



Universidade Federal
de São João del-Rei

BACHARELADO EM MATEMÁTICA

LAURA GOIS VERGUEIRO

**ENTRE GEOMETRIA E RELATIVIDADE:
CURVAS NO ESPAÇO DE LORENTZ-MINKOWSKI**

SÃO JOÃO DEL-REI - MG

2026

LAURA GOIS VERGUEIRO

**ENTRE GEOMETRIA E RELATIVIDADE:
CURVAS NO ESPAÇO DE LORENTZ-MINKOWSKI**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenadoria do Curso de Matemática, da Universidade Federal de São João del-Rei, como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Benedini Riul

SÃO JOÃO DEL-REI - MG

2026

Ficha catalográfica elaborada pela Divisão de Biblioteca (DIBIB)
e Núcleo de Tecnologia da Informação (NTINF) da UFSJ,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

V498e Vergueiro, Laura Gois.
Entre Geometria e Relatividade : curvas no espaço
de Lorentz-Minkowski / Laura Gois Vergueiro ;
orientador Pedro Benedini Riul. -- São João del
Rei, 2026.
163 p.

Trabalho de Conclusão (Graduação - Matemática) --
Universidade Federal de São João del-Rei, 2026.

1. Geometria Diferencial. 2. Contato de curvas.
3. Espaço de Minkowski. I. Benedini Riul, Pedro ,
orient. II. Título.

LAURA GOIS VERGUEIRO

ENTRE GEOMETRIA E RELATIVIDADE: CURVAS NO ESPAÇO DE LORENTZ-MINKOWSKI

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática, da Universidade Federal de São João del-Rei, como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Benedini Riul

Data de aprovação: 9 de julho de 2026.

Banca examinadora:

Documento assinado digitalmente
 **PEDRO BENEDINI RIUL**
Data: 20/08/2026 14:23:14-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Orientador: Prof. Dr. Pedro Benedini Riul - UFSJ

Documento assinado digitalmente
 **VIVIANE PARDINI VALERIO**
Data: 21/08/2026 17:10:42-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Viviane Pardini Valério- UFSJ

Documento assinado digitalmente
 **ALFREDO VINICIUS ANDRADE GUIMARAES**
Data: 20/08/2026 16:03:07-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Alfredo Vinicius Andrade Guimarães- UFSJ

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente ao meu orientador, Pedro Benedini Riul, pela paciência, carinho e suas opiniões sinceras, que mudaram para melhor este trabalho e, parafraseando suas próprias palavras, por me dizer “o que não está escrito no livro”. Além disso, não posso deixar de agradecê-lo por aceitar estudar um tema tão louco quanto esse comigo e acreditar que eu seria capaz.

Agradeço ao Rafael, meu porto seguro, por suas palavras e conselhos repletos de carinho e cuidado, qualidades tão próprias de almas pacientes e tranquilas, que sempre acalmam meu mundo ansioso.

Agradeço à minha família, em especial minha mãe, meu pai, meu irmão, meus avós e meus tios mais próximos, pelo cuidado que ultrapassa distâncias e os ouvidos atentos às minhas histórias. Em particular, agradeço à minha mãe, minha primeira professora e maior incentivadora, por acreditar em todos os meus sonhos e fazer de tudo para que eles se tornassem realidade.

Por fim, quero agradecer a professora Viviane e ao professor Alfredo por terem aceitado participar da banca para avaliar este trabalho. Agradeço também a todos os professores do Departamento de Matemática e Estatística da UFSJ. Em particular, aos professores: Carlos, Wilker, Gustavo, Jorge, Carolina e Lorena, pelas aulas desafiadoras e os ensinamentos que ultrapassam a universidade. Em especial, aos professores de física Rodrigo e Alfredo agradeço por suas aulas espetaculares que mudaram minha vida.

Resumo

Este trabalho estuda curvas no espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^n$. Para tanto, realiza-se o estudo algébrico do espaço pseudo-euclidiano de índice ν , seus subespaços, suas propriedades ortogonais e as diferenças do espaço euclidiano usual. Além disso, desenvolve-se a teoria de Geometria Diferencial clássica para curvas no plano $\mathbb{R}_\nu^2$ e no espaço $\mathbb{R}_\nu^3$, definindo curva regular, parametrizada pelo comprimento de arco e o referencial de Frenet-Serret, culminando no Teorema Fundamental das Curvas Planas e no Teorema Fundamental das Curvas Admissíveis. Adicionalmente, a Teoria de Contato de curvas é apresentada para o espaço de Lorentz, onde se examina a proximidade de curvas a retas e pseudo-círculos, obtendo-se uma classificação para a ordem de contato com tais objetos. Por fim, analisa-se a Teoria da Relatividade Restrita, a qual interpreta as curvas como trajetórias de partículas no espaço-tempo, chamadas linhas de universo, investigando fenômenos decorrentes da teoria e a métrica de Minkowski como um invariante do espaço-tempo, justificando e motivando o estudo matemático realizado.

Palavras-chave: Espaço de Lorentz-Minkowski; métrica de Minkowski; Geometria Diferencial; Teoria de Contato; Teoria da Relatividade Restrita.

Abstract

This text studies curves in the Lorentz-Minkowski space $\mathbb{L}^n$. For this purpose, an algebraic study of the pseudo-Euclidean space of index ν , its subspaces, its orthogonal properties, and the differences from the usual Euclidean space is carried out. Furthermore, the classical Differential Geometry theory for curves in the plane $\mathbb{R}_\nu^2$ and in the space $\mathbb{R}_\nu^3$ is developed, defining regular curves parameterized by arc length and the Frenet-Serret frame, culminating in the Fundamental Theorem of Plane Curves and the Fundamental Theorem of Admissible Curves. Additionally, the Contact Theory of curves is presented for the Lorentz space, examining the proximity of curves to lines and pseudo-circles, and obtaining a classification for the order of contact with such objects. Finally, the Special Theory of Relativity is analyzed, which interprets curves as trajectories of particles in spacetime, called worldlines, investigating the phenomena arising from the theory and the Minkowski metric as a spacetime invariant, thereby justifying and motivating the mathematical study performed.

Keywords: Lorentz-Minkowski space; Minkowski metric; Differential Geometry; Contact Theory; Special Theory of Relativity; .

Lista de Figuras

1	Movimento da partícula.	12
2	Representação de v e u em $\mathbb{L}^3$	15
3	Objetos formados por vetores que equidistam c da origem em $\mathbb{L}^2$	17
4	Vetores que equidistam 1 em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{L}^2$	18
5	Objetos formados por vetores que equidistam c da origem em $\mathbb{L}^3$	18
6	Diagrama de tipos causais em $\mathbb{L}^3$ e $\mathbb{L}^2$	19
7	Diagrama do produto vetorial em espaços tridimensionais.	23
8	Diagrama do produto vetorial da base canônica em espaços quadridimensionais.	24
9	Projeção de v e componente perpendicular de v em relação a U	26
10	Representação de v em $\mathbb{L}^3$	27
11	Representação das retas r, s e t	41
12	Representação dos planos π_1, π_2 e π_3 em relação ao cone de luz.	48
13	Representação do plano $\pi : x + y = 0$	49
14	Representação do plano π e da reta $\pi^\perp$ em $\mathbb{L}^3$	52
15	Rotações hiperbólicas de u e v por ângulos θ e φ , respectivamente.	57
16	Curva parametrizada em $\mathbb{R}_\nu^n$	72
17	Parametrização do ponto p pela curva α em $\mathbb{L}^n$	74
18	Parametrização de reta em $\mathbb{L}^n$	74
19	Parametrização do círculo euclidiano em $\mathbb{L}^2$	75
20	Parametrização de círculo euclidiano no plano xy	75
21	Parametrização de um ramo de uma hipérbole no plano yz	76
22	Parametrização de um ramo de uma hipérbole no plano yz	76
23	Parametrização de uma hélice euclidiana em $\mathbb{L}^3$	77
24	Curva α e sua orientação.	78
25	Cúspide em $\mathbb{L}^2$	78
26	Cardioide em $\mathbb{L}^2$	79
27	Espiral de Arquimedes no plano xy em $\mathbb{L}^3$	81
28	Versão Lorentziana da Espiral de Arquimedes $\mathbb{L}^2$	81
29	Diagrama de reparametrização de curvas em $\mathbb{R}_\nu^n$	83
30	Traço da curva α em $\mathbb{L}^3$	88
31	Hélices euclidianas congruentes em $\mathbb{L}^3$	89
32	Catenária em $\mathbb{R}_\nu^2$	90

33	Curvas de tipo luz em $\mathbb{L}^2$	92
34	Representação do Referencial de Frenet para curvas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{L}^2$ relacionados aos diferentes tipos causais do vetor tangente.	93
35	Linhas hiperbólicas em $\mathbb{L}^2$	96
36	Linhas de Sitter em $\mathbb{L}^2$	97
37	Interpretação geométrica da curvatura em $\mathbb{L}^2$	102
38	Traço da curva α em $\mathbb{L}^3$	111
39	Traço da Curva de Viviani e as superfícies que a originam em $\mathbb{L}^3$	113
40	Planos gerados pelo Triedro de Frenet de uma curva α em $\mathbb{L}^3$	115
41	Representação da curva α no plano oscular, o vetor v e o vetor binormal à α	116
42	Representação geométrica da função f em relação a curva α	116
43	Traço da curva α em $\mathbb{L}^3$	118
44	O espaço de Sitter e o espaço hiperbólico em $\mathbb{L}^3$	119
45	Traço da curva em $\mathbb{L}^3$	123
46	O germe $ s $ em s_0	128
47	Gráfico de f_1 e f_2	129
48	Comparação do gráfico das funções $\pm s^2$ e $\pm s^3$	130
49	Representação da função $F(s)$	132
50	Comparação do gráfico das funções $\sin(s) - s$ e $-s^3$	133
51	Representação do conjunto $F^{-1}(0)$ em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{L}^2$ nos diferentes tipos causais de $v - p$	135
52	Representação do conjunto $F^{-1}(0)$ em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{L}^2$, onde v é de tipo luz.	136
53	Gráfico da função $f_k(s) = s^k$, para $k = 1, 2, 3, 4$	137
54	Interpretação de f_h	138
55	Raio de curvatura e centro de curvatura em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{L}^2$	139
56	Traço da curva α e os círculos osculadores H e S	143
57	Traço da curva α e ε	144
58	Traço da elipse α em $\mathbb{L}^2$ com os pontos de tipo luz destacados.	146
59	Traço da elipse α , sua evoluta ε_α e a evoluta de sua evoluta ε , em $\mathbb{L}^2$	148
60	Traço da curva α e sua evoluta próximos da origem.	149
61	Representação de K e K' em $t = t_0$ e $t' = t'_0$	150
62	Ana, Bruna e o avião de papel.	151
63	Raio de luz com velocidade c e referenciais K e K'	152
64	Ana e Bruna medindo a mesma régua em repouso em relação a K'	154
65	Ana e Bruna observando os eventos p e q	155
66	Linha de universo de um fóton.	157
67	Linha de universo da partícula em $\mathbb{L}^3$	157
68	Movimento bidimensional e diagrama espaço-tempo em $\mathbb{L}^3$ de A e B	158
69	Cones de luz e de tempo em $\mathbb{L}^3$	160

70	Eventos q_1 , q_2 e q_3 relacionados a p em $\mathbb{L}^3$	160
----	--	-----

Sumário

1	INTRODUÇÃO	9
2	O ESPAÇO PSEUDO-EUCLIDIANO	11
2.1	Formas Bilineares	11
2.2	Estruturando o Espaço Pseudo-Euclidiano	13
2.3	Causalidade de Vetores em $\mathbb{R}_\nu^n$	15
2.4	Produto Vetorial em $\mathbb{R}_\nu^n$	19
3	ÁLGEBRA LINEAR NO ESPAÇO PSEUDO-EUCLIDIANO	25
3.1	Ortogonalidade em $\mathbb{R}_\nu^n$	25
3.2	Causalidade em Subespaços de $\mathbb{L}^n$	38
3.3	Isometrias que preservam causalidade	53
4	TEORIA DE CURVAS NO ESPAÇO DE LORENTZ-MINKOWSKI	72
4.1	Curvas Parametrizadas em $\mathbb{R}_\nu^n$	72
4.2	Curvas no Plano	90
4.3	Curvas no Espaço	107
5	CONTATO EM $\mathbb{L}^n$	128
5.1	Equivalências de funções reais	128
5.2	Contato de Curvas Planas	134
5.3	A evoluta em $\mathbb{L}^2$	143
6	APLICAÇÕES FÍSICAS	150
6.1	Transformações de Lorentz	150
6.2	O Invariante no Espaço-tempo	153
6.3	Diagrama espaço-tempo	156
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	161
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	162

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

As curvas são objetos de grande importância para matemáticos e físicos, estudadas no contexto do cálculo como aplicações de uma variável real e, no âmbito aplicado, como trajetórias de objetos em movimento. Desse modo, após o século XVII, o estudo das propriedades das curvas consolidou-se com o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e o nascimento da Geometria Diferencial, o que impulsionou, posteriormente, o surgimento da Teoria de Singularidades e de Contato por volta da década de 1950.

No século XX, a Teoria da Relatividade, desenvolvida por Einstein em (EINSTEIN, 1905), provocou uma revolução na física. Um modelo de formalização matemática dessa teoria foi proposto pelo matemático Hermann Minkowski por meio de um espaço contínuo quadridimensional (EINSTEIN; PEREIRA, 2021), o espaço-tempo. Atualmente, tal ambiente é conhecido como o espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^n$, no qual as curvas, interpretadas como trajetórias de partículas, são denominadas linhas de universo (WALTER, 2014). Nesse contexto, surge uma indagação natural: é possível estender a teoria de Geometria Diferencial e de Singularidades de curvas para o espaço de Lorentz-Minkowski? O presente trabalho desenvolve-se com o propósito de responder a essa questão.

Inicialmente, Minkowski havia modelado seu espaço contínuo quadridimensional como $(\mathbb{R}^3 \times i\mathbb{R})$, composto de três coordenadas espaciais e uma última coordenada imaginária relacionada ao tempo. Apesar disso, a abordagem moderna utiliza o conceito de espaço pseudo-euclidiano de índice ν : um espaço vetorial munido das operações usuais de soma e produto por escalar, dotado de uma métrica indefinida, denominado $\mathbb{R}_\nu^n$. Tal espaço é definido no Capítulo 2, onde analisamos o comportamento de objetos clássicos da Álgebra Linear nesse ambiente, em especial, a nova métrica estabelecida, que possibilita uma classificação de vetores denominada tipo causal, baseada em (COUTO; LYMBEROPOULOS, 2018) e (BOLDRINI, 1980). Em seguida, no Capítulo 3, examinamos resultados relacionados a subespaços e ortogonalidade que desafiam a intuição euclidiana, e definimos as isometrias: transformações lineares que preservam a métrica do espaço e que são fundamentais para o estudo geométrico, tendo como referências (COUTO; LYMBEROPOULOS, 2018) e (POOLE, 2003).

Com os conceitos algébricos bem estabelecidos, no Capítulo 4 desenvolvemos a teoria de curvas seguindo os passos da Geometria Diferencial clássica, fundamentada em (COUTO; LYMBEROPOULOS, 2018) e (TENENBLAT, 2008). Para tanto, definimos curvas regulares, curvas parametrizadas pelo comprimento de arco e o referencial de

Frenet-Serret, além de examinar resultados análogos aos do espaço euclidiano usual, como o Teorema Fundamental das Curvas Planas e o Teorema Fundamental das Curvas Admissíveis. Esse capítulo apresenta diversos exemplos de curvas no plano e no espaço, concentrando-se no espaço de Lorentz-Minkowski para esclarecer as definições e os teoremas abordados.

Além disso, no Capítulo 5, analisamos o contato de curvas com objetos padrão de $\mathbb{L}^n$, os pseudo-círculos e as retas, por meio da Teoria de Singularidades e das ferramentas desenvolvidas no Capítulo 4. Embora seja possível estudar o contato de curvas com qualquer outro objeto, a escolha dos pseudo-círculos e das retas é motivada pelo seu “bom comportamento”, visto que apresentam curvatura constante. Mais do que isso, traçando um paralelo com o caso euclidiano, ao estudarmos o contato de uma curva com uma reta ou um círculo, conseguimos deduzir o quão curvada a curva está, o que justifica a construção de um análogo em $\mathbb{L}^n$. As principais referências para essa análise são (SALOOM; TARI, 2012), (FRANCISCO, 2019), (BRUCE; GIBLIN, 1992) e (BERENDS, 2009).

Por fim, no Capítulo 6, abordamos a Teoria da Relatividade Restrita, analisando os dois postulados que a originam e suas consequências, como os fenômenos de dilatação do tempo e de contração das distâncias. Adicionalmente, por meio da constância da velocidade da luz, deduzimos um invariante do espaço-tempo que, surpreendentemente, coincide com a métrica definida no Capítulo 2. Finalmente, estudamos o diagrama espaço-tempo, que utiliza as curvas para modelar o movimento de partículas em $\mathbb{L}^4$, servindo de estímulo e fundamentação para o estudo geométrico aqui realizado. Tal capítulo é baseado em (COUTO; LYMBEROPOULOS, 2018), (EINSTEIN; PEREIRA, 2021), (TIPLER; LLEWELLYN, 2017) e (WALKER; HALLIDAY; RESNICK, 2009).

CAPÍTULO 2

O ESPAÇO PSEUDO-EUCLIDIANO

2.1 | Formas Bilineares

Inicialmente, vamos revisar algumas definições de Álgebra Linear necessárias para definirmos o espaço de interesse deste texto. Para tal, utilizaremos os livros (BOLDRINI, 1980) e (COUTO; LYMBEROPOULOS, 2018).

Definição 2.1. Seja V um espaço vetorial real. Uma **forma bilinear** sobre V é uma aplicação $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $(x, y) \mapsto B(x, y)$, onde, para todo $u_1, u_2, v \in V$ e $a \in \mathbb{R}$, satisfaz

$$(i) \quad B(u_1 + u_2, v) = B(u_1, v) + B(u_2, v) \text{ e } B(au_1, v) = aB(u_1, v);$$

$$(ii) \quad B(v, u_1 + u_2) = B(v, u_1) + B(v, u_2) \text{ e } B(u_1, av) = aB(u_1, v).$$

Definição 2.2. Seja a forma bilinear $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto B(x, y)$. B é dita **simétrica** se $B(x, y) = B(y, x)$.

Exemplo 2.3. Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ o produto interno usual sobre $\mathbb{R}^n$, dado por

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

Esse produto é uma forma bilinear simétrica.

De fato, dados $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, tais que $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, e $a \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} (i) \quad \langle x + y, z \rangle &= (x_1 + y_1)z_1 + (x_2 + y_2)z_2 + \dots + (x_n + y_n)z_n = \\ &= x_1z_1 + y_1z_1 + x_2z_2 + y_2z_2 + \dots + x_nz_n + y_nz_n = \\ &= x_1z_1 + x_2z_2 + \dots + x_nz_n + y_1z_1 + y_2z_2 + \dots + y_nz_n = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad \langle x, y + z \rangle &= x_1(y_1 + z_1) + x_2(y_2 + z_2) + \dots + x_n(y_n + z_n) = \\ &= x_1y_1 + x_1z_1 + x_2y_2 + x_2z_2 + \dots + x_ny_n + x_nz_n = \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n + x_1z_1 + x_2z_2 + \dots + x_nz_n = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle; \end{aligned}$$

$$(iii) \quad \langle ax, y \rangle = ax_1y_1 + ax_2y_2 + \dots + ax_ny_n = a(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n) = a\langle x, y \rangle;$$

$$(iv) \quad \langle ax, y \rangle = x_1ay_1 + x_2ay_2 + \dots + x_nay_n = a(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n) = a\langle x, y \rangle;$$

$$(v) \quad \langle x, y \rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n = y_1x_1 + \dots + y_nx_n = \langle y, x \rangle.$$

Definição 2.4. Seja $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear e $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V . Associamos à B uma matriz $\mathbf{B}$, chamada **matriz da forma bilinear B na base $\mathcal{B}$** , tal que: Se $u, w \in V$ são tais que $u = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$ e $w = w_1v_1 + w_2v_2 + \dots + w_nv_n$, então

$$B(u, w) = B(u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n, w_1v_1 + w_2v_2 + \dots + w_nv_n) = \sum_{i,j}^n u_i w_j B(v_i, v_j) =$$

$$= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B(v_1, v_1) & B(v_1, v_2) & \dots & B(v_1, v_n) \\ B(v_2, v_1) & B(v_2, v_2) & \dots & B(v_2, v_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(v_n, v_1) & B(v_n, v_2) & \dots & B(v_n, v_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = u \cdot \mathbf{B} \cdot w.$$

Definição 2.5. Seja $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica. A função $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$, onde $Q(v) = B(v, v)$, é chamada **forma quadrática** associada à B .

Exemplo 2.6. Seja uma partícula de massa m deslocando-se com velocidade $v = (v_x, v_y, v_z)$, ilustrada na Figura 1. A energia cinética associada ao seu movimento é dada pela expressão

$$K = \frac{m}{2} \|v\|^2 = \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2).$$

Definimos tal energia como $K : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, onde

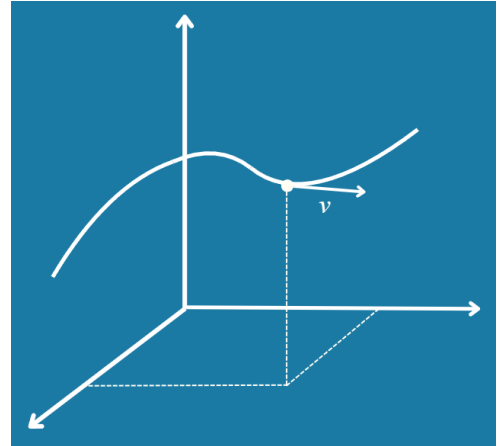
$$K(v) = B(v, v) = \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2),$$

de forma matricial:

$$K(v) = \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{m}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}.$$

Portanto, conseguimos modelar a equação de energia cinética da física clássica por meio de formas quadráticas, que possibilitam uma visualização matricial.

Figura 1: Movimento da partícula.



Fonte: Elaboração própria (2026).

