórias habilidades.

Resumo

Será apresentado, neste texto, uma revisão histórica do desenvolvimento da teoria do Cálculo Fracionário e os conceitos que a estruturam a fim de introduzir tais ideias de maneira clara e objetiva. Dessa forma, este trabalho, apresenta os conceitos fundamentais do Cálculo de Ordem Real, desde as definições propostas por Riemann-Liouville, Liouville e Weyl, até a definição de derivada de ordem arbitrária proposta por Caputo.

Palavras-chave: Revisão Histórica, Cálculo Fracionário, Riemann-Liouville, Liouville, Weyl, Caputo.

Abstract

This paper will present an historical review on the development of the Fractional Calculus theory and the concepts that structure this theoryit in order to introduce these ideas in a clear and objective way. Thus, this work presents the fundamental concepts of the Real Order Calculus from the definitions proposed by Riemann-Liouville, Liouville and Weyl to the definition of an arbitrary derivative proposed by Caputo.

Keywords: Historical Review, Fractional Calculus, Riemann-Liouville, Liouville, Weyl, Caputo.

Sumário

Introdução

O Cálculo de Ordem Arbitrária, conhecido, também, como Cálculo Fracionário, surgiu através de questionamentos apresentados nas trocas de cartas entre Leibniz e l'Hôspital, com o intuito de melhor compreender o recém criado Cálculo de Ordem Inteira. A procura por respostas estimulou o estudo acerca do tema e várias definições surgiram a fim de formalizar a teoria. Contudo, é possível inferir que, devido às inconsistências presentes em tais definições, o Cálculo Fracionário não se difundiu de forma substancial no meio científico, acarretando seu desconhecimento nas mais variadas esferas da comunidade acadêmica.

Tendo em vista tal omissão e confrontando com a prática da mesma, este trabalho visa apresentar uma breve revisão histórica acerca da fundamentação do Cálculo Fracionário, bem como os próprios elementos que o compõe. Para isso, será feito, inicialmente, uma exposição de conceitos chave no desenvolvimento do Cálculo Fracionário e, em seguida, o estudo introdutório do tema propriamente dito, para ordem real.

Seguindo a construção histórica do Cálculo Diferencial e Integral, este texto tem por objetivo apresentar as definições propostas por Riemann-Liouville, Liouville, Weyl e Caputo, mostrando, num primeiro momento, como cada um destes estudiosos define as integrais de ordem arbitrária seguida das definições propostas por estes para as derivadas de ordem arbitrária. Para isso, estes escritos seguiram as luzes trazidas por [2], primeira obra brasileira sobre o tema.

O Cálculo Fracionário estende a ordem das integrais e derivadas de números inteiros para números complexos, contudo, este trabalho limitar-se-á ao estudo de integrais e derivadas de ordem real, ainda que expansão para ordem complexa é dada de forma direta.

Capítulo 1

Um pouco da história

1.1 As origens do Cálculo

A fim de iniciar a discussão acerca do tema foco deste trabalho, torna-se interessante uma breve explanação acerca da construção das ideias precursoras a este tópico, como é o caso do Cálculo de Ordem Inteira, conhecido simplesmente por Cálculo.

Como é exposto em [2], o Cálculo é um ramo da Matemática cujo objetivo é o estudo de fenômenos que envolvem movimento e variação, que estão associados aos conceitos de área e tangente. Tais conceitos relacionam-se, respectivamente, com os chamados Cálculo Integral e Cálculo Diferencial e acarretam aplicações em diversas áreas, como é o caso da Estatística, no que se refere às funções densidade de probabilidade e na Física, onde destaca-se a Mecânica Clássica e o Eletromagnetismo. Dessa forma, será apresentada de forma sucinta a construção desta teoria.

Interpretar variáveis como sendo "lados" e seus produtos como sendo "quadrados" parece-nos um tanto quanto penoso e requer um considerável nível de abstração. Contudo, esse tipo de pensamento estava arraigado à comunidade matemática por milênios, para sermos mais exatos, desde os povos da Mesopotâmia[1]. Mais a frente na história, René Descartes (a) (1596 - 1650) deixou de enxergar quantidades da forma x^2 ou x^3 como quadrados ou cubos geométricos para as interpretar como sendo grandezas, como comprimentos de segmentos de retas [11] o que possibilitou o desenvolvimento de novas áreas e

[1]Considerada o berço da civilização, a Mesopotâmia compreende um conjunto de povos que viveram nos vales dos rios Tigres e Eufrates, no que hoje corresponde ao território do Iraque e regiões adjacentes da Síria, Turquia e Irã, no período que se estende aproximadamente do ano 3500 a.C. até o começo da era cristã [11].

fundamentou os conceitos da Geometria Analítica. Entretanto, os méritos da invenção da Geometria Analítica não podem cair sobre um só homem. Na mesma época de Descartes, Pierre de Fermat (b)(1601-1665) contribuiu substancialmente para a criação desta teoria ao reconstruir a obra *Lugares Planos* de Apolônio.

Descobrindo que equações que envolvem duas variáveis descrevem uma curva no plano, calculando máximos e mínimos de curvas do tipo $y = x^n$ com $n \in \mathbb{N}$ e desenvolvendo métodos para o cálculo da tangente a uma curva polinomial, Fermat possibilitou notório avanço para a matemática da época mas, novamente, uma outra personalidade surgia para o "bem" da ciência: estamos falando de Blaise Pascal (c)(1623 - 1662). Considerado um dos fundadores da teoria da probabilidade, Pascal se destacou, também, no estudo da ciclóide, cálculo de área e volume, estando muito próximo de criar a teoria do Cálculo [11].

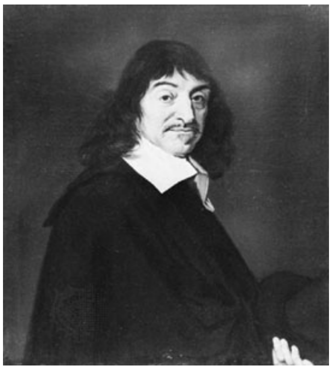

Figura 1.1: René Descartes. Fonte:https://global.britannica.com/biography/Rene-Descartes

Figura 1.2: Fermat. Fonte:http://www.ime.unicamp.br/calculo/ ambientedeensino/modulos/history/fermat/fermat.html

Figura 1.3: Blaise Pascal. Fonte:https://global.britannica.com/biography/Blaise-Pascal

Os resultados e contribuições desenvolvidas por Descartes, Fermat e Pascal se propagaram pela Europa e iluminaram inúmeros matemáticos, entre eles Isaac Barrow (1630

- 1677), que lecionava em Cambridge e deu sua contribuição no cálculo das tangentes. Barrow, em seu ofício, ensinava Isaac Newton (1642 - 1727) que, por sua vez, conseguiu expor, em uma única teoria, as relações que existem entre a caracterização da inclinação de uma reta tangente a uma curva com a área subtendida à mesma, obtida, até então pelo método da exaustão.

Paralelo a Newton, o estudo das obras de Pascal sobre influência de Barrow, levaram Gottfried Wilhem Leibiniz (1646 - 1716) a desenvolver resultados semelhantes aos de Newton, o que dividiu a comunidade acerca da "paternidade" do Cálculo. Leibiniz percebeu que encontrar a tangente de uma curva dependia das relações entre ordenadas e abscissas quando elas tornam infinitamente pequenas e que a quadratura dependia da soma de retângulos de bases infitesimalmente pequenas apoiada sobre o eixo das abscissas. Introduziu, então, a notação dy para representar a menor diferença possível entre os valores vizinhos da variável y [11].

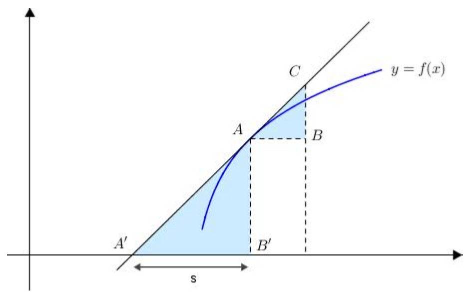

Figura 1.4: Representação geométrica da derivada de Leibniz [11] - adaptado

Leibniz considerava o triângulo ABC infinitesimalmente pequeno como uma característica da curva. Seus três lados são determinados pela semelhança com o triângulo $A'B'A$. Para Leibniz, mesmo considerando que dx e dy são quantidades infinitesimalmente pequenas, sua relação $\frac{dy}{dx}$ é um valor finito determinado, igual à razão $\frac{B'A}{A'B'}$ no triângulo característico. Isso permite estabelecer uma relação entre diferenciais: se dx é uma quantidade qualquer, a diferencial dy é definida por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{s},$$

onde y é o valor da ordenada. No decorrer da história, esta ideia foi formalizada e reescrita como:

$$\frac{dy}{dx} = lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Ainda que o mérito das descobertas acerca desta nova teoria, conhecida amplamente na atualidade, recaia em muitos momentos sobre os ombros dos grandes Leibniz e Newton, se faz necessário reconhecer o mérito de tantos outros matemáticos que, tornaram possível a obtenção de tais resultados. Personagens estes que atuam desde os primordios na construção e descoberta da Matemática.

1.2 A troca de cartas entre l'Hôspital e Leibniz

A construção das teorias que estruturam as Ciências nunca se deu de forma isolada e, não diferentemente disso, as trocas de informações e conhecimentos entre os Matemáticos do século XVII passaram a se tornar peça fundamental na construção de novas ideias. Como exemplo deste fato, podemos destacar os primeiros questionamentos partilhados entre Leibniz e Guillaume François Antonie l'Hôspital (1661 - 1704) acerca do Cálculo Fracionário.

Quase uma década após sua primeira publicação sobre o Cálculo Diferencial, em setembro de 1695, Leibniz redigiu uma carta a l'Hôspital, formulando uma questão envolvendo a generalização da derivada de ordem inteira para uma ordem, a princípio, arbitrária. l'Hôspital, por sua vez, questionou Leibniz sobre o caso particular em que a derivada fosse $\frac{1}{2}$, isto é, qual seria a interpretação da notação criada por Leibniz;

$$D^{\frac{1}{2}}f(x) = \frac{d^{\frac{1}{2}}y(x)}{dx^{\frac{1}{2}}}?$$

Em resposta a l'Hôspital, Leibniz assegurava que, para $y(x) = x$;

$$D^{\frac{1}{2}}y(x) = d^{\frac{1}{2}}x = x\sqrt{\frac{dx}{x}}.$$

Devido à resposta questionadora de l'Hôspital, tal área passou a ser popularmente conhecida como Cálculo Fracionário. Contudo, devemos nos atentar ao fato de que não estamos nos restringindo à generalização ao Conjunto dos Números Racionais, e sim, à ordem real e complexa [2].

Em outra troca de correspondências, desta vez entre Leibniz e John Wallis (1616 - 1703), o chamado produto infinito de Wallis para o número π foi discutido;

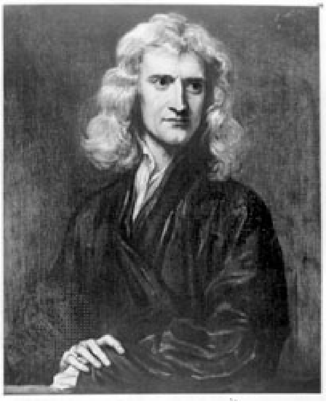

Figura 1.5: Isaac Newton. Fonte: https://global.britannica.com/biography/Isaac-Newton

Figura 1.6: Wilhelm Leibniz. Fonte: https://global.britannica.com/ biography/Gottfried-Wilhelm-Leibniz

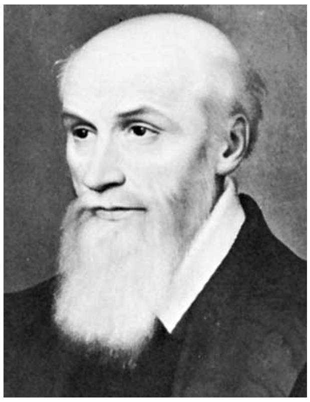

Figura 1.7: l'Hôspital Fonte:https://global.britannica.com/ biography/Michel-de-LHospital

$$2\frac{2.2.4.4.6.6.8.8...}{1.3.3.5.5.7.7...} = \pi$$

Leibniz mencionou que o Cálculo Diferencial poderia ter sido usado para obter esta equação e adotou a notação $d^{\frac{1}{2}}y$ para denotar uma derivada de ordem $\frac{1}{2}$. A partir dessa possível aplicação, o Cálculo Fracionário passou a ser objeto de interesse para vários pesquisadores, não mais havendo a exclusividade para os matemáticos [2].

