ANAIS DA SEMANA DA MATEMÁTICA

Publicação da COMAT

UFSJ

www.ufsj.edu.br/comat/anais-semat.php

VOLUME 1

VIII SEMAT

25 de fevereiro a 1 de março de 2013
São João del Rei, MG

www.ufsj.edu.br/8semat/anais.php

2013

Comitê Editorial dos Anais

Jorge Andrés Julca Avila	avila_jaj@ufsj.edu.br	UFSJ
Carolina Fernandes Molina Sanches	carolina@ufsj.edu.br	UFSJ

Comissão Organizadora da VIII SEMAT

Carolina Fernandes Molina Sanches	carolina@ufsj.edu.br
Romélia Mara Alves Souto	romelia@ufsj.edu.br
Jorge Andrés Julca Avila	avila_jaj@ufsj.edu.br
Andréa Cristiane dos Santos Delfino	andrea@ufsj.edu.br
Viviane Cristina Almada de Oliveira	viviane@ufsj.edu.br
José Angel Dávalos Chuquipoma	jadc13@ufsj.edu.br
Marco Antonio Escher	escher@ufsj.edu.br

Índice

GRUPOS COMO A UNIÃO DE TRÊS SUBGRUPOS

Eliza Maria Ferreira* **Fábio Alexandre de Matos**†

Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ, 36307-352, São João del Rei, MG

RESUMO: Este trabalho consiste, basicamente, em discutir resultados elementares da teoria de grupos que foram apresentados por *M. BRUCKHEIMER, A. C. BRYAN e A. MUIR*, no trabalho *Groups which are the union of three subgroups* publicado em 1970 pela revista *The American Mathematical Monthly, Vol. 77.* Mais especificamente, neste trabalho os autores apresentam condições necessárias e sufucientes para que um grupo possa ser a união de três subgrupos não triviais, a menos de isomorfismo. Ainda, que um grupo não pode ser a união de dois subgrupos não triviais.

Palavras-chave: *grupos, união de subgrupos, homomorfismos.*

INTRODUÇÃO

Sem dúvidas, a Teoria de grupos é parte fundamental no estudo de estruturas algébricas e aparece em todos os ramos da matemática. O estudo destas estruturas foi fundamental para a resolução de problemas propostos no século XVI, como por exemplo, resolução de equações algébricas por meio de radicais. E neste ramo da álgebra abstrata, o reconhecimento e caracterização de estruturas algébricas, apresenta os problemas mais complexos.

No decorrer deste trabalho discutiremos as condições necessárias para que um grupo possa ser decomposto em três subgrupos, como se caracterizam esses subgrupos e e como se comportam essas decomposições. Além de mostrar a impossibilidade de um grupo ser a união de dois subgrupos não triviais.

OBJETIVO

Esse trabalho tem como objetivo estudar mais detalhadamente os resultados apresentados por *M. BRUCKHEIMER, A. C. BRYAN e A. MUIR* no trabalho *Groups which are the union of three subgroups* de modo a tornar-los mais acessíveis, despertando nos alunos o interesse pela álgebra ao apresentar um exemplo de artigo matemático elementar para a teoria.

*Aluno de Iniciação Científica. E-mail: elizzacomz@yahoo.com.br

†Professor Orientador. E-mail: fabio.ufsj@gmail.com

RESULTADOS

Os principais resultados extraidos do artigo são o **Teorema 1**, que se refere a grupos que podem ser escritos como a união de dois subgrupos e o **Teorema 2**, que é o mais importante, pois apresenta uma condição necessária e suficiente para que um grupo possa ser escrito como a união de três subgrupos.

Teorema 1. *Um grupo pode ser escrito como a união de dois subgrupos se, e somente se, um desses subgrupos for igual ao grupo todo, ou seja, for um subgrupo trivial do grupo.*

Demonstração: Vamos supor, por um momento, que o grupo G possa ser decomposto como união de dois subgrupos não triviais. Tomando $\widetilde{a} \in \widetilde{A}$ e $\widetilde{b} \in \widetilde{B}$ temos, por definição, que $\widetilde{a} \cdot \widetilde{b} \in G$, ou seja, $\widetilde{a} \cdot \widetilde{b} \in A$ ou $\widetilde{a} \cdot \widetilde{b} \in B$, considerando assim a possibilidade de pertencer a intercessão de A e B.

Se $\widetilde{a} \cdot \widetilde{b} \in A$ então, como A é subgrupo de G,

$$\widetilde{a}^{-1} \cdot (\widetilde{a} \cdot \widetilde{b}) = (\widetilde{a}^{-1} \cdot \widetilde{a}) \cdot \widetilde{b} = e \cdot \widetilde{b} = \widetilde{b} \in A$$

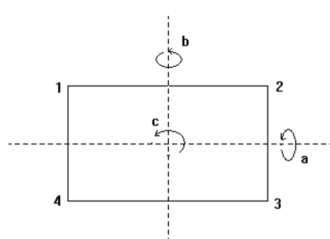
o que é um absurdo.

Analogamente, Se $\widetilde{a} \cdot \widetilde{b} \in B$, teríamos $\widetilde{a} \in B$, absurdo!

Note que $\widetilde{a} \cdot \widetilde{b} \notin A \cup B$, mas $\widetilde{a} \cdot \widetilde{b} \in G$, logo $A \cup B \neq G$.

■

Apresentaremos a seguir um exemplo de **grupo de Klein** e mostraremos que este grupo pode ser decomposto como a união de 3 subgrupos não triviais. Para tanto, considere o grupo de simetrias no retângulo, $(\{e, a, b, c\}, \cdot)$ o qual denotaremos por V. Este grupo é gerado fazendo-se rotações em torno dos seus eixos laterais "a" e "b" e em torno do eixo diagonal "c" como ilustra a figura a seguir:



Onde $a^2 = b^2 = c^2 = e$

Note que o grupo V pode ser decomposto como $V = \{e, a\} \cup \{e, b\} \cup \{e, c\}$, isto é, como a união de três subgrupos distintos não triviais.