Definição 2.7. Seja a forma bilinear simétrica $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que

- (i) B é **positiva** se $B(u, u) \geq 0$, para todo $u \in V$;
- (ii) B é **negativa** se $B(u, u) \leq 0$, para todo $u \in V$;
- (iii) B é **indefinida** se existirem $u, v \in V$, tais que $B(u, u) > 0$ e $B(v, v) < 0$;
- (iv) B é **definida** ou **não-degenerada** se, para todo $v \in V$, $B(u, v) = 0$, então $u = 0$;

(v) B é **degenerada** se, para todo $v \in V$, $B(u, v) = 0$, mas $u \neq 0$.

Observação 2.8. O produto interno usual, apresentado no Exemplo 2.3, é positivo-definido.

De fato, como $x_i^2 \geq 0$, para todo $x_i \in \mathbb{R}$, então $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$. Portanto, a forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é positiva. Além disso, $\langle x, x \rangle = 0$ se, e somente se, $x = \vec{0}$.

2.2 | Estruturando o Espaço Pseudo-Euclidiano

Nesta seção, vamos definir o Espaço Pseudo-Euclidiano e o espaço de Lorentz-Minkowski e estudar o comportamento de objetos matemáticos nesses ambientes. Sendo até o fim do capítulo a referência principal (COUTO; LYMBEROPOULOS, 2018).

Definição 2.9. Seja $n \geq 2$. Definimos a forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\langle x, y \rangle_\nu = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_{n-\nu} y_{n-\nu} - x_{n-\nu+1} y_{n-\nu+1} - \dots - x_n y_n$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ pertencem a $\mathbb{R}^n$. Se $\nu = 0$, estamos com o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$, chamado de **produto interno euclidiano**, denotado também por $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$. Enquanto que, se $0 < \nu < n$, a operação é denominada **produto interno pseudo-euclidiano**.

Podemos escrever a matriz associada a forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu$ na base canônica de $\mathbb{R}^n$ como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id_{n-\nu} & 0 \\ 0 & -Id_\nu \end{pmatrix} = Id_{n-\nu, \nu}$$

Assim, se $x, y \in \mathbb{R}^n$ são vetores coluna, podemos escrever $\langle x, y \rangle_\nu = x^t Id_{n-\nu, \nu} y$.

Observação 2.10.

(i) Para qualquer ν , $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu$ é uma forma bilinear simétrica e não-degenerada.

De fato, para $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, tais que $x, y \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle_\nu &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_{n-\nu} y_{n-\nu} - x_{n-\nu+1} y_{n-\nu+1} - \dots - x_n y_n = \\ &= y_1 x_1 + y_2 x_2 + \dots + y_{n-\nu} x_{n-\nu} - y_{n-\nu+1} x_{n-\nu+1} - \dots - y_n x_n = \langle y, x \rangle_\nu, \end{aligned}$$

portanto simétrica.

Suponha que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, existe $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $\langle x, y \rangle_\nu = x^t Id_{n-\nu, \nu} y = 0$. Daí, como x^t é qualquer, $Id_{n-\nu, \nu} y = \vec{0}$ e $Id_{n-\nu, \nu}$ é invertível, pois seu determinante é diferente de zero, então o sistema homogêneo admite solução única e trivial, ou seja, $y = \vec{0}$. Logo não-degenerada;

(ii) Caso $\nu = n$, então o produto interno é negativo-definido, já que $-x_i^2 \leq 0$, para todo $x_i \in \mathbb{R}$, então $\langle x, x \rangle_n = \sum_{i=1}^n -x_i^2 \leq 0$;

(iii) Se $0 < \nu < n$, o produto interno é indefinido. De fato tomando $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$, temos:

$$\langle e_1, e_1 \rangle_\nu = 1 > 0 \quad \text{e} \quad \langle e_n, e_n \rangle_\nu = -1 < 0.$$

Definição 2.11. O espaço pseudo-euclidiano de índice ν , denotado $\mathbb{R}_\nu^n$, é o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar, munido do produto interno pseudo-euclidiano $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu$. Sucintamente escrevemos $\mathbb{R}_\nu^n = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_\nu)$.

O espaço de Lorentz-Minkowski é o caso particular $\mathbb{L}^n = \mathbb{R}_1^n$ e chamamos o produto interno associado de **produto interno lorentziano**, ou **métrica de Minkowski**, denotado $\langle \cdot, \cdot \rangle_L = \langle \cdot, \cdot \rangle_1$.

Observação 2.12. Em física, a coordenada que acompanha o sinal negativo no produto interno lorentziano é associada ao tempo t , enquanto as demais coordenadas são associadas ao espaço. Veremos tal aplicação com mais detalhes no Capítulo 6.

Exemplo 2.13. Seja o espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^3 = \mathbb{R}_1^3$ e os vetores $v = (1, 1, 0)$, $u = (0, 0, 1) \in \mathbb{L}^3$. Note que

$$\langle v, v \rangle_L = 1^2 + 1^2 - 0^2 = 2 \quad \text{e} \quad \langle u, u \rangle_L = 0^2 + 0^2 - 1^2 = -1$$

que exemplifica a propriedade indefinida da métrica de Minkowski.

Definição 2.14. A **norma pseudo-euclidiana** é a aplicação $\|\cdot\|_\nu : \mathbb{R}_\nu^n \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\|v\|_\nu = \sqrt{|\langle v, v \rangle_\nu|}$. Dizemos que v é unitário se $\|v\|_\nu = 1$.

Observação 2.15.

- Vamos observar algumas propriedades de norma do espaço euclidiano e identificar quais permanecem satisfeitas no espaço pseudo-euclidiano e quais não são mais válidas. Sejam $v, u \in \mathbb{R}_\nu^n$ e $t \in \mathbb{R}$, temos:

- (i) $\|v\| \geq 0$, também válida no espaço pseudo-euclidiano, pelo uso do módulo no produto interno;

(ii) $\|tv\| = |t| \cdot \|v\|$ segue válida no espaço pseudo-euclidiano. Isso porque:

$$\|tv\|_\nu = \sqrt{|\langle tv, tv \rangle_\nu|} = \sqrt{|t^2 \langle v, v \rangle_\nu|} = |t| \sqrt{|\langle v, v \rangle_\nu|} = |t| \cdot \|v\|_\nu;$$

(iii) $\|v\| = 0$ se, e somente se, $v = \vec{0}$ não é verdadeira no espaço pseudo-euclidiano, pois existe $v \in \mathbb{R}_\nu^n - \{\vec{0}\}$, tal que

$$\sum_{i=1}^{n-\nu} v_i = \sum_{i=n-\nu+1}^n v_i \Rightarrow \sqrt{|\langle v, v \rangle_\nu|} = \sqrt{|0|} = 0;$$

(iv) A desigualdade triangular, $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, também não é satisfeita. Tome $(1, 0, -1), (0, 1, -1) \in \mathbb{R}_1^3 = \mathbb{L}^3$, segue que

$$\|(1, 0, -1) + (0, 1, -1)\|_L = \sqrt{2} > 0 = \|(1, 0, -1)\|_L + \|(0, 1, -1)\|_L.$$

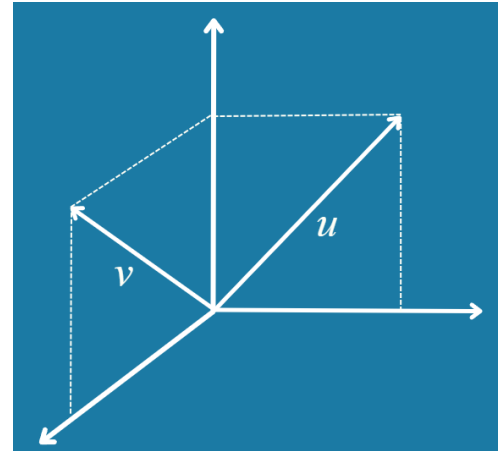
- Devemos nos atentar ao termo “norma”, pois ela não representa mais necessariamente um “tamanho” em $\mathbb{R}_\nu^n$, como ocorre no espaço euclidiano usual.

Figura 2: Representação de v e u em $\mathbb{L}^3$.

Calculando a norma lorentziana dos vetores $v = (1, 0, 1), u = (0, 1, 1) \in \mathbb{L}^3$, temos:

$$\|v\|_L = \sqrt{|\langle v, v \rangle_L|} = 0 = \sqrt{|\langle u, u \rangle_L|} = \|u\|_L.$$

Contradizendo nossa intuição, pois representaria que tais vetores teriam “tamanho” nulo, o que não é verdade, como ilustra a Figura 2.



Fonte: Elaboração própria (2026).

2.3 | Causalidade de Vetores em $\mathbb{R}_\nu^n$

Nesta seção, veremos uma das classificações mais importantes deste trabalho, os tipos causais. Os nomes relacionados a tal separação tem origem física, que veremos no Capítulo 6.

Definição 2.16. Dizemos que um vetor $v \in \mathbb{R}_\nu^n$ é de:

- (i) tipo **espaço**, se $\langle v, v \rangle_\nu > 0$ ou $v = \vec{0}$;

(ii) tipo **tempo**, se $\langle v, v \rangle_\nu < 0$;

(iii) tipo **luz**, se $\langle v, v \rangle_\nu = 0$, mas $v \neq \vec{0}$.

Esses são chamados **tipos causais** dos vetores.

Se $v \neq \vec{0}$ e não é tipo luz, definimos o **indicador de** v como sendo o sinal de $\langle v, v \rangle_\nu$, denotado por ϵ_v . Ou seja, se v é tipo espaço, então $\epsilon_v = 1$, e, se v é tipo tempo, então $\epsilon_v = -1$.

Observação 2.17. Em alguns materiais, os vetores do tipo luz podem ser chamados de **nulos**, *null separated* (CARROLL, 2019), incluindo o vetor nulo, porém não utilizaremos tal definição.

Exemplo 2.18. Em $\mathbb{L}^3$, o vetor:

(i) $v_1 = (5, 3, 1)$ é tipo espaço, pois $\langle v_1, v_1 \rangle_L = 25 + 9 - 1 = 33 > 0$;

(ii) $v_2 = (0, 1, 2)$ é tipo tempo, pois $\langle v_2, v_2 \rangle_L = 1 - 4 = -3 < 0$;

(iii) $v_3 = (3, 4, 5)$ é tipo luz, pois $\langle v_3, v_3 \rangle_L = 9 + 16 - 25 = 0$.

Observação 2.19. Note que trocar o sinal de qualquer coordenada de um vetor ou multiplicá-lo por um múltiplo escalar não altera seu caráter causal.

De fato, sejam $u \in \mathbb{R}_\nu^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Se $u = (u_1, \dots, u_n)$ e $\langle u, u \rangle_\nu = c$, então

(i) Tomando $\epsilon_i \in \{1, -1\}$, dependendo do sinal que será alterado em cada i -ésima coordenada, temos que

$$\langle (\epsilon_1 u_1, \dots, \epsilon_n u_n), (\epsilon_1 u_1, \dots, \epsilon_n u_n) \rangle_\nu = \epsilon_1^2 u_1^2 + \dots + \epsilon_n^2 u_n^2 = u_1^2 + \dots + u_n^2 = c$$

que conserva o tipo causal de u ;

(ii) $\langle \alpha u, \alpha u \rangle_\nu = \alpha^2 \langle u, u \rangle_\nu = \alpha^2 c$. Como $\alpha^2 > 0$, então o sinal de c é preservado e consequentemente o tipo causal de u se mantém.

Lema 2.20. Todo vetor de $\mathbb{R}_\nu^n$ possui um e somente um dos três tipos causais.

Demonstração: Seja $u \in \mathbb{R}_\nu^n$, tal que $\langle u, u \rangle_\nu = c$. Como $c \in \mathbb{R}$, pela tricotomia dos números reais, ou $c = 0$, ou $c > 0$ ou $c < 0$.

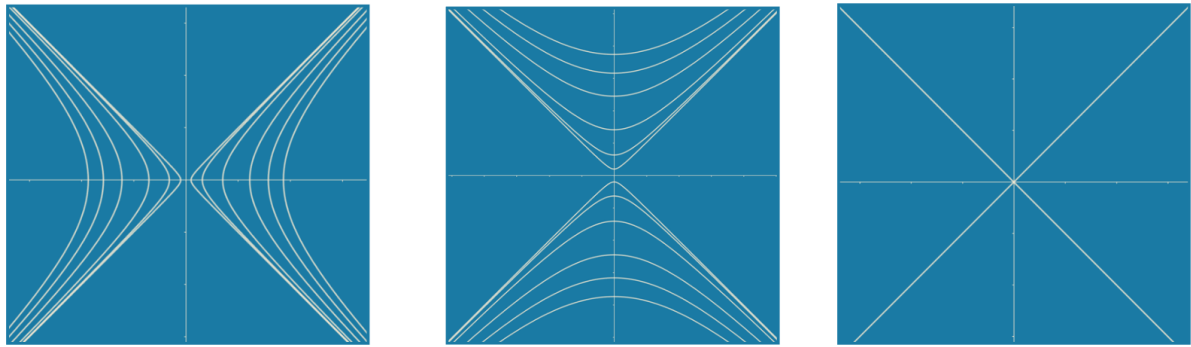
Dessa forma, u admite somente um tipo causal. □

Dispondo de tais conceitos, vamos visualizar geometricamente a causalidade nos espaços de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^2$ e $\mathbb{L}^3$. Para tal, interpretaremos o produto interno como a “distância” de um ponto até a origem, ou seja, dado um ponto v , $\langle v, v \rangle_L = \langle v - 0, v - 0 \rangle_L$ é a “distância” procurada.

Em $\mathbb{L}^2$, ao procurar os pontos $v = (x, y)$ que distam um valor $c \in \mathbb{R}$ da origem, sabemos que $\langle v, v \rangle_L = c$, ou seja, $x^2 - y^2 = c$. Assim,

- (i) se $c > 0$, então $x^2 - y^2 = c$ representa os dois ramos de uma hipérbole com eixo focal coincidindo com o eixo x , de vértices $(\sqrt{c}, 0)$, $(-\sqrt{c}, 0)$ e focos $(\sqrt{2c}, 0)$ e $(-\sqrt{2c}, 0)$;
- (ii) se $c < 0$, então $y^2 - x^2 = -c$ representa os dois ramos de uma hipérbole com eixo focal coincidindo com o eixo y , de vértices $(0, \sqrt{c})$, $(0, -\sqrt{c})$ e focos $(0, \sqrt{2c})$ e $(0, -\sqrt{2c})$;
- (iii) se $c = 0$, então $x = y$ ou $x = -y$, que representam no plano as bissetrizes dos eixos coordenados. Tais retas são chamadas de **raios de luz**, sendo $x = y$ o **principal** e $x = -y$ o **secundário**.

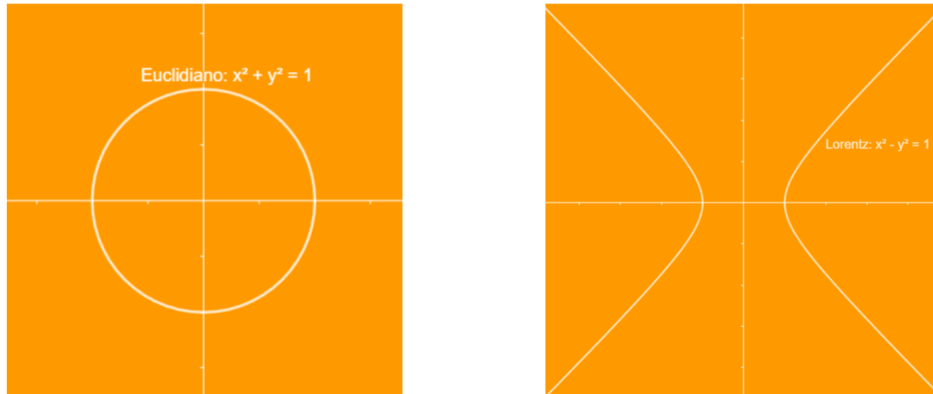
Figura 3: Objetos formados por vetores que equidistam c da origem em $\mathbb{L}^2$.



Fonte: Elaboração própria (2026).

A Figura 3 representa as hipérboles e retas descritas nos itens anteriores, conforme a variação de c .

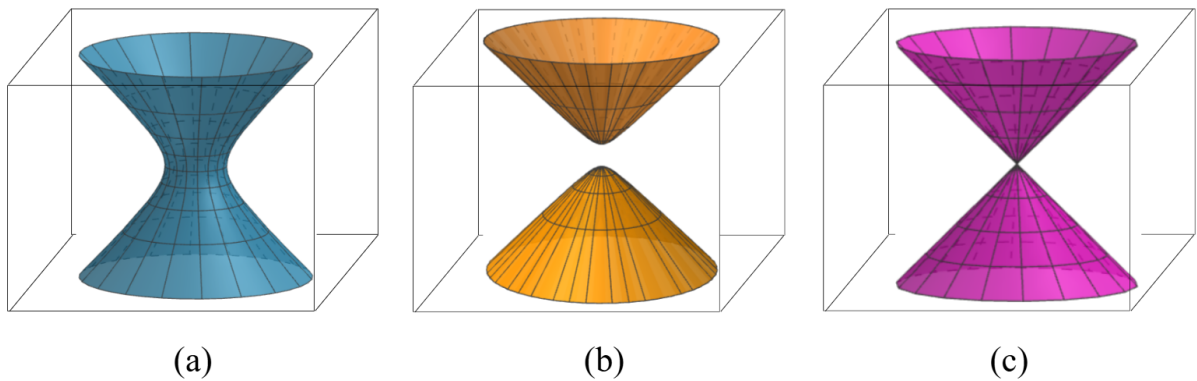
Além disso, observamos uma diferença crucial entre a equidistância da origem dos vetores no espaço euclidiano e no de Lorentz-Minkowski. Enquanto, no primeiro, os vetores formam circunferências ou um ponto, no segundo formam retas ou hipérboles, como ilustrado na Figura 4.

Figura 4: Vetores que equidistam 1 em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{L}^2$.

Fonte: Elaboração própria (2026).

De forma análoga, em $\mathbb{L}^3$, os pontos $v = (x, y, z)$ que distam um valor $c \in \mathbb{R}$ da origem respeitam $\langle v, v \rangle_L = c$, ou seja, $x^2 + y^2 - z^2 = c$. Logo

- (i) se $c > 0$, então $x^2 + y^2 - z^2 = c$ é um hiperboloide de uma folha centrado na origem com eixo de simetria sendo o eixo z ;
- (ii) se $c < 0$, então $z^2 - x^2 - y^2 = -c$ é um hiperboloide de duas folhas centrado na origem com eixo de simetria sendo o eixo z ;
- (iii) se $c = 0$, então $x^2 + y^2 = z^2$ é a equação de um cone centrado na origem, chamado **cone de luz**.

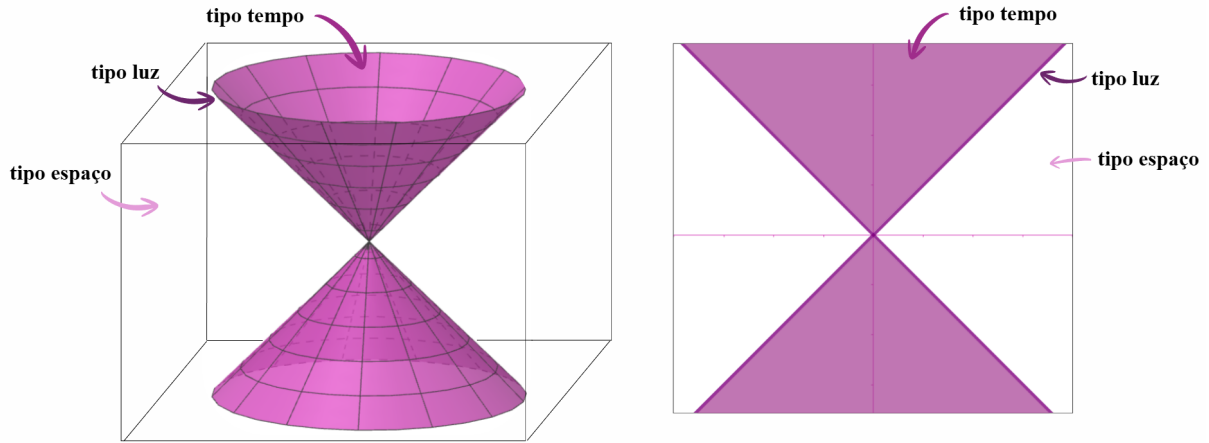
Figura 5: Objetos formados por vetores que equidistam c da origem em $\mathbb{L}^3$.

Fonte: Elaboração própria (2026).

Assim, a Figura 5 exibe os objetos formados pelos vetores equidistantes conforme a variação de c , como descrito nos itens anteriores. Novamente, fica evidente a diferença entre o caso euclidiano, em que a superfície formada pelos vetores equidistantes é uma esfera.

Por fim, note que os objetos formados não tem intersecção entre si e mapeiam todo o plano $\mathbb{L}^2$ e o espaço $\mathbb{L}^3$. Tais propriedades permitem uma decomposição de ambos os ambientes conforme o tipo causal dos vetores, como ilustra a Figura 6.

Figura 6: Diagrama de tipos causais em $\mathbb{L}^3$ e $\mathbb{L}^2$.



Fonte: Elaboração própria (2026).

Além disso, os vetores de tipo luz criam uma “fronteira” que divide os vetores de tipo tempo, localizados na parte interna do cone e dos raios de luz, e os de tipo espaço, que ocupam a parte externa do cone e dos raios de luz.

2.4 | Produto Vetorial em $\mathbb{R}_\nu^n$

Para finalizar as operações básicas nos espaços pseudo-euclidianos, veremos o produto vetorial. O produto vetorial é essencial em espaços tridimensionais pelas propriedades ortogonais que ele apresenta. Para tanto, podemos estender naturalmente a noção do produto vetorial para espaços de dimensões maiores, mantendo o propósito de encontrar um vetor ortogonal. Inicialmente, vamos entender a ortogonalidade em espaços pseudo-euclidianos.