1.3 A partir do século XVIII: O início de uma teoria

No século XVIII, Leonhard Euler (1707 - 1783) deu os "primeiros passos" na formulação da teoria do Cálculo Fracionário, contribuindo de forma significativa ao afirmar que: *"Quando n é um número positivo e p é uma função de x, a relação $d^n p$ por dx^2 pode ser expressa algebricamente, de forma que se $n = 2$ e $p = x^3$, então d^2x^3 por dx^2 é $6x$ por 1".* Ainda no mesmo século, Joseph Louis Lagrange (1736 - 1772) contribuiu indiretamente para o "novo ramo", a partir da chamada lei dos expoentes, na qual considera-se y como uma função de x e m e n números naturais:

$$\frac{d^m}{dx^m}\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}y.$$

A partir daí, alguns matemáticos se interessaram em saber quais restrições deveriam ser impostas para função $y = y(x)$ de modo que uma regra análoga continuasse válida para m e n arbitrários [1].

Agora um pouco mais difundido no meio matemático, o Cálculo Fracionário começa a ganhar suas primeiras definições com Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827), que definiu uma derivada de ordem arbitrária por meio de uma integral. Já Silvestre François Lacroix (1765 - 1843) fez uso da função gama para obter a fórmula da n-ésima derivada para monômios do tipo $y = x^m$, dada por:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}x^{m-n},$$

onde $m \in Z_+$ e $n \leq m$.
Substituindo n por α e m por β, temos que:

$$\frac{d^\alpha x^\beta}{dx^\alpha} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}x^{\beta-\alpha},$$

com α e β sendo números fracionários.
Observação: A função gama mencionada acima é da forma:

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty e^{-t}t^{r-1}dt,$$

com $r \in C$, $Re(r) > 0$.

Em 1822, mais uma definição é formulada. Conhecida com representação integral de Fourier generalizada, esta definição foi criada por Jean Baptista Joseph Fourier (1768 - 1830), a fim de generalizar as derivadas de ordem arbitrárias;

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\delta)d\delta \int_{-\infty}^{\infty} t^\alpha cos\left[t(x-\delta) + \frac{\alpha\pi}{2}\right] dt.$$

No ano seguinte, através do problema da tautócrona[2], Niels Henrik Abel (1802 - 1829)

[2]Este problema lida com a determinação da forma de uma curva plana, lisa, passando pela origem em

conseguiu a primeira operação fracionária propriamente dita. Abel baseou sua solução no fato de que a derivada fracionária de uma função constante não é sempre igual a zero, chamando a atenção de Joseph Liouville (1809 - 1882) que, interessado pela solução proposta por Abel, tentou elaborar uma definição lógica da derivada de ordem arbitrária expandindo funções em séries de potências e definindo a derivada de ordem n operando como se n fosse um inteiro positivo, chegando à chamada *primeira fórmula de Liouville para derivada de ordem arbitrária*;

$$D^{\alpha}f(x) = \sum_{\infty}^{k=0} c_k a_k^{\alpha} e^{a_k x}, \quad Re(a_k) > 0.$$

Contudo, esta definição se aplicava apenas a funções do tipo $f(x) = \sum_{\infty}^{k=0} c_k e^{a_k x}$, $Re(a_k) > 0$. Usando a função gama, Liouville pretendia estender sua formulação e fechar as lacunas deixadas em sua primeira definição. Assim, considerando a integral que define a função gama e operando com D^{α} sugiu a segunda definição de Liouville;

$$D^{\alpha}x^{-a} = (-1)^{\alpha}\frac{\Gamma(\alpha + a)}{\Gamma(a)}x^{-\alpha-a}.$$

Novamente, restrições apareciam e notou-se que esta definição é válida apenas para funções racionais do tipo x^{-a} com $Re(a) > 0$. Ainda sobre Lioville, podemos citá-lo como o primeiro matemático a tentar resolver equações diferenciais envolvendo operadores fracionários.

Em 1847, Georg Friedrich Bernard Riemann (1826 - 1866) também contribuiu para o Cálculo Fracionário elaborando uma definição para a derivada de ordem arbitrária usando uma generalização da série de Taylor e uma função auxiliar $\psi(x)$, dada por:

$$\frac{d^{-y}}{dx^{-y}}u(x) = \frac{1}{\Gamma(y)}\int_{c}^{x}(x-k)^{y-1}u(k)dk + \psi(x).$$

Passadas duas décadas, Anton Karl Grünwald (1838-1920) unificou os resultados de Riemann e Liouville introduzindo a ideia de derivada fracionária como o limite da soma de quocientes:

$$D^{\alpha}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}\frac{\Gamma(\alpha+1)f(x-jh)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)}.$$

um plano vertical tal que uma partícula de massa m pode cair sobre ela, sujeita à ação da gravidade, de tal forma que o tempo de descida seja o mesmo, independente da posição inicial.

A partir dos anos de 1860, o estudo do tema por meio de operadores (integrais e diferenciais) fracionários começou a crescer, envolvendo pesquisadores como Aleksey Vasilievich Letnikov (1837 - 1888), Pierre Alphonse Laurent (1813 - 1854) e Oliver Heaviside (1850-1925). Tais operadores são baseados na fórmula integral de Augustini Louis Cauchy (1789 - 1827) e Edouard Gousart (1858 - 1936) e, através destes, Nikolay Yakovlevich Sonin (1849-1915) escreveu o primeiro trabalho, que hoje chamamos de a formulação da derivada fracionária segundo Riemann-Liouville. Na segunda metade do século XIX, Heaviside publicou vários artigos que aceleraram o desenvolvimento dos operadores generalizadores, além disso, seus métodos possuíam grande aplicabilidade para resolver problemas de físico-matemática na teoria da transmissão de correntes elétricas em cabos.

Com inúmeras definições não equivalentes, as teorias envolvendo as derivadas fracionárias passaram a gerar certa descrença quanto a sua aplicabilidade. Contudo, com o desenvolvimento dos computadores, as aplicações do Cálculo Fracionário adquiriram um crescimento considerável no século XX. Passou-se, também, a considerar os operadores advindos do Cálculo Fracionário úteis em vários campos, tais como Reologia, Biologia quantitativa, Eletroquímica, Difusão, Teoria de transporte, Probabilidade, Estatística, Teoria do potencial e Elasticidade.

Apesar das inúmeras definições, a de Riemann-Liouville ainda inspirava os matemáticos do século XX. Destaca-se aqui Michele Caputo (1932), que propôs, em seu livro intitulado *Elasticità e Dissipazione*, uma nova definição de derivada de ordem arbitrária, com a qual se pôde resolver um problema de viscoelasticidade. Através de diversos resultados e potenciais aplicações, o mundo passou a tomar conhecimento da nova área e, em 1974, aconteceu a primeira conferência internacional sobre Calculo Fracionário, na Universidade de New Haven, Estados Unidos da América. Dez anos após o evento, a segunda conferência foi ralizada na Universidade de Stratchclyde, Glasgow, Escócia, seguida pela terceira conferência na Universidade de Nihon, Tóquio, Japão, no ano de 1989 [9] e, desde então, o campo desenvolveu-se intensivamente, principalmente no que se refere à quantidade de livros, artigos e teses dedicadas exclusivamente ao tema.

Por fim, no Século XXI, o Cálculo Fracionário passou a ganhar as páginas de inúmeros livros, artigos e trabalhos ao redor do mundo. Como é citado em [2], o Cálculo Fracionário passa a ser apresentado em funções de uma e várias variáveis reais e torna-se presente em áreas da Matemática Pura e Aplicada, além de relacionar integrais fracionárias com o estudo de potenciais, problemas que surgem em mecânica, teoria de difração e outras áreas da Física-Matemática.

Já difundido no meio matemático, a já não tão nova teoria desponta, também, no Brasil através, principalmente, dos estados do Paraná, Rio de Janeiro, Santa Catarina e São Paulo. Nestes estados, os trabalhos elaborados acerca do tema geram títulos a novos mestres e doutores promovendo e incentivando o estudo do tema em nossa comunidade. Quanto aos trabalhos propriamente ditos, podemos destacar [1] e os trabalhos elaborados na Universidade Estadual de Campinas [3], [5], [13], [16]. De modo especial enaltecemos a obra [2] - primeiro livro brasileiro a se dedicar exclusivamente ao tema, que serve como embasamento teórico para a escrita deste trabalho.

Capítulo 2

Conceitos Preliminares

2.1 Função gama

A função gama, denotada por Γ, é uma função que, em certo sentido, estende a noção de fatorial para os números reais.

Observemos, inicialmente, que

$$\int_0^\infty e^{-t}t^n dt = n!,$$

para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. De fato, por integração por partes, temos que

$$\int_0^\infty e^{-t}t^n dt = -t^n e^{-t}\Big|_0^\infty + n\int_0^\infty e^{-t}t^{n-1}dt.$$

Note que

$$-t^n e^{-t}\Big|_0^\infty = -\lim_{t\to\infty} t^n e^{-t} + (0)^n e^0 = -\lim_{t\to\infty} t^n e^{-t} = -\lim_{t\to\infty} \frac{t^n}{e^t}.$$

Logo, pelo Teorema de *l'Hospital* [6], segue que

$$\lim_{t\to\infty} t^n e^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{d^n}{dt^n}t^n}{\frac{d^n}{dt^n}e^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{n!}{e^t} = 0.$$

Portanto,

$$\int_0^\infty e^{-t}t^n dt = n\int_0^\infty e^{-t}t^{n-1}dt.$$

Inicialmente, consideremos a função gama sobre os números reais positivos, definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Gamma\colon (0,\infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \end{aligned}$$

O domínio de Γ se restringe aos reais positivos devido à convergência da expressão $\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ nesse conjunto e à divergência em seu complementar.

Lema 2.1.1. *A integral imprópria* $\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ *converge se* $x > 0$ *e diverge se* $x \leq 0$.

Demonstração. Temos que

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt = \int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt + \int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt.$$

Do fato de que $\lim_{t\to\infty} \frac{t^{x+1}}{e^x} = 0$ pode-se concluir que existe $a > 0$ tal que $t > a$ implica $\frac{t^{x+1}}{e^t} \leq 1$, e portanto, $e^{-t}t^{x-1} \leq t^{-2}$, para todo t suficientemente grande. Como $\int_1^\infty t^{-2}dt$ converge, então concluímos que a integral imprópria $\int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ converge para qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, temos que a função $f(t) = e^{-t}$ é contínua em $[0,1]$ e, além disso, $\frac{1}{e} \leq e^{-t} \leq 1$ para todo $t \in [0,1]$. Logo, a convergência de $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$ depende apenas de t^{x-1}.

i) Para $x > 0$ temos que

$$\int_0^1 t^{x-1}dt = \left.\frac{t^x}{x}\right|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{x} < \infty.$$

ii) Para $x = 0$ temos que

$$\int_0^1 t^{x-1}dt = \int_0^1 t^{-1}dt = ln|t||_{t=0}^{t=1} = -\lim_{t\to 0} ln|t| = \infty.$$

iii) Para $x < 0$, temos que

$$\int_0^1 t^{x-1}dt = \left.\frac{t^x}{x}\right|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{x} - \lim_{t\to 0^+} \frac{t^x}{x} = \infty.$$

Portanto, concluímos que que $\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ converge se $x > 0$ e diverge se $x \leq 0$.

$\square$

Observe que a função Γ definida acima satisfaz $\Gamma(n) = (n-1)!$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 2.1.2. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ $\forall x \in (0, \infty)$.