Mas todo grupo pode ser escrito como a união de três subgrupos? Se não, como se caracterizam os grupos que possuem essa propriedade?

Respondendo a essa pergunta segue o **Teorema 2**.

Teorema 2. *Um grupo G é a união (não trivial) de três subgrupos se, e só se, é homomórfico ao grup de Klein. Dizemos que G é um grupo homomórfico a H se existe um homomorfismo $\phi : H \longrightarrow G$ injetor.*

A demonstração do teorema será omitida por se tratar de uma demonstração técnica e muito extensa.

Vimos até então, uma condição necessária e suficiente para que um grupo possa ser decomposto em três subgrupos. Condição essa que satisfeita nos levam imediatamente a duas perguntas.

1. Um mesmo grupo, pode ser decomposto em 3 subgrupos de formas diferentes?
2. Dois 3-grupos (grupo que pode ser decomposto em 3 subgrupos) distintos podem ter a mesma decomposição?

A resposta é positiva para ambas as perguntas como ilustra os exemplos a seguir:

Exemplo 1. *O grupo $C_2 \times D_4$ admite duas decomposições distintas:*

$$C_2 \times D_4 \to \{C_4 \times C_2, D_4, D_4\}$$

e

$$C_2 \times D_4 \to \{C_4 \times C_2, C_2 \times C_2 \times C_2, C_2 \times C_2 \times C_2\}.$$

Exemplo 2. *O grupo de ordem 16, onde*

$$a^2 = b^2 = c^2, abc = bca = cab$$

e o grupo $C_2 \times D_4$ do exemplo anterior admitem a mesma decomposição

$$\{C_4 \times C_2, D_4, D_4\}.$$

Quanto à estrutura que os subgrupos de uma decomposição podem ter, segue nosso último resultado:

Teorema 3. *Se um 3-grupo é não-abeliano, então os subgrupos de uma decomposição podem ser (localmente)* ***Abelianos*** *(α) ou* ***não-abelianos*** *(π). E as decomposições possíveis são: $\{\alpha, \alpha, \alpha\}, \{\alpha, \pi, \pi\}$ e $\{\pi, \pi, \pi\}$.*

REFERÊNCIAS

I. N. Herstein, Topics in Algebra. Ginn and Company, 1964.

http://www.jstor.org/discover/10.2307/2316854?uid=2129&uid=2&uid=70&uid=4&sid=21101722566923.

Análise de Convergência do Método GMRES

R. A. Pires* **J. A. J. Avila†**

Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ, 36307-352, São João del Rei, MG

RESUMO: O Método de Resíduo Mínimo Generalizado − GMRES é um método iterativo moderno definido sobre subespaços de Krylov, que é utilizado para resolver numericamente sistemas lineares não simétricos, mal condicionados, esparsos e em blocos provenientes, por exemplo, de problemas da Dinâmica de Fluido Computacional. Nesse trabalho deduziremos e analisaremos a convergência do método GMRES.

Palavras-chave: *Sistemas Lineares, Subespaço de Krylov, Convergência.*

INTRODUÇÃO

A modelagem de muitos problemas da ciência e da engenharia envolvem Equações Diferenciais Parciais − EDP. Em problemas próximos do mundo real é quase impossível a resolução, destes, por métodos analíticos. Recorrendo, desse modo, à utilização de métodos numéricos, principalmente os métodos de Diferenças Finitas e Elementos Finitos. No final do processo da resolução numérica de uma EDP chega-se a um sistema linear ou não-linear de equações algébricas, dependendo da linearidade ou não-linearidade, da EDP.

Considere o seguinte sistema algébrico linear,

$$Ax = b \tag{1}$$

onde, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ e $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Podemos resolver (1) por métodos diretos ou métodos iterativos. Os métodos diretos usam manipulações algébricas e/ou operações elementares. Quando n é grande é necessário de implementações numéricas. São exemplos destes métodos: eliminação Gaussiana, fatoração de matrizes, etc. Os métodos iterativos usam um chute inicial, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, para gerar aproximações sucessivas, $x_k \in \mathbb{R}^n$, que convergem à solução exata, x. São exemplos, destes métodos, os clássicos métodos de Jacobi, Gauss-Seidel, Relaxação, Gradientes conjugados. Os mais modernos são os métodos de subespaços de Krylov e seus variantes.

Quando os problemas são próximos do mundo real, como por exemplo, os problemas que resultam da Dinâmica de Fluido Computacional, de sistemas cardiovasculares, entre outros, o sistema (1) é de grande porte (n grande), a matriz A é não simétrica, definida em

*Aluna de Iniciação Científica. E-mail: ro2assis@yahoo.com.br
†Professor Orientador. E-mail: avila_jaj@ufsj.edu.br

blocos e, na maioria dos casos, esparsa. Sendo muitas vezes inapropriado sua resolução por métodos diretos, tornando-se necessário o uso de métodos iterativos. Uns dos métodos que mais se adapta, nesses casos, é o Método do Resíduo Mínimo Generalizado − GMRES, uma variante do método de subespaço de Krylov, que foi apresentado pela primeira vez por Saad e Schultz (1986).
Devido à importância dos métodos iterativos, na resolução de sistemas lineares (resultantes de problemas do mundo real), neste trabalho, estudaremos a convergência do método GMRES.

RESULTADOS PRELIMINARES

Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ um chute inicial, e $x_k \in \mathbb{R}^n$ a $k-$ésima solução aproximada de (1), $k = 1, 2, ...$ Logo, $Ax_k \approx b$. Definamos o $k-$ésimo resíduo de (1) por

$$r_k = b - Ax_k \tag{2}$$

onde, $r_0 = b - Ax_0$ é o resíduo inicial.