Definição 2.21. Sejam dois vetores $u, v \in \mathbb{R}_\nu^n$ e $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}_\nu^n$. Então

- (i) u e v são **pseudo-ortogonais** se $\langle u, v \rangle_\nu = 0$ e escrevemos $u \perp_\nu v$. Em particular, se $\nu = 1$, dizemos que os vetores são **Lorentz-ortogonais**;
- (ii) Dizemos que $\mathcal{B}$ é uma base **pseudo-ortogonal** se seus vetores são dois a dois ortogonais;
- (iii) Se $\mathcal{B}$ é uma base pseudo-ortogonal de $\mathbb{R}_\nu^n$, dizemos que $\mathcal{B}$ é uma base **pseudo-ortonormal** se $\|v\|_\nu = 1$, para todo $v \in \mathcal{B}$;

(iv) Seja $S \subseteq \mathbb{R}_\nu^n$ um subconjunto qualquer. O subespaço de $\mathbb{R}_\nu^n$ **pseudo-ortogonal** à S é:

$$S^\perp = \{v \in \mathbb{R}_\nu^n \mid \langle u, v \rangle_\nu = 0, \forall u \in S\}.$$

Exemplo 2.22. Sejam os vetores $(1, 1), (1, 2), (2, 1) \in \mathbb{L}^2$. Note que

$$\langle (1, 1), (1, 1) \rangle_L = 1 - 1 = 0 \quad \text{e} \quad \langle (1, 2), (2, 1) \rangle_L = 2 - 2 = 0.$$

Logo, $(1, 1)$ é Lorentz-ortogonal a ele mesmo e $(1, 2)$ é Lorentz-ortogonal a $(2, 1)$. Note que essa conclusão é contrária à nossa intuição. Isso porque não existem vetores ortogonais a si mesmos no espaço euclidiano e que o ângulo entre eles não seja reto. De fato, se θ é ângulo entre $(1, 2)$ e $(2, 1)$, temos:

$$\cos \theta = \frac{\langle (1, 2), (2, 1) \rangle_E}{\|(1, 2)\|_E \|(2, 1)\|_E} = \frac{4}{5} \Rightarrow \theta \approx 0,2048\pi \neq \frac{\pi}{2}.$$

Definição 2.23. O **produto vetorial** de $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}_\nu^n$, segundo $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu$, é o único vetor $v_1 \times \dots \times v_{n-1} \doteq v \in \mathbb{R}_\nu^n$ tal que

$$\langle v, x \rangle_\nu = \det(x, v_1, \dots, v_{n-1}), \forall x \in \mathbb{R}_\nu^n.$$

O produto vetorial será denotado por $\times_E$ em $\mathbb{R}^n$, $\times_\nu$ em $\mathbb{R}_\nu^n$ e $\times_L$ em $\mathbb{L}^n$.

Omitiremos a prova do próximo resultado por se tratar de um desenvolvimento puramente técnico. Sua prova pode ser consultada em (COUTO; LYMBEROPOULOS, 2018).

Proposição 2.24. Sejam $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base ortonormal e positiva de $\mathbb{R}_\nu^n$ e $v_j = \sum_{i=1}^n v_{ij} u_i \in \mathbb{R}_\nu^n$, para todo $j = 1, \dots, n-1$. Então vale que

$$v = v_1 \times_\nu \dots \times_\nu v_{n-1} = \det \begin{pmatrix} \epsilon_{u_1} u_1 & \cdots & \epsilon_{u_1} u_1 \\ v_{11} & \cdots & v_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1,n-1} & \cdots & v_{n,n-1} \end{pmatrix},$$

onde ϵ_{u_i} é o indicador de u_i , para cada $i = 1, \dots, n$.

Esse resultado apresenta uma forma prática para o cálculo do produto vetorial em $\mathbb{R}_\nu^n$. Vejamos explicitamente o produto em $\mathbb{L}^3$ e $\mathbb{L}^4$ na base canônica. Sejam $v_1, v_2 \in \mathbb{L}^3$,

onde $v_j = \sum_{i=1}^3 v_{ij}e_i$, para $j = 1, 2$. Então, o produto vetorial de v_1 por v_2 é

$$v = v_1 \times_L v_2 = \det \begin{pmatrix} \epsilon_{e_1}e_1 & \epsilon_{e_2}e_2 & \epsilon_{e_3}e_3 \\ v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, dados $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{L}^4$, onde $v_j = \sum_{i=1}^4 v_{ij}e_i$, para $j = 1, 2, 3$. Então, o produto vetorial de v_1, v_2 e v_3 é

$$v = v_1 \times_L v_2 \times_L v_3 = \det \begin{pmatrix} \epsilon_{e_1}e_1 & \epsilon_{e_2}e_2 & \epsilon_{e_3}e_3 & \epsilon_{e_4}e_4 \\ v_{11} & v_{21} & v_{31} & v_{41} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} & v_{42} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} & v_{43} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & -e_4 \\ v_{11} & v_{21} & v_{31} & v_{41} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \end{pmatrix}.$$

Assim, conseguimos estudar algumas propriedades do produto vetorial em $\mathbb{R}_\nu^n$:

Proposição 2.25. Sejam $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}_\nu^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então o produto vetorial

$$v_1 \times_\nu \cdots \times_\nu v_{n-1} :$$

- (i) é alternado, isto é, trocar duas entradas de posição troca o sinal do resultado;
- (ii) é igual ao vetor nulo se, e somente se, $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ é linearmente dependente;
- (iii) é multilinear, isto é, é linear em cada uma de suas entradas;
- (iv) é pseudo-ortogonal a cada uma de suas entradas;
- (v) para $n = 3$, satisfaz $\langle v_1 \times v_2, v_3 \rangle_\nu = \langle v_1, v_2 \times v_3 \rangle_\nu$.

Demonstração:

As propriedades (i),(ii) e (iii) são imediatas, pois o produto vetorial é definido como um determinante e tais propriedades valem para o determinante de uma matriz quadrada.

Por outro lado, em (iv), para todo v_i , $i = 1, \dots, n-1$, pela definição de produto vetorial:

$$\langle v_1 \times_\nu \cdots \times_\nu v_{n-1}, v_i \rangle_\nu = \det(v_i, v_1, \dots, v_{n-1}) = 0,$$

pois existiram duas linhas iguais. Portanto, $v_1 \times \cdots \times v_{n-1}$ é pseudo-ortogonal a v_i , para cada $i = 1, \dots, n-1$.

Por fim, para (v), utilizando novamente a definição, temos:

$$\langle v_1 \times_\nu v_2, v_3 \rangle_\nu = \det(v_3, v_1, v_2) = (-1)^2 \det(v_1, v_2, v_3) = \langle v_1, v_2 \times v_3 \rangle_\nu.$$

□

Proposição 2.26. (Identidades de Lagrange) Sejam $u, v \in \mathbb{R}_\nu^3$. Então:

$$\|u \times_E v\|_E = \|u\|_E^2 \|v\|_E^2 - \langle u, v \rangle_E^2,$$

$$\langle u \times_L v, u \times_L v \rangle_L = -\langle u, u \rangle_L \langle v, v \rangle_L + \langle u, v \rangle_L^2.$$

Demonstração: Se $u, v \in \mathbb{R}^3$ e θ o ângulo entre u e v , então

$$\|u \times_E v\|_E^2 = (\|u\|_E \cdot \|v\|_E \sin \theta)^2 = \|u\|_E^2 \cdot \|v\|_E^2 (1 - \cos^2 \theta) = \|u\|_E^2 \|v\|_E^2 - \langle u, v \rangle_E^2.$$

Para a segunda igualdade, se $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ estão em $\mathbb{L}^3$, temos:

$$\begin{aligned} w = u \times_L v &= (u_2 v_3 - u_3 v_2, -u_1 v_3 + u_3 v_1, u_1 v_2 - u_2 v_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle u \times_L v, u \times_L v \rangle_L &= (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (-u_1 v_3 + u_3 v_1)^2 - (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 = \\ &= u_2^2 v_3^2 - 2u_2 v_3 u_3 v_2 + u_3^2 v_2^2 + u_1^2 v_3^2 - 2u_1 v_3 u_3 v_1 + u_3^2 v_1^2 - u_1^2 v_2^2 + 2u_1 v_2 u_2 v_1 - u_2^2 v_1^2. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} -\langle u, u \rangle_L \langle v, v \rangle_L + \langle u, v \rangle_L^2 &= -(u_1^2 + u_2^2 - u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 - v_3^2) + (u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3)^2 = \\ &= -u_1^2 v_1^2 - u_1^2 v_2^2 + u_1^2 v_3^2 - u_2^2 v_1^2 - u_2^2 v_2^2 + u_2^2 v_3^2 + u_3^2 v_1^2 + u_3^2 v_2^2 - u_3^2 v_3^2 + \\ &\quad + u_1^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 + u_3^2 v_3^2 + 2u_1 v_1 u_2 v_2 - 2u_1 v_1 u_3 v_3 - 2u_2 v_2 u_3 v_3 = \\ &= \langle u \times_L v, u \times_L v \rangle_L. \end{aligned}$$

□

Por fim, vamos fazer um estudo do produto vetorial da base canônica no espaço tridimensional e quadridimensional, por meio de diagramas que comparam o espaço euclidiano e o de Lorentz-Minkowski.

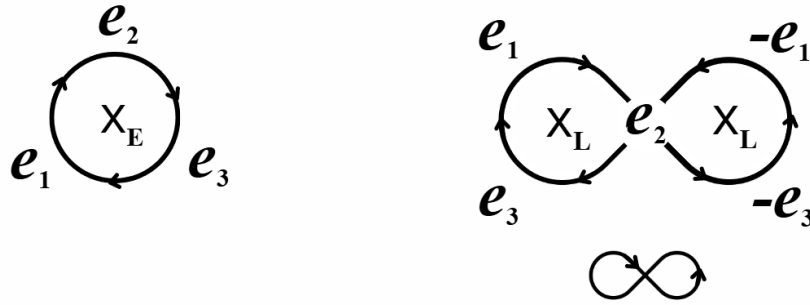
Seja a base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ de um espaço tridimensional. Sabemos que em $\mathbb{R}^3$ o produto de quaisquer dois vetores da base resulta no outro elemento da base. Porém, em $\mathbb{L}^3$, por conta do indicar de e_3 , $\epsilon_{e_3} = -1$, o produto vetorial de dois vetores da base pode sofrer alterações de sinal. Note que:

$$\bullet \quad e_1 \times_L e_2 = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, -1) = -e_3;$$

- $e_1 \times_L e_3 = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, -1, 0) = -e_2$;
- $e_2 \times_L e_3 = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, 0, 0) = e_1$.

A Figura 7 representa dois diagramas para operar o produto vetorial de elementos da base canônica em $\mathbb{R}^3$, à esquerda, e em $\mathbb{L}^3$, à direita. Para tanto, cada seta indica o vetor resultante do produto vetorial dos dois elementos anteriores do caminho, que em $\mathbb{L}^3$ deve seguir o sentido de “8”, representado abaixo do diagrama.

Figura 7: Diagrama do produto vetorial em espaços tridimensionais.



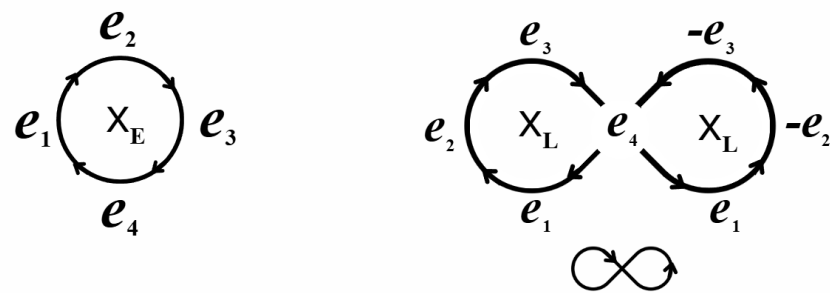
Fonte: Elaboração própria (2026).

Mais ainda, tome a base canônica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de um espaço quadridimensional. Em $\mathbb{R}^4$, o produto vetorial de quaisquer três vetores da base resulta no quarto elemento. Por outro lado, em $\mathbb{L}^4$, dispomos do mesmo problema do caso anterior, causado pelo indicador de e_4 , onde

- $e_1 \times_L e_2 \times_L e_3 = e_4$;
- $e_2 \times_L e_3 \times_L e_4 = e_1$;
- $e_3 \times_L e_4 \times_L e_1 = -e_2$;
- $e_4 \times_L e_1 \times_L -e_2 = -e_3$.

A Figura 8 retrata dois diagramas do produto vetorial de elementos da base canônica em $\mathbb{R}^4$, à esquerda, e em $\mathbb{L}^4$, à direita. Para tanto a seta após três vetores indica o resultado do produto deles, que em $\mathbb{L}^3$ deve seguir o sentido de “8”, representado abaixo do diagrama.

Figura 8: Diagrama do produto vetorial da base canônica em espaços quadridimensionais.



Fonte: Elaboração própria (2026).

CAPÍTULO 3

ÁLGEBRA LINEAR NO ESPAÇO PSEUDO-EUCLIDIANO

Daqui em diante, nossos estudos serão concentrados no aspecto algébrico do espaço pseudo-euclidiano, exibindo definições para quaisquer ν e centrando os exemplos no espaço de Lorentz-Minkowski.

Pelo fato de vários conceitos serem independentes do de produto interno, como o de subespaço, por exemplo, muitas definições são semelhantes ao caso Euclidiano usual. Apesar disso, tal fundamentação algébrica possibilita o entendimento das relações entre vetores de tipos causais distintos e a classificação causal de subconjuntos, que é essencial para o desenvolvimento do trabalho.

3.1 | Ortogonalidade em $\mathbb{R}_\nu^n$

Nesta seção, veremos alguns resultados relacionados à ortogonalidade de vetores e subespaços em espaços pseudo-euclidianos baseados na Definição 2.21. Muitos deles podem parecer contraditórios, como o Exemplo 2.22. Assim, devemos abandonar nossa intuição euclidiana no restante desta seção.

Lema 3.1. (Expansão ortonormal) Seja $\{u_1, \dots, u_n\}$ uma base pseudo-ortonormal de $\mathbb{R}_\nu^n$. Então todo $v \in \mathbb{R}_\nu^n$ pode ser escrito como

$$v = \sum_{i=1}^n \epsilon_{u_i} \langle v, u_i \rangle_\nu u_i,$$

onde ϵ_{u_i} é o indicador de u_i , para cada $i = 1, \dots, n$.

Demonstração: Seja $v \in \mathbb{R}_\nu^n$, dado por $v = v_1 u_1 + \dots + v_n u_n$, $v_i \in \mathbb{R}$, para todo $i = 1, \dots, n$. Aplicando $\langle \cdot, u_i \rangle_\nu$ em ambos os lados da igualdade, temos:

$$\langle v, u_i \rangle_\nu = \left\langle \sum_{j=1}^n v_j u_j, u_i \right\rangle_\nu = \epsilon_{u_i} v_i.$$

Assim, podemos escrever qualquer coeficiente de v em uma direção u_i como

$$v_i = \epsilon_{u_i} \langle v, u_i \rangle_\nu.$$

□

Observação 3.2. Caso a base $\{u_1, \dots, u_n\}$ fosse apenas pseudo-ortogonal sem vetores de tipo luz, pelo lema anterior, v pode ser escrito como

$$v = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, u_i \rangle_\nu}{\langle u_i, u_i \rangle_\nu} u_i.$$

Definição 3.3. Sejam $U \subseteq \mathbb{R}_\nu^n$ um subespaço não vazio e $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu|_U$ o produto interno pseudo-euclidiano restrito a U . Dizemos que U é **não-degenerado** se $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu|_U$ também o for. Caso contrário, U é **degenerado** se $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu|_U$ também for degenerado.

Definição 3.4. Seja $U \subseteq \mathbb{R}_\nu^n$ um subespaço que admite uma base pseudo-ortonormal $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_m\}$. Se U é não-degenerado, definimos a **projeção do vetor v em U** como

$$\text{proj}_U v = \sum_{i=1}^m \frac{\langle v, u_i \rangle_\nu}{\langle u_i, u_i \rangle_\nu} u_i \in U,$$

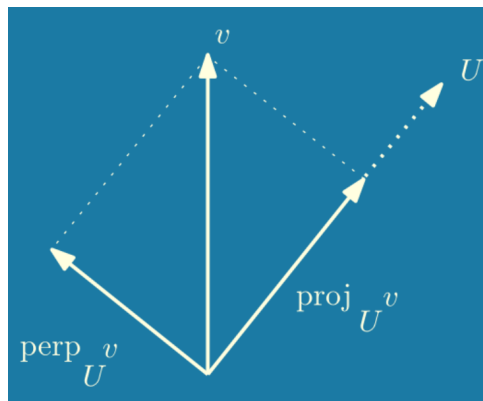
onde cada i -ésimo elemento do somatório é a projeção de v na direção u_i . Além disso, denotamos a projeção de v em U por $\text{proj}_U v$.

Definimos também a **componente pseudo-ortogonal de v em relação a U** , ou simplesmente **componente ortogonal**, (POOLE, 2003) como o vetor

$$\text{perp}_U v = v - \text{proj}_U v.$$

É possível ver a decomposição de v em relação a U na Figura 9.

Figura 9: Projeção de v e componente perpendicular de v em relação a U .



Fonte: Elaboração própria (2026).

Exemplo 3.5. Seja o subespaço $U = [e_1, e_2] \subseteq \mathbb{L}^3$ não-degenerado. A projeção de $v = (2, 2, 4)$ em U é:

$$\text{proj}_U v = (2, 2, 0),$$

ou seja, as duas primeiras coordenadas fixadas e a última, ortogonal às duas primeiras, zerada.

Por outro lado, a componente perpendicular de v em relação a U é:

$$\text{perp}_U v = (0, 0, 4).$$

Exemplo 3.6. Seja $U = [(1, 0, 1)] \subseteq \mathbb{L}^3$. Note que U é degenerado, pois, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $\alpha(1, 0, 1) \in U$ e

$$\langle \alpha(1, 0, 1), (1, 0, 1) \rangle_L = 0.$$

Além disso, essa igualdade revela que $U = [(1, 0, 1)]$ é perpendicular a U . Dessa forma, não conseguimos criar uma boa definição para a componente perpendicular de $(1, 0, 1)$ em U , como fizemos com espaços não-degenerados anteriormente.

Na demonstração do próximo resultado utilizaremos o Corolário 3.22 que será demonstrado mais para frente neste capítulo.

Teorema 3.7. (Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt) Sejam $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}_\nu^n$ linearmente independentes tais que, para todo $i = 1, \dots, k$, os subespaços gerados $[v_1, \dots, v_i]$ são não-degenerados. Então existem $v_1^*, \dots, v_k^* \in \mathbb{R}_\nu^n$ dois a dois pseudo-ortogonais tais que

$$[v_1, \dots, v_k] = [v_1^*, \dots, v_k^*].$$

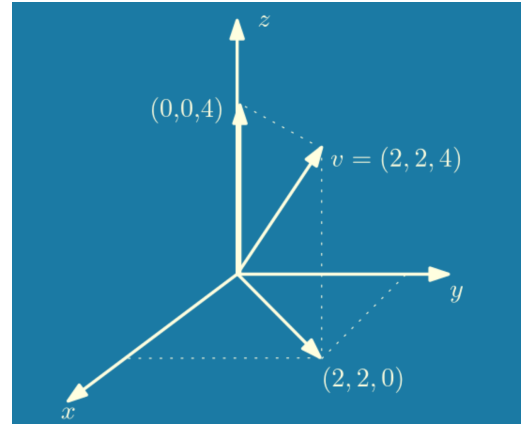
Demonstração: Vamos fazer a prova por indução em k . Se $k = 1$, basta tomar $v_1^* = v_1$, então $[v_1^*] = [v_1]$. Assuma o resultado válido para k , ou seja, existe uma base $v_1^*, \dots, v_k^*$ pseudo-ortogonal de subespaços de dimensão k .

Para $k + 1$, tomemos $v_1, \dots, v_{k+1} \in \mathbb{R}_\nu^n$ linearmente independentes tais que, para todo $i = 1, \dots, k + 1$, $[v_1, \dots, v_i]$ é não-degenerado. Dessa forma, pelo Corolário 3.22, podemos escrever

$$[v_1, \dots, v_{k+1}] = [v_1, \dots, v_k] \oplus [v_{k+1}].$$

Pela hipótese de indução, conseguimos uma base $v_1^*, \dots, v_k^*$ pseudo-ortogonal para o subespaço de dimensão k . Observe que é impossível algum dos candidatos a v_i^* ser do tipo luz.

Figura 10: Representação de v em $\mathbb{L}^3$.



Fonte: Elaboração própria (2026).

De fato, caso existisse v_i^* de tipo luz, então seria pseudo-ortogonal a si mesmo e a todos os outros v_j^* , $j = 1, \dots, k+1$, logo o espaço gerado $[v_1^*, \dots, v_i^*] = [v_1, \dots, v_i]$ seria degenerado, contradizendo a hipótese.

Com isso posto, definindo

$$v_{k+1}^* = v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle v_{k+1}, v_i^* \rangle_\nu}{\langle v_i^*, v_i^* \rangle_\nu} v_i^* = \text{perp}_{[v_1^*, \dots, v_k^*]} v_{k+1},$$

ou seja, a componente perpendicular de v_{k+1} em relação a $[v_1^*, \dots, v_k^*]$. Assim, para cada $j = 1, \dots, k$, temos

$$\langle v_{k+1}^*, v_j^* \rangle_\nu = \left\langle v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle v_{k+1}, v_i^* \rangle_\nu}{\langle v_i^*, v_i^* \rangle_\nu} v_i^*, v_j^* \right\rangle_\nu = \langle v_{k+1}, v_j^* \rangle_\nu - \langle v_{k+1}, v_j^* \rangle_\nu = 0.$$

Além disso, $[v_1, \dots, v_{k+1}] = [v_1^*, \dots, v_{k+1}^*]$. Dessa forma, todo subespaço não-degenerado admite uma base pseudo-ortogonal para um . $\square$

Teorema 3.8. Seja $\{\vec{0}\} \neq U \subseteq \mathbb{R}_\nu^n$ um subespaço. U é não-degenerado se, e somente se, possui uma base pseudo-ortonormal.

Demonstração: Vamos provar que existe tal base para U não-degenerado de dimensão k por indução.

Se $k = 1$, como U é não-degenerado, existe $v \in U$ tal que $\langle v, v \rangle_\nu \neq 0$. Assim, $u = \frac{v}{\|v\|_\nu^2}$ forma uma base pseudo-ortonormal de U .

Assuma o resultado válido para qualquer subespaço não-degenerado de dimensão $k-1$. Suponha $U \subset \mathbb{R}_\nu^n$ subespaço não-degenerado de dimensão k . Dado qualquer subespaço $S \subset U$ não-degenerado de dimensão $k-1$, S admite uma base pseudo-ortonormal $\{u_1, \dots, u_{k-1}\}$.