Demonstração. Por integração por partes, obtemos que

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt = lim_{t\to\infty}(-e^{-t}t^x) + \int_0^\infty e^{-t}xt^{x-1}dt = x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt = x\Gamma(x).$$

$\square$

Utilizamos a proposição acima para estender o domínio da função gama, da seguinte forma:

- Primeiramente, estendemos a função Γ para o intevalo $(-1, 0)$. Para $x \in (-1, 0)$, definimos $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$. Observe que, se $x \in (-1, 0)$ então $x+1 \in (0, 1)$ e, portanto, $\Gamma(x+1)$ está bem definida. Além disso, $\Gamma(x) < 0$ para $x \in (-1, 0)$. Temos, também, que
$$\lim_{x\to 0^-} \Gamma(x) = \lim_{x\to -1^+} \Gamma(x) = -\infty.$$

- Após o passo anterior, estendemos, de maneira análoga, a função gamma para $x \in (-2, -1)$ definindo $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$. Observe que, nesse caso, $x + 1 \in (-1, 0)$ e $\Gamma(x) > 0$. Além disso,
$$\lim_{x\to -1^-} \Gamma(x) = \lim_{x\to -2^+} \Gamma(x) = +\infty.$$

- Consideremos, agora, que já estendemos a função gama ao intervalo $(z, z+1)$, para $z \in \mathbb{Z}_-^*$. Então, definimos a função gama para $x \in (z-1, z)$ por $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$.

Assim, construímos a extensão da função gama, ainda denotada por Γ, definida no conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Z}_-$, cujo esboço gráfico é representado abaixo:

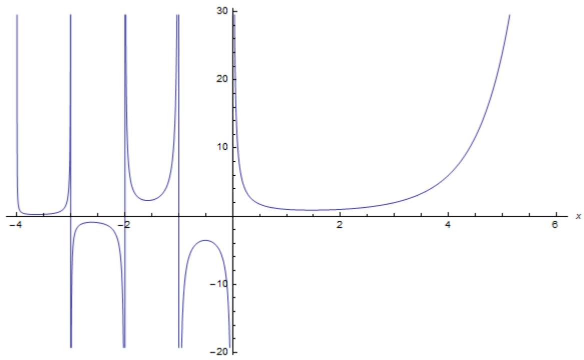

Figura 2.1: Esboço do gráfico da função gama

2.2 Função beta

A função beta, denotada por $B(z,\xi)$, será definida para $z > 0$ e $\xi > 0$ a partir da integral conhecida como integral euleriana de primeira espécie, dada por

$$\begin{array}{rccc} B: & \mathbb{R}_+^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & & \\ & (z,\xi) & \mapsto & \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\xi-1}dt \end{array}.$$

Lema 2.2.1. *A integral definida* $\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\xi-1}dt$ *converge para* $z > 0$ *e* $\xi > 0$.

Demonstração. No caso particular em que $z = \xi = 1$, é direto que

$$t^{z-1}(1-t)^{\xi-1} = t^0(1-t)^0 = 1, \quad \text{para } 0 < t < 1.$$

Caso contrário, isto é, $z, \xi > 0$, $z \neq 1$ e $\xi \neq 1$, podemos analisar a convergência de cada função componente do produto presente no integrando da função beta, como se segue:

$$\int_0^1 t^{z-1}dt = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 t^{z-1}dt = \lim_{a\to 0^+}\left(\frac{t^z}{z}\right)\Bigg|_{t=a}^{t=1} = \frac{1}{z} - \lim_{a\to 0^+}\left(\frac{a^z}{z}\right) = \frac{1}{z}$$

e

$$\int_0^1 (1-t)^{\xi-1}dt = \lim_{b\to 1^-}\int_0^b (1-t)^{\xi-1}dt = \lim_{b\to 1^-}\left(-\frac{(1-t)^\xi}{\xi}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=b} = -\lim_{b\to 1^-}\left(\frac{(1-b)^\xi}{\xi}\right) + \frac{1}{\xi} = \frac{1}{\xi}$$

Portanto, a função beta converge para valores de z e ξ positivos.

□

Proposição 2.2.2. *As funções gama e beta se relacionam respeitando a igualdade*

$$B(z,\xi) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\xi)}{\Gamma(\xi+z)}. \tag{2.1}$$

Demonstração. Tomemos o produto

$$\Gamma(z)\Gamma(\xi) = \int_0^\infty e^{-u}u^{z-1}du \int_0^\infty e^{-v}v^{\xi-1}dv = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u+v)}u^{z-1}v^{\xi-1}dudv$$

Fazendo $u = x^2$ e $v = y^2$, obtemos que $du = 2xdx$ e $dv = 2ydy$. Assim, podemos escrever

$$\Gamma(z)\Gamma(\xi) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}x^{2(z-1)}v^{2(\xi-1)}4(xy)dxdy =$$

$$= 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}x^{2z-1}v^{2\xi-1}dxdy.$$

Através de uma nova mudança de variáveis, fazendo $x = rcos\theta$ e $y = rsen\theta$, temos

$$\Gamma(z)\Gamma(\xi) = 4\int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2(cos^2\theta+sen^2\theta)}(rcos\theta)^{2z-1}(rsen\theta)^{2\xi-1}rd\theta dr =$$

$$= 4\int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}r^{2z+2\xi-1}\left(cos^{2z-1}\theta\right)\left(sen^{2\xi-1}\theta\right)d\theta dr.$$

Como $e^{-r^2}r^{2z+2\xi-1}$ é constante com respeito a θ, podemos reescrever a expressão acima como

$$\Gamma(z)\Gamma(\xi) = \left(2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2z+2\xi-1}dr\right)\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(cos^{2z-1}\theta\right)\left(sen^{2\xi-1}\theta\right)d\theta\right). \tag{2.2}$$

Fazendo $t = r^2$, podemos escrever

$$2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2z+2\xi-1}dr = 2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(z+\xi-1)}rdr = \frac{2}{2}\int_0^\infty e^{-t}t^{(z+\xi)-1}dr = \Gamma(z+\xi).$$

Por outro lado, observemos que o segundo fator no segundo membro de (2.2) pode ser reescrito da seguinta forma:

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(cos^{2z-1}\theta\right)\left(sen^{2\xi-1}\theta\right) d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(cos^{2(z-1)}\theta\right)\left(sen^{2(\xi-1)}\theta\right) cos\theta sen\theta d\theta =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - sen^2\theta\right)^{(z-1)} \left(sen^2\theta\right)^{(\xi-1)} cos\theta sen\theta d\theta$$

Tomando $s = sen^2\theta$ e, consequentemente, $ds = 2sen\theta\cos\theta$, a expressão acima fica

$$\frac{2}{2}\int_0^1 (1-s)^{z-1}s^{\xi-1}ds = B(\xi, s).$$

Note, agora, que a substituição de s por $s-1$ não surte efeito na integral acima, isto é,

$$B(\xi, s) = B(s, \xi).$$

Assim, substituindo as identidades encontradas acima em (2.2), obtemos a relação desejada,

$$\Gamma(z)\Gamma(\xi) = B(\xi, s)\Gamma(z+\xi).$$

□

2.3 Função de Gel'fand-Shilov

A seguir apresentaremos a função de Gel'fand-Shilov que desenvolve papel de notório destaque na fundamentação do Cálculo ordem arbitrária devido à sua atuação nos operadores integrais de ordem inteira apresentados mais a frente neste texto.

Definição 2.3.1. Seja $v \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}_-$. Define-se a função de Gel'fand-Shilov, denotada por ϕ_v, por

$$\phi_v(t) := \begin{cases} \dfrac{t^{v-1}}{\Gamma(v)}, & se\ t \geq 0 \\ \\ 0, & se\ t < 0 \end{cases}.$$

Note que, no caso particular em que $v = n \in N$, obtemos

$$\phi_n(t) := \begin{cases} \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}, & se\ t \geq 0 \\ \\ 0, & se\ t < 0 \end{cases}.$$

2.4 Produto de convolução de Laplace

Assim como a função de Gel'fand-Shilov, o produto de convolução de Laplace desempenha um papel fundamental na estruturação teórica do tema abordado neste trabalho. Mais a frente neste texto, o produto de convolução de Laplace estará presente diretamente nas definições propostas de derivadas e integrais fracionárias no sentido de Riemann-Liouville e suas vertentes.

Definição 2.4.1. Sejam f e g funções contínuas por partes no intervalo $[0, \infty)$. Chamaremos de *produto de convolução de Laplace* a expressão:

$$f(t) * g(t) := \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

A igualdade acima se dá através da mudança de variável; $\gamma = t - \tau$.

2.5 O espaço L_p

Nesta sessão, apresentaremos, de forma sucinta, alguns conceitos importantes que permeiam o Cálculo Fracionário, no que se refere a resultados que serão apresentados neste trabalho. Aquém ao escobo deste texto, os tópicos apresentados nesta seção se encontram em uma estruturação e exposição mais detalhada em [8] ou [12]. Portanto, a seguir serão expostas algumas definições com o intuito único de contextualizar os resultados a serem apresentados posteriormente.

Definição 2.5.1 (σ-álgebra)**.** Seja X um conjunto. Uma σ-álgebra em X é uma coleção χ de subconjuntos de X que satisfaz as seguintes condições:

(i) $\emptyset$, $X \in \chi$;

(ii) $A \in \chi \Rightarrow A^c = X \backslash A \in \chi$;

(iii) Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de elementos de χ então

$$\bigcup_{n\,\in\,\mathbb{N}} A_n \in \chi.$$

Como exemplo temos que o conjunto das partes de um conjunto X é uma σ-álgebra em X.

Definição 2.5.2. Sejam X um conjunto e χ uma σ-álgebra em X. Um espaço mensurável é um par (X, χ) onde os elementos de χ são chamados de conjuntos χ-mensuráveis.

Definição 2.5.3 (Funções Mensuráveis)**.** Sejam X um conjunto qualquer e χ uma σ-álgebra de X. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é χ-mensurável se, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in X; f(x) > \alpha\}$ é um elemento de χ.

Se $A = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \chi$ então $B = \{x \in X; f(x) \leq \alpha\} \in \chi$, pois, χ é σ-álgebra. Podemos ainda perceber que, segundo as definições de σ-álgebra, os conjuntos $C = \{x \in X; f(x) < \alpha\}$ e $D = \{x \in X; f(x) \geq \alpha\}$ são elementos do conjunto χ.

Exemplo 2.5.1. Funções $f : X \to \mathbb{R}$ constantes são mensuráveis. Se f é constante, digamos $f(x) = c$, $\forall\ x \in X$, então

$$\{x \in X; f(x) > \alpha\} = \begin{cases} X & se\ \alpha < c \\ \emptyset & se\ \alpha \geq c \end{cases}.$$

Exemplo 2.5.2. Considere $E \in \chi$ um conjunto mensurável. A função $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in E \\ 0, & se\ x\ \notin E \end{cases}$$

é mensurável.

De fato, para o caso em que $\alpha < 0$ e $X \in \chi$, então $\{x \in X; \chi_E(x) > \alpha\} = X$. Se $0 \leq \alpha < 1$ tem-se que $\{x \in X; \chi_E(x) > \alpha\} = E$ e, caso $\alpha \geq 1$, então $\{x \in X; f(x) > \alpha\} = \emptyset$. Segue, portanto que χ_E é mensurável. A função χ_E é também conhecida por função característica.

Segundo [12], é possível mostrar que o conjunto $M(X, \chi)$ das funções reais $\chi-$mensuráveis munido das operações usuais de soma e produto por escalar formam um espaço vetorial, além disso, dadas duas funções $f, g \in M(X, \chi)$ e uma escalar $c \in \mathbb{R}$, as funções:

(i) cf;

(ii) $f+g$;

(iii) fg;

(iv) $|f|$,

são funções mensuráveis.

Definição 2.5.4 (Medida)**.** Uma medida (σ-aditiva) é uma função μ definida em uma σ-álgebra χ de um conjunto X e que toma valores em $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$, tal que:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) $\mu(E) \geq 0, \quad \forall E \in \chi$;

(iii) Se $(E_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \chi$ é uma sequência de conjuntos disjuntos entre si, então

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(E_i)$$

Definição 2.5.5 (Espaço de medida)**.** Um espaço de medida é uma tripla (X, χ, μ) consistindo de um conjunto X, uma σ-álgebra χ em X e uma medida μ definida em χ.

Antes de prosseguirmos, definamos as funções denotadas por f^+ e f^-, denominadas parte positiva e negativa, respectivamente, de f, como é exposto abaixo:

$$\begin{array}{rccl} f^+: & X & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & max\{f(x), 0\} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccl} f^-: & X & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & max\{-f(x), 0\} \end{array}.$$

Uma vez definido um espaço de medida, denotemos o conjunto de todas as funções $\chi-$mensuráveis por $M = M(X, \chi)$ e o conjunto de todas as funções $\chi-$mensuráveis não negativas por $M^+ = M^+(X, \chi)$. Se $f \in M$, então sua parte positiva f^+ e sua parte negativa f^- estão em M^+, de forma a estar bem definidos os números

$$\int f^+ d\mu \quad e \quad \int f^- d\mu.$$

Definição 2.5.6. O conjunto de todas as funções mensuráveis $f \in M(X, \chi)$, tais que a suas partes positiva e negativa possuem integral finita é o conjunto $L = L(X, \chi, \mu)$ das funções integráveis a Lebesgue com respeito a medida μ.