Definição 1 *Um subespaço de Krylov é definido por*

$$\mathcal{K}_k(A, r_0) = \text{Span}\{r_0, Ar_0, ..., A^{k-1}r_0\} \tag{3}$$

Como $\beta = \{r_0, Ar_0, ..., A^{k-1}r_0\}$ é a base natural de $\mathcal{K}_k(A, r_0)$ então para $z \in \mathcal{K}_k(A, r_0)$ existem escalares $\alpha_i, \ i = 0, 1, ..., k$, tal que

$$z = \big(\alpha_{k-1}A^{k-1} + ... + \alpha_1 A + \alpha_0 I\big)r_0 = q_{k-1}r_0$$

onde q_{k-1} é um polinômio de grau menor ou igual a $k - 1$.
Métodos de subespaços de Krylov são *métodos de projeção* (CARVALHO, 2009) que procuram uma solução aproximada x_k, tal que, $x_k \in x_0 + \mathcal{K}_k(A, r_0)$ impondo a condição de Petrov-Galerkin, ie., $b - Ax_k \perp \mathcal{L}_k$ onde, $\mathcal{L}_k$ é o espaço de restrições de dimensão k.

Proposição 1 *Se X é um espaço vetorial de dimensão finita com uma norma, então, todo operador linear sobre X é limitado.*

Uma prova desta Proposição pode ser encontrada em Kreyszig (1978, p. 96).

Método de Arnoldi

A base natural β apresenta dificuldades quando o valor de k é muito alto, tornando-se linearmente dependente. Para corrigir isto é necessário criar uma outra base para $\mathcal{K}_k(A, r_0)$. Assim, se ortogonalizarmos cada vetor de β usando o Método de Arnoldi (ou Gram-Schmidt Modificado) teremos uma base mais estável a medida que k aumenta. Ao fazer uso desse método obtemos uma importante relação

$$AV_k = V_{k+1}H_k \tag{4}$$

onde, $V_k = \big(v_1 \ v_2 \ ... \ v_k\big)$ é a matriz da base ortogonal de $\mathcal{K}_k(A, r_0)$, sendo, $v_1 = r_0/\|r_0\|_2$, V_{k+1} é a matriz da base ortogonal de $\mathcal{K}_{k+1}(A, r_0)$ e H_k é a matriz de Hessenberg Superior, geradas pelo processo de Arnoldi.

MÉTODO DE RESÍDUO MÍNIMO GENERALIZADO – GMRES

O GMRES é um método iterativo baseado em Subespaços de Krylov definido como:

$$\begin{cases} x_k \in x_0 + \mathcal{K}_k \\ \\ r_k \perp \left(\mathcal{L}_k = A\mathcal{K}_k\right) \end{cases} \iff \quad \|r_k\|_2 = \min_{x_k \in \mathcal{K}_k} \|r_0 - Ax_k\|_2 \tag{5}$$

onde, $x_k = x_0 + c_k$, $c_k \in \mathcal{K}_k$ e $\|\cdot\|_2$ é a norma Euclidiana. Então,

$$x_k = x_0 + V_k y_k \tag{6}$$

onde, y_k é desconhecido. Logo de (5) e (4),

$$\|r_k\|_2 = \min_{y_k \in \mathbb{R}^n} \left\| V_{k+1}\|r_0\|_2 e_1 - V_{k+1} H_k y_k \right\|_2 = \min_{y_k \in \mathbb{R}^n} \left\| \|r_0\|_2 e_1 - H_k y_k \right\|_2 \tag{7}$$

Para que a norma do resíduo seja mínima precisamos que o resíduo tenda a zero cada vez que k toma valores muito alto. Então, $H_k y_k = \|r_0\|_2 e_1$, quando $k \to \infty$. Uma vez resolvido este último sistema linear, substituímos o valor de y_k em (6). Portanto, teremos encontrado a solução aproximada de (1).

Teorema 1 *Sejam $\|r_0\|_2 \geqslant \|r_1\|_2 \geqslant \ldots \geqslant \|r_k\|_2$ as normas dos resíduos e $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ a sequências de soluções geradas pelo GMRES. Se a matriz de (1) for normal e a norma de cada resíduo for limitada superiormente e não crescente, então, x_k converge à solução exata x de (1).*

Prova. De hipótese temos $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = 0$. De (1) e (2), temos que $r_k = A(x - x_k)$. Assim, $\lim\limits_{k\to\infty} A(x - x_k) = 0$. Sendo $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear, e pela Proposição 1, temos que A é limitado. Então, $\lim\limits_{k\to\infty} (x - x_k) = 0$. Portanto, $x_k \to x$, $k \to \infty$. $\square$

CONCLUSÃO

Provou-se a convergência do método GMRES para matrizes normais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARVALHO, L. M. Avanços em Métodos de Krylov para Solução de Sistemas Lineares de Grande Porte. SBMAC, p. 148, 2009.

KREYSZIG, E. Introductory Functional Analysis with Applications. J. Wiley S., 1976.

SAAD, Y.; SCHULTZ, M. H. GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. SIAM J. Sci. Stat. Comput., 7(3), 856 - 869, 1986.

Programa de Extensão Universidade na Escola e Escola na Universidade: a Matemática em foco

Alef Azevedo Ribeiro* **Eliza Maria Ferreira†**
Francinildo Nobre Ferreira‡
Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ, 36307-352, São João del-Rei, MG

RESUMO: O presente trabalho trata de experiências de discentes da Licenciatura em matemática da Universidade Federal de São João Del-Rei – UFSJ, bolsistas do Programa de Extensão da UFSJ, de alunos do ensino fundamental e de professores do 5º ano. Até 2011 realizamos uma Olimpíada Regional de Matemática, que em virtude da OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas o interesse por esta olimpíada foi reduzido. Em 2012 atuamos nas oficinas de matemática (projeto Apoio) e realizamos também a VII Gincana Regional de Matemática, com ênfase na resolução de problemas. Sendo este último projeto realizado em 57 escolas subordinadas à Superintendência Regional de Ensino de São João Del – Rei – SRE. Através desse programa, incentivamos e auxiliamos alunos e professores no processo ensino-aprendizagem de Matemática e proporcionamos aos alunos atendidos oportunidade para a superação de dificuldades no que diz respeito à aprendizagem de certos conteúdos matemáticos além de levá-los a uma formação mais completa nesta área.