Como S é não-degenerado, então $S^\perp$ é também não-degenerado e $U^\perp \subset S^\perp$. Assim, tomando um vetor unitário u_k que pertença a $S^\perp$ e não a $U^\perp$, garantimos que $u_k \in U$. Dessa forma, $\{u_1, \dots, u_k\}$ forma uma base pseudo-ortonormal de U .

Reciprocamente, seja $\{u_1, \dots, u_m\} \subseteq \mathbb{R}_\nu^n$ uma base pseudo-ortonormal de U e $x \in U$ tal que $x = x_1 u_1 + \dots + x_m u_m$, $x_i \in \mathbb{R}$, para todo $i = 1, \dots, m$. Suponha que $\langle x, v_j \rangle_L = 0$, para todo $j = 1, \dots, m$. Então

$$\langle x, v_j \rangle_\nu = x_j \langle v_j, v_j \rangle_\nu = x_j \epsilon_{v_j} = 0 \Rightarrow x_j = 0,$$

para todo $j = 1, \dots, m$. Logo $x = \vec{0}$. Portanto, U é não-degenerado. $\square$

Teorema 3.9. Sejam $u_1, \dots, u_{\nu+1} \in \mathbb{R}_\nu^n$ vetores de tipo luz dois a dois ortogonais. Então $\{u_1, \dots, u_{\nu+1}\}$ é linearmente dependente.

Demonstração: Tome a decomposição $\mathbb{R}_\nu^n = \mathbb{R}^{n-\nu} \oplus \mathbb{R}_\nu^\nu$, onde separamos a parte positiva e negativa associada ao produto interno pseudo-euclidiano. Podemos escrever os vetores de tipo luz como

$$u_j = x_j + \sum_{i=1}^{\nu} a_{ij} e_{n-\nu+i}, \quad 1 \leq j \leq \nu + 1,$$

onde $x_j \in \mathbb{R}^{n-\nu}$ e $e_{n-\nu+1}, \dots, e_n$ são os vetores da base canônica de $\mathbb{R}_\nu^\nu$.

Daí,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u_k, u_j \rangle_\nu = \left\langle x_k + \sum_{i=1}^{\nu} a_{ik} e_{n-\nu+i}, x_j + \sum_{i=1}^{\nu} a_{ij} e_{n-\nu+i} \right\rangle_\nu = \\ &= \underbrace{\langle x_k, x_j \rangle_\nu}_{=0} + \underbrace{\left\langle x_k, \sum_{i=1}^{\nu} a_{ij} e_{n-\nu+i} \right\rangle_\nu}_{=0} + \underbrace{\left\langle \sum_{i=1}^{\nu} a_{ik} e_{n-\nu+i}, x_j \right\rangle_\nu}_{=0} + \left\langle \sum_{i=1}^{\nu} a_{ik} e_{n-\nu+i}, \sum_{i=1}^{\nu} a_{ij} e_{n-\nu+i} \right\rangle_\nu \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 = \langle x_k, x_j \rangle_\nu - \sum_{i=1}^{\nu} a_{ik} a_{ij} \Rightarrow \langle x_k, x_j \rangle_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} a_{ik} a_{ij}. \end{aligned}$$

Assim, considere uma aplicação $A : \mathbb{R}^{\nu+1} \rightarrow \mathbb{R}^\nu$ cuja matriz na base canônica tem entrada os coeficientes a_{ij} . Então

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,\nu+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\nu,1} & \cdots & a_{\nu,\nu+1} \end{pmatrix},$$

onde a i -ésima coluna representa os coeficientes de u_i em relação a base canônica de $\mathbb{R}_\nu^\nu$.

Tome $b = (b_1, \dots, b_{\nu+1}) \in \ker A$ não nulo. Assim, o produto do elemento b_i de b pelo vetor x_i é:

$$\left\langle \sum_{k=1}^{\nu+1} b_k x_k, \sum_{j=1}^{\nu+1} b_j x_j \right\rangle_\nu = \sum_{k=1}^{\nu+1} b_k \sum_{j=1}^{\nu+1} b_j \langle x_k, x_j \rangle_\nu = \sum_{k=1}^{\nu+1} b_k \sum_{j=1}^{\nu+1} b_j \sum_{i=1}^{\nu} a_{ik} a_{ij}. \quad (1)$$

Por outro lado, observe que

$$0 = (Ab)^t (Ab) = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_{\nu+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{\nu 1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,\nu+1} & \cdots & a_{\nu,\nu+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,\nu+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\nu,1} & \cdots & a_{\nu,\nu+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{\nu+1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\nu+1} b_k a_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{\nu+1} b_k a_{k\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{\nu+1} b_j a_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{\nu+1} b_j a_{\nu j} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{\nu} \left(\sum_{k=1}^{\nu+1} b_k a_{ki} \left(\sum_{j=1}^{\nu+1} b_j a_{ij} \right) \right).$$

Assim, reorganizando a ordem das somas, podemos reescrever tal produto matricial como:

$$0 = \sum_{i=1}^{\nu} \left(\sum_{k=1}^{\nu+1} b_k a_{ki} \left(\sum_{j=1}^{\nu+1} b_j a_{ij} \right) \right) = \sum_{k=1}^{\nu+1} b_k \sum_{j=1}^{\nu+1} b_j \sum_{i=1}^{\nu} a_{ik} a_{ij}.$$

Logo, pela Equação (1), temos

$$\left\langle \sum_{k=1}^{\nu+1} b_k x_k, \sum_{j=1}^{\nu+1} b_j x_j \right\rangle_{\nu} = 0,$$

mas, como x_j e x_k são vetores de tipo espaço, pois $x_k, x_j \in \mathbb{R}^{n-\nu}$, então $\sum_{k=1}^{\nu+1} b_k x_k = \vec{0}$ ou

$$\sum_{j=1}^{\nu+1} b_j x_j = \vec{0}.$$

Suponha, sem perda de generalidade, que $\sum_{j=1}^{\nu+1} b_j x_j = \vec{0}$. Então,

$$\sum_{j=1}^{\nu+1} b_j u_j = \sum_{j=1}^{\nu+1} b_j \left(x_j + \sum_{i=1}^{\nu} a_{ij} e_{n-\nu+i} \right) = \underbrace{\sum_{j=1}^{\nu+1} b_j x_j}_{=\vec{0}} + \sum_{i=1}^{\nu} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{\nu+1} b_j a_{ij} \right)}_{=0} e_{n-\nu+i} = \vec{0},$$

onde $\sum_{j=1}^{\nu+1} b_j a_{ij}$ representa a i -ésima linha de $Ab = 0$.

Dessa forma, encontramos uma combinação linear de $u_1, \dots, u_{\nu+1}$ igual ao vetor nulo, porém sem todos os coeficientes nulos. Portanto, $u_1, \dots, u_{\nu+1}$ são linearmente dependentes.

□

Corolário 3.10. Dois vetores de tipo luz em $\mathbb{L}^n$ são ortogonais se, e somente se, são paralelos.

Demonstração: A ida é imediata do Teorema 3.9. Reciprocamente, dado $v \in \mathbb{L}^n$ vetor de tipo luz e αv , $\alpha \in \mathbb{R}$, paralelo a v , temos

$$\langle v, \alpha v \rangle_L = \alpha \langle v, v \rangle_L = 0.$$

Logo, v é pseudo-ortogonal a qualquer vetor paralelo a ele. $\square$

Proposição 3.11. Seja um subespaço $U \subseteq \mathbb{L}^n$. Se $\langle \cdot, \cdot \rangle_L|_U$ é positivo-definido, então U contém somente vetores tipo espaço.

Demonstração: De fato, seja $\{v_1, \dots, v_m\}$ uma base de U , onde $v_i = (x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$, x_{i_j} a j -ésima coordenada do vetor v_i , $x_{i_j} \in \mathbb{R}$, para todo $j = 1, \dots, n$ e $i = 1, \dots, m$. Se $\langle \cdot, \cdot \rangle_L|_U$ é positivo-definido, então todos os vetores da base são tipo espaço, ou seja,

$$\sum_{j=1}^{n-1} x_{i_j}^2 > x_{i_n}^2, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Assim, dado $u \in U$ tal que

$$u = u_1 v_1 + \dots + u_m v_m = (u_1 x_{1_1} + \dots + u_m x_{m_1}, \dots, u_1 x_{1_n} + \dots + u_m x_{m_n}),$$

então vale que

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^m u_i x_{i_j} \right)^2 \geq \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^m u_i^2 x_{i_j}^2 \right) = \sum_{i=1}^m u_i^2 \sum_{j=1}^{n-1} x_{i_j}^2 > \sum_{i=1}^m u_i^2 x_{i_n}^2,$$

ou seja,

$$\langle u, u \rangle_L = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^m u_i x_{i_j} \right)^2 - \sum_{i=1}^m u_i^2 x_{i_n}^2 > 0.$$

$\square$

Proposição 3.12. Seja o subespaço U não vazio, $\{0\} \neq U \subseteq \mathbb{L}^n$. Se $\langle \cdot, \cdot \rangle_L|_U$ é negativo-definido, então U é uma reta.

Demonstração: Suponha que $\dim U \geq 2$, ou seja, existem pelo menos dois vetores $u, v \in U$ que formam uma base de U . Como U é negativo-definido, devemos ter u e v tipo tempo. Tome $w \in U$ dado por $w = v - \alpha u$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

$$\langle w, w \rangle_L = \langle v - \alpha u, v - \alpha u \rangle_L = \langle v, v \rangle_L - 2\alpha \langle v, u \rangle_L + \alpha^2 \langle u, u \rangle_L. \quad (2)$$

Como U é negativo-definido, $\langle w, w \rangle_L < 0$. Assim,

$$\langle v, v \rangle_L + \alpha^2 \langle u, u \rangle_L < 2\alpha \langle v, u \rangle_L \Rightarrow \frac{\langle v, v \rangle_L + \alpha^2 \langle u, u \rangle_L}{2\langle v, u \rangle_L} < \alpha.$$

Aplicando α na Equação (2), temos:

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle_L - 2\alpha \langle v, u \rangle_L + \alpha^2 \langle u, u \rangle_L &> \langle v, v \rangle_L - 2 \frac{\langle v, v \rangle_L + \alpha^2 \langle u, u \rangle_L}{2 \langle v, u \rangle_L} \langle v, u \rangle_L + \alpha^2 \langle u, u \rangle_L = \\ &= \langle v, v \rangle_L - \langle v, v \rangle_L - \alpha^2 \langle u, u \rangle_L + \alpha^2 \langle u, u \rangle_L = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \langle v - \alpha u, v - \alpha u \rangle_L > 0 \end{aligned}$$

que contradiz o fato do vetor ser tipo tempo.

Portanto, $\dim U = 1$, ou seja, U é uma reta. $\square$

Proposição 3.13. Seja o subespaço U não vazio, $\{\vec{0}\} \neq U \subseteq \mathbb{L}^n$. Se U contém um vetor de tipo tempo, então U é não-degenerado. Em particular, se $\langle \cdot, \cdot \rangle_L|_U$ é indefinido, então U é não-degenerada.

Demonstração: Seja $v \in U$ de tipo tempo e suponha U degenerado. Então existe $\vec{0} \neq u \in U$ tal que $\langle u, w \rangle_L = 0$, para qualquer $w \in U$. Em particular, $\langle u, v \rangle_L = 0$ e $\langle u, u \rangle_L = 0$, ou seja, u é do tipo luz.

Note que, dados $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ quaisquer, temos

$$\langle au + bv, au + bv \rangle_L = a^2 \langle u, u \rangle_L + 2ab \langle v, u \rangle_L + b^2 \langle v, v \rangle_L = b^2 \langle v, v \rangle_L < 0$$

Por outro lado, tomando $a = 1$ e $b = -\alpha$, temos $\langle v - \alpha u, v - \alpha u \rangle_L < 0$. Apesar disso, pela demonstração da Proposição 3.12, sabemos que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle v, v \rangle_L - 2\alpha \langle v, u \rangle_L + \alpha^2 \langle u, u \rangle_L > 0,$$

o que é uma contradição. Portanto, U é não-degenerado. $\square$

Proposição 3.14. Seja $U \in \mathbb{L}^n$ um subespaço degenerado. Então U admite base pseudo-ortogonal.

Demonstração: Seja $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{L}^n$ uma base de U . Então, pelo Teorema 3.9, existe um único vetor de tipo luz nesse conjunto. Suponha, sem perda de generalidade, que v_k é do tipo luz.

Aplicando o processo de Gram-Schmidt em $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$, obtemos uma base pseudo-ortogonal $\{v_1^*, \dots, v_{k-1}^*\}$ de $U - [v_k]$. Afirmamos que todos os vetores da base pseudo-ortogonal são ortogonais a v_k .

De fato, supondo o contrário, existiria $v_i^* \in \{v_1^*, \dots, v_{k-1}^*\}$, tal que $\langle v_i^*, v_k \rangle_L \neq 0$. Tomando a combinação linear $v_i^* + \lambda v_k$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que

$$\langle v_i^* + \lambda v_k, v_i^* + \lambda v_k \rangle_L = \langle v_i^*, v_i^* \rangle_L + 2\lambda \langle v_i^*, v_k \rangle_L.$$

Assim, para $\lambda = -\frac{\langle v_i^*, v_i^* \rangle_L}{\langle v_i^*, v_k \rangle_L}$ temos que $v_i^* + \lambda v_k$ é de tipo tempo, contradizendo que U é degenerado. Portanto, U admite uma base pseudo-ortogonal. $\square$

Definição 3.15. Sejam $U \subseteq \mathbb{R}_\nu^n$ um subespaço de dimensão m e $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ uma base de U . A **matriz de Gram** de $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu|_U$ em relação a $\mathcal{B}$ é

$$G_{U, \mathcal{B}} = (\langle u_i, u_j \rangle_\nu)_{1 \leq i, j \leq m} = \begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle_\nu & \langle u_1, u_2 \rangle_\nu & \dots & \langle u_1, u_m \rangle_\nu \\ \langle u_2, u_1 \rangle_\nu & \langle u_2, u_2 \rangle_\nu & \dots & \langle u_2, u_m \rangle_\nu \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_m, u_1 \rangle_\nu & \langle u_m, u_2 \rangle_\nu & \dots & \langle u_m, u_m \rangle_\nu \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.16. Seja o subespaço $U = [(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)] \subset \mathbb{L}^4$. A matriz de Gram de U na base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$ é:

$$G_{U, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \langle (1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 0) \rangle_L & \langle (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1) \rangle_L \\ \langle (0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0) \rangle_L & \langle (0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 1) \rangle_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lema 3.17. Sejam $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_m\}$ e $\mathcal{C} = \{v_1, \dots, v_m\}$ bases de $U \subseteq \mathbb{R}_\nu^m$. Então vale que

$$G_{U, \mathcal{B}} = A^t G_{U, \mathcal{C}} A,$$

onde $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m} \in M_m(\mathbb{R})$, conjuntos das matrizes quadradas de ordem n com entradas reais, é tal que $u_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} v_i$. Em particular,

$$\det G_{U, \mathcal{B}} = (\det A)^2 \det G_{U, \mathcal{C}} \text{ e } \det G_{U, \mathcal{B}} \neq 0 \text{ se, e somente se } \det G_{U, \mathcal{C}} \neq 0.$$

Demonstração: Seja U subespaço gerado por $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$. Podemos expressar os vetores de $\mathcal{B}$ como combinação linear de $\mathcal{C}$ da forma $u_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} v_i$, para todo $j = 1, \dots, m$.

Escrevendo em linguagem matricial, temos

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \end{pmatrix}$$

$$\text{e } A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Assim, cada entrada da matriz de Gram $G_{U,\mathcal{B}}$ é da forma:

$$\langle u_i, u_j \rangle_\nu = \left\langle \sum_{k=1}^m a_{ki} v_k, \sum_{l=1}^m a_{lj} v_l \right\rangle_\nu = \sum_{k=1}^m a_{ki} \sum_{l=1}^m a_{lj} \langle v_k, v_l \rangle_\nu.$$

$$\text{Logo, } G_{U,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m a_{k1} \sum_{l=1}^m a_{l1} \langle v_k, v_l \rangle_\nu & \cdots & \sum_{k=1}^m a_{k1} \sum_{l=1}^m a_{lm} \langle v_k, v_l \rangle_\nu \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^m a_{km} \sum_{l=1}^m a_{l1} \langle v_k, v_l \rangle_\nu & \cdots & \sum_{k=1}^m a_{km} \sum_{l=1}^m a_{lm} \langle v_k, v_l \rangle_\nu \end{pmatrix}.$$

Por outro lado: $A^t G_{U,\mathcal{C}} A =$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle_\nu & \cdots & \langle u_1, u_m \rangle_\nu \\ \langle u_2, u_1 \rangle_\nu & \cdots & \langle u_2, u_m \rangle_\nu \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_m, u_1 \rangle_\nu & \cdots & \langle u_m, u_m \rangle_\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^m a_{l1} \langle u_1, u_1 \rangle_\nu & \cdots & \sum_{l=1}^m a_{ln} \langle u_1, u_m \rangle_\nu \\ \sum_{l=1}^m a_{l1} \langle u_2, u_1 \rangle_\nu & \cdots & \sum_{l=1}^m a_{lm} \langle u_2, u_m \rangle_\nu \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{l=1}^m a_{l1} \langle u_m, u_1 \rangle_\nu & \cdots & \sum_{l=1}^m a_{lm} \langle u_m, u_m \rangle_\nu \end{pmatrix} = G_{U,\mathcal{B}}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Por fim, $\det(G_{U,\mathcal{B}}) = \det(A^t G_{U,\mathcal{C}} A) = \det(A^t) \det(G_{U,\mathcal{C}}) \det(A) = \det(A)^2 \det(G_{U,\mathcal{C}})$.

□

Proposição 3.18. Sejam $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}_\nu^n$. Se a matriz de Gram $(\langle u_i, u_j \rangle_\nu)_{1 \leq i, j \leq m}$ é invertível, então $\{u_1, \dots, u_m\}$ é linearmente independente.

Demonstração: Sejam $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ tais que $\sum_{i=1}^m a_i u_i = \vec{0}$. Aplicando $\langle \cdot, u_j \rangle_\nu$ na igualdade, para cada $j = 1, \dots, m$, temos

$$\left\langle \sum_{i=1}^m a_i u_i, u_j \right\rangle_\nu = \langle \vec{0}, u_j \rangle_\nu \Rightarrow \sum_{i=1}^m a_i \langle u_j, u_i \rangle_\nu = 0,$$

que, em forma matricial, pode ser expresso como:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle_\nu & \dots & \langle u_1, u_m \rangle_\nu \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_m, u_1 \rangle_\nu & \dots & \langle u_m, u_m \rangle_\nu \end{pmatrix}}_{\text{invertível}} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como o determinante da primeira matriz é diferente de 0, já que, por hipótese, ela é invertível, então construímos um sistema homogêneo que admite uma única solução, a trivial.

Portanto, $a_1 = \dots = a_m = 0$ e, assim, $\{u_1, \dots, u_m\}$ é linearmente independente. $\square$

Proposição 3.19. Sejam $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}_\nu^n$ linearmente independentes tais que $U_i = [u_1, \dots, u_i]$ é não-degenerado, para todo $i = 1, \dots, m$. Então a matriz de Gram de U_m é invertível.

Demonstração: Denote por G_i a matriz de Gram U_i . Vamos mostrar por indução em i que: se $\det(G_i) = 0$, isto é a matriz não é invertível, então $\{u_1, \dots, u_m\}$ é linearmente dependente.

Se $i = 1$ e $\det(G_1) = 0$, ou seja, $\langle u_1, u_1 \rangle_\nu = 0$, como o espaço gerado por u_1 é não-degenerado, então $u_1 = \vec{0}$.

Suponha válido para uma coleção qualquer de $i - 1$ vetores de $\mathbb{R}_\nu^n$. Em particular, se $\det(G_{i-1}) = 0$, então $\{u_1, \dots, u_{i-1}\}$ é linearmente dependente.

Seja $\{u_1, \dots, u_i\} \subseteq \mathbb{R}_\nu^n$ tal que $\det(G_i) = 0$. Se $\{u_1, \dots, u_i\}$ for linearmente dependente está provado. Suponha por absurdo que seja linearmente independente. Como os subespaços intermediários são não-degenerados, podemos fazer a projeção ortogonal de u_i em $[u_1, \dots, u_{i-1}]$, $\text{proj}_{U_{i-1}} u_i$. Assim a componente de u_i perpendicular a U_{i-1} é:

$$u_i^* = u_i - \text{proj}_{U_{i-1}} u_i = u_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle u_i, u_j \rangle_\nu}{\langle u_j, u_j \rangle_\nu} u_j.$$

Note que podemos escrever u_i^* na base $\{u_1, \dots, u_i\}$ e, da mesma forma, u_i na base $\{u_1, \dots, u_i^*\}$. Logo $[u_1, \dots, u_i] = [u_1, \dots, u_i^*] = U$.

Além disso, u_i^* não é o vetor nulo, não é de tipo luz e é pseudo-ortogonal a $u_1, \dots, u_{i-1}$. Pelo Lema 3.17, existe A , matriz não-singular, tal que:

$$G_{U_i} = A^t G_{U, \{u_1, \dots, u_i^*\}} A.$$

Daí,

$$0 = \det(G_{U_i}) = \det(A)^2 \det(G_{U_i, \{u_1, \dots, u_i^*\}}) = \det(A)^2 \det \begin{pmatrix} & 0 \\ G_{U_{i-1}} & \vdots \\ & 0 \\ 0 \cdots 0 & \langle u_m^*, u_m^* \rangle_\nu \end{pmatrix}.$$

Consequentemente, $\det(G_{U_{i-1}}) = 0$, então, pela hipótese de indução, $\{u_1, \dots, u_{i-1}\}$ é linearmente dependente, que faz com que $\{u_1, \dots, u_i\}$ seja também linearmente dependente. Com isso, chegamos a uma contradição.

Portanto, $\{u_1, \dots, u_i\}$ é linearmente dependente e o resultado segue. $\square$

Observação 3.20. Note que a Proposição 3.19 funciona como uma recíproca para a Proposição 3.18, porém considerando subespaços não-degenerados. Sem tal enfraquecimento, a recíproca da Proposição 3.18 é falsa.