No caso em que $f \in L$, sua integral com respeito à medida μ é definida por

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

onde f^+ e f^- denota a parte positiva e negativa de f, respetivamente. Se $E \in \chi$, definamos a integral de f sobre E com respeito à medida μ por

$$\int_E f d\mu = \int f \chi_E d\mu = \int f^+ \chi_E d\mu - \int f^- \chi_E d\mu.$$

Proposição 2.5.1. *Seja $f \in M$. Então $f \in L$, ou seja, f é integrável se, e somente se, $|f|$ é integrável. Nesse caso, tem-se que*

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

Demonstração. Sabe-se que $|f| = f^+ + f^-$, assim, é imediato notar que f é integrável se, e somente se, $|f|$ é integrável. Pela definição anterior temos que, se $f \in L$ então f^+ e f^- pertencem a M^+ e têm integral finita, dessa forma,

$$\left| \int f d\mu \right| = \left| \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right| \leq \left| \int f^+ d\mu \right| + \left| \int f^- d\mu \right| = \int |f| d\mu.$$

□

Definição 2.5.7. Seja $1 \leq p < \infty$. O espaço $L_p = L_p(X, \chi, \mu)$ consiste em todas as classes de equivalência das funções mensuráveis $f \in M(X, \chi)$ tais que

$$\int_X |f|^p d\mu$$

converge.

Capítulo 3

Integrais e Derivadas de Ordem Real

Neste capítulo, trataremos das definições das integrais e das derivadas de ordem real - no sentido de Riemann-Liouville, Liouville, Weyl e Caputo, bem como algumas de suas propriedades. Para isso, usaremos a função gama, a função de Gel'fand-Shilov e o produto de convolução de Laplace, tratados no capítulo anterior.

No translado histórico do desenvolvimento do cálculo para o ensino deste ramo nas salas de aula, nota-se a inversão da ordem na exposição de suas componentes. Como de costume, a abordagem das integrais sempre se dá de forma mais tardia comparada às derivadas. Neste capítulo, entretanto, sob as luzes da história, serão apresentados primeiramente os conceitos das integrais e em seguida serão introduzidos os conceitos das derivadadas.

3.1 Integral de ordem inteira

Segundo [2], define-se a integral de ordem inteira de uma função f definida em no intervalo $[0, t]$ através do operador I como se segue:

$$If(t) = \int_0^t f(t_1)dt_1.$$

Repetindo de forma sistemática essa aplicação, encontramos:

$$I^2 f(t) = I[If(t)] = \int_0^t \int_0^{t_1} f(t_2)dt_2dt_1,$$

$$I^3 f(t) = I[I^2 f(t)] = \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} f(t_3) dt_3 dt_2 dt_1.$$

Assim, a integral de ordem n, em que n é um número inteiro positivo, pode ser definida a partir da expressão

$$I^n f(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \cdots \int_0^{t_{n-2}} \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n dt_{n-1} \cdots dt_3 dt_2 dt_1.$$

Sob esta formulação, ressaltamos que, apesar da nomenclatura de integrais de ordem interia, n é um número inteiro positivo.

Teorema 3.1.1. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uma função integrável e $\phi_n(t)$ a função de Gel'fand Shilov, então;*

$$I^n f(t) = \phi_n(t) * f(t) := \int_0^t \phi_n(t-\tau) f(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau.$$

Demonstração. A demonstração se dará por indução em n.

Para $n = 1$ tem-se;

$$If(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{1-1}}{(1-1)!} f(\tau) d\tau = \phi_1(t) * f(t).$$

Suponhamos que vale $I^n f(t) = \phi_n(t) * f(t)$. Dessa forma,

$$I^{n+1} f(t) = I[I^n f(t)] = I[\phi_n(t) * f(t)] =$$

$$= \int_0^t \phi_n(u) * f(u) du = \int_0^t \int_0^u \frac{(u-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau du$$

Pelo Teorema de Fubini [7] , trocaremos a ordem de integração, logo;

$$I^{n+1} f(t) = \int_0^t \left[\int_\tau^t \frac{(u-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) du \right] d\tau = \int_0^t \frac{f(\tau)}{(n-1)!} \left[\int_\tau^t (u-\tau)^{n-1} du \right] d\tau =$$

$$\int_0^t \frac{f(\tau)}{(n-1)!} \left(\frac{(u-\tau)^n}{n}\right)\Bigg|_{u=\tau}^t d\tau = \int_0^t \frac{f(\tau)(t-\tau)^n}{n(n-1)!} d\tau \int_0^t \frac{(t-\tau)^n}{n!} f(\tau)d\tau = \phi_{n+1}(t) * f(t).$$

$\square$

Exemplo 3.1.1. Considerando $f(t) = t^2$, calculemos a integral de ordem 3 de $f(t)$.

$$I^3 f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{3-1}}{(3-1)!}\tau^2 d\tau = \int_0^t \frac{(t-\tau)^2}{2!}\tau^2 d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t (t^2 - 2t\tau + \tau^2)\tau^2 d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^t t^2\tau^2 d\tau - 2\int_0^t t\tau^3 d\tau + \int_0^t \tau^4 d\tau\right] =$$

$$= \frac{t^5}{2\cdot 3} - \frac{t^5}{4} + \frac{t^5}{2\cdot 5} = \frac{t^5}{60}.$$

Exemplo 3.1.2. Considerando $g(t) = sen(t)$, calculemos a integral de ordem 2 de $g(t)$.

$$I^2 g(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{2-1}}{(2-1)!} sen(\tau) d\tau = \int_0^t (t-\tau) sen(\tau) d\tau =$$

$$= \int_0^t t sen(\tau) d\tau - \int_0^t \tau sen(\tau) d\tau = -t cos(\tau)|_{\tau=0}^{\tau=t} - -\tau cos(\tau) + sen(\tau)|_{\tau=0}^{\tau=t} =$$

$$= -t cos(t) + t - [-t cos(t) + sen(t)] = t - sen(t).$$

3.2 Derivada de ordem inteira

Nesta seção será apresentada a definição da derivada de uma função real de ordem inteira cujo estudo mais aprofundado é apresentado em [6], de igual forma à trazida nos cursos de Cálculo tradicionais.

Definição 3.2.1. Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. O limite

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

quando existe e é finito, denomina-se derivada de f em p e indica-se por $f'(p)$. Assim

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p},$$

se o limite existir. Se f admite derivada em p, então diremos que f é derivável em p.

Seja uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e o conjunto $A = \{x \in D; \exists f'(x)\}$. A função $f' : A \to \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto f'(x)$, denomina-se derivada de 1ª ordem de f, também indicada por $f^{(1)}$. De maneira análoga, a derivada de 1ª ordem de f' denomina-se derivada de 2ª ordem de f e é indicada por $f^{(2)}$. Dessa forma, definem-se as derivadas de ordens superiores a 2 de f: a derivada de ordem n de f, denotada por $f^{(n)}$, é a derivada de 1ª ordem da derivada de ordem $(n-1)$ de f, isto é, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$, para $n > 1$. Sob esta formulação, ressaltamos que, apesar da nomenclatura de derivadas de ordem interia, n é um número inteiro não negativo.

3.3 Integrais fracionárias de Riemann-Liouville

Nesta seção, serão apresentadas as integrais fracionárias no sentido de Riemann-Liouville em intervalos limitados do eixo real. Para isto tomemos, inicialmente, o espaço de funções contínuas e contínuas por partes e definamos tais operadores.

Definição 3.3.1. Integral de Riemman-Liouville em intervalos limitados.

Seja $\Omega = [a, b]$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$ um intervalo limitado no eixo real $\mathbb{R}$. As integrais de ordens reais de Riemann-Liouville, denotadas por,

$$(I^{\alpha}_{a+} f)(x) \equiv \; {}_a I^{\alpha}_x f(x),$$

$$(I^{\alpha}_{b-} f)(x) \equiv \; {}_x I^{\alpha}_b f(x),$$

ambas de ordem $\alpha \in \mathbb{R}^+$ são definidas da seguinte forma:

$$(I^{\alpha}_{a+} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \qquad x > a, \tag{3.1}$$

e

$$(I^{\alpha}_{b-}f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, \qquad x<b. \tag{3.2}$$

A integral (3.1) é chamada de integral fracionária de Riemann-Liouville à esquerda, enquanto (3.2) é a integral fracionária de Riemann-Liouville à direita.

Se tomarmos $\alpha = n \in \mathbb{N}$, as definições apresentadas em (3.1) e (3.2) coincidem com as n-ésimas integrais da forma

$$(I^n_{a+}f)(x) := \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \cdots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)dt$$

e

$$(I^n_{b-}f)(x) := \int_x^b dt_1 \int_{t_1}^b dt_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^{t_b} f(t_n)dt_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_x^b (t-x)^{n-1}f(t)dt.$$

Assim como no cálculo diferencial e integral convencional, podemos pensar em encontrar expressões que representem as integrais fracionárias no sentido de Riemann-Liouville de polinômios, em particular, a seguir será mostrada a expressão que resulta da integração de ordem real de um monômio de grau k natural;

Proposição 3.3.1. *Integral de ordem real de um monômio.*

Seja $f(x) = x^k$, com $k \in \mathbb{N} - \{1\}$, então,

$$(I^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{a^k}{\alpha}(x-a)^{\alpha} + \sum_{n=1}^{k-1}\frac{k!}{(k-n)!}\cdot\frac{a^{k-n}(x-a)^{\alpha+n}}{\prod_{i=0}^{n}(\alpha+i)} + k!\frac{(x-a)^{\alpha+k}}{\prod_{i=0}^{n+1}(\alpha+i)}\right] \tag{3.3}$$

e

$$(I^{\alpha}_{b-}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{b^k}{\alpha}(x-b)^{\alpha} + \sum_{n=1}^{k-1}\frac{(-1)^{k-1}k!}{(k-n)!}\cdot\frac{a^{k-n}(x-a)^{\alpha+n}}{\prod_{i=0}^{n}(\alpha+i)} - k!\frac{(x-a)^{\alpha+k}}{\prod_{i=0}^{n+1}(\alpha+i)}\right]. \tag{3.4}$$

Demonstração. Provemos esta afirmação por indução em k. Dessa forma, para $k=2$, temos que,

$$(I_{a+}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{t^2}{(x-t)^{1-\alpha}}dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\lim_{c_1\to x^-}\int_a^{c_1} t^2(x-t)^{\alpha-1}dt\right] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\lim_{c_1\to x^-}\int_a^{c_1} t^2(x-t)^{\alpha-1}dt\right] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\lim_{c_1\to x^-}\left(-\frac{t^2(x-t)^{\alpha}}{\alpha}\Bigg|_{t=a}^{c_1}\right) + \frac{2}{\alpha}\lim_{c_1\to x^-}\int_a^{c_1} t(x-t)^{\alpha}dt\right] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{a^2(x-a)^{\alpha}}{\alpha} + \frac{2}{\alpha}\lim_{c_1\to x^-}\int_a^{c_1} t(x-t)^{\alpha}dt\right] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{a^2(x-a)^{\alpha}}{\alpha} + \frac{2}{\alpha(\alpha+1)}\left(\lim_{c_1\to x^-} t(x-t)^{\alpha+1}\Big|_{t=a}^{c_1} + \lim_{c_1\to x^-}\int_a^{c_1}(x-t)^{\alpha+1}dt\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{a^2(x-a)^{\alpha}}{\alpha} + \frac{2}{\alpha(\alpha+1)}\left(a(x-a)^{\alpha+1} + \frac{1}{(\alpha+2)}\lim_{c_1\to x^-} -(x-t)^{\alpha+2}\Bigg|_{t=a}^{c_1}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{a^2}{\alpha}(x-a)^{\alpha} + \frac{2}{\alpha(\alpha+1)}a(x-a)^{\alpha+1} + \frac{2}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}(x-a)^{\alpha+2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{a^2}{\alpha}(x-a)^{\alpha} + \sum_{n=1}^{2-1}\frac{2!}{(1-1)!}\cdot\frac{a^{2-1}(x-a)^{\alpha+1}}{\prod_{i=0}^{1}(\alpha+i)} + 2!\frac{(x-a)^{\alpha+2}}{\prod_{i=0}^{1+1}(\alpha+i)}\right].$$