Palavras-chave: *Gincana de Matemática, resolução de problemas, oficinas.*

INTRODUÇÃO

Este programa foi instituído a partir de ações que realizamos desde 2004, visando promover maior interesse dos alunos, de escolas públicas, pela Matemática, incentivar a participação dos mesmos em competições matemáticas e estreitar as relações entre a UFSJ e escolas participantes. Dentre essas ações, realizamos em 2010 a VII Olimpíada de Matemática, a V Gincana Regional de Matemática - GRM e o projeto Apoio. Em 2011, continuamos desenvolvendo esses projetos, sendo a Olimpíada em duas escolas do município de São João Del-Rei a VI GRM nas escolas subordinadas à Superintendência regional de Ensino – SRE e o projeto Apoio em três escolas.

* Bolsista de Extensão. E-mail: alef-az@hotmail.com
† Bolsista de Extensão. E-mail: elizzacomz@yahoo.com.br
‡ Professor Orientador. E-mail: francinildonobre@gmail.com

OBJETIVO

Promover uma aproximação entre escolas públicas e a UFSJ;

Despertar e incentivar alunos do ensino fundamental no estudo da Matemática, por meio de competições nessa área;

Contribuir para que alunos provindos do ensino básico estejam mais preparados, com relação à Matemática para encarar os anos seguintes; e

Pesquisar sobre Sistemas de Avaliações de Ensino, em Matemática, dos Governos Estadual e Federal destinado ao 5º ano do ensino fundamental.

METODOLOGIA

Na GRM, utilizamos o material produzido durante o ano de 2010, salvo algumas atualizações, que contém avaliações individuais e em grupo, para serem desenvolvidas pelos alunos sob a orientação do professor, ao longo do ano letivo. Material este, elaborado a partir dos Boletins do SIMAVE, dos PCNs e de alguns livros didáticos.

A partir das atividades propostas, cada escola selecionou um aluno por turma para participar de uma cerimônia de premiação na UFSJ.

O Projeto Oficinas de Matemática compreendeu de encontros semanais com os alunos do 6º ao 9º ano do ensino fundamental e 1º ano do ensino médio, procurando apresentar a importância da Matemática para a vida e para suas formações futuras, com ênfase na resolução de problemas.

Na elaboração do banco de questões, foi proposto aos bolsistas a pesquisa de questões de diversas áreas da matemática dos ensinos fundamental e médio, questões essas provenientes de provas governamentais e processos de seleção.

RESULTADOS

Essas ações proporcionaram um incentivo aos alunos atendidos e melhorias na aprendizagem dos conteúdos trabalhados, bem como a participação de alunos na OBMEP. Em 2011 elaboramos uma avaliação diagnóstica de Matemática para o 5º ano a pedido da SRE, feita nos moldes do PROEB/SIMAVE e Prova Brasil, visando diagnosticar o desempenho em Matemática dos alunos. Neste programa, as bolsistas, estão vivenciando a produção de textos de Matemática e participando de atividades diretamente relacionadas à escola, contribuindo assim para sua formação docente.

CONCLUSÕES

Através desse programa, incentivamos e auxiliamos alunos e professores no processo ensino-aprendizagem de Matemática e proporcionamos aos alunos atendidos oportunidade para a superação de dificuldades no que diz respeito à aprendizagem de certos conteúdos matemáticos além de levá-los a uma formação mais completa nesta área.

Ao longo do programa redirecionamos diversas ações no sentido de melhor se adequar a realidade do nosso público alvo. Essas ações visam a melhoria do ensino de Matemática em nossa região.

AGRADECIMENTO

Os autores agradecem ao Programa de Extensão da UFSJ/2012 - PROEX pelo apoio financeiro concedido para a o desenvolvimento deste trabalho.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. L; “Geometria Euclidiana Plana”, SBM, 2004. Coleção projeto Euclides.

FERREIRA, F. N., LOPES, C. P. “Praticando Geometria com a 5ª série”. Módulo de Geometria, DMATE/UFSJ, 2007.

FERREIRA, F. N. et al., Textos VI ORM 2009, 6°ano ao Ensino Médio.

GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito e JÚNIOR, José Ruy Giovanni. A conquista da Matemática: a + nova – São Paulo: FTD, 2002. – (Coleção a conquista da Matemática,).

IMENES, JAKUBO, LELLIS; “Geometria”, Editora Atual, 1992.

KUBOVIC, José e LELLIS, Marcelo. Matemática na medida certa – Editora Scipione.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS: matemática/ Secretaria se Educação Fundamental. –Brasília: MEC/SEF, 1997.

REAME, Eliane. “Matemática Criativa”, 4ª série/ 5ª ed. – São Paulo: Saraiva, 2004.

REVISTA NOVA ESCOLA.

SILVA, Aparecida Francisco da; KODAMA, Helia Matiko Yano. Jogos no Ensino da Matemática – http://www.bienasbm.ufba.br/OF11.pdf

SOARES, E. S., “Matemática com o Sarquis”, Editora Saraiva, 2007;

http://www.somatematica.com.br

http://www.educacao.mg.gov.br

http://www.wikipedia.com.br

http://www.veronicaweb.com.br/serie3unid26/maj3_un26a.htm

http://revistaescola.abril.ig.com.br/edicoes/0180/aberto/matematica.shtml

http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/geometria/geo-ang.htm

http://www.scribd.com/doc/271620/apostila-de-desenho-geometrico

Resolução geométrica da equação do 2° grau: utilizando conceitos históricos da matemática na sala de aula

Felipe Otávio dos Santos* **Mariana Lopes*** **Laís Daniele Silva***,
Maximiliano Garcia de Almeida* **Rita de Cássia Maia Resende***
Thássia Resende Souza*
Viviane Cristina Almada de Oliveira†
Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ, 36307-352, São João del-Rei, MG

RESUMO: O presente trabalho tem por objetivo relatar a experiência de uma intervenção de um grupo do PIBID MATEMATICA / UFSJ em duas turmas de 9º anos de uma escola pública do estado de Minas Gerais. A intervenção foi feita utilizando-se de fatos históricos da matemática e de técnicas de desenho geométrico para discutir com os alunos como (e quando é possível) resolver geometricamente equações do 2° grau. Tratamos, além da importância e da utilidade da resolução de equações de 2º grau, do seu desenvolvimento ao longo dos tempos até chegarmos na utilização da chamada fórmula de Bhaskara.