De fato, tome r um raio de luz gerado por $v \in \mathbb{L}^n$ também de tipo luz. A matriz de Gram de U é dada por

$$G_{r,v} = (\langle v, v \rangle_L) = (0).$$

Assim, a matriz de Gram de r não é invertível, porém $\{v\}$ é linearmente independente.

Proposição 3.21. Seja $U \subseteq \mathbb{R}_\nu^n$ um subespaço. Então valem

$$\dim U + \dim U^\perp = n \text{ e } U = (U^\perp)^\perp.$$

Demonstração: Suponha $\dim U = m$ e $\{u_1, \dots, u_m\}$ uma base pseudo-ortogonal de U e, obtida completando a base anterior, $\{u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n\}$ uma base pseudo-ortogonal de $\mathbb{R}_\nu^n$.

Tomando $x \in U^\perp$, dado por $x = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$, vale que:

$$\langle x, u_j \rangle_\nu = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i u_i, u_j \right\rangle_\nu = \sum_{i=1}^n x_i \langle u_i, u_j \rangle_\nu = 0, \quad (3)$$

para cada $j = 1, \dots, m$, que em forma matricial é:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle_\nu & \cdots & \langle u_n, u_1 \rangle_\nu \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_1, u_m \rangle_\nu & \cdots & \langle u_n, u_m \rangle_\nu \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Note que, a matriz A é uma submatriz transposta da matriz de Gram na base

$\{u_1, \dots, u_n\}$, indicada em magenta:

$$G_{\mathbb{R}_\nu^n} = \begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle_\nu & \cdots & \langle u_1, u_m \rangle_\nu & \cdots & \langle u_1, u_n \rangle_\nu \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_m, u_1 \rangle_\nu & \cdots & \langle u_m, u_m \rangle_\nu & \cdots & \langle u_m, u_n \rangle_\nu \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_n, u_1 \rangle_\nu & \cdots & \langle u_n, u_m \rangle_\nu & \cdots & \langle u_n, u_n \rangle_\nu \end{pmatrix}.$$

Pela Observação 2.10 (i), a métrica é não-degenerada, logo, pela Proposição 3.19, $G_{\mathbb{R}_\nu^n}$ é invertível. Assim, as colunas da submatriz A são linearmente independentes e A tem posto máximo.

Pensando na Equação (3) como um sistema, a solução x pertence a $U^\perp$. Além disso, x pertence ao núcleo da transformação linear associada a A . Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem em A , segue

$$\dim(\text{domínio de } A) = \dim(\ker(A)) + \dim(\text{Im}(A)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \dim U^\perp + m \Rightarrow \dim U^\perp = n - m.$$

Portanto, $\dim U + \dim U^\perp = n$.

Por fim, dados $u \in U$ e $v \in U^\perp$ quaisquer, como $\langle u, v \rangle_\nu = 0$, então $u \in (U^\perp)^\perp$. Logo $U \subseteq (U^\perp)^\perp$. Daí, como garantido anteriormente,

$$\begin{cases} \dim U + \dim U^\perp = n \\ \dim U^\perp + \dim (U^\perp)^\perp = n \end{cases}$$

e $\dim U = \dim (U^\perp)^\perp$, que conclui a prova. $\square$

Corolário 3.22. Seja $U \subseteq \mathbb{R}_\nu^n$ um subespaço. Então $\mathbb{R}_\nu^n = U \oplus U^\perp$ se, e somente se, U é não-degenerado.

Demonstração: Da identidade:

$$\dim(U + U^\perp) = \dim U + \dim U^\perp - \dim(U \cap U^\perp),$$

concluimos que $\dim U + \dim U^\perp = n$ se, e somente se, $\dim(U \cap U^\perp) = 0$, que é equivalente a dizer que $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}_\nu^n$ ou $U \cap U^\perp = \{\vec{0}\}$.

Porém, os elementos que pertencem a tal intersecção são da forma:

$$U \cap U^\perp = \{u \in U; \langle u, v \rangle_\nu = 0, \forall v \in U\} = \{\vec{0}\}$$

que é exatamente a definição de não-degenerado. $\square$

Exemplo 3.23. Seja $U = [(0, \dots, 0, 1)] \subseteq \mathbb{L}^n$. Como $(0, \dots, 0, 1)$ é de tipo tempo, então U é não-degenerado. Assim, pelo Corolário 3.22, podemos fazer a decomposição

$$\mathbb{L}^n = U \oplus U^\perp = [(0, \dots, 0, 1)] \oplus [(1, \dots, 0), \dots, (0, 1, \dots, 0)].$$

Nesse tipo de decomposição, é comum chamarmos U de **parte temporal** de $\mathbb{L}^n$ e $U^\perp$ de **parte espacial** de $\mathbb{L}^n$. Tal nomenclatura é motivada pela associação da n -ésima coordenada de $\mathbb{L}^n$ ao tempo e as demais ao espaço, como visto na Observação 2.12.

Corolário 3.24. Um subespaço $U \subseteq \mathbb{R}_\nu^n$ é não-degenerado se, e somente se, $U^\perp$ é não-degenerado.

Demonstração: Supondo U não-degenerado, pelo corolário anterior, temos

$$U \cap U^\perp = \{\vec{0}\} = \{u \in U^\perp; \langle u, v \rangle_\nu = 0, \forall v \in U^\perp\},$$

ou seja, $U^\perp$ é não-degenerado. Sendo a volta análoga. $\square$

Exemplo 3.25. Seja $U = [(0, \dots, 0, 1)] \subseteq \mathbb{L}^n$, do Exemplo 3.23. Como U é não-degenerado, então $U^\perp$ também é não-degenerado.

Exemplo 3.26. Seja o subespaço $U = [(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)] \subset \mathbb{L}^n$, estudado no Exemplo 3.16. U é degenerado, pois $(0, 0, 1, 1)$ é de tipo luz e é pseudo-ortogonal a $(1, 1, 0, 0)$. Assim, pela contrapositiva do Corolário 3.24, $U^\perp$ é degenerado.

3.2 | Causalidade em Subespaços de $\mathbb{L}^n$

Nesta seção, vamos estudar o caráter causal de subespaços em $\mathbb{L}^n$, a relação entre tipos causais decorrente da ortogonalidade e as consequências dos teoremas vistos na Seção 3.1 em $\mathbb{L}^n$.

Definição 3.27. Seja $U \subseteq \mathbb{L}^n$ um subespaço não vazio. Dizemos que U é

- (i) de tipo **espaço**, se $\langle \cdot, \cdot \rangle_L|_U$ é positivo-definido;
- (ii) de tipo **tempo**, se $\langle \cdot, \cdot \rangle_L|_U$ é negativo-definido, ou não-degenerado indefinido;
- (iii) de tipo **luz**, se $\langle \cdot, \cdot \rangle_L|_U$ é degenerado.

Por meio dessa classificação, segue diretamente das Proposições 3.11, 3.12 e 3.13 os resultados:

Corolário 3.28. Se $\dim U = 0$, ou seja, $U = \{\vec{0}\}$, então U é tipo espaço.

Corolário 3.29. U é de tipo espaço se, e somente se, contém vetores de tipo espaço.

Demonstração: A ida é imediata pela Proposição 3.11.

Por outro lado, se U só contém vetores de tipo espaço, então o produto interno lorentziano restrito a U é positivo-definido, ou seja, U é de tipo espaço. $\square$

Exemplo 3.30. Seja $U \subseteq \mathbb{L}^4$, tal que $U = [(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)]$. U só contém vetores de tipo espaço, logo U é de tipo espaço.

Corolário 3.31. U é de tipo tempo se, e somente se, contém pelo menos um vetor de tipo tempo.

Demonstração: De fato, se U contém um vetor de tipo tempo, então o produto interno lorentziano restrito a U é negativo ou indefinido. Além disso, pela Proposição 3.13, U é não-degenerado, logo U é do tipo tempo.

Reciprocamente, se U é de tipo tempo, então o produto interno lorentziano restrito a U é negativo ou indefinido, ou seja, existe $u \in U$ de tipo tempo. $\square$

Exemplo 3.32. Seja $U \subseteq \mathbb{L}^4$ tal que $U = [(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)]$. U contém um vetor de tipo tempo, logo U é de tipo tempo.

Corolário 3.33. U é de tipo luz se, e somente se, contém pelo menos um vetor de tipo luz e nenhum de tipo tempo.

Demonstração: Suponha U de tipo luz. Caso U contivesse um vetor de tipo tempo, pela Proposição 3.13, U seria não-degenerado, o que contradiz a hipótese.

Como U é degenerado, existe $u \in U$ tal que $\langle u, v \rangle_L = 0$, para todo $v \in U$. Em particular, $\langle u, u \rangle_L = 0$. Portanto, U não contém vetores de tipo tempo e pelo menos um vetor do tipo luz.

Reciprocamente, se U não contém vetores de tipo tempo e pelo menos um vetor u de tipo luz, então U não é de tipo espaço, pela negação do Corolário 3.29.

Por fim, suponha U não-degenerado. Assim, existe pelo menos um vetor $v \in U$ não nulo, tal que $\langle u, v \rangle_L \neq 0$.

Seja $w = au + bv$, $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ quaisquer, temos $w \in U$ e

$$\langle w, w \rangle_L = \langle au + bv, au + bv \rangle_L = \underbrace{a^2 \langle u, u \rangle_L}_{=0} + 2ab \langle v, u \rangle_L + b^2 \langle v, v \rangle_L.$$

Assim, sobram-nos duas possibilidades:

- v é de tipo espaço. Tomando $a = -b \frac{\langle v, v \rangle_L}{\langle v, u \rangle_L}$:

$$\langle w, w \rangle_L = 2b \left(-b \frac{\langle v, v \rangle_L}{\langle v, u \rangle_L} \right) \langle v, u \rangle_L + b^2 \langle v, v \rangle_L = -b^2 \langle v, v \rangle_L < 0,$$

contradizendo o fato de não haverem vetores de tipo tempo em U ;

- v é de tipo luz. Tomando $a = -\frac{b}{\langle v, u \rangle_L}$:

$$\langle w, w \rangle_L = 2b \left(-\frac{b}{\langle v, u \rangle_L} \right) \langle v, u \rangle_L + \underbrace{b^2 \langle v, v \rangle_L}_{=0} = -2b^2 < 0,$$

que contradiz a hipótese da mesma forma que o caso anterior.

Portanto, U é degenerado e, conseqüentemente, de tipo luz. $\square$

Exemplo 3.34. Seja $U \subseteq \mathbb{L}^4$ tal que $U = [(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1)]$. U não contém vetores de tipo tempo e contém um de tipo luz, logo U é de tipo luz.

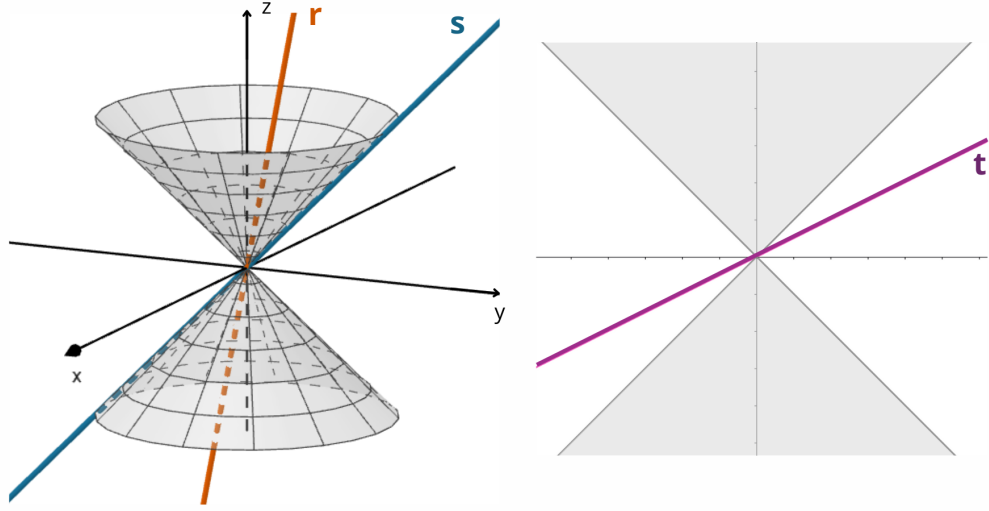
Proposição 3.35. Seja $r \subseteq \mathbb{L}^n$ uma reta passando pela origem. O caráter causal de r é o mesmo que o de qualquer vetor que dê origem a sua direção.

Demonstração: Seja $v \in \mathbb{L}^n$ vetor diretor de r . Como $\{v\}$ gera r , todos os seus vetores podem ser escritos como αv , $\alpha \in \mathbb{R}$, e, pela Observação 2.19, garantimos que terão o mesmo tipo causal que o próprio v . Dessa forma,

- (i) Se v é do tipo espaço, $\langle \cdot, \cdot \rangle_L|_r$ é positivo-definido, logo r é do tipo espaço;
- (ii) Se v é do tipo tempo, $\langle \cdot, \cdot \rangle_L|_r$ é negativo-definido, logo r é do tipo tempo;
- (iii) Se v é do tipo luz, $\langle \cdot, \cdot \rangle_L|_r$ é degenerado, logo r é do tipo luz.

$\square$

Exemplo 3.36. Sejam as retas: $r : M(u) = (u, u, 3u)$ e $s : N(u) = (0, u, u)$, em $\mathbb{L}^3$, e $t : S(u) = \left(u, \frac{1}{2}u\right)$, em $\mathbb{L}^2$, ilustradas na Figura 11.

Figura 11: Representação das retas r, s e t .

Fonte: Elaboração própria (2026).

Note que:

- (i) O vetor diretor de r é $v_r = (1, 1, 3)$ de tipo tempo, logo r é de tipo tempo;
- (ii) O vetor diretor de s é $v_s = (0, 1, 1)$ de tipo luz, então s é de tipo luz;
- (iii) O vetor diretor de t é $v_t = (1, \frac{1}{2})$ de tipo espaço, assim t é de tipo espaço;

Observação 3.37. Nesta seção, fizemos somente a classificação de causalidade de subespaços no espaço $\mathbb{L}^n$. Isso porque, se $\nu > 1$, um subespaço não necessariamente admite tipo causal.

De fato, tome, por exemplo, $U \subseteq \mathbb{R}_2^4$, tal que $U = [(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)]$. Perceba que:

- (i) $\langle (1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0) \rangle_2 = 1$, ou seja, $(1, 0, 0, 0)$ é de tipo espaço;
- (ii) $\langle (0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0) \rangle_2 = -1$, ou seja, $(0, 0, 1, 0)$ é de tipo tempo;
- (iii) $\langle (0, 1, 0, 1), (0, 1, 0, 1) \rangle_2 = 0$, ou seja, $(0, 1, 0, 1)$ é de tipo luz;
- (iv) $\langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1) \rangle_2 = 0$;
- (v) $\langle (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1) \rangle_2 = 0$.

De (ii) temos que o produto interno lorentziano restrito a U não é positivo-definido, logo U não é de tipo espaço. Pelo mesmo item, como contém um vetor de tipo tempo, U não é de tipo luz. Porém, pelos itens (iii), (iv) e (v), concluímos que U é degenerado, então também não é de tipo tempo. Dessa forma, U não admite tipo causal.

O próximo objetivo de nosso estudo será encontrar outra forma de classificar o tipo causal de um subespaço por meio da matriz de Gram, (Definição 3.38), que operaremos junto do Teorema de Sylvester, Teorema 3.40. Mais adiante, faremos um estudo detalhado desse processo para subespaços de dimensão 2, os planos, e, em seguida, os hiperplanos.

Definição 3.38. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica. Dizemos que

- (i) A é **semi-positiva**, se $\langle Av, v \rangle_E \geq 0$ para todo $v \neq \vec{0}$. Se $\langle Av, v \rangle_E > 0$, dizemos que A é **positiva-definida**.
- (ii) A é **semi-negativa**, se $\langle Av, v \rangle_E \leq 0$ para todo $v \neq \vec{0}$. Se $\langle Av, v \rangle_E < 0$, dizemos que A é **negativa-definida**.
- (iii) A é **indefinida** se não for de nenhum dos tipos acima.

Exemplo 3.39. A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ é semi-positiva.

De fato, dado $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, então

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x + y \end{pmatrix} \quad \text{e}$$

$$\langle Av, v \rangle_E = \langle (x + y, x + y), (x, y) \rangle_E = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 \geq 0.$$

□

Teorema 3.40. (Teorema de Sylvester) Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica com entradas reais e $\Delta_k = \det(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ o menor principal de ordem k de A . Então

- (i) A é positiva-definida (resp. semi-positiva) se, e somente se, vale que $\Delta_k > 0$ (resp. $\Delta_k \geq 0$), para todo $k = 1, \dots, n$;
- (ii) A é negativa-definida (resp. semi-negativa) se, e somente se, vale que $\Delta_k < 0$ (resp. $\Delta_k \leq 0$), para todo $k = 1, \dots, n$;
- (iii) A é indefinida se, e somente se, ocorre uma das duas possibilidades:
 - Existe k , $1 \leq k \leq n$ par, tal que $\Delta_k < 0$;
 - Existem k e l , $1 \leq k, l \leq n$ ímpares e distintos, tais que $\Delta_k > 0$ e $\Delta_l < 0$.

Por se tratar de um resultado puramente técnico, omitiremos a demonstração do Teorema de Sylvester. Podemos encontrar mais detalhes da demonstração em (COUTO; LYMBEROPOULOS, 2018).

Corolário 3.41. Seja o subespaço $U \subseteq \mathbb{L}^n$, onde $U = [u_1, \dots, u_m]$, e Δ_k os menores principais da matriz de Gram G_U . Então:

- (i) U é de tipo espaço se, e somente se, $\Delta_k > 0$, para todo $k = 1, \dots, m$;
- (ii) U é de tipo tempo se, e somente se, $\Delta_k < 0$, para todo $k = 1, \dots, m$, ou existe $1 \leq k \leq m$ par tal que $\Delta_k < 0$, ou existem $1 \leq k, l \leq m$ ímpares distintos tais que $\Delta_k > 0$ e $\Delta_l < 0$;
- (iii) U é de tipo luz se, e somente se, $\Delta_k \geq 0$, para todo $k = 1, \dots, m$.

Demonstração: Inicialmente, para utilizar o Teorema de Sylvester, precisamos encontrar uma matriz A simétrica, para estudarmos seus menores principais.

Afirmção: $\langle v, v \rangle_L = \langle G_U v, v \rangle_E$ e G_U é a matriz A procurada.

Dado $v \in U$, tal que $v = v_1 u_1 + \dots + v_m u_m$, temos,

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle_L &= \langle v_1 u_1 + \dots + v_m u_m, v_1 u_1 + \dots + v_m u_m \rangle_L = \\ &= \left\langle v_1 u_1, \sum_{i=1}^m v_i u_i \right\rangle_L + \dots + \left\langle v_m u_m, \sum_{i=1}^m v_i u_i \right\rangle_L = \sum_{j=1}^m v_j \sum_{i=1}^m v_i \langle u_j, u_i \rangle_L. \end{aligned} \quad (4)$$

Por outro lado, podemos escrever

$$G_U v = \begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle_L & \dots & \langle u_1, u_m \rangle_L \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_m, u_1 \rangle_L & \dots & \langle u_m, u_m \rangle_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m v_i \langle u_1, u_i \rangle_L \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m v_i \langle u_m, u_i \rangle_L \end{pmatrix}.$$

Daí,

$$\langle G_U v, v \rangle_E = \left\langle \left(\sum_{i=1}^m v_i \langle u_1, u_i \rangle_L, \dots, \sum_{i=1}^m v_i \langle u_m, u_i \rangle_L \right), (v_1, \dots, v_m) \right\rangle_E = \sum_{j=1}^m v_j \sum_{i=1}^m v_i \langle u_j, u_i \rangle_L.$$

Dessa forma, pela Equação (4), segue que $\langle v, v \rangle_L = \langle G_U v, v \rangle_E$. Além disso, como o produto interno lorentziano é comutativo, G_U é simétrica.

Assim, falta-nos analisar a relação entre os tipos causais de U e os menores principais de G_U aplicando o Teorema 3.40.

- (i) Se U é de tipo espaço, todos os vetores são de tipo espaço, que é equivalente a dizer que G_U é positiva-definida, logo $\Delta_k > 0$, para todo $k = 1, \dots, m$;
- (ii) Se U é de tipo tempo existe pelo menos um vetor de tipo tempo em U , que é equivalente a dizer que G_U é negativa-definida ou indefinida que, isto é, ou $\Delta_k < 0$ para todo $k = 1, \dots, m$, ou existe $1 \leq k \leq m$ par tal que $\Delta_k < 0$, ou existem $1 \leq k, l \leq m$ ímpares e distintos tais que $\Delta_k > 0$ e $\Delta_l < 0$;

- (iii) Se U é de tipo luz, U só contém vetores de tipo luz ou espaço, ou seja, G_U é semi-positiva, que equivale a $\Delta_k \geq 0$, para todo $k = 1, \dots, m$.

□

Exemplo 3.42.

- (i) Seja $U = [v_1, v_2, v_3] \subseteq \mathbb{L}^4$, onde $v_1 = (2, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 2, 0)$ e $v_3 = (-1, -2, 0, 1)$. A matriz de Gram de U relativa à base $\{v_1, v_2, v_3\}$ é

$$G_{U, \{v_1, v_2, v_3\}} = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle_L & \langle v_1, v_2 \rangle_L & \langle v_1, v_3 \rangle_L \\ \langle v_2, v_1 \rangle_L & \langle v_2, v_2 \rangle_L & \langle v_2, v_3 \rangle_L \\ \langle v_3, v_1 \rangle_L & \langle v_3, v_2 \rangle_L & \langle v_3, v_3 \rangle_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Como $\Delta_1 = 3$, $\Delta_2 = 15$ e $\Delta_3 = 3$, todos positivos, então U é de tipo espaço;

- (ii) Seja $U = [v_1, v_2, v_3] \subseteq \mathbb{L}^4$, com $v_1 = (2, 1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1, -1)$ e $v_3 = (1, 0, 0, -1)$. A a matriz de Gram de U relativa à base $\{v_1, v_2, v_3\}$ é

$$G_{U, \{v_1, v_2, v_3\}} = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle_L & \langle v_1, v_2 \rangle_L & \langle v_1, v_3 \rangle_L \\ \langle v_2, v_1 \rangle_L & \langle v_2, v_2 \rangle_L & \langle v_2, v_3 \rangle_L \\ \langle v_3, v_1 \rangle_L & \langle v_3, v_2 \rangle_L & \langle v_3, v_3 \rangle_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\Delta_1 = 4$, $\Delta_2 = 0$ e $\Delta_3 = -25$, onde Δ_1 e Δ_3 tem sinais opostos, então U é de tipo tempo;

- (iii) Seja $U = [v_1, v_2, v_3] \subseteq \mathbb{L}^4$, onde $v_1 = (1, -1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1, -1)$ e $v_3 = (0, 0, 1, 1)$. Daí, a matriz de Gram de U relativa à base $\{v_1, v_2, v_3\}$ é

$$G_{U, \{v_1, v_2, v_3\}} = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle_L & \langle v_1, v_2 \rangle_L & \langle v_1, v_3 \rangle_L \\ \langle v_2, v_1 \rangle_L & \langle v_2, v_2 \rangle_L & \langle v_2, v_3 \rangle_L \\ \langle v_3, v_1 \rangle_L & \langle v_3, v_2 \rangle_L & \langle v_3, v_3 \rangle_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 1$ e $\Delta_3 = 0$, ou seja, G_U é semi-positiva, então U é de tipo luz.