De forma análoga é valida a expressão supracitada para os casos em que $k = 3$ e $k = 4$, os quais serão omitidos neste trabalho. Assumindo que esta propriedade seja válida para todo natural maior que 2 e menor que k, temos que, para $f(x) = x^k$,

$$(I_{a+}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{t^k}{(x-t)^{1-\alpha}}dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\lim_{c_k\to x}\int_a^{c_k} t^k(x-t)^{\alpha-1}dt\right] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\lim_{c_k\to x}\left(-\frac{t^k(x-t)^{\alpha}}{\alpha}\Bigg|_{t=a}^{c_k}\right) + \frac{k}{\alpha}\lim_{c_k\to x}\int_a^{c_k} t^{k-1}(x-t)^{\alpha}dt\right] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{a^k(x-a)^\alpha}{\alpha}\right) + \frac{k}{\alpha\Gamma(\alpha)}\left[\lim_{c_k\to x}\int_a^{c_k} t^{k-1}(x-t)^\alpha dt\right].$$

Fazendo $\alpha = \beta - 1$, podemos reescrever a expressão acima como

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{a^k(x-a)^\alpha}{\alpha}\right) + \frac{k}{\Gamma(\beta)}\left[\lim_{c_k\to x}\int_a^{c_k} t^{k-1}(x-t)^{\beta-1} dt\right] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{a^k(x-a)^\alpha}{\alpha}\right) + k\left[\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^{x} t^{k-1}(x-t)^{\beta-1} dt\right] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{a^k(x-a)^\alpha}{\alpha}\right) + k(I^\beta_{a+}t^{k-1})(x).$$

Pela hipótese de indução temos que

$$(I^\beta_{a+}t^{k-1})(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\left[\frac{a^{k-1}}{\beta}(x-a)^\beta + \sum_{n=1}^{k-2}\frac{(k-1)!}{(k-1-n)!}\cdot\frac{a^{k-1-n}(x-a)^{\beta+n}}{\prod_{i=0}^{n}(\alpha+i)} + (k-1)!\frac{(x-a)^{\beta+k-1}}{\prod_{i=0}^{n+1}(\beta+i)}\right]$$

e, dessa forma,

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{a^k(x-a)^\alpha}{\alpha}\right) + k(I^\beta_{a+}t^{k-1})(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{a^k(x-a)^\alpha}{\alpha}\right) +$$

$$+\frac{k}{\Gamma(\beta)}\left[\frac{a^{k-1}}{\beta}(x-a)^\beta + \sum_{n=1}^{k-2}\frac{(k-1)!}{(k-1-n)!}\cdot\frac{a^{k-1-n}(x-a)^{\beta+n}}{\prod_{i=0}^{n}(\beta+i)} + (k-1)!\frac{(x-a)^{\beta+k-1}}{\prod_{i=0}^{n+1}(\beta+i)}\right] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{a^k(x-a)^\alpha}{\alpha}\right) + \frac{k}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\frac{a^{k-1}}{\alpha+1}(x-a)^{\alpha+1} +\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{k-2}\frac{(k-1)!}{(k-1-n)!}\cdot\frac{a^{k-1-n}(x-a)^{\alpha+1+n}}{\prod_{i=0}^{n}(\alpha+i+1)} + (k-1)!\frac{(x-a)^{\alpha+k}}{\prod_{i=0}^{n}(\alpha+i+1)}\right] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{a^k(x-a)^\alpha}{\alpha} + k\frac{a^{k-1}}{\alpha(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha+1} +\right.$$

$$+\sum_{n=1}^{k-2}\frac{k!}{(k-1-n)!}\cdot\frac{a^{k-1-n}(x-a)^{\alpha+n+1}}{\prod_{i=0}^{n}(\alpha+i)}+k!\frac{(x-a)^{\alpha+k}}{\prod_{i=0}^{n}(\alpha+i)}\Bigg]=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{a^k(x-a)^\alpha}{\alpha}+\sum_{n=1}^{k-1}\frac{k!}{(k-n)!}\cdot\frac{a^{k-n}(x-a)^{\alpha+n}}{\prod_{i=0}^{n}(\alpha+i)}+k!\frac{(x-a)^{\alpha+k}}{\prod_{i=0}^{n+1}(\alpha+i)}\right].$$

De forma similar prova-se a igualdade exposta para (3.4).

□

No caso particular em que $k=1$ a expressão (3.3) e (3.4) se dá de forma direta e é expressa por:

$$(I_{a+}^{\alpha}t)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{a}{\alpha}(x-a)^\alpha+\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}\right]$$

e

$$(I_{b-}^{\alpha}t)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{b}{\alpha}(b-x)^\alpha-\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}\right].$$

Demonstraremos agora que a integração de ordem generalizada no sentido de Riemann-Liouville de funções potências $(x-a)^{\beta-1}$ e $(b-x)^{\beta-1}$ resulta em uma funções potências.

Propriedade 3.3.2. *Sejam α,β números reais positivos não nulos, então*

$$\left(I_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\beta+\alpha-1} \tag{3.5}$$

e

$$\left(I_{b^-}^{\alpha}(b-t)^{\beta-1}\right)(x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(b-x)^{\beta+\alpha-1} \tag{3.6}$$

Demonstração. Inicialmente provemos a validade da equação (3.5), como se segue;

$$\left(I_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{(t-a)^{\beta-1}}{(x-t)^{1-\alpha}}dt=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(t-a)^{\beta-1}(x-t)^{\alpha-1}dt$$

Fazendo $t=(x-a)\xi+a$ e, consequentemente $dt=(x-a)d\xi$, segue que,

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(t-a)^{\beta-1}(x-t)^{\alpha-1}dt=$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left((x-a)\xi + a - a\right)^{\beta-1} \left(x - (x-a)\xi + a\right)^{\alpha-1} (x-a)d\xi =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left((x-a)\xi\right)^{\beta-1} \left((x-a)(1-\xi)\right)^{\alpha-1} (x-a)d\xi =$$

$$= \frac{(x-a)^{\beta-1+\alpha-1+1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \xi^{\beta-1}(1-\xi)^{\alpha-1}d\xi = \frac{(x-a)^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \xi^{\beta-1}(1-\xi)^{\alpha-1}d\xi =$$

$$= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta,\alpha).$$

Através da relação existente entre as funções gama e beta, segue o resultado desejado;

$$\left(I_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{(x-a)^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta,\alpha) = \frac{(x-a)^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)} =$$

$$= (x-a)^{\beta+\alpha-1} \cdot \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Para a prova da equação 5.4, seguiremos uma ideia semelhante à anterior:

$$\left(I_{b^-}^{\alpha}(b-t)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (b-t)^{\beta-1}(t-x)^{\alpha-1}dt.$$

Fazendo $t = b - (b-x)\psi$ e, consequentemente $dt = -(b-x)d\psi$, segue que,

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (b-t)^{\beta-1}(t-x)^{\alpha-1}dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^0 (b - b + (b-x)\psi)^{\beta-1}(b - (b-x)\psi - x)^{\alpha-1}(-(b-x))d\psi =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^0 ((b-x)\psi)^{\beta-1}((b-x)(1-\psi))^{\alpha-1}(b-x)d\psi =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 ((b-x)\psi)^{\beta-1}((b-x)(1-\psi))^{\alpha-1}(b-x)d\psi =$$

$$= \frac{(b-x)^{\beta-1+\alpha-1+1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \psi^{\beta-1}(1-\psi)^{\alpha-1} d\psi = \frac{(b-x)^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta,\alpha) =$$

$$= \frac{(b-x)^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha)} = (b-x)^{\beta+\alpha-1} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}.$$

□

Por fim, apresentaremos nesta sessão mais um resultado exposto em [17] como corolário do teorema 3.5. Nesta obra a demonstração se limita a um caso mais simples devido, segundo o autor, à necessidade de métodos refinados que fogem do escobo destes trabalhos.

Lema 3.3.3. *Integração por partes*

Sejam $\alpha > 0$, $p \geq 1$, $q \geq 1$ e $\left(\frac{1}{p}\right) + \left(\frac{1}{q}\right) \leq 1 + \alpha$ (além de $p \neq 1$ e $q \neq 1$, no caso quando $\left(\frac{1}{p}\right) + \left(\frac{1}{q}\right) = 1 + \alpha$). Se $\varphi(x) \in L_p(a,b)$ e $\psi(x) \in L_q(a,b)$, então

$$\int_a^b \varphi(x)(I_{a+}^{\alpha}\psi)(x)dx = \int_a^b \psi(x)(I_{b-}^{\alpha}\varphi)(x)dx.$$

3.4 Derivadas de Riemann-Liouville

A definição de derivadas fracionárias segundo Riemann-Liouville, estrutura-se no fato de que a integração e a derivação são operações inversas [2], dessa forma, define-se tal derivada como:

Definição 3.4.1. Derivadas de Riemann-Liouville em intervalos finitos

As derivadas de Riemann-Liouville em um intervalo finito do eixo real de ordem $\alpha \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{N}$, são definidas por,

$$(D_{a+}^{\alpha} f)(x) := \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} f)(x); \qquad n = [\alpha] + 1; \; x > a \tag{3.7}$$

e

$$(D_{b-}^{\alpha} f)(x) := \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{b-}^{n-\alpha} f)(x); \qquad n = [\alpha] + 1; \; x < b \tag{3.8}$$

onde $[\alpha]$ denota a parte inteira positiva de α.

Como é apresentado por [2], "a derivada de ordem real, segundo Riemann-Liouville, equivale à derivada de ordem inteira de uma integral de ordem real".

No caso em que α passa a pertencer ao conjunto dos números naturais, recaímos nas derivadas convencionais definidas no processo de limite, ou seja,

$$(D^0_{a+}f)(x) = (D^0_{b-}f)(x) = f(x),$$

$$(D^n_{a+}f)(x) = f^{(n)}(x),$$

$$(D^n_{b-}f)(x) = (-1)^n f^{(n)}(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Proposição 3.4.1. *Se $\beta > 0$, então*

$$(D^\alpha_{a+}(t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}, \quad \alpha \geq 0 \tag{3.9}$$

e

$$(D^\alpha_{b-}(b-t)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-x)^{\beta-\alpha-1}, \quad \alpha \geq 0. \tag{3.10}$$

Para realizar a prova destas afirmações, provemos, inicialmente, o seguinte lema:

Lema 3.4.2. *Sejam n natural, e α e β reais positivos, então:*

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{\beta-\alpha+n-1} = \frac{\Gamma(\beta-\alpha+n)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}$$

Demonstração. Para a realização desta prova, usaremos da indução sobre n, onde $n = [\alpha] - 1$. Para $n = 0$ temos,

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^0 (x-a)^{\beta-\alpha-1} = (x-a)^{\beta-\alpha-1} = \frac{\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}.$$

Para $n = 1$,

$$\left(\frac{d}{dx}\right)(x-a)^{\beta-\alpha} = (\beta-\alpha)(x-a)^{\beta-\alpha-1} = \frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}.$$

Para $n = 2$,

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^2 (x-a)^{\beta-\alpha+1} = \left(\frac{d}{dx}\right)\left(\left(\frac{d}{dx}\right)(x-a)^{\beta-\alpha+1}\right) =$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\right)(\beta-\alpha+1)((x-a)^{\beta-\alpha}) = (\beta-\alpha+1)\left(\frac{d}{dx}\right)((x-a)^{\beta-\alpha}) =$$

$$= (\beta-\alpha+1)\frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1} = \frac{\Gamma(\beta-\alpha+2)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}\frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1} =$$

$$= \frac{\Gamma(\beta-\alpha+2)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}.$$

Supondo que esta propriedade seja válida para todo natural menor que n, logo,

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{\beta-\alpha+n-1} = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}\left(\left(\frac{d}{dx}\right)(x-a)^{\beta-\alpha+n-1}\right) =$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}(\beta-\alpha+n-1)(x-a)^{\beta-\alpha+n-2} = (\beta-\alpha+n-1)\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}(x-a)^{\beta-\alpha+(n-1)-1} =$$

$$= (\beta-\alpha+n-1)\frac{\Gamma(\beta-\alpha+n-1)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1} =$$

$$= \frac{\Gamma(\beta-\alpha+n)}{\Gamma(\beta-\alpha+n-1)}\frac{\Gamma(\beta-\alpha+n-1)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1} =$$

$$= \frac{\Gamma(\beta-\alpha+n)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}.$$

□

Com posse deste resultado, estamos aptos para prosseguir a demonstração da proposição 3.4.1:

Demonstração. Provemos que é válida a equação (3.9). Pela definição de derivada proposta por Riemann-Liouville,

$$(D^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\beta-1})(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I^{n-\alpha}_{a+}(t-a)^{\beta-1})(x).$$

Pela propriedade 3.2.2, temos que,

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (I^{n-\alpha}_{a+}(t-a)^{\beta-1})(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha+n)}(x-a)^{\beta-\alpha+n-1} =$$

$$= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha + n)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{\beta-\alpha+n-1}.$$

Usando do lema 3.3.2, segue o resultado,

$$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha + n)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{\beta-\alpha+n-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha + n)} \cdot \frac{\Gamma(\beta - \alpha + n)}{\Gamma(\beta - \alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1} =$$

$$= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}.$$

De forma análoga a prova de (3.10) pode ser realizada. □

Contudo, se for tomado o caso particular em que $\beta = 1$, $\alpha > 0$ e f sendo constante, tem-se,

$$(D^\alpha_{a+} f)(x) = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{1-\alpha-1} = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

e

$$(D^\alpha_{a+} f)(x) = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{1-\alpha-1} = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

A partir deste exemplo, podemos notar que, em geral, a derivada de uma função constante, no sentido de Riemann-Liouville não é nula.