Palavras-chave: *Equação do 2° grau; Resolução geométrica; história da matemática.*

INTRODUÇÃO

O PIBID – Programa Institucional de Bolsa de Iniciação a Docência - é um programa de pesquisa financiado pela CAPES destinado a alunos de licenciatura e tem por finalidade incentivar novos profissionais para o exercício da docência no ensino básico, em escolas públicas, e capacitar os futuros professores para a produção e uso de materiais alternativos ao livro didático no ensino de matemática e para a implementação de práticas pedagógicas inovadoras. O subprojeto de matemática busca métodos alternativos aos dos livros didáticos para trabalhar com os conteúdos listados no CBC. Dentro deste subprojeto o trabalho é dividido de acordo com os eixos temáticos do CBC e nós somos responsáveis pelo eixo temático Álgebra.

* Aluno Bolsista do Programa Institucional de Bolsa de iniciação a Docência – PIBID, da CAPES - Brasil. Email: felipe.otavio17@gmail.com; marilopes.lopes6@gmail.com; laisdanisilva@hotmail.com; max_almeidagarcia@hotmail.com; cassiamresende@yahoo.com.br; thassiarsouza@yahoo.com.br
† Professor Orientador: E-mail: viviane@ufsj.edu.br

Neste ideal, na busca de realizar aulas de matemática diferentes das tradicionais ou fugir seguir fielmente o livro didático buscamos através de uma pesquisa em livros, especialmente no livro ***Introdução à História da Matemática*** de Howard Eves buscar aspectos históricos sobre a resolução de equações do 2º grau.

OBJETIVO

O trabalho procurou trazer uma proposta inovadora aos alunos sobre a resolução de equações do 2° grau. Através de conceitos históricos da matemática levamos aos alunos um tipo de resolução não costumeiramente ensinada nas salas de aula. Da parte dos alunos, esperava-se que compreendessem o processo dinâmico por detrás daquele tipo de resolução e suas limitações, conceitos históricos por detrás da equação do segundo grau, seguindo a vertente da intervenção até o memento, e que fossem capazes de discutir e avaliar tal método por si só e em comparação a resolução de equação do 2° grau costumeiramente abordado em livros didáticos.

Outra perspectiva importante deste trabalho foi o uso de desenho geométrico, uma vez que eram necessárias certas habilidades para o desenvolvimento da atividade. Assim, podemos citar dentre os objetivos o caráter de instaurar/resgatar, ainda que sucintamente, a prática de construção geométrica (habilidades adquiridas no desenho geométrico) abandonada e o desenvolvimento de um tipo de resolução diferente daquela abordada nos livros didáticos.

METODOLOGIA

Trabalhando em cima uma situação problema, propomos aos alunos que resolvessem a equação $x^2 -10x + 9 = 0$, sem a utilização da fórmula de Bhaskara e nem as relação de Girard (soma e produto das raízes). Em primeira instância diversos alunos responderam a demanda, mas quando requisitados a justificar de onde encontravam o conjunto solução da equação não sabiam, o que demonstra utilização das relações aqui tidas como proibidas. Assim, foi proposto aos alunos que seguissem os seguintes passos: Trace o segmento AB = 10 (valor de b) . Por H, ponto médio de AB, levante o segmento perpendicular MJ = 3 (igual à raiz quadrada de 9, raiz quadrada do coeficiente c) e, com o centro em E e raio PB, trace um arco em circunferência que corta AB no ponto M. As raízes desejadas serão dada pelo comprimento AM e MB.

De certa forma, houve certa dificuldade momentânea no entendimento do passo a passo (característica deste tipo de álgebra), mas a maior dificuldade demonstrada por tais alunos foi em manusear os materiais de construção geométrica e realizar tais construções.

Depois de superadas, na melhor maneira possível, os déficits em construções geométricas, foi proposto aos alunos que investigassem quais os tipos de equações do 2° grau eram contempladas por tal tipo de resolução.

RESULTADOS

Com o desenvolvimento do projeto, podemos observar que os alunos compreenderam suficientemente o método, suas aplicações e restrições e através disso, foi possível a discussão da evolução da álgebra e o caráter de processos gerais abordados por ela. Foi possível ainda concluir, por parte dos alunos, que os melhores métodos, e mais famosos, são aqueles em que reside um número menor de restrições.

Outra via importante, foi a aproximação de conceitos históricos, onde estava baseada nossa proposta original, principalmente no que se diz respeito a história e desenvolvimento da álgebra.

E talvez o ápice da intervenção, foi a retomada, ainda que sucinta e parcial, de construções geométricas e a possibilidade de manuseio de ferramentas que deveriam fazer parte da vida escolar;

CONCLUSÕES

A intervenção revelou a não habilidade dos alunos para com o manuseio de materiais simples de construção geométricas, talvez justificáveis pelo abandono do ensino da geométrica e consequentemente do desenho geométrico. Outra conclusão diz respeito ao método em si. Os alunos não estão acostumando a proposta desse tipo e por isso houve certo estranhamento. Todavia, concluímos com satisfatória tal intervenção, uma vez que ao fim da pratica tais alunos possuíam entendimento do método, suas aplicações e restrições, além de conseguirem refletir sobre ele em comparação a outros métodos de resolução de equações do 2° grau.

.

AGRADECIMENTO

Os autores agradecem à CAPES - Brasil pelo apoio financeiro concedido para a o desenvolvimento deste trabalho. A orientação da professora Viviane Cristina Almada de Oliveira e a colaboração das escolas da região que recebem os alunos bolsistas deste programa.

REFERÊNCIAS

DIAS, Graciane Ferreira. **Utilizando processos geométricos da história da matemática para o ensino de equação do 2° grau,** 2009. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Rio Grande do Norte, 2009.