Teorema 3.43. Seja $\pi \subseteq \mathbb{L}^3$ um plano, $\pi : ax + by + cz = 0$, tal que $c \neq 0$. Assim, vale o critério:

- i) $\det G_{\pi, V} > 0$ se, e somente se, π é de tipo espaço;
- ii) $\det G_{\pi, V} < 0$ se, e somente se, π é de tipo tempo;
- iii) $\det G_{\pi, V} = 0$ se, e somente se, π é de tipo luz.

Demonstração:

De forma análoga ao Corolário 3.41, vamos encontrar a matriz A simétrica para utilizar o Teorema de Sylvester. Porém centrando nossa atenção em um subespaço de dimensão 2, ou seja, planos que passam pela origem. Como $c \neq 0$, dado $v = (x, y, z) \in \pi$, podemos escrever sua última coordenada da forma $z = \frac{-ax - by}{c}$. Daí,

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle_L &= x^2 + y^2 - z^2 = x^2 + y^2 - \left(\frac{-ax - by}{c} \right)^2 = \\ &= x^2 + y^2 - \frac{a^2}{c^2}x^2 + \frac{2ab}{c^2}xy - \frac{b^2}{c^2}y^2 = \left(1 - \frac{a^2}{c^2} \right) x^2 - \frac{2ab}{c^2}xy + \left(1 - \frac{b^2}{c^2} \right) y^2, \end{aligned}$$

que em notação matricial é dada por:

$$\langle v, v \rangle_L = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 - \frac{a^2}{c^2} & -\frac{ab}{c^2} \\ -\frac{ab}{c^2} & 1 - \frac{b^2}{c^2} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

onde A é a matriz indicada.

Analisando o produto matricial:

$$Av = \begin{pmatrix} 1 - \frac{a^2}{c^2} & -\frac{ab}{c^2} \\ -\frac{ab}{c^2} & 1 - \frac{b^2}{c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \left(1 - \frac{a^2}{c^2} \right) - y \frac{ab}{c^2} \\ -x \frac{ab}{c^2} + y \left(1 - \frac{b^2}{c^2} \right) \end{pmatrix},$$

temos que

$$\begin{aligned} \langle Av, v \rangle_E &= x \left(x \left(1 - \frac{a^2}{c^2} \right) - y \frac{ab}{c^2} \right) + y \left(-x \frac{ab}{c^2} + y \left(1 - \frac{b^2}{c^2} \right) \right) = \\ &= \left(1 - \frac{a^2}{c^2} \right) x^2 - \frac{2ab}{c^2}xy + \left(1 - \frac{b^2}{c^2} \right) y^2 = \langle v, v \rangle_L. \end{aligned}$$

Dessa forma, conseguimos reescrever o produto loretziano de um vetor v de π como um produto interno euclidiano composto de um produto matricial.

Mais que isso, decompondo v da forma conveniente:

$$v = \left(x, y, \frac{-ax - by}{c} \right) = x \underbrace{\left(1, 0, -\frac{a}{c} \right)}_{v_1} + y \underbrace{\left(0, 1, -\frac{b}{c} \right)}_{v_2},$$

onde $V = \{v_1, v_2\}$ é uma base de π . Ao construir a matriz de Gram do plano π na base

V obtemos:

$$G_{\pi,V} = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle_L & \langle v_1, v_2 \rangle_L \\ \langle v_2, v_1 \rangle_L & \langle v_2, v_2 \rangle_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{a^2}{c^2} & -\frac{ab}{c^2} \\ -\frac{ab}{c^2} & 1 - \frac{b^2}{c^2} \end{pmatrix} = A,$$

Desse modo, A , indicada anteriormente, é a própria matriz de Gram de π . Logo

$$\langle v, v \rangle_L = \langle G_{\pi,V} v, v \rangle_E. \quad (5)$$

Calculando o determinante de $G_{\pi,V}$:

$$\det G_{\pi,V} = \left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right) - \left(-\frac{ab}{c^2}\right)^2 = 1 - \frac{a^2}{c^2} - \frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2 b^2}{c^4} - \frac{a^2 b^2}{c^4} = 1 - \frac{a^2 + b^2}{c^2}.$$

Falta-nos analisar os tipos causais de π e sua relação com o determinante aplicando o Teorema 3.40.

(i) Se $\det G_{\pi,V} > 0$, ou seja,

$$1 - \frac{a^2 + b^2}{c^2} > 0 \Rightarrow 1 > \frac{a^2 + b^2}{c^2} > \frac{a^2}{c^2} \Rightarrow 1 - \frac{a^2}{c^2} > 0.$$

Os menores principais $\Delta_1 = 1 - \frac{a^2}{c^2}$ e $\Delta_2 = \det G_{\pi,V}$ são positivos. Assim, pelo Teorema de Sylvester, $G_{\pi,V}$ é positiva-definida, ou seja,

$$\langle v, v \rangle_L = \langle G_{\pi,V} v, v \rangle_E > 0, \forall v \in \pi.$$

Portanto, todos os vetores de π são de tipo espaço, equivalentemente, π é de tipo espaço;

(ii) Se $\det G_{\pi,V} < 0$, ou seja, um menor principal par $\Delta_2 = \det G_{\pi,V}$ é negativo que, pelo Teorema de Sylvester, equivale a dizer que $G_{\pi,V}$ é indefinida. Dessa forma, existem vetores de tipo espaço e tempo contidos em π , consequentemente, π é de tipo tempo;

(iii) Se $\det G_{\pi,V} = 0$, ou seja,

$$1 - \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} > \frac{a^2}{c^2} \Rightarrow 1 - \frac{a^2}{c^2} > 0.$$

Assim os menores principais são $\Delta_1 > 0$ e $\Delta_2 = 0$ que, pelo Teorema de Sylvester, equivale a dizer que $\det G_{\pi,V}$ é semi-positiva. Dessa forma, existem somente vetores de tipo espaço e luz contidos em π , logo, π é de tipo luz.

□

Exemplo 3.44.

- (i) Seja o plano $\pi_1 : x - 2y + 5z = 0$. A matriz de Gram de π_1 na base $V = \left\{ \left(1, 0, -\frac{1}{5}\right), \left(0, 1, \frac{2}{5}\right) \right\}$ é:

$$G_{\pi_1, V} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{25} & \frac{2}{25} \\ \frac{2}{25} & 1 - \frac{4}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24}{25} & \frac{2}{25} \\ \frac{2}{25} & \frac{21}{25} \end{pmatrix}.$$

Daí,

$$\det G_{\pi_1, V} = \frac{504}{625} - \frac{4}{625} = \frac{500}{625} > 0.$$

Dessa forma, π_1 é de tipo espaço, ilustrado na Figura 12 (a);

- (ii) Seja o plano $\pi_2 : 4x - 2y + z = 0$. A matriz de Gram de π_2 na base $V = \{(1, 0, -4), (0, 1, 2)\}$ é:

$$G_{\pi_2, V} = \begin{pmatrix} 1 - 16 & 8 \\ 8 & 1 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 8 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Daí,

$$\det G_{\pi_2, V} = 45 - 64 = -19 < 0.$$

Dessa forma, π_2 é de tipo tempo, ilustrado na Figura 12 (b);

- (iii) Seja o plano $\pi_3 : 3x + 4y - 5z = 0$. A matriz de Gram de π_3 na base $V = \left\{ \left(1, 0, \frac{3}{5}\right), \left(0, 1, \frac{4}{5}\right) \right\}$ é:

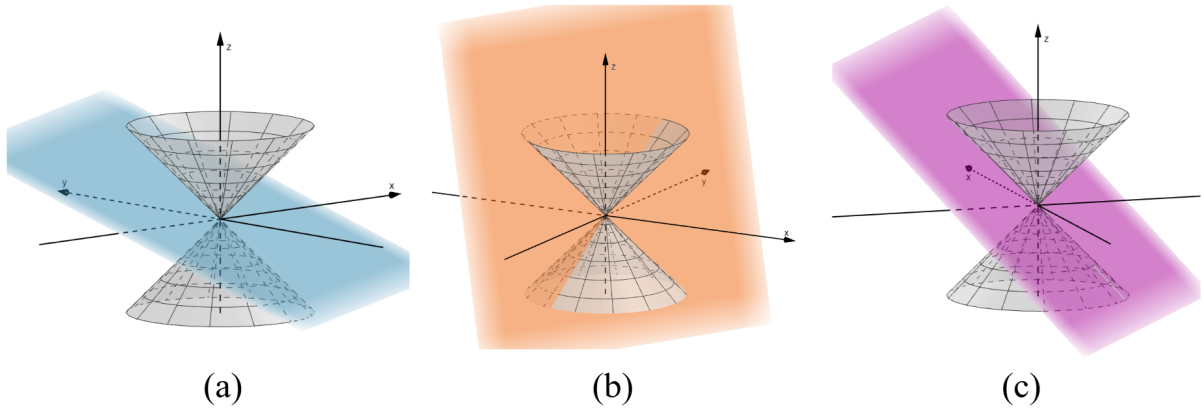
$$G_{\pi_3, V} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{9}{25} & -\frac{12}{25} \\ -\frac{12}{25} & 1 - \frac{16}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{25} & -\frac{12}{25} \\ -\frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{pmatrix}.$$

Daí,

$$\det G_{\pi_3, V} = \frac{144}{625} - \frac{144}{625} = 0.$$

Dessa forma, π_3 é de tipo luz, ilustrado na Figura 12 (c).

Figura 12: Representação dos planos π_1, π_2 e π_3 em relação ao cone de luz.



Fonte: Elaboração própria (2026).

Outra forma de analisarmos o tipo causal de um plano é a partir do vetor normal:

Teorema 3.45. Sejam $\pi \subseteq \mathbb{L}^3$ um plano de equação $\pi : ax + by + cz = 0$, $c \neq 0$ e $n = (a, b, c)$ o vetor normal a π . Então

- (i) π é do tipo espaço se, e somente se, n é de tipo tempo;
- (ii) π é do tipo tempo se, e somente se, n é de tipo espaço;
- (iii) π é do tipo luz se, e somente se, n é de tipo luz.

Demonstração:

- (i) π é de tipo espaço se, e somente se,

$$\det G_{\pi, V} = 1 - \frac{a^2 + b^2}{c^2} > 0 \Leftrightarrow c^2 > a^2 + b^2 \Leftrightarrow 0 > a^2 + b^2 - c^2 = \langle n, n \rangle_L,$$

ou seja, n é de tipo tempo;

- (ii) π é de tipo tempo se, e somente se,

$$\det G_{\pi, V} = 1 - \frac{a^2 + b^2}{c^2} < 0 \Leftrightarrow c^2 < a^2 + b^2 \Leftrightarrow 0 < a^2 + b^2 - c^2 = \langle n, n \rangle_L,$$

ou seja, n é de tipo espaço;

- (iii) π é de tipo luz se, e somente se,

$$\det G_{\pi, V} = 1 - \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 0 \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 0 = a^2 + b^2 - c^2 = \langle n, n \rangle_L,$$

ou seja, n é de tipo luz.

□

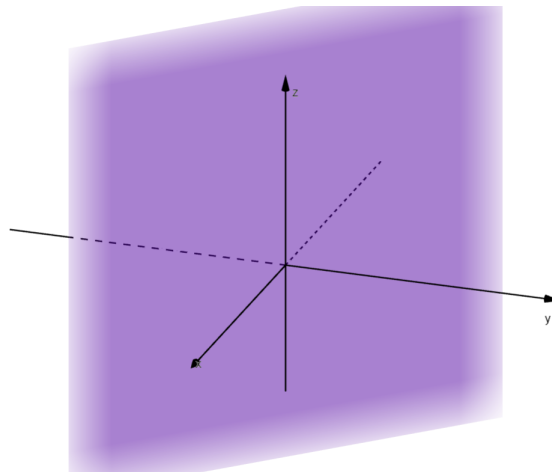
Exemplo 3.46. Verificando o vetor normais aos planos do Exemplo 3.44, temos:

- (i) Em π_1 , o vetor normal $n_1 = (1, -2, 5)$ é de tipo tempo;
- (ii) Em π_2 , o vetor normal $n_2 = (4, -2, 1)$ é de tipo espaço;
- (iii) Em π_3 , o vetor normal $n_3 = (3, 4, -5)$ é de tipo luz.

Observação 3.47. Dado $\pi : ax + by + cz = 0$, falta-nos analisar o caso em que $c = 0$. Como $\pi : ax + by = 0$, então $e_3 = (0, 0, 1) \in \pi$, logo π é de tipo tempo.

Observe, por exemplo, o plano $\pi : x + y = 0$ em $\mathbb{L}^3$ é de tipo tempo e seu vetor normal é $n = (1, 1, 0)$ de tipo espaço. Figura 13 ilustra o plano π em roxo.

Figura 13: Representação do plano $\pi : x + y = 0$.



Fonte: Elaboração própria (2026).

Vejamos agora a relação causal entre um subespaço U e o subespaço pseudo-ortogonal a ele, $U^\perp$.

Corolário 3.48. Em $\mathbb{L}^n$, um subespaço U é do tipo espaço se, e somente se, $U^\perp$ é do tipo tempo.

Demonstração: O Corolário 3.24 afirma que um subespaço é não-degenerado se, e somente se, $U^\perp$ o for. Assim:

- Suponha $U \subseteq \mathbb{L}^n$ de tipo espaço. Como U é não-degenerado, pelo Corolário 3.22, vale $\mathbb{L}^n = U \oplus U^\perp$. Podemos escrever um vetor $v \in \mathbb{L}^n$ de tipo tempo como $v = u + w$, onde $u \in U$ e $w \in U^\perp$. Daí

$$\langle v, v \rangle_L = \underbrace{\langle u, u \rangle_L}_{>0} + 2 \underbrace{\langle u, w \rangle_L}_{=0} + \langle w, w \rangle_L = \langle w, w \rangle_L < 0.$$

Portanto, existe um vetor w de tipo tempo em $U^\perp$, ou seja, $U^\perp$ é de tipo tempo;

- Seja U de tipo tempo e $u \in U$ um vetor de tipo tempo. Note que $U^\perp \subseteq \{u\}^\perp$ e, pelo Corolário 3.22, garantimos que $\{u\}^\perp$ não é degenerado, logo $\{u\}^\perp$ não é de tipo luz.

Supondo que $\{u\}^\perp$ seja de tipo tempo, então existe $v \in \{u\}^\perp$ de tipo tempo. Porém, isso asseguraria a existência de $V = [u, v]$ subespaço em $\mathbb{L}^n$ de dimensão 2 com $\langle \cdot, \cdot \rangle_L|_V$ negativo-definido, que contradiz a Proposição 3.12.

Dessa forma, $u^\perp$ é de tipo espaço, que faz com que $U^\perp$ também seja.

□

Exemplo 3.49. Seja o plano xy contido em $\mathbb{L}^3$ de tipo espaço. O subespaço pseudo-ortogonal do plano é a reta $r = [(0, 0, 1)]$, ou seja, o eixo z , que é de tipo tempo.

Corolário 3.50. Em $\mathbb{L}^n$ não existem dois vetores do tipo tempo pseudo-ortogonais e não existem vetores do tipo tempo ortogonais a vetores do tipo luz. Além disso, toda base pseudo-ortonormal deve necessariamente conter um vetor do tipo tempo e os demais do tipo espaço.

Demonstração: Seja $u \in \mathbb{L}^n$ um vetor de tipo tempo. Então $U = [u]$ é de tipo tempo e, pelo Corolário 3.48, $\{u\}^\perp$ é de tipo espaço.

Suponha que exista $v \in \mathbb{L}^n$ de tipo tempo pseudo-ortogonal a u . Logo $v \in \{u\}^\perp$, o que contradiz a causalidade de $\{u\}^\perp$, subespaço de tipo espaço que contém um vetor de tipo tempo.

De forma análoga, supondo que exista um vetor $w \in \mathbb{L}^n$ de tipo luz pseudo-ortogonal a u , $w \in \{u\}^\perp$, que estaria em contradição com o tipo causal de $\{u\}^\perp$ novamente.

Portanto, não existem vetores de tipo tempo e nem de tipo luz pseudo-ortogonais a vetores de tipo tempo. □

Corolário 3.51. Se $U \subseteq \mathbb{L}^n$ é um subespaço de tipo luz, então $U^\perp$ também é de tipo luz.

Demonstração: Segue da contrapositiva do Corolário 3.48. □

Vejamos agora algumas peculiaridades causadas pelos vetores e subespaços de tipo luz.

Corolário 3.52. Se $U \subseteq \mathbb{L}^n$ é um subespaço de tipo luz, então $\dim(U \cap U^\perp) = 1$.

Demonstração: Sejam $u, v \in U \cap U^\perp$. Então $\langle u, u \rangle_L = 0 = \langle v, v \rangle_L$. Logo os dois são de tipo luz, e $\langle u, v \rangle_L = 0$. Consequentemente, pelo Teorema 3.9, u e v são linearmente dependentes, ou seja, $\dim(U \cap U^\perp) \leq 1$.

Por outro lado, como U é de tipo luz, então $\dim U > 0$ e existe $v \in U$ de tipo luz. Pelo fato de $\langle v, v \rangle_L = 0$, então $v \in U^\perp$. Consequentemente, $\dim(U \cap U^\perp) \geq 1$.

Portanto, pelas duas desigualdades, temos que $\dim(U \cap U^\perp) = 1$. $\square$

Lema 3.53. Se $U \subseteq \mathbb{R}_\nu^n$ é um hiperplano do tipo luz, então $U^\perp \subseteq U$.

Demonstração: Sejam $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{L}^n$ tais que $U = [u_1, \dots, u_{n-1}]$ e $U^\perp = [u_n]$. Se U é de tipo luz, então $\dim(U \cap U^\perp) = 1$ e

$$\dim(U + U^\perp) = \dim U + \dim U^\perp - \dim(U \cap U^\perp) = n - 1.$$

Assim, $\dim(U + U^\perp) = n - 1$ e $U + U^\perp = [u_1, \dots, u_n]$. Como $\{u_1, \dots, u_{n-1}\}$ é linearmente independente, logo conseguimos escrever u_n como combinação linear de $u_1, \dots, u_{n-1}$, ou seja, $u_n \in U$. Portanto, $U^\perp \subseteq U$. $\square$

Assim, uma consequência direta dos corolários anteriores é a generalização do Teorema 3.45 enunciado abaixo:

Teorema 3.54. Sejam $\Pi \subseteq \mathbb{L}^n$ um hiperplano de equação geral

$$\Pi : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$$

e $n = (a_1, \dots, a_n)$ o vetor Lorentz-normal a Π . Então

- (i) Π é de tipo espaço se, e somente se n é de tipo tempo;
- (ii) Π é de tipo tempo se, e somente se, n é de tipo espaço;
- (iii) Π é de tipo luz se, e somente se, n é de tipo luz.

Demonstração: Analisando os três possíveis tipos causais de n , temos:

- (i) Se Π é de tipo espaço, pelo Corolário 3.48, $\Pi^\perp$ é de tipo tempo e $n \in \Pi^\perp$.

Mais ainda, pela não-degenerabilidade de Π e pelo fato de que $\dim \Pi = n - 1$, o Corolário 3.22 garante que $\dim \Pi^\perp = 1$, ou seja, $\Pi^\perp$ é uma reta. Logo, n é de tipo tempo;

- (ii) Analogamente ao caso anterior, Π é de tipo tempo se, e só se, n é de tipo espaço;

- (iii) Caso Π seja de tipo luz, Π é degenerado, então existe $n \in \Pi$ tal que $\langle v, n \rangle_L = 0$ para todo $v \in \Pi$. Logo n é de tipo luz. Mais ainda, como n é pseudo-ortogonal a todos os vetores de Π , pela definição de vetor normal, n é o vetor normal a Π .

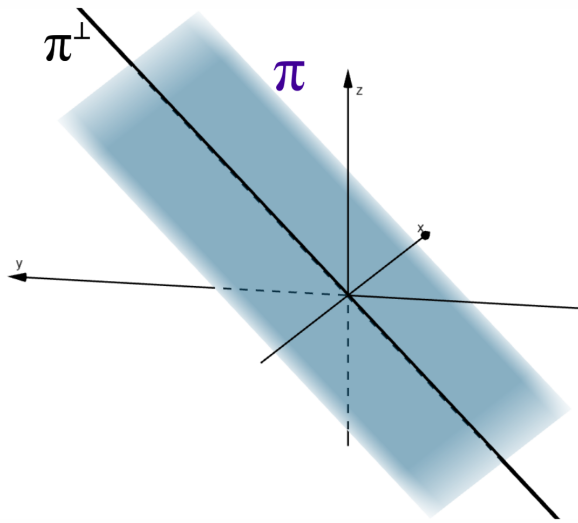
$\square$

Exemplo 3.55. Seja $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{L}^3; y = z\}$ um plano de tipo luz em $\mathbb{L}^3$, que pode ser escrito como $\pi = [(1, 0, 0), (0, 1, 1)]$. Para encontrar o subespaço pseudo-ortogonal a U devemos encontrar os vetores $u = (x, y, z)$ tais que

- (i) $\langle u, (1, 0, 0) \rangle_L = 0$, logo $x = 0$;
- (ii) $\langle u, (0, 1, 1) \rangle_L = y - z = 0$, ou seja, $y = z$.