O teorema que segue trata da caracterização das derivadas fracionárias no sentido de Riemann-Liouville. Para isto, apresentaremos a caracterização das funções f pertencentes ao espaço $AC^n[a,b]$, espaço de funções absolutamente contínuas no intervalo, apresentada em [17] por

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \varphi(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k \tag{3.11}$$

onde $\varphi(t) \in L_1$, e c_k é uma constante real. Em particular, segundo [17], toma-se

$$\varphi(t) = f^{(n)}(t) \quad e \quad c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

Teorema 3.4.3. *Sejam $\alpha \geq 0$ e $n = [\alpha] + 1$, onde $[\alpha]$ denota a parte inteira de α. Se $f(x) \in AC^n[a,b]$, então as derivadas fracionárias $D^\alpha_{a+} f$ e $D^\alpha_{b-} f$ existem em quase todos pontos em $[a,b]$ e podem ser representadas, respectivamente, nas expressões*

$$(D_{a+}^{\alpha}f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt \tag{3.12}$$

e

$$(D_{b-}^{\alpha}f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k f^{(k)}(b)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(b-x)^{k-\alpha} + \frac{(-1)^{\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{y^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt. \tag{3.13}$$

Demonstração. A demonstração deste fato encontra-se em [17], página 40, onde é estabelecida através das relações expostas em (3.7), (3.11), (3.12) e a integração por parte apresentada no lema 3.2.3.

A seguir serão apresentadas duas proposições, cuja demonstrações se encontram em [2] e [17], que acarretam propriedades operacionais a serem expostas em seguida.

Proposição 3.4.4 (Soma dos índices). *Se $\alpha, \beta \in R_+^*$, então as equações*

$$(I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} f)(x) = (I_{a+}^{\alpha+\beta} f)(x) \quad e \quad (I_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\beta} f)(x) = (I_{b-}^{\alpha+\beta} f)(x)$$

são satisfeitas em quase todos os pontos $x \in [a,b]$ para $f(x) \in L_p(a,b)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Nos casos em que $\alpha + \beta > 1$, as relações acima valem em todo ponto do intervalo fechado $[a,b]$.

Proposição 3.4.5 (Operação Inversa). *Se $\alpha > 0$ e $f(x) \in L_p(a,b)$ com $1 \leq p \leq \infty$, então são válidas as igualdades*

$$(D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x) \quad e \quad (D_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} f)(x) = f(x)$$

no intervalo fechado $[a,b]$.

Como é exposto em [2] valem, também, as seguintes propriedades

Propriedade 3.4.6 (Subtração de índices). *Se $\alpha > \beta > 0$, então para $f \in L_p(a,b)$ com $1 \leq p \leq \infty$, as relações*

$$(D_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} f)(x) = (I_{a+}^{\alpha-\beta} f)(x) \quad e \quad (D_{b-}^{\beta} I_{b-}^{\alpha} f)(x) = (I_{b-}^{\alpha-\beta} f)(x)$$

são válidas no intervalo fechado $[a,b]$.

Propriedade 3.4.7. *São válidas as propriedades aditiva e comutativa das derivadas fracionárias expressas, respectivamente, por*

$$D^m D^n = D^{m+n}$$

e

$$D^m D^n = D^n D^m$$

com $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Finalizamos a apresentação destes resultados com a derivada fracionária por partes como é exposto abaixo.

Lema 3.4.8. *Seja* $\alpha > 0$, $p, q \geq 1$ *e* $\left(\frac{1}{p}\right) + \left(\frac{1}{q}\right) \leq 1 + \alpha$ *(com* p *e* q *diferentes de* 1 *no caso em que* $\left(\frac{1}{p}\right) + \left(\frac{1}{q}\right) = 1 + \alpha$ *). Se* $f(x) \in D^{\alpha}_{b-}(L_p)$ *e* $g(x) \in I^{\alpha}_{a+}(L_q)$, *então*

$$\int_a^b f(x)(D^{\alpha}_{a+}g)(x)dx = \int_a^b g(x)(D^{\alpha}_{b-}f)(x)dx.$$

Demonstração. A prova deste lema é indicada em [2].

Ainda, segundo [2], acredita-se que, a partir dos resultados aqui apresentados, possa-se estabelecer um equivalente do Teorema Fundamental do Cálculo de ordem inteira para o Cálculo de ordem arbitrária.

3.5 Integrais fracionárias de Liouville

Serão apresentadas nesta seção as integrais fracionárias de Liouville que, de certa forma, estendem o domínio das integrais de Riemann-Liouville para o semieixo $\mathbb{R}_+$.

Definição 3.5.1 (Integrais de Liouville em $\mathbb{R}_+$)**.** Seja f uma função contínua por partes no intervalo $(0, \infty)$ e integrável em qualquer subintervalo $[0, \infty)$ e $t > 0$. As integrais de Liouville são definidas por

$$(I^{\alpha}_{0+}f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt \qquad x > 0, \tag{3.14}$$

e

$$(I^{\alpha}_{-}f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}dt \qquad x > 0. \tag{3.15}$$

Temos, assim, as integrais fracionárias de Liouville à esquerda e à direita no semieixo $\mathbb{R}_+$, respectivamente.

Exemplo 3.5.1. Consideremos $f(x) = x$ e calculemos a integral fracionária no sentido de Liouville para $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

$$(I_{0+}^{\frac{1}{2}} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x \frac{t}{(x-t)^{1-\frac{1}{2}}} dt = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \lim_{b \to x^-} \int_0^b t(x-t)^{-\frac{1}{2}} dt.$$

Através da integração por partes obtemos que

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \lim_{b \to x^-} \int_0^b t(x-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \left[\lim_{b \to x^-} \left(-2t\,(x-t)^{\frac{1}{2}} \Big|_{t=0}^{t=b} \right) + 2 \lim_{b \to x^-} \int_0^b (x-t)^{\frac{1}{2}} dt \right] =$$

$$= \frac{2}{\Gamma(\frac{1}{2})} \lim_{b \to x^-} \int_0^b (x-t)^{\frac{1}{2}} dt = -\frac{2}{\Gamma(\frac{1}{2})} \lim_{b \to x^-} \left(\frac{3}{2} (x-t)^{\frac{3}{2}} \right) \Bigg|_{t=0}^{t=b} = \frac{4}{3} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}.$$

De maneira similar, se dá o cálculo de,

$$(I_{-}^{\frac{1}{2}} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_x^\infty \frac{t}{(t-x)^{1-\frac{1}{2}}} dt$$

cujo resultado diverge quando t tende ao infinito.

Teorema 3.5.1 (Integral fracionária)**.** *Seja $f \in E$, onde E é um subspaço funcional. Então, para $\alpha \in \mathbb{R}^+$, tem-se:*

$$I^\alpha [x f(x)] = x I^\alpha f(x) - \alpha I^{\alpha+1} f(x),$$

onde $I^\alpha f = (I_{0+}^\alpha f)(x)$.

Demonstração. Da definição exposta em (3.14) segue que,

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} [t f(t)] dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} [x - (x-t)] f(t) dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} x f(t) dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha} f(t) dt.$$

Pela Proposição 2.1.2, usaremos o fato de

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},$$

na equação anterior, obtendo que:

$$I^{\alpha}[xf(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}xf(t)dt - \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^x (x-t)^{\alpha}f(t)dt =$$

$$= xI^{\alpha}f(x) - \alpha I^{\alpha+1}f(x).$$

□

Propriedade 3.5.2. *Os operadores de Liouville fracionários aplicado à função potência $x^{\beta-1}$ e à função exponencial $e^{-\lambda x}$ com α, β e λ sendo números reais não negativos tem por resultado os termos a seguir:*

i) $\left(I_{0+}^{\alpha}x^{\beta-1}\right)(x) = \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}x^{\beta+\alpha-1}, \qquad x > 0.$

Demonstração. Pela definição, sabe-se que:

$$\left(I_{0+}^{\alpha}(x^{\beta-1})\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x t^{\beta-1}(x-t)^{\alpha-1}dt.$$

Fazendo $t = x\xi$ e, consequentemente, $dt = xd\xi$, segue que

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x t^{\beta-1}(x-t)^{\alpha-1}dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (x\xi)^{\beta-1}(x-x\xi)^{\alpha-1}xd\xi =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\beta-1\alpha-1+1}\int_0^1 \xi^{\beta-1}(1\xi)^{\alpha-1}d\xi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\beta+\alpha-1}B(\beta,\alpha) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}x^{\beta+\alpha-1}.$$

□

ii) $(I_{-}^{\alpha}e^{-\lambda x})(x) = \lambda^{-\alpha}e^{-\lambda x}, \qquad x > 0.$

Demonstração. Pela definição sabe-se que:

$$(I_{-}^{\alpha}e^{-\lambda x})(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{\infty} e^{-\lambda t}(t-x)^{\alpha-1}dt$$

Fazendo $t = \frac{\psi}{\lambda} + x$, temos que:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty e^{-\lambda t}(t-x)^{\alpha-1} dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-\lambda(\frac{\psi}{\lambda}+x)} \left(\frac{\psi}{\lambda}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\lambda}\right) d\psi =$$

$$= \frac{\lambda^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-\psi-\lambda x} \psi^{\alpha-1} d\psi = \frac{\lambda^{-\alpha} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-\psi} \psi^{\alpha-1} d\psi = \frac{\lambda^{-\alpha} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha) = \lambda^{-\alpha} e^{-\lambda x}$$

□

Teorema 3.5.3. *Soma dos expoentes*

Seja $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $p \geq 1$ *e* $\alpha + \beta < \dfrac{1}{p}$. *Se* $f(x) \in L_p(\mathbb{R}^+)$, *então*

$$(I^\alpha_{0+} I^\beta_{0+} f)(x) = (I^{\alpha+\beta}_{0+} f)(x), \tag{3.16}$$

e

$$(I^\alpha_{-} I^\beta_{-} f)(x) = (I^{\alpha+\beta}_{-} f)(x). \tag{3.17}$$

Demonstração. Seja $\phi_\alpha(x)$ a função de Gel'fand-Shilov,

$$\phi_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & se\ x \geq 0 \\ \\ 0 & se\ x < 0 \end{cases}.$$

Como visto no teorema 5.1.1, a integral de ordem real pode ser interpretada como o produto de convolução, logo,

$$I^\alpha f(x) = \phi_\alpha(x) * f(x) \qquad \alpha > 0. \tag{3.18}$$

Mostraremos, pois, que

$$\phi_\alpha(x) * \phi_\beta(x) = \phi_{\alpha+\beta}(x). \tag{3.19}$$

Para isto, tomemos o produto de convolução que pode ser escrito como

$$\phi_\alpha * \phi_\beta = \int_0^x \frac{\tau^{\alpha-1}(x-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} d\tau = \frac{x^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x \tau^{\alpha-1} \left(1 - \frac{\tau}{x}\right)^{\beta-1} d\tau.$$

Fazendo $\tau = ux$ e usando a definição da função beta bem como sua relação com a função gama, podemos escrever o produto de convolução como

$$\phi_\alpha * \phi_\beta = \frac{x^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha+\beta)} \int_0^1 (ux)^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}(xdu) =$$

$$= \frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)} \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du = \frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)} B(\alpha,\beta) =$$

$$= \frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \phi_{\alpha+\beta}(x).$$

Uma vez provada a equação 5.8, podemos terminar esta demostração com uso desta em conjunto com a equação 5.7 para obter

$$I^\alpha I^\beta f(x) = \phi_\alpha(x) * I^\beta f(x) =$$

$$= \phi_\alpha(x) * \phi_\beta(x) f(x) =$$

$$= \phi_{\alpha+\beta}(x) * f(x) = I^{\alpha+\beta} f(x).$$

$\square$

Proposição 3.5.4. *Integral fracionária por partes*

Se $\alpha > 0$, então vale a igualdade para funções φ e ψ suficientemente boas;

$$\int_0^\infty \varphi(x)(I_{0+}^\alpha \psi)(x)dx = \int_0^\infty \psi(x)(I_-^\alpha \varphi)(x)dx.$$

A prova desta afirmação será omitida neste texto mas se apresenta na página 96 de [17].