Controle Ótimo de um Problema de Distribuição de Temperatura

Anderson Gonçalves Coelho[*] José Angel Dávalos Chuquipoma[†]

Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ, 36307-352, São João del Rei, MG

RESUMO: Estudar problemas de controle ótimo governados por equações diferenciais parciais consiste em minimizar ou maximizar um funcional de custo sujeito a restrições, dadas pela equação de estado, a qual fornece informações do problema estudado. A solução do problema é realizada pelo controle ótimo. O objetivo principal destes problemas consiste em caracterizar o controle ótimo através de um sistema de otimalidade, formado pela equação de estado, a equação de estado adjunto e a derivada de Gateaux do funcional de custo. Neste trabalho abordamos o problema de controle ótimo de um sistema que modela a distribuição de temperatura em um domínio limitado. O método dos multiplicadores de Lagrange é aplicado para encontrar o sistema de otimalidade.

Palavras-chave: *Distribuição de temperatura, controle ótimo, condições de otimalidade, estado ótimo, multiplicadores de Lagrange.*

INTRODUÇÃO

Ferramentas matemáticas sempre tiveram um papel importante no desenvolvimento de várias áreas da ciência, permitindo, muitas vezes, aplicações que jamais seriam possíveis sem o emprego das mesmas. Esse fato está cada vez mais evidente graças ao avanço vertiginoso da tecnologia em diversas áreas do conhecimento, como Física, Engenharia e Química.

Porém, o grande desafio é construir um modelo matemático que seja coerente e, principalmente, aplicável ao problema em estudo. Nesse sentido, vale ressaltar a grande gama de aplicações de modelos de equações diferenciais que podem ser utilizados através de problemas de controle ótimo, que será a ferramenta desse estudo.

Mais especificamente, sejam a nossa variável estado $z \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ a temperatura de um corpo homogêneo ocupando um domínio limitado Ω contido em $\mathbb{R}^n$, com fronteira $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ Lipschitz regular, $v \in U_{ad} \subset L^2(\Omega)$, chamada de variável controle, onde U_{ad} é um subconjunto fechado e convexo chamado de conjunto de controles admissíveis, $g \in L^2(\Gamma_2)$ uma função conhecida, $\mathbf{b}$ um vetor conhecido que satisfaz $\mathbf{b} = 0$ sobre Γ_2 e $div(\mathbf{b}) \geq 0$ e Δ o operador de Laplace.
O problema de controle consiste em encontrar um controle ótimo $v^* \in U_{ad}$ que minimiza

[*]Aluno de Iniciação Científica. E-mail: anders.2007@hotmail.com
[†]Professor Orientador. E-mail: jadc13@ufsj.edu.br

um funcional $J(v, z[v])$ que é denominado funcional de custo ou função objetivo. Em outras palavras, queremos escolher um $v^* \in U_{ad}$ que minimiza a "distância" entre a variável estado z e uma função alvo, denominada z_d. Nesse problema, um candidato para ser esse funcional é

$$J(v, z[v]) = \frac{1}{2}\int_\Omega (z[v] - z_d)^2 dx + \frac{N}{2}\int_\Omega v^2 dx \tag{1}$$

onde $z[v]$ é solução do Problema (S) mostrado abaixo, z_d é a função observação, a qual representa o estado ideal que queremos obter e $N > 0$ é uma constante. O segundo termo do lado direito de (1) funciona como uma penalidade à ação de controle. Assim, precisamos encontrar um controle ótimo que seja solução do seguinte problema de controle:

$$(P)\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\min_{v\in U_{ad}} J(v, z[v]) = \frac{1}{2}\int_\Omega (z[v] - z_d)^2 dx + \frac{N}{2}\int_\Omega v^2 dx \\ \\ \qquad\qquad \text{Onde} \quad z[v] \quad \text{é a solução do problema:} \\ \qquad\qquad (S)\left\{\begin{array}{rl} -\Delta z + div(\mathbf{b}z) = v & \text{em} \quad \Omega, \\ z = 0 & \text{sobre} \quad \Gamma_1, \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} = g & \text{sobre} \quad \Gamma_2. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Note que o problema está bem definido, podendo ser aplicado em sistemas onde deseja-se exercer algum controle sobre a temperatura, como alto-fornos e máquinas elétricas, onde o bom funcionamento está estritamente relacionado com a temperatura.

OBJETIVO

Resumidamente, os objetivos desse projeto são estudar a existência e a unicidade da solução do problema de controle de distribuição de temperatura e as respectivas condições de otimalidade do problema.

METODOLOGIA

Inicialmente considerou-se o Problema (S) de distribuição de temperatura estacionário, estudando-se tópicos da Teoria de espaços de Sobolev contidos em [2] e [3]. Em seguida provou-se a existência e unicidade do controle ótimo do problema de controle proposto e as respectivas condições de otimalidade que caracterizam o controle e estado ótimo segundo as idéias contidas especialmente em [1].

RESULTADOS

Para finalizar o trabalho, aplicou-se o Teorema de Lions-Stampacchia (Cavalcanti, 2007, p. 161) para provar a existência e a unicidade do Problema de Controle e, em seguida, aplicou-se técnicas dos multiplicadores de Lagrange, chegando no seguinte resultado:

Teorema 1 *Dados $z_d \in L^2(\Omega)$, $v \in U_{ad}$, $\boldsymbol{b} = 0$ sobre Γ_2, $div(\boldsymbol{b}) \geq 0$ e $g \in L^2(\Gamma_2)$, então existe um único controle ótimo v^*, $z^* = z[v^*]$ estado ótimo e $p^* \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ estado adjunto tal que $(v^*, z^*, p^*) \in U_{ad}$ x $(H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^2$ verifica o seguinte sistema de optimalidade*

$$\begin{cases} \begin{cases} -\Delta z^* + div(\boldsymbol{b} z^*) = v & \text{em} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial z^*}{\partial \eta} = g & \text{sobre} \quad \Gamma_2. \end{cases} \\ \\ \begin{cases} -\Delta p^* - \boldsymbol{b}\nabla p^* = -z^* + z_d & \text{em} \quad \Omega, \\ p^* = \dfrac{\partial p^*}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre} \quad \Gamma_2. \end{cases} \\ \\ \displaystyle\int_\Omega (v - v^*)(Nv^* - p)dx \geq 0 \quad \forall\, v \in U_{ad} \end{cases}$$

Os resultados obtidos podem ser aplicados tanto no caso clássico (funções com derivadas contínuas) quanto em aspectos mais gerais, que podem envolver até mesmo funções descontínuas, que no sentido clássico não seriam diferenciáveis, mas trabalhando com espaçoes de Sobolev, integral de Lebesgue, distribuições, equação de estado adjunto, derivada de Gateaux, entre outros conceitos, podemos obter um problema bem definido formado por equações diferenciais.