Dessa forma, $\pi^\perp = [(0, 1, 1)]$, como ilustra a Figura 14.

Figura 14: Representação do plano π e da reta $\pi^\perp$ em $\mathbb{L}^3$.



Fonte: Elaboração própria (2026).

Note que

- (i) O plano π de tipo luz e o subespaço pseudo-ortogonal $\pi^\perp$ também é de tipo luz, como garante o Corolário 3.51;
- (ii) A dimensão de $\pi \cap \pi^\perp$ é 1, pelo Corolário 3.52;
- (iii) $\pi^\perp \subset \pi$, pelo Corolário 3.53;
- (iv) O vetor normal a π é $n = (0, 1, 1)$ que é de tipo luz, como afirma o Teorema 3.54.

Observação 3.56. Note que, como no espaço de Lorentz-Minkowski é possível que $U^\perp \subseteq U$, como no Exemplo 3.55, evitamos o termo *complemento ortogonal*, utilizado regularmente para espaços euclidianos, em que $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^n$ ocorre.

Corolário 3.57. Sejam $u, v \in \mathbb{L}^n$ vetores de tipo luz linearmente independentes. Então $u + v$ e $u - v$ não são de tipo luz e têm tipos causais distintos.

Demonstração: Como $\langle u + v, u + v \rangle_L = 2\langle u, v \rangle_L$ e $\langle u - v, u - v \rangle_L = -2\langle u, v \rangle_L$. Então, cada vetor tem um tipo causal diferente. $\square$

Proposição 3.58. Seja $v \in \mathbb{L}^n$ um vetor de tipo tempo unitário. Então $\|v\|_E \geq 1$.

Demonstração: Seja $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{L}^n$ um vetor unitário do tipo tempo. Então

$$\langle v, v \rangle_L = v_1^2 + \dots + v_{n-1}^2 - v_n^2 = -1 \Rightarrow v_n^2 = 1 + v_1^2 + \dots + v_{n-1}^2.$$

Logo,

$$\langle v, v \rangle_E = v_1^2 + \dots + v_{n-1}^2 + v_n^2 = \langle v, v \rangle_L = v_1^2 + \dots + v_{n-1}^2 + (1 + v_1^2 + \dots + v_{n-1}^2) \geq 1.$$

$\square$

3.3 | Isometrias que preservam causalidade

Após o entendimento de norma, um caminho natural a seguir em geometria é o estudo das Isometrias em $\mathbb{R}^n$, aplicações da forma $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfazem

$$\|F(x) - F(y)\|_E = \|x - y\|_E, \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Ou seja, aplicações que preservam a distância dos pontos do domínio. Apesar disso, em $\mathbb{L}^n$, a norma não representa mais a distância entre dois pontos. Logo, estender tal noção para o espaço de Lorentz-Minkowski muda seu significado. Além disso, como a definição de norma em $\mathbb{L}^n$ está composta do módulo, a isometria, como é usada em $\mathbb{R}^n$, não assimila a alteração de tipos causais.

Dessa forma, tomando a equivalência

$$\|F(x) - F(y)\|_E = \|x - y\|_E \Leftrightarrow \langle F(x) - F(y), F(x) - F(y) \rangle_E = \langle x - y, x - y \rangle_E,$$

podemos definir uma isometria para espaços pseudo-euclidianos com precisão.

Definição 3.59. (Isometria pseudo-Euclidiana) Uma **isometria pseudo-euclidiana** em $\mathbb{R}_\nu^n$ é uma aplicação $F : \mathbb{R}_\nu^n \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$ tal que

$$\langle F(x) - F(y), F(x) - F(y) \rangle_\nu = \langle x - y, x - y \rangle_\nu,$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}_\nu^n$. O conjunto de todas as isometrias pseudo-euclidianas em $\mathbb{R}_\nu^n$ é denotado por $E_\nu(n, \mathbb{R})$.

Definição 3.60. (Transformação pseudo-ortogonal) Uma transformação linear $\Lambda : \mathbb{R}_\nu^n \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$ é dita uma **transformação pseudo-ortogonal** se

$$\langle \Lambda x, \Lambda y \rangle_\nu = \langle x, y \rangle_\nu,$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_\nu^n$. O conjunto de todas as transformações pseudo-ortogonais em $\mathbb{R}_\nu^n$ é denotado $O_\nu(n, \mathbb{R})$.

Observação 3.61.

(i) Nos espaços euclidianos usuais, utilizaremos as notações:

$$O_0(n, \mathbb{R}) = O(n, \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad E_0(n, \mathbb{R}) = E(n, \mathbb{R});$$

(ii) Para $\nu = 1$ as transformações pseudo-ortogonais também são chamadas **transformações de Lorentz**.

(iii) Na Definição 3.60 de transformações pseudo-ortogonais, acrescentar a linearidade é desnecessário, pois: se $\Lambda : \mathbb{R}_\nu^n \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$ preserva produto interno pseudo-euclidiano, então Λ é linear.

De fato, sejam $u, v \in \mathbb{R}_\nu^n$, como Λ preserva o produto interno, garantimos que, para qualquer $w \in \mathbb{R}_\nu^n$, vale

- $\langle \Lambda(u + v), \Lambda(w) \rangle_\nu = \langle u + v, w \rangle_\nu$;
- $\langle \Lambda(u), \Lambda(w) \rangle_\nu = \langle u, w \rangle_\nu$ e $\langle \Lambda(v), \Lambda(w) \rangle_\nu = \langle v, w \rangle_\nu$.

Pela bilinearidade do produto interno, temos

$$\begin{aligned} \langle \Lambda(u + v), \Lambda(w) \rangle_\nu &= \langle u + v, w \rangle_\nu = \langle u, w \rangle_\nu + \langle v, w \rangle_\nu = \\ &= \langle \Lambda(u), \Lambda(w) \rangle_\nu + \langle \Lambda(v), \Lambda(w) \rangle_\nu = \langle \Lambda(u) + \Lambda(v), \Lambda(w) \rangle_\nu \Rightarrow \\ \langle \Lambda(u + v), \Lambda(w) \rangle_\nu - \langle \Lambda(u) + \Lambda(v), \Lambda(w) \rangle_\nu &= 0 \Rightarrow \langle \Lambda(u + v) - \Lambda(u) - \Lambda(v), \Lambda(w) \rangle_\nu = 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, como tal igualdade vale para qualquer w , pela não-degenerabilidade do produto interno, vista na Observação 2.10 (i), segue que $\Lambda(u + v) - \Lambda(u) - \Lambda(v) = \vec{0}$, ou seja, $\Lambda(u + v) = \Lambda(u) + \Lambda(v)$.

Analogamente, dado $c \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} \langle \Lambda(cv), \Lambda(w) \rangle_\nu &= \langle cv, w \rangle_\nu = c \langle v, w \rangle_\nu = c \langle \Lambda(v), \Lambda(w) \rangle_\nu = \langle c\Lambda(v), \Lambda(w) \rangle_\nu \Rightarrow \\ \langle \Lambda(cv), \Lambda(w) \rangle_\nu - \langle c\Lambda(v), \Lambda(w) \rangle_\nu &= 0 \Rightarrow \langle \Lambda(cv) - c\Lambda(v), \Lambda(w) \rangle_\nu = 0. \end{aligned}$$

Pelo mesmo argumento do caso anterior, $\Lambda(cv) - c\Lambda(v) = \vec{0}$, logo $\Lambda(cv) = c\Lambda(v)$.

Portanto, Λ é linear. $\square$

Corolário 3.62. Toda transformação pseudo-ortogonal é também uma isometria pseudo-euclidiana.

Demonstração: De fato, dados $x, y \in \mathbb{R}_\nu^n$ e $\Lambda \in O_\nu(n, \mathbb{R})$, temos

$$\langle \Lambda(x - y), \Lambda(x - y) \rangle_L = \langle x - y, x - y \rangle_L.$$

$\square$

Exemplo 3.63. Em $\mathbb{L}^n$, dado $a \in \mathbb{R}^n$, uma translação $T_a : \mathbb{L}^n \rightarrow \mathbb{L}^n$, da forma $T_a(x) = x + a$, é uma isometria bijetora.

De fato, dados $x, y \in \mathbb{L}^n$

$$(i) \quad \langle T_a(x) - T_a(y), T_a(x) - T_a(y) \rangle_L = \langle (x + a) - (y + a), (x + a) - (y + a) \rangle_L = \langle (x - y), (x - y) \rangle_L;$$

$$(ii) \quad T_a(x) = T_a(y) \Rightarrow x + a = y + a \Rightarrow x = y, \text{ ou seja, } T_a \text{ é injetora};$$

$$(iii) \quad \text{Para todo } y \in \mathbb{L}^n, \text{ existe } x = y - a \in \mathbb{L}^n \text{ tal que } T_a(x) = (y - a) + a = y. \text{ Logo } T_a \text{ sobrejetora.}$$

Além disso, como T_a é bijetora, existe a inversa $T_a^{-1} = T_{-a}$.

Exemplo 3.64. Seja $\varphi \in \mathbb{R}$ e $R_\varphi^h : \mathbb{L}^2 \rightarrow \mathbb{L}^2$ uma rotação hiperbólica por um ângulo φ , dada por

$$R_\varphi^h(x, y) = (x \cosh \varphi + y \sinh \varphi, x \sinh \varphi + y \cosh \varphi).$$

Podemos escrever a rotação hiperbólica em forma matricial na base canônica:

$$R_\varphi^h(x, y) = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

R_φ^h é uma transformação de Lorentz. De fato, dado $(x, y), (a, b) \in \mathbb{L}^2$, temos

$$\begin{aligned} & \langle R_\varphi^h(x, y), R_\varphi^h(a, b) \rangle_L = \\ & = \langle (x \cosh \varphi + y \sinh \varphi, x \sinh \varphi + y \cosh \varphi), (a \cosh \varphi + b \sinh \varphi, a \sinh \varphi + b \cosh \varphi) \rangle_L = \\ & = xa \cosh^2 \varphi + xb \cosh \varphi \sinh \varphi + ya \cosh \varphi \sinh \varphi + yb \sinh^2 \varphi \\ & \quad - (xa \sinh^2 \varphi + ya \cosh \varphi \sinh \varphi + xb \cosh \varphi \sinh \varphi + yb \cosh^2 \varphi) = \\ & = xa(\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi) - yb(\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi) = xa - yb = \langle (x, y), (a, b) \rangle_L. \end{aligned}$$

Observação 3.65. Note que R_φ^h preserva os quatro ramos do conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{L}^2; \langle (x, y), (x, y) \rangle_L = \pm 1\},$$

ou seja, a rotação hiperbólica de um vetor unitário produz um vetor unitário, do mesmo tipo causal e no mesmo ramo da hipérbole.

De fato, como R_φ^h é uma transformação de Lorentz, é imediato que o vetor rotacionado terá velocidade unitária e o mesmo tipo causal. Por fim, utilizando que $\cosh \varphi > |\sinh \varphi|$, para todo $\varphi \in \mathbb{R}$, vamos analisar, para cada ramo das hipérboles formadas pelos vetores unitários, qual o sinal da coordenada após a rotação:

(i) Seja (x, y) de tipo espaço e $0 < |y| < x$. Como

$$x > |y| \Rightarrow x \cosh \varphi > |y| |\sinh \varphi| = |y \sinh \varphi|,$$

logo $x \cosh \varphi + y \sinh \varphi > 0$ e o sinal da abscissa é preservado positivo;

(ii) Seja (x, y) de tipo espaço e $x < 0 < |y|$. Então

$$x < 0 < |y| \Rightarrow x \cosh \varphi < 0 \leq |y| |\sinh \varphi| = |y \sinh \varphi|,$$

ou seja, $x \cosh \varphi + y \sinh \varphi < 0$ e a primeira coordenada preserva o sinal negativo;

(iii) Seja (x, y) de tipo tempo e $0 < |x| < y$. Assim,

$$|x| < y \Rightarrow |x| |\sinh \varphi| = |x \sinh \varphi| < y \cosh \varphi,$$

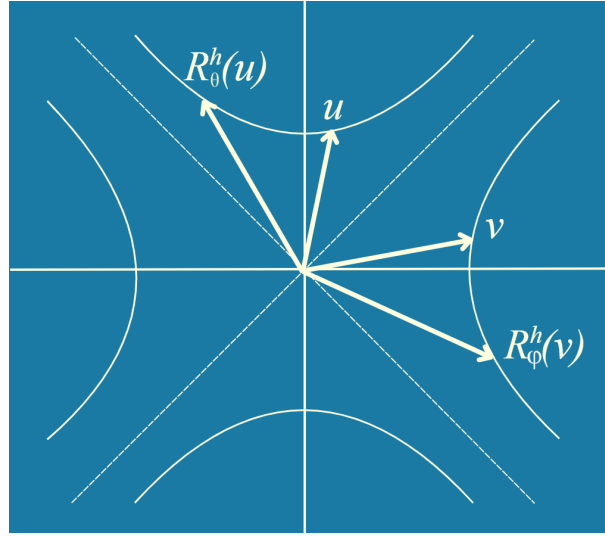
logo $x \sinh \varphi + y \cosh \varphi > 0$ e a segunda coordenada preserva o sinal positivo;

(iv) Seja (x, y) de tipo tempo e $y < 0 < |x|$. Então

$$|x| > 0 > y \Rightarrow |x| |\sinh \varphi| = |x \sinh \varphi| \geq 0 > y \cosh \varphi,$$

ou seja, $x \sinh \varphi + y \cosh \varphi < 0$ e a ordenada preserva o sinal negativo.

Figura 15: Rotações hiperbólicas de u e v por ângulos θ e φ , respectivamente.



Fonte: Elaboração própria (2026).

A Figura 15 ilustra os vetores u , de tipo espaço com a primeira coordenada positiva, e v , de tipo tempo com a primeira coordenada positiva, e suas rotações hiperbólicas por ângulos θ e φ , respectivamente, que se mantêm no mesmo ramo da hipérbole o qual pertencem.

Exemplo 3.66. Em $\mathbb{L}^3$, dado $\theta \in [0, 2\pi)$ e $\varphi \in \mathbb{R}$, uma rotação de um ângulo θ ou φ em relação a qualquer um dos eixos é uma transformação de Lorentz.

(i) Uma rotação de um ângulo θ em relação ao eixo z é da forma:

$$\begin{aligned} R_\theta(x, y, z) &= (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(ii) Uma rotação de um ângulo φ em relação ao eixo y é dada por:

$$\begin{aligned} R_\varphi(x, y, z) &= (x \cosh \varphi + z \sinh \varphi, y, x \sinh \varphi + z \cosh \varphi) \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \varphi & 0 & \sinh \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh \varphi & 0 & \cosh \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(iii) Uma rotação de um ângulo φ em relação ao eixo x é dada por:

$$\begin{aligned} R_\varphi(x, y, z) &= (x, y \cosh \varphi + z \sinh \varphi, y \sinh \varphi + z \cosh \varphi) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ 0 & \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.67. Seja $R : \mathbb{L}^n \rightarrow \mathbb{L}^n$ dada por $R(x_1, \dots, x_n) = (\epsilon_1 x_1, \dots, \epsilon_n x_n)$, onde $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ para todo $i = 1, \dots, n$. R é chamada **reflexão generalizada** e é uma transformação de Lorentz.

De fato, dados $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{L}^n$, temos:

$$\langle R(x), R(y) \rangle_L = \epsilon_1^2 x_1 y_1 + \dots + \epsilon_{n-1}^2 x_{n-1} y_{n-1} - \epsilon_n^2 x_n y_n = x_1 y_1 + \dots + x_{n-1} y_{n-1} - x_n y_n = \langle x, y \rangle_L.$$

Exemplo 3.68. Seja $\sigma \in S_{n-1}$, uma permutação de $n - 1$ elementos, e $P_\sigma : \mathbb{L}^n \rightarrow \mathbb{L}^n$ uma permutação de eixos de tipo espaço, ou seja, P é da forma:

$$P(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n-1)}, x_n).$$

P é uma transformação de Lorentz. De fato, como os elementos só mudam de coordenadas e a soma de números reais é comutativa, então $\langle P(x), P(y) \rangle_L = \langle x, y \rangle_L$.

No entanto, caso ocorra uma permutação com o eixo de tipo tempo, não conseguimos garantir a transformação de Lorentz. Tome, por exemplo, $P : \mathbb{L}^2 \rightarrow \mathbb{L}^2$, dada por: $P(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$, e $(1, 2), (1, 1) \in \mathbb{L}^2$. Assim,

$$\langle P(1, 2), P(1, 1) \rangle_L = \langle (2, 1), (1, 1) \rangle_L = 1 \neq -1 = \langle (1, 2), (1, 1) \rangle_L.$$

Lema 3.69. Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tais que $x^t A y = x^t B y$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$. Então $A = B$.

Demonstração: Tomando, para cada $i, j = 1, \dots, n$, $x = e_i$ e $y = e_j$, temos

$$e_i^t A e_j = e_i^t B e_j \Rightarrow a_{ij} = b_{ij}.$$

Logo $a_{ij} = b_{ij}$, para todo $i, j = 1, \dots, n$. Portanto, $A = B$. □

Proposição 3.70. Seja $\Lambda : \mathbb{R}_\nu^n \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$ uma transformação linear. Então Λ é pseudo-ortogonal se, e somente se, $\Lambda^t Id_{n-\nu, \nu} \Lambda = Id_{n-\nu, \nu}$.

Demonstração: Suponha $\Lambda \in O_\nu(n, \mathbb{R})$ e $x, y \in \mathbb{R}_\nu^n$, então

$$\langle \Lambda x, \Lambda y \rangle_\nu = \langle x, y \rangle_\nu \Rightarrow (\Lambda x)^t Id_{n-\nu, \nu} (\Lambda y) = x^t Id_{n-\nu, \nu} y \Rightarrow x^t \Lambda^t Id_{n-\nu, \nu} \Lambda y = x^t Id_{n-\nu, \nu} y.$$

Como vale para quaisquer x e y , pelo Lema 3.69, então $\Lambda^t Id_{n-\nu,\nu} \Lambda = Id_{n-\nu,\nu}$. Reciprocamente, se $\Lambda^t Id_{n-\nu,\nu} \Lambda = Id_{n-\nu,\nu}$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_\nu^n$, vale que:

$$x^t \Lambda^t Id_{n-\nu,\nu} \Lambda y = x^t Id_{n-\nu,\nu} y \Rightarrow \langle \Lambda x, \Lambda y \rangle_\nu = \langle x, y \rangle_\nu.$$

Dessa forma, Λ é pseudo-ortogonal. $\square$

Corolário 3.71. Seja $\Lambda \in O_\nu(n, \mathbb{R})$, então $\det \Lambda \in \{-1, 1\}$. Em particular, Λ é um isomorfismo e sua inversa sempre existe.

Demonstração: Defina $\det(Id_{n-\nu,\nu}) = \epsilon$, onde $\epsilon \in \{-1, 1\}$. Pela Proposição 3.70, vale que

$$\Lambda^t Id_{n-\nu,\nu} \Lambda = Id_{n-\nu,\nu} \Rightarrow \det(\Lambda^t Id_{n-\nu,\nu} \Lambda) = \det(Id_{n-\nu,\nu}) \Rightarrow \det(\Lambda)^2 \epsilon = \epsilon \Rightarrow \det(\Lambda) = \pm 1.$$

Assim, como $\det(\Lambda) \neq 0$, Λ é um isomorfismo e existe a matriz inversa que dá origem a transformação inversa Λ^{-1} . $\square$

Proposição 3.72. O conjunto $O_\nu(n, \mathbb{R})$ é um grupo com a operação de multiplicação usual de matrizes. Além disso, $O_\nu(n, \mathbb{R})$ contém a transposta de todos os seus elementos.

Denominamos $O_\nu(n, \mathbb{R})$ o **grupo pseudo-ortogonal**, $O(n, \mathbb{R})$ o **grupo ortogonal** e $O_1(n, \mathbb{R})$ o **grupo de Lorentz**.

Demonstração: Seja $O_\nu(n, \mathbb{R})$ o conjunto das transformações pseudo-ortogonais. Vamos mostrar que $O_\nu(n, \mathbb{R})$ é um grupo. Dados $\Lambda, \Omega \in O_\nu(n, \mathbb{R})$ e $x, y \in \mathbb{R}_\nu^n$, como $O_\nu(n, \mathbb{R})$ herda a propriedade associativa da multiplicação de matrizes, temos

$$\langle (\Lambda \cdot \Omega)x, (\Lambda \cdot \Omega)y \rangle_\nu = \langle \Lambda(\Omega x), \Lambda(\Omega y) \rangle_\nu = \langle \Omega x, \Omega y \rangle_\nu = \langle x, y \rangle_\nu.$$

Assim, $\Lambda \cdot \Omega \in O_\nu(n, \mathbb{R})$, ou seja, $O_\nu(n, \mathbb{R})$ é fechado para a multiplicação. Além disso, pela Proposição 3.70, para toda transformação $\Lambda \in O_\nu(n, \mathbb{R})$, existe Λ^{-1} e

$$\begin{aligned} \Lambda^t Id_{n-\nu,\nu} \Lambda = Id_{n-\nu,\nu} &\Rightarrow (\Lambda^{-1})^t \Lambda^t Id_{n-\nu,\nu} \Lambda \Lambda^{-1} = (\Lambda^{-1})^t Id_{n-\nu,\nu} \Lambda^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow Id_{n-\nu,\nu} = (\Lambda^{-1})^t Id_{n-\nu,\nu} \Lambda^{-1}. \end{aligned}$$

Logo, $\Lambda^{-1} \in O_\nu(n, \mathbb{R})$.

Por fim, como $(Id_n)^t Id_{n-\nu,\nu} Id_n = Id_n Id_{n-\nu,\nu} = Id_{n-\nu,\nu}$, novamente pela Proposição 3.70, $Id_n \in O_\nu(n, \mathbb{R})$, que é o elemento neutro da operação definida. Portanto, $O_\nu(n, \mathbb{R})$ é um grupo.