3.5.1 Integrais fracionárias de Liouville na reta real

Com notória similaridade, as integrais fracionárias no sentido de Liouville na reta real serão definidas nessa seção, bem como a integração por partes.

Definição 3.5.2 (Integrais de Liouville na reta real)**.** Seja f um função contínua e integrável em toda a reta real. As integrais de Liouville, de ordem α, são definidas por:

$$(I_+^\alpha f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \tag{3.20}$$

e

$$(I_-^\alpha f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, \tag{3.21}$$

onde $x \in R$ e $Re(\alpha) > 0$.

Proposição 3.5.5. *Integração por partes*

Se $\alpha > 0$ vale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)(I_+^\alpha \psi)(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)(I_-^\alpha \varphi)(x)dx.$$

para φ e ψ suficientemente boas.

Assim como a proposição 3.4.4, a prova desta afirmação se encontra na página 96 de [17].

3.6 Derivadas fracionárias de Liouville

Com o intuito de definir as derivadas fracionárias nos semieixos, a seguir será mostrada a definição de derivada de ordem real nos semieixos.

Definição 3.6.1. Sejam F uma família de funções que satisfaz as definições das derivadas de ordem real no sentido de Riemann-Liouville, $x > 0$ e n o menor inteiro maior que $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$, com $\beta = n - a$. Define-se as derivadas de ordem real α de $f(t)$, no sentido de Liouville por,

$$D_{0+}^\alpha f(x) = {}_0D_x^\alpha f(x) = D^n[{}_0I_x^\alpha f(t)] := \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{0+}^{n-\alpha} f)(x)$$

e

$$D_-^\alpha f(x) = {}_-D_\alpha^x f(x) = D^n[{}_-I_\alpha^x f(t)] := \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_-^{n-\alpha} f)(x).$$

onde $n = [\alpha] + 1$.

3.7 Integrais fracionárias de Weyl

Apresentaremos agora a integral fracionária de Weyl, que foi definida sob inspiração nas integrais de Liouville no eixo real.

Definição 3.7.1. Integral de Weyl de ordem real.

Seja f uma função integrável na reta. A integral de Weyl de ordem arbitraria é definida por;

$$ {}_xW_\infty^\alpha f(x) = {}_xI_\infty^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \tag{3.22} $$

com $Re(\alpha) > 0$. De forma análoga, outro viés para introduzir a integral de Weyl é através da expressão:

$$ {}_{-\infty}W_x^\alpha f(x) = {}_{-\infty}I_x^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, $$

com $Re(\alpha) > 0$.

3.8 Derivada fracionária de Weyl

A seguir será apresentada a derivada fracionária de Weyl, contudo, pode-se justificar sua construção previamente através do seguinte argumento:

Se $D^n y = f$ é uma equação diferencial não homogênea, de n-ésima ordem e a respectiva equação adjunta $(-1)^n D^n y = f$, então a solução com as condições iniciais $D^k y(c) = 0$, para $0 \leq k \leq n-1$ é dada, segundo [2], por

$$ y(x) = {}_xW_c^{-n} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_x^c (t-x)^{n-1} f(t)dt $$

Nota-se, pois, profunda similaridade entre esta expressão e a definição de integral fracionária segundo Weyl. Em particular, substituindo n por α e c como uma constante arbitrariamente grande, ambas expressões são coincidentes para um certo espaço de funções G às quais são diferenciáveis em todos os pontos e todas derivadas $O(x^{-N})$ com $x \to \infty$ para todo N e ${}_xW_\infty^\alpha y(x)$ definida (3.22) existe. Por meio da mudança de variável $t - x = \xi$ na integral da definição (3.22), temos,

$$ {}_xI_\infty^{-\alpha}y(x) = {}_xW_\infty^{-\alpha}y(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \xi^{\alpha-1}y(\xi+x)d\xi. \tag{3.23}$$

Aplicando o operador D^n em ambos os membros da equação (3.23),

$$D^nW^{-\alpha}y(x) = W^{-\alpha}D^ny(x).$$

Tomando $E^n = (-1)^nD^n$, temos que

$$E^nW^{-\alpha}y(x) = W^{-\alpha}E^ny(x).$$

Se $y \in G$, a n-ésima integração da expressão de (3.22) por partes fornece

$$W^{-\alpha}y(x) = W^{-(\alpha-n)}[E^ny(x)]$$

Logo,

$$W^{-\alpha}y(x) = E^n[W^{-(\alpha-n)y(x)}]$$

Dessa forma, dá-se a derivada de Weyl fracionária de y de ordem $\alpha > 0$ na forma

$$D_\infty^\alpha y(x) = E^nI_\infty^{n-\alpha}y(x) = E^n\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_x^\infty (t-x)^{n-\alpha-1}y(t)dt\right].$$

Tantas outras definições para as derivadas fracionárias foram desenvolvidas, como é o caso da Derivada fracionária de Riesz, Grünwald-Letnikov, Marchaud e Hilfer, além da elaboração das chamadas derivada fracionária copatível e alternativa. Contudo, seguindo [2], faremos o estudo da derivada fracionária de Caputo devido à sua aceitação sobre as demais na comunidade científica.

3.9 Derivada fracionária de Caputo

Segundo [2], Caputo propôs uma definição alternativa para a derivada fracionária com o intuito de "solucionar o problema" apresentado na definição de Riemann-Liouville no que se refere ao fato de que nesta definição a derivada de uma função constante não é nula. Para isso, Caputo definiu a derivada fracionária através da inversão na ordem das operações de integração e derivação na definição no sentido de Riemann-Liouville.

Definição 3.9.1. Derivada de ordem real segundo Caputo.

Seja $[a, b]$ um intervalo limitado do eixo real $\mathbb{R}$ e seja,

$$D^{\alpha}_{a+}[y(t)](x) \equiv (D^{\alpha}_{a+}y)(x)$$

e

$$D^{\alpha}_{b-}[y(t)](x) \equiv (D^{\alpha}_{b-}y)(x)$$

as derivadas de Riemann-Liouville de ordem real $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$. As derivadas fracionárias $({}^C D^{\alpha}_{a+}y)(x)$ e $({}^C D^{\alpha}_{b-}y)(x)$ de ordem $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$ em $[a, b]$ são definidas fazendo uso das derivadas fracionárias no sentido de Riemann-Liouville por;

$$({}^C D^{\alpha}_{a+}y)(x) := \left(D^{\alpha}_{a+} \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k \right] \right)(x) \tag{3.24}$$

e

$$({}^C D^{\alpha}_{b-}y)(x) := \left(D^{\alpha}_{b-} \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(b)}{k!}(b-t)^k \right] \right)(x), \tag{3.25}$$

com $n = \alpha + 1$ para $\alpha \notin \mathbb{N}$ e $n = \alpha$ para $\alpha \in \mathbb{N}$.

No caso particular em que $\alpha \in (0, 1)$, as relações acima podem ser representadas como

$$({}^C D^{\alpha}_{a+}y)(x) = \left(D^{\alpha}_{a+} \left[y(t) - y(a) \right] \right)(x)$$

e

$$({}^C D^{\alpha}_{b-}y)(x) = \left(D^{\alpha}_{b-} \left[y(t) - y(a) \right] \right)(x).$$

Considerando que $\alpha \notin \mathbb{N}$ e $y(x)$ é seja uma função tal que as derivadas de Caputo e de Riemann-Liouville existam, então das equações (3.24) e (3.25) temos que

$$({}^C D^{\alpha}_{a+}y)(x) = (D^{\alpha}_{a+}y)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}$$

e

$$({}^C D^{\alpha}_{b-}y)(x) = (D^{\alpha}_{b-}y)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(b)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(b-x)^{k-\alpha}$$

com $n = \alpha + 1$.

Ainda que as derivadas de Caputo não sejam equivalentes à definição proposta por Riemann-Liouville, ambas propostas coincidem em casos particulares, como será exposto abaixo:

Se $\alpha \notin \mathbb{N}$, então as derivadas de Caputo de ordens reais coincidem com as derivadas no sentido de Riemann-Liouville fracionárias nos seguintes casos:

- se $y(a) = y'(a) = \ldots = y^{(n-1)}(a) = 0$ com $n = \alpha + 1$;
- se $y(b) = y'(b) = \ldots = y^{(n-1)}(b) = 0$ com $n = \alpha + 1$.

Já no caso oposto, isto é, $\alpha = n \in \mathbb{N}$ e a derivada usual $y^{(n)}(x)$ existe, então tem-se

$$ {}^C D^{\alpha}_{a+}y(x) = y^{(n)}(x),$$

$$ {}^C D^{\alpha}_{b-}y(x) = (-1)^n y^{(n)}(x)$$

com $n \in \mathbb{N}$.

Nota-se que, para que as derivadas de Caputo sejam definidas para funções y de forma concisa, é necessário que as derivadas no sentido de Riemann-Liouville existam. Dessa forma, as funções y devem pertencer ao espaço de funções $AC[a,b]$ absolutamente contínuas.