Outro outro ponto importante se refere ao conjunto U_{ad}, que não é necessariamente um espaço vetorial. Isso aumeta a gama de aplicações do problema estudado em relação ao conhecimento já disponível, pois procuramos soluções (controles admissíveis) em um conjuto mais geral, o que pode ser observado em relação à [1]. Portanto, o enfraquecimento das hipóteses utilizadas nesse trabalho garante certa exclusividade do problema, sendo interessante para um eventual desenvolvimento de um problema prático.

CONCLUSÕES

No decorrer do desenvolvimento desse projeto, foram estudados diversos tópicos do Análise Funcional, espaços de Sobolev e condições de otimalidade para, então, concluir o resultado final, exposto pelo Teorema Final. Com isso, pode-se enxergar mais a fundo a aplicabilidade desse projeto, sendo importante, porém, a implementação de um algoritmo computacional relacionado ao processo descrito nesse artigo para, efetivamente, aplicar a teoria desenvolvida em um processo prático. Devido ao cunho matemático do trabalho, isso não foi estudado, mas pode ser visto como uma sugestão para outros projetos.

Agradecimento: Os autores agradecem ao CNPq e especialmente à toda equipe de professores do PICME UFMG/UFSJ.

REFERÊNCIAS

[1] Salsa, Sandro; *Partial Differential Equations in Action From Modelling to theory.* Springer - Verlag Italia, Milano 2008.

[2] Lions, J. L; *Contrôle Optimal des Systèmes Gouvernès par des Équations aux Deriveés Partielles.* Dunod - Gauthiers - Villars, Paris 1968.

[3] R. A. Adams; *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York, 1975.

Um Estudo sobre Frações Contínuas

Felipe Otávio dos Santos* **Carolina Fernandes Molina Sanches†**
Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ, 36307-352, São João del Rei, MG

RESUMO:

As frações contínuas foram estudadas por grandes matemáticos dos séculos XVII e XVIII e é um dos mais belos temas da matemática elementar, sendo até hoje objeto de estudo em várias áreas da matemática, pura e aplicada, principalmente em teoria dos números. Através de uma pesquisa teórica fundamentada na leitura de livros e artigos científicos da área começamos a mostrar o objetivo de nosso estudo que é a teoria das frações contínuas e suas aplicações, justificada pela grande aplicabilidade desta teoria em várias áreas da matemática, pura e aplicada. Neste trabalho estudamos o que são frações contínuas e seus convergentes. Apresentamos algumas expansões de números irracionais em frações contínuas através do processo de obtenção de aproximações sucessivas por racionais. Também fizemos um estudo sobre as propriedades dos convergentes de uma fração contínua.

Palavras-chave: *Frações Contínuas, aproximações sucessivas, números racionais, números irracionais.*

INTRODUÇÃO

Uma expressão da forma

$$a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{a_4 + \ddots}}}$$

é chamada de **fração contínua**. Em geral, os números $a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ...$ podem ser reais ou complexos, e o número de termos pode ser finito ou infinito.
As frações contínuas simples têm a forma:

*Aluno de Iniciação Científica. E-mail: felipe.otavio17@gmail.com
†Professor Orientador. E-mail: carolina@ufsj.edu.br

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}}$$

onde o primeiro termo a_1, é, geralmente, um inteiro positivo ou negativo, podendo ser zero, e os demais termos são inteiros positivos.
As frações contínuas simples finitas são da forma

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

Um jeito mais conveniente de escrever é $[a_1, a_2, a_3, ..., a_n]$. Os termos $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ são chamados **quocientes parciais** da fração contínua.

OBJETIVO

O objetivo específico deste trabalho é a apresentação do estudo sobre a teoria das frações contínuas e suas aplicações.

METODOLOGIA

Revisão bibliográfica sobre o tema e estudo dirigido para discutir e analisar os fatos estudados.

RESULTADOS

Estudamos sobre os convergentes de uma fração contínua e resultados que envolvem os convergentes. Um resultado interessante é como aproximar números irracionais por racionais usando frações contínuas, como por exemplo obter a expansão de $\sqrt{3}$:

$$\sqrt{3} \cong 1,732050808$$

Sendo, $a_1 = \lfloor\sqrt{3}\rfloor = 1$ e $\sqrt{3} = a_1 + \dfrac{1}{x_1}$

temos, $x_1 = \dfrac{1}{\alpha - a_1} = \dfrac{1}{(\sqrt{3}-1)} \cdot \dfrac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

Como, $a_2 = \left\lfloor \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \right\rfloor = 1$,temos; $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} = 1 + \dfrac{1}{x_2}$

$x_2 = \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} - 1} = \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}} = 1 \cdot \dfrac{2}{(\sqrt{3}-1)} \cdot \dfrac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)} = = \dfrac{2\sqrt{3}+2}{2} = \sqrt{3}+1$

Como,$a_3 = \lfloor \sqrt{3}+1 \rfloor = 2$, temos: $\sqrt{3}+1 = x_2 = a_3 + \dfrac{1}{x_3} = 2 + \dfrac{1}{x_3}$

Resolvendo esta última equação para x_3 temos: $x_3 = \dfrac{1}{(\sqrt{3}+1-2)} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

logo,

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{3}+1}{2}}}}$$

Observando a expansão de $\sqrt{3}$ temos que $x_3 = x_1$ e concluímos que x_4 será igual a x_2 e desta forma, continuando com este processo,iremos obter a sequência $a_1, a_2, a_3, a_4, ...$ e os valores $1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, ...$ Logo a fração contínua infinita representando $\sqrt{3}$ é dada por: $\sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, ...] = [1, \overline{1, 2}]$.

CONCLUSÕES

Ao desenvolver este trabalho pudemos perceber a importância da utilização das frações contínuas na aproximação de números irracionais por números racionais através das aproximações sucessivas. Também pudemos desenvolver um estudo envolvendo os convergentes de uma fração contínua.

REFERÊNCIAS

OLDS, C. D. Continued fractions. Washington: Mathematical Association of America, 1963.

SANCHES, C. F. M., SALOMÃO, L. A. D. A expanção do número e em frações contínuas. Uberlândia: FAMAT em revista n.1 dez. 2003.
Disponível em: http://www.portal.famat.ufu.br/node/262.

SANTOS, J. P. O. Introdução à teoria dos números. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1998.

Evolução Histórica do Controle Estatístico da Qualidade

Carlos Helber dos Santos* **Anderson Sousa Diniz†**

Departamento de Engenharia Mecânica – DEMEC, UFSJ, 36307-352, São João Del Rei, MG

Andréa Cristiane dos Santos Delfino‡

Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ, 36307-352, São João del-Rei, MG

RESUMO: Este trabalho trata-se de uma breve descrição, da evolução histórica do controle estatístico da qualidade (CEQ). O CEQ é um conjunto de ferramentas estatísticas que podem ser utilizadas para auxiliar na tomada de decisões em processos industriais. Segundo Werkema (1995), o controle da qualidade moderno teve seu início na década de 30, nos Estados Unidos, com a aplicação industrial do gráfico de controle inventado pelo Dr. Walter A. Shewhart. Sua origem e os motivos que influenciaram seu crescimento são explorados neste trabalho.

Palavras-chave: *Controle Estatístico da Qualidade, Evolução do CEQ.*

INTRODUÇÃO

Com o aumento da competição entre indústrias e intensificação das atividades dos órgãos oficiais de inspeção, a indústria competitiva não pode mais considerar o controle da qualidade como um trabalho em tempo parcial, onde muitas vezes era apenas para cumprir um protocolo, atualmente se faz necessário o uso de ferramentas para um controle rigoroso.

Sendo assim, a necessidade de implantar métodos de avaliação sistemática em um processo, passou a ser determinante para a rápida detecção de problemas e consequentemente uma eficiente intervenção, de tal forma que padrões de qualidade fossem atingidos.

Nos dias atuais o CEQ é considerado uma ferramenta imprescindível para o monitoramento e tomada de decisões em processos industriais.

* Aluno de Iniciação Científica. E-mail: carlos.helber@ig.com.br
† Aluno de Iniciação Científica. E-mail: Anderson_diniz@msn.com
‡ Professor Orientador. E-mail: andrea@ufsj.edu.br

Sendo assim, o objetivo deste trabalho foi de verificar através de embasamento histórico os motivos que a originaram como sua importância foi verificada, onde ele foi aplicado e como se espalhou pelo mundo. Sendo assim, esse contexto histórico permitirá entender sua aplicação, funcionalidade e importância para a indústria atual.

METODOLOGIA

Para a realização deste trabalho, foram feitas pesquisas bibliografias em referências sobre o tema, e verificação através de comparação entre os escritores.

RESULTADO

Segundo Montgomery (2004), Frederick W. Taylor introduziu alguns princípios de gerenciamento científico em 1875, dividindo o trabalho em unidades menores, no intuído de padronização da produtividade, gerando assim a necessidade um melhor controle da produção.

A partir dessa nova configuração industrial criou-se métodos para serem utilizados nas industriais para o monitoramento de um processo. Segundo Werkema (1995), esta metodologia foi introduzida na década de 30, nos Estados Unidos, com a aplicação do gráfico de controle da fabricação inventado pelo Dr. Walter A. Shewhart na empresa de telefonia “Bell Telephone Laboratories”, e deu origem, influenciando, o que se conhece hoje por Controle Estatístico da Qualidade (CEQ).

Um dos grandes defensores da utilização dos gráficos de Shewhart foi o estatístico William Edwards Deming, reconhecido pela melhoria dos processos produtivos durante a Segunda guerra Mundial. Neste mesmo contexto também pode-se citar Joseph Moses Juran que estimulou a criação do método de controle da qualidade do Japão, o qual deu origem ao conceito de Controle de Qualidade Total.

A utilização efetiva em escala mundial das técnicas estatística de controle de qualidade se deu durante a Segunda Guerra Mundial, devido às necessidades de produção de suprimentos militares de qualidade, (Werkma, 1995).

Para a utilização sistemática foram criadas sete ferramentas para auxiliar de forma objetiva a resolução de problemas referentes ao CEQ, são elas: Histograma, Folha de verificação, Gráfico de Pareto, Diagrama de Causa e efeito, Diagrama de dispersão, Diagrama de concentração de defeito e Gráfico de controle (Montgomery, 2004).

CONCLUSÕES

Por meio desta pesquisa concluiu-se que o controle estatístico da qualidade surgiu para auxiliar mudanças no modo de produção industrial, facilitando a monitoração da produção, a visualização e correção de erros numa célula produtiva. Com essa ferramenta pode-se avaliar a produção como um todo ou de maneira particionada, o que facilita na tomada de decisões.

A utilização efetiva do CEQ ocorreu durante a Segunda Guerra Mundial, impulsionada pelas necessidades de produção em grande escala, e produtos de qualidade.

REFERÊNCIAS

WERKEMA, Maria C. C. Ferramentas estatísticas básicas para o gerenciamento de processos. Belo Horizonte: UFMG, 384 p. 1995.

MONTGOMERY, Douglas C. Introdução ao controle estatístico da qualidade. Rio de Janeiro: LTC, 513 p. 2004.