Teorema 3.9.1. *Derivada fracionária de Caputo*
Sejam $\alpha \geq 0$ e $n = \alpha + 1$ caso $\alpha \notin \mathbb{N}$ e $n = \alpha$ caso $n \in \mathbb{N}$. Se $y(x) \in AC^n[a,b]$, então as derivadas fracionárias no sentido de Caputo existem em quase todos os pontos de $[a,b]$.

i) Se $\alpha \notin \mathbb{N}$, então,

$$({}^C D^{\alpha}_{a+}y)(x) := (I^{n-\alpha}_{a+} D^n\ y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt \tag{3.26}$$

e

$$({}^C D^{\alpha}_{b-}y)(x) := (-1)^n (I^{n-\alpha}_{b-} D^n\ y)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{y^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt. \tag{3.27}$$

ii) Se $\alpha = n \in \mathbb{N}$, então,

$$({}^{C}D^{0}_{a+}y)(x) := ({}^{C}D^{0}_{b-}y)(x) = y(x). \tag{3.28}$$

i) Demonstração.

$$({}^{C}D^{\alpha}_{a+}y)(x) = \left(D^{\alpha}_{a+}\left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{y^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right]\right)(x) =$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I^{n-\alpha}_{a+}\left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{y^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right]\right)(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \lim_{c\to x^-}\int_a^c \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{y^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right](x-t)^{n-\alpha-1}dt$$

Através da integração por partes podemos reescrever a integral acima como;

$$\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left\{\lim_{c\to x^-}\left[\left(-y(t) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{y^{(k)}(a)}{(n-\alpha)k!}(t-a)^k\right)(x-t)^{n-\alpha}\right]\Bigg|_{t=a}^{t=c} + \right.$$

$$\left. + \lim_{c\to x^-}\int_a^c \frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha}\left(y'(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{y^{(k)}(a)}{(k-1)!}(t-a)^{k-1}\right)dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[-\frac{y(a)(x-a)^{n-\alpha}}{n-\alpha} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n-\alpha}\lim_{c\to x^-}\int_a^c (x-t)^{n-\alpha}\left(y'(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{y^{(k)}(a)}{(k-1)!}(t-a)^{k-1}\right)dt\right] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}\left[\lim_{c\to x^-}\int_a^c (x-t)^{n-\alpha-1}\left(y'(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{y^{(k)}(a)}{(k-1)!}(t-a)^{k-1}\right)dt\right] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-2} \left[\lim_{c \to x^-} \int_a^c (x-t)^{n-\alpha-1} \left(y^{(2)}(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(2)}(a)}{(k-2)!}(t-a)^{k-2} \right) dt \right] =$$

$$\vdots$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right) \left[\lim_{c \to x^-} \int_a^c (x-t)^{n-\alpha-1} \left(y^{(n-1)}(t) - y^{(n-1)}(a) \right) dt \right] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} y^{(n)}(t) dt.$$

De forma análoga prova-se (3.27). □

ii) Demonstração. Para o caso em que $\alpha \in \mathbb{N}$, usamos os resultados já demonstrados anteriormente obtendo que,

$$({}^C D^{\alpha}_{a+} y)(x) = \left(D^{\alpha}_{a+} \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k \right] \right)(x) =$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right].$$

Devido às condições enunciadas, obtém-se

$$(D^{\alpha}_{a+} y)(x) = y^{(n)}(x).$$

De forma análoga prova-se a segunda igualdade de (3.28). □

Proposição 3.9.2. *Função polinomial*

Seja $\alpha > 0$ e $n = \alpha + 1$ caso $\alpha \notin \mathbb{N}$ e $n = \alpha$ caso $n = \alpha$, além de $\beta > 0$. São válidas as seguintes igualdades

$$({}^C D^{\alpha}_{a+} (t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}$$

$$({}^C D^{\alpha}_{b-}(t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-x)^{\beta-\alpha-1}$$

$$({}^C D^{\alpha}_{a+}(t-a)^{k})(x) = ({}^C D^{\alpha}_{b-}(t-a)^{k})(x) = 0$$

com $k = 0, 1, \cdots, n-1$ *e* $\beta > n$.

Para o caso em que $\alpha \in \mathbb{N}$, os operadores fracionários de derivação propostos por Caputo atuam como operadores inversos aos operadores integrais propostos por Riemann-Liouville.

Proposição 3.9.3. *Composição de operadores de derivada e de integral*

Seja $\alpha > 0$ *e* $n = \alpha + 1$ *caso* $\alpha \notin \mathbb{N}$ *e* $n = \alpha$ *caso* $n = \alpha$. *Se* $y(x) \in C^n[a,b]$, *então*

$$(I^{\alpha}_{a+} {}^C D^{\alpha}_{a+} y)(x) = y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

e

$$(I^{\alpha}_{b-} {}^C D^{\alpha}_{b-} y)(x) = y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k y^{(k)}(b)}{k!}(b-x)^k.$$

No caso particular em que $\alpha \in (0,1]$ *e* $y(x) \in AC[a,b]$ *ou* $y(x) \in C[a,b]$, *então*

$$(I^{\alpha}_{a+} {}^C D^{\alpha}_{a+} y)(x) = y(x) - y(a) \qquad e \qquad (I^{\alpha}_{b-} {}^C D^{\alpha}_{b-} y)(x) = y(x) - y(b).$$

Assim como foi apresentado neste texto, as integrais no sentido de Riemann-Liouville limitava-se a intervalos pertencentes à reta real, contudo fora apresentada a integral no sentido de Liouville que versa o estudo no semieixo. Da mesma maneira, serão definidas, a seguir, as derivadas de ordem real no sentido de Caputo no semieixo $\mathbb{R}^+$ e no eixo $\mathbb{R}$.

Definição 3.9.2. Derivadas de Caputo de ordem real no semieixo.

Seja $x \in \mathbb{R}^+$, então as derivadas no sentido de Caputo são definidas por;

$$({}^C D^{\alpha}_{0+} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{y^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha+1-n}} dt \tag{3.29}$$

e

$$({}^C D^{\alpha}_{-} y)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^{\infty} \frac{y^{(n)}(t)}{(t-x)^{\alpha+1-n}} dt. \tag{3.30}$$

De forma análoga, pode-se estender esta definição para toda o eixo real, como é apresentado abaixo.

Definição 3.9.3. Derivadas de Caputo de ordem arbitrária no eixo.

Seja $x \in \mathbb{R}$, então as derivadas no sentido de Caputo são definidas por;

$$({}^C D_+^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{-\infty}^{x} \frac{y^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha+1-n}} dt \tag{3.31}$$

e

$$({}^C D_-^\alpha y)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{x}^{\infty} \frac{y^{(n)}(t)}{(t-x)^{\alpha+1-n}} dt. \tag{3.32}$$

No caso particular em que $\alpha = n \in \mathbb{N}$ define-se as derivadas de Caputo no semieixo e no eixo real por

$$({}^C D_{0+}^n y)(x) := y^{(n)}(x), \qquad ({}^C D_-^n y)(x) := (-1)^n y^{(n)}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^+$$

e

$$({}^C D_+^n y)(x) := y^{(n)}(x), \qquad ({}^C D_-^n y)(x) := (-1)^n y^{(n)}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Proposição 3.9.4. *Função exponencial*

Se $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$, então

$$({}^C D_+^\alpha e^{\lambda t})(x) = \lambda^\alpha e^{\lambda x}$$

e

$$({}^C D_-^\alpha e^{-\lambda t})(x) = \lambda^\alpha e^{-\lambda x}$$

A seguir será apresentado o processo chamado de integrodiferenciação fracionária que tem por objetivo unificar as definições de integrais e derivadas de ordem real conhecido, também, por diferentegral de ordem real de uma função y. Para isso define-se a derivada parcial de Caputo como se segue.

Definição 3.9.4. Derivada parcial de Caputo

A derivada parcial de Caputo é definida por

$$ {}^{C}D_t^{\alpha}y(t,x) = I^{n-\alpha}D_t^{n}y(t,x) $$

onde $n = [\alpha] + 1$, assim,

$$ {}^{C}D_t^{\alpha}y(t,x) \equiv \frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}y(t,x) := \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \dfrac{y^{(n)}(\tau,x)}{(x-\tau)^{\alpha+1-n}}d\tau, & se \quad n-1 < \alpha < n \\ \\ y^{(n)}(t,x), & se \quad \alpha = n \in \mathbb{N} \end{cases} $$

com $y^{(n)}(t,x)$ denotando a derivada parcial de ordem inteira n em relação à variável t.

Considerações Finais

Neste trabalho foram estudados os conceitos elementares do Cálculo de Ordem Real com enfoque para as definições propostas por Riemann-Liouville, Liouville, Weyl e Caputo acerca da fundamentação teórica do Cálculo Fracionário. Apresentado de forma sucinta, este texto visou a apresentação da não recente teoria que, pelas mais variadas razões, não se difundiu no meio acadêmico, ausentando de tornar-se um objeto de pesquisa almejado no referido campo.

À procura da exposição de uma fundamentação teórica concisa, este texto proporciona o estudo elementar dos fundamentos arraigados às definições e ideias expostas na teoria do Cálculo Fracionário, como é o caso das funções gama e beta, e do espaço de funções L_p, proporcionando o contato e o estudo de temas que desenvolvem-se de maneira singular. Tal estudo possibilita, além do amadurecimento matemático, o reconhecimento da completude da Ciência, estimulando o espírito de pesquisa intrínseco ao docente engajado com as incumbências de seu ofício.

Sob a referida ótica, a "complexidade" do Cálculo Fracionário, no tocante de sua estruturação teórica e não sinergia em suas formulações, mostra-se um objeto ímpar de estudo a fim do desenvolvimento da área que, tão antiga quanto o Cálculo de ordem inteira, ainda caminha a lentos passos para sua plenitude.

Ainda que o apelo infindável da aplicação de novas teorias faz-se presente na produção do conhecimento nas mais variadas esferas das Ciências, este texto se isenta de tais preocupações, ainda que reconheça a importância das mesmas no desenvolvimento da comunidade como um todo. Dessa forma, é indicado o referencial teórico exposto neste texto, composto por alguns trabalhos que apresentam a aplicabilidade do Cálculo Fracionário.

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, E. B. de, **Estudo do cálculo fracionário aplicado à modelagem de sistemas vibratórios com amortecimento viscoelástico**, Dissertação (mestrado em Engenharia Mecânica), Universidade Federal de Uberlândia, 2010.

[2] CAMARGO, R. F., OLIVEIRA, E. C. de, **Cálculo Fracionário**, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2015.

[3] CAMARGO, R. F., **Cálculo Fracionário e Aplicações**, Tese (doutorado em Matemática), Universidade Estadual de Campinas, 2014.

[4] DIETHELM, Kai; FORD, Neville J. Analysis of Fractional Differential Equations. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, [S. I.], maio 2002. p. 229-248. Disponível em: <https://ac.els-cdn.com/S0022247X00971944/1-s2.0-S0022247X00971944-main.pdf?_tid=27975e76-c88d-11e7-8083-00000aacb361&acdnat=1510589604_ cdfb121535d28c63258df40136070dc1>. Acesso em: 01 jun. 2017.

[5] GRIGOLETTO, H. S., **Equações Diferenciais Fracionárias e as Funções de Mittag-Leffer**, Tese (doutorado em Matemática Aplicada), Universidade Estadual de Campinas, 2014.

[6] GUIDORIZZI, H. L., **Um Curso de Cálculo**, volume 1, LTC, Rio de Janeiro, 2008.

[7] GUIDORIZZI, H. L., **Um Curso de Cálculo**, volume 3, LTC, Rio de Janeiro, 2013.

[8] ISNARD, C., **Introdução à medida e integração**, 1ª Edição, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 2007.

[9] LIMA, E. L., **Curso de Análise**, volume 1, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 2006.

[10] LIMA, E. L., **Curso de Análise**, volume 2, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 2006.

[11] MOL, Rogério S. **Introdução à História da Matemática**, Editora CAED-UFMG, Belo Horizonte,2013. 138 p. Disponível em: www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/introducao_ a_ historia_ da_ matematica.pdf. Acesso em: 12 abr. 2017

[12] MALDONADO, A. D., **Integral de Lebesgue, Espaços de Sobolev e Aplicações**, Trabalho de Conclusão de Curso (bacharel em Matemática), Universidade Federal de Juiz de Fora, 2013.

[13] OLIVEIRA, H. S., **Introdução ao Cálculo de Ordem Arbitrária**, Dissertação (mestrado em Matemática), Universidade Estadual de Campinas, 2010.

[14] RAMOS, P. F. P.; CAMARGO, R. F. Cálculo fracionário aplicado ao problema da tautócrona. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v.1, p.15-22, dez. 2012. Disponível em http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/index.jsp. Acesso em 15 ago. 2017.

[15] RODRIGUES, F. G.; Oliveira, E. C. de. Introdução às técnicas do cálculo fracionário para estudar modelos da física matemática. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, [online], v.37, p.3305-1-3305-12, 2015. Disponível em http://www.scielo.br/pdf/rbef/v37n3/0102-474-rbef-37-3-3305.pdf. Acesso em 01 jul. 2017.

[16] RODRIGUES, F. G., **Sobre Cálculo Fracionário e Soluções da Equação de Bessel**, Tese (doutorado em Matemática Aplicada), Universidade Estadual de Campinas, 2015.

[17] SAMKO, S. G.; KILBAS, A. A.; MARICHEV, O. I. **Fractional Integrals and Derivates: Theory and Applications**, Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, 1993.

[18] SANT'ANNA, D. A. **Derivadas Fracionárias, Funções Contínuas não Diferenciáveis e Dimensões**, Dissertação (mestrado em Matemática), Universidade Federal do ABC, 2009.

[19] SANTOS *et al.* **Cálculo de Ordem Fracionária e Aplicações**. Slgmae, Alfenas, v.1, n.1, p. 18-32, 2012.

[20] TEODORO, G. S. **Cálculo Fracionário e as Funções de Mittag-Leffler**, Dissertação (mestrado em Matemática), Universidade Estadual de Campinas, 2014.