Além disso, se $\Lambda^t Id_{n-\nu,\nu} \Lambda = Id_{n-\nu,\nu}$, multiplicando por $(\Lambda^{-1} Id_{n-\nu,\nu} (\Lambda^t)^{-1})$, temos:

$$(\Lambda^t Id_{n-\nu,\nu} \Lambda)(\Lambda^{-1} Id_{n-\nu,\nu} (\Lambda^t)^{-1}) = (Id_{n-\nu,\nu})(\Lambda^{-1} Id_{n-\nu,\nu} (\Lambda^t)^{-1}) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Id_n &= (Id_{n-\nu,\nu})(\Lambda^{-1}Id_{n-\nu,\nu}(\Lambda^t)^{-1}) \Rightarrow Id_{n-\nu,\nu} = Id_n(\Lambda^{-1}Id_{n-\nu,\nu}(\Lambda^t)^{-1}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Lambda Id_{n-\nu,\nu}\Lambda^t = \Lambda(\Lambda^{-1}Id_{n-\nu,\nu}(\Lambda^t)^{-1})\Lambda^t \Rightarrow (\Lambda^t)^t Id_{n-\nu,\nu}\Lambda^t = Id_{n-\nu,\nu}. \end{aligned}$$

Dessa forma, $\Lambda^t \in O_\nu(n, \mathbb{R})$, ou seja, $O_\nu(n, \mathbb{R})$ contém a transposta de seus elementos. $\square$

Corolário 3.73. Se $\Lambda \in O_\nu(n, \mathbb{R})$, então as colunas (e também as linhas) de Λ formam uma base pseudo-ortonormal de $\mathbb{R}_\nu^n$.

Demonstração: Pela Proposição 3.72, $O_\nu(n, \mathbb{R})$ contém a transposta de seus elementos. Dessa forma, só precisamos mostrar que as colunas de Λ formam uma base pseudo-ortonormal de $\mathbb{R}_\nu^n$. Pelo Corolário 3.71, Λ é um isomorfismo e, assim, suas colunas formam uma base para a imagem, nesse caso o $\mathbb{R}_\nu^n$. Mais ainda, podemos encontrar cada i -ésimo elemento dessa base fazendo o produto Λe_i . Daí,

$$\langle \Lambda e_i, \Lambda e_j \rangle_\nu = \langle e_i, e_j \rangle_\nu = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j; \\ 1, & \text{se } i = j \in \{1, \dots, n - \nu\}; \\ -1, & \text{se } i = j \in \{n - \nu + 1, \dots, n\}. \end{cases}$$

Dessa forma, as colunas de Λ formam uma base pseudo-ortonormal de $\mathbb{R}_\nu^n$. Portanto, uma transformação pseudo-ortogonal leva base pseudo-ortonormal em base pseudo-ortonormal. $\square$

Proposição 3.74. Seja $F \in E_\nu(n, \mathbb{R})$. Se $F(\vec{0}) = \vec{0}$, então $F \in O_\nu(n, \mathbb{R})$.

Demonstração: Para a prova utilizaremos a **identidade de polarização** para $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu$, definida como a igualdade:

$$\langle x, y \rangle_\nu = \frac{1}{2}(\langle x, x \rangle_\nu + \langle y, y \rangle_\nu - \langle x - y, x - y \rangle_\nu),$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_\nu^n$. Assim, aplicando $F(x)$ e $F(y)$ na identidade, temos que

$$\langle F(x), F(y) \rangle_\nu = \frac{1}{2}(\langle F(x), F(x) \rangle_\nu + \langle F(y), F(y) \rangle_\nu - \langle F(x) - F(y), F(x) - F(y) \rangle_\nu).$$

Por hipótese, vale que

$$\begin{aligned} \bullet \quad \langle F(x), F(x) \rangle_\nu &= \langle F(x) - \vec{0}, F(x) - \vec{0} \rangle_\nu = \langle F(x) - F(\vec{0}), F(x) - F(\vec{0}) \rangle_\nu = \\ &= \langle x - \vec{0}, x - \vec{0} \rangle_\nu = \langle x, x \rangle_\nu; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \langle F(y), F(y) \rangle_\nu &= \langle F(y) - \vec{0}, F(y) - \vec{0} \rangle_\nu = \langle F(y) - F(\vec{0}), F(y) - F(\vec{0}) \rangle_\nu = \\ &= \langle y - \vec{0}, y - \vec{0} \rangle_\nu = \langle y, y \rangle_\nu. \end{aligned}$$

Substituindo na identidade de polarização, temos que

$$\langle F(x), F(y) \rangle_\nu = \frac{1}{2}(\langle x, x \rangle_\nu + \langle y, y \rangle_\nu - \langle x - y, x - y \rangle_\nu) = \frac{1}{2}(2\langle x, y \rangle_\nu) = \langle x, y \rangle_\nu.$$

Dessa forma, F preserva o produto interno pseudo-euclidiano. Logo, pela Observação 3.61, F é uma transformação pseudo-ortogonal. $\square$

Lema 3.75. A composição de isometrias é ainda uma isometria.

Demonstração: Dadas $F, G \in E_\nu(n, \mathbb{R})$ e $x, y \in \mathbb{R}_\nu^n$ quaisquer, temos

$$\begin{aligned} \langle (F \circ G)(x) - (F \circ G)(y), (F \circ G)(x) - (F \circ G)(y) \rangle_\nu &= \\ &= \langle F(G(x)) - F(G(y)), F(G(x)) - F(G(y)) \rangle_\nu = \\ &= \langle G(x) - G(y), G(x) - G(y) \rangle_\nu = \langle x - y, x - y \rangle_\nu. \end{aligned}$$

Dessa forma, $F \circ G \in E_\nu(n, \mathbb{R})$. $\square$

O próximo resultado nos fornece uma caracterização de isometrias, onde são reescritas como uma composição de uma translação (parte afim) e uma transformação pseudo-ortogonal (parte linear).

Teorema 3.76. Seja $F \in E_\nu(n, \mathbb{R})$. Então existem e são únicos $a \in \mathbb{R}_\nu^n$ e $\Lambda \in O_\nu(n, \mathbb{R})$ tais que $F = T_a \circ \Lambda$, onde T_a é uma translação de $\mathbb{R}_\nu^n$.

Demonstração: Sejam $T_{-F(\vec{0})}, F \in E_\nu(n, \mathbb{R})$. Pelo Lema 3.75, $T_{-F(\vec{0})} \circ F \in E_\nu(n, \mathbb{R})$. Mais que isso, como

$$(T_{-F(\vec{0})} \circ F)(\vec{0}) = T_{-F(\vec{0})}(F(\vec{0})) = F(\vec{0}) - F(\vec{0}) = \vec{0},$$

pela Proposição 3.74, garantimos que $T_{-F(\vec{0})} \circ F \in O_\nu(n, \mathbb{R})$. Assim, existe $\Lambda \in O_\nu(n, \mathbb{R})$, tal que $F = T_{F(\vec{0})} \circ \Lambda$.

Suponha que existam $T_a \circ \Lambda_a = F = T_b \circ \Lambda_b$, para $a, b \in \mathbb{R}_\nu^n$ e $\Lambda_a, \Lambda_b \in O_\nu(n, \mathbb{R})$. Note que

$$a = T_a(\vec{0}) = T_a(\Lambda_a(\vec{0})) = T_b(\Lambda_b(\vec{0})) = T_b(\vec{0}) = b.$$

Dessa forma, $T_a = T_b$ e, como T_a é bijetora, temos

$$T_{-a} \circ T_a \circ \Lambda_a = T_{-a} \circ T_a \circ \Lambda_b \Rightarrow \Lambda_a = \Lambda_b,$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Corolário 3.77. Toda isometria $F \in E_\nu(n, \mathbb{R})$ é uma aplicação bijetora.

Demonstração: De fato, pelo teorema anterior, podemos escrever F como a composição de uma translação e uma transformação pseudo-ortogonal, que são funções bijetoras. Logo, F é bijetora. $\square$

Proposição 3.78. O conjunto $E_\nu(n, \mathbb{R})$ munido com a operação de composição de funções é um grupo.

Demonstração: Primeiramente, $E_\nu(n, \mathbb{R})$ é fechado para composição de funções, como provado no Lema 3.74. Daí, dados $F, G, H \in E_\nu(n, \mathbb{R})$ e $x, y \in \mathbb{R}_\nu^n$, temos:

$$F \circ (G \circ H)(x) = F \circ (G(H))(x) = F(G(H(x))) = (F \circ G)(H(x)) = ((F \circ G) \circ H)(x),$$

que garante a validade da associatividade.

Além disso, tome $id : \mathbb{R}_\nu^n \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$ dada por $id(x) = x$, a função identidade. Como

$$\langle id(x) - id(y), id(x) - id(y) \rangle_\nu = \langle x - y, x - y \rangle_\nu,$$

então $id \in E_\nu(n, \mathbb{R})$. Assim, existe elemento neutro no conjunto das isometrias.

Por fim, como consequência do Corolário 3.77, dado $F \in E_\nu(n, \mathbb{R})$, F admite inversa $F^{-1} : \mathbb{R}_\nu^n \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$. Mais ainda, dados $a, b \in \mathbb{R}_\nu^n$, como F é sobrejetora, existem $x, y \in \mathbb{R}_\nu^n$ tais que $F(x) = a$ e $F(y) = b$, logo $F^{-1}(a) = x$ e $F^{-1}(b) = y$. Assim,

$$\begin{aligned} \langle F^{-1}(a) - F^{-1}(b), F^{-1}(a) - F^{-1}(b) \rangle_\nu &= \langle x - y, x - y \rangle_\nu = \\ &= \langle F(x) - F(y), F(x) - F(y) \rangle_\nu = \langle a - b, a - b \rangle_\nu. \end{aligned}$$

Dessa forma, $F^{-1} \in E_\nu(n, \mathbb{R})$ e toda isometria tem uma inversa que também é uma isometria. Portanto, $E_\nu(n, \mathbb{R})$ é um grupo. $\square$

Corolário 3.79. Seja $F \in E_\nu(n, \mathbb{R})$. Então F é derivável e, para cada $p \in \mathbb{R}_\nu^n$, a aplicação dF_p é uma transformação pseudo-ortogonal, isto é, $dF_p \in O_\nu(n, \mathbb{R})$.

Demonstração: Pelo Teorema 3.76, podemos escrever $F = T_a \circ \Lambda$, para algum $a \in \mathbb{R}_\nu^n$ e $\Lambda \in O_\nu(n, \mathbb{R})$. T_a e Λ são deriváveis, pois são aplicação afim e transformação linear, respectivamente, então F é derivável.

Dado $p \in \mathbb{R}_\nu^n$, para qualquer $x \in \mathbb{R}_\nu^n$, podemos estudar a diferencial de F por meio do caminho $\alpha(t) = p + tx$, onde $t \in (-\epsilon, \epsilon) \subseteq \mathbb{R}$, e, assim,

$$dF_p(x) = \frac{d}{dt}(F(\alpha))(t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(F(p+tx)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\Lambda(p) + t\Lambda(x) + a) \Big|_{t=0} = \Lambda(x).$$

Portanto, $dF_p(x)$ é uma transformação pseudo-ortogonal. $\square$

Proposição 3.80. Sejam $p, q \in \mathbb{R}_\nu^n$ e $\{v_1, \dots, v_n\}, \{w_1, \dots, w_n\}$ bases de $\mathbb{R}_\nu^n$ tais que $\langle v_i, v_j \rangle_\nu = \langle w_i, w_j \rangle_\nu$ para todo $i, j = 1, \dots, n$. Então existe uma única isometria $F \in E_\nu(n, \mathbb{R})$ tal que $F(p) = q$ e $dF_p(v_i) = w_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Demonstração: Vamos determinar $a \in \mathbb{R}_\nu^n$ e $\Lambda \in O_\nu(n, \mathbb{R})$ tais que $F = T_a \circ \Lambda$ é a isometria procurada.

Defina a aplicação $\Lambda(v_i) = w_i$, para todo $i = 1, \dots, n$. Essa é a única transformação pseudo-ortogonal que satisfaz as condições de F .

De fato, suponha que existisse outra transformação $\Lambda_1 \neq \Lambda$ que continue satisfazendo F . Como Λ_1 é um isomorfismo, pelo Corolário 3.71, leve base em base. Presuma que $\Lambda_1(v_i) = w_j$, para alguns $i, j = 1, \dots, m$, com $i \neq j$. Apesar disso, dado $p \in \mathbb{R}_\nu^n$, temos

$$dF_p(v_i) = \Lambda_1(v_i) = w_j \neq w_i,$$

o que contradiz um requisito de F . Portanto, Λ é a única transformação pseudo-ortogonal de F .

Por fim, tomando $a = q - \Lambda(p)$, temos $F(p) = T_a(\Lambda(p)) = \Lambda(p) + q - \Lambda(p) = q$. Dessa forma, $F = T_{q-\Lambda(p)} \circ \Lambda$ é a isometria procurada. $\square$

Definição 3.81. O conjunto $SO_\nu(n, \mathbb{R}) = \{\Lambda \in O_\nu(n, \mathbb{R}); \det \Lambda = 1\}$ é chamado **grupo especial pseudo-ortogonal**.

Observação 3.82. Vejamos alguns propriedades do grupos especial pseudo-ortogonal:

(i) O conjunto $SO_\nu(n, \mathbb{R})$ é subgrupo de $O_\nu(n, \mathbb{R})$.

De fato, sejam $\Lambda, \Omega \in SO_\nu(n, \mathbb{R}) \subseteq O_\nu(n, \mathbb{R})$, temos

- A associatividade dos elementos de $SO_\nu(n, \mathbb{R})$ é herdada de $O_\nu(n, \mathbb{R})$;
- $\det(Id_n) = 1$, logo $Id_n \in SO_\nu(n, \mathbb{R})$;
- $\det(\Lambda \cdot \Omega) = \det(\Lambda) \cdot \det(\Omega) = 1 \cdot 1 = 1$, então $SO_\nu(n, \mathbb{R})$ é fechado para a operação de composição;
- $\det(\Lambda^{-1}) = \det(\Lambda) = 1$, o inverso dos elementos de $SO_\nu(n, \mathbb{R})$ também pertencem ao conjunto.

- (ii) Se $\nu = 1$, $SO_1(n, \mathbb{R})$ é chamado **grupo especial de Lorentz** e seus elementos são chamados de **transformações de Lorentz próprias**;

As próximas definições fornecem meios para estudarmos a distorção que as transformações pseudo-ortogonais podem criar na parte espacial e temporal de $\mathbb{L}^n$.

Definição 3.83. Um vetor $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{L}^n$, de tipo tempo ou luz, é **futuro-dirigido** se $v_n > 0$ e **passado-dirigido** se $v_n < 0$.

Definição 3.84. Dizemos que uma base pseudo-ortonormal $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ de $\mathbb{L}^n$, u_n de tipo tempo, é **futuro-orientada** se u_n é um vetor futuro-dirigido. E dizemos que é **passado-orientada** se u_n é passado-dirigido.

Exemplo 3.85. A base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é futuro-orientada, pois $(0, 0, 1)$ é futuro-dirigido. Por outro lado, $\mathcal{C} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, -1)\}$ é passado-orientada, pelo fato de $(0, 0, -1)$ ser passado-dirigido.

Definição 3.86. Uma transformação de Lorentz $\Lambda \in O_1(n, \mathbb{R})$ é dita **ortocrônica** (isto é, preserva a orientação do tempo) se, para toda base pseudo-ortonormal $\mathcal{B}$ futuro-orientada, a base formada pelas colunas $\Lambda \cdot \mathcal{B}$ também é futuro-orientada. O conjunto das transformações de Lorentz ortocrônicas será indicado por $O_1^\uparrow(n, \mathbb{R})$.

Exemplo 3.87. Uma **rotação pura** em $\mathbb{L}^n$ é uma transformação de Lorentz $\Lambda = (\lambda_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ que **fixa** o tempo, ou seja,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_E & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde $\Lambda_E \in SO(n-1, \mathbb{R})$.

Dada uma base futuro-orientada $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ de $\mathbb{L}^n$, temos que $\Lambda \cdot \mathcal{B}$ é uma base e Λv_n seu vetor de tipo tempo. Como

$$\Lambda v_n = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{n_1} \\ \vdots \\ v_{n_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{1i} v_{n_i} \\ \vdots \\ v_{n_n} \end{pmatrix}$$

e $v_{n_n} > 0$, pois v_n é futuro-dirigido, então Λv_n é também futuro-dirigido.

Portanto, $\Lambda \cdot \mathcal{B}$ é futuro-orientada e, assim, as rotações puras são transformações de Lorentz ortocrônicas.

Exemplo 3.88. A rotação de um ângulo $\theta \in [0, 2\pi)$ em relação ao eixo z em $\mathbb{L}^3$, vista no Exemplo 3.66 (i), é uma rotação pura e a matriz associada a ela é:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo, R_θ é uma transformação de Lorentz ortocrônica.

Exemplo 3.89. A rotação pura de um ângulo $\theta = \frac{\pi}{2}$ em relação ao eixo y em $\mathbb{L}^4$, representada de forma matricial por

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & 0 & \sin \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \frac{\pi}{2} & 0 & \cos \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

é uma transformação de Lorentz ortocrônica.

Proposição 3.90. O conjunto das transformações de Lorentz ortocrônicas $O_1^\uparrow(n, \mathbb{R})$ é um subgrupo de $O_1(n, \mathbb{R})$.

Demonstração: Seja $\mathcal{B}$ uma base ortonormal futuro-orientada de $\mathbb{L}^n$ e $\Lambda, \Omega \in O_1^\uparrow(n, \mathbb{R})$, então

- (i) Pelo fato de $\Omega \cdot \mathcal{B}$ ser futuro-orientada, temos $\Lambda \cdot \Omega \cdot \mathcal{B} = \Lambda(\Omega \cdot \mathcal{B})$ também será. Logo, $\Lambda \cdot \Omega \in O_1^\uparrow(n, \mathbb{R})$. Dessa forma, $O_1^\uparrow(n, \mathbb{R})$ é fechado para a operação de composição;
- (ii) A associatividade dos elementos de $O_1^\uparrow(n, \mathbb{R})$ é herdada de $O_1(n, \mathbb{R})$;
- (iii) $Id \cdot \mathcal{B} = \mathcal{B}$, ou seja, futuro-orientada. Logo, $Id \in O_1^\uparrow(n, \mathbb{R})$;
- (iv) Como $O_1(n, \mathbb{R})$ é grupo, existe Λ^{-1} e $\mathcal{B} = \Lambda^{-1}(\Lambda \cdot \mathcal{B})$.

Pelo fato de $\mathcal{B}$ e $\Lambda \cdot \mathcal{B}$ serem futuro-orientadas, então Λ^{-1} preserva a orientação do tempo, ou seja, $\Lambda^{-1} \in O_1^\uparrow(n, \mathbb{R})$. Consequentemente, todo elemento admite inverso em $O_1^\uparrow(n, \mathbb{R})$.

□

Agora, com tal classificação, vamos desenvolver uma equivalência para transformações ortocrônicas. Para isso, note que, se $\Lambda = (\lambda_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in O_1^\uparrow(n, \mathbb{R})$, pelo Corolário 3.73, a n -ésima coluna de Λ forma o vetor unitário $(\lambda_{1n}, \lambda_{2n}, \dots, \lambda_{nn})$. Assim,

$$\lambda_{1n}^2 + \lambda_{2n}^2 + \dots - \lambda_{nn}^2 = -1 \Rightarrow \lambda_{1n}^2 + \lambda_{2n}^2 + \dots + 1 = \lambda_{nn}^2 \Rightarrow |\lambda_{nn}| \geq 1.$$

Teorema 3.91. (Caracterização de $O_1^\uparrow(n, \mathbb{R})$) Seja $\Lambda = (\lambda_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in O_1(n, \mathbb{R})$ uma transformação de Lorentz. Então $\Lambda \in O_1^\uparrow(n, \mathbb{R})$ se, e somente se, $\lambda_{nn} \geq 1$.

Demonstração: Supondo que $\Lambda \in O_1^\uparrow(n, \mathbb{R})$, então Λe_n é futuro-dirigido, tal como e_n . Assim, $\lambda_{nn} \geq 1$.

Reciprocamente, tomando $\lambda_{nn} \geq 1$ e $\{u_1, \dots, u_n\}$ uma base ortonormal futuro-orientada de $\mathbb{L}^n$, como Λ é uma transformação de Lorentz, então Λu_n é de tipo tempo e unitário. Falta-nos mostrar que esse vetor é futuro-dirigido, ou seja, sua última coordenada é positiva.

Para isso, vejamos que $\Lambda^t e_i$ representa a i -ésima linha de Λ :

$$\Lambda^t e_i = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{1n} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{i1} \\ \lambda_{i2} \\ \vdots \\ \lambda_{in} \end{pmatrix}.$$

Com isso, podemos escrever Λu_n da forma:

$$\Lambda u_n = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \cdot u_n = \begin{pmatrix} \langle \Lambda^t e_1, u_n \rangle_E \\ \vdots \\ \langle \Lambda^t e_n, u_n \rangle_E \end{pmatrix}.$$

Assim, devemos olhar o sinal de $\langle \Lambda^t e_n, u_n \rangle_E$. Em primeiro momento, como os vetores $\Lambda^t e_n$ e u_n são de tipo tempo, para $u_n = (u_{n1}, \dots, u_{nn})$, temos

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{ni}^2 = \lambda_{n1}^2 + \dots + \lambda_{n,n-1}^2 < \lambda_{nn}^2 \text{ e } \sum_{i=1}^{n-1} u_{ni}^2 = u_{n1}^2 + \dots + u_{n,n-1}^2 < u_{nn}^2.$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwartz:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{ni} u_{ni} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{ni}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} u_{ni}^2} < \lambda_{nn} u_{nn}.$$

Dessa forma, como $\lambda_{nn} u_{nn}$ é positivo, pois as duas parcelas são, então $\langle \Lambda^t e_n, u_n \rangle_E$ é positivo, consequentemente Λu_n é futuro-dirigido.

Portanto, $\Lambda \in O_1^\uparrow(n, \mathbb{R})$, como queríamos demonstrar. $\square$

Para finalizar esta seção, veremos um estudo algébrico do grupo $O_1(n, \mathbb{R})$ por meio de classes laterais definidas pelo sinal de λ_{nn} e $\det \Lambda$, ou a parte espacial de Λ . Tome a decomposição $\mathbb{R}_\nu^n = \mathbb{R}^{n-\nu} \times \mathbb{R}_\nu^\nu$, isto é, dividindo $\mathbb{R}_\nu^n$ na parte espacial e temporal.

Podemos escrever Λ por meio da matriz em blocos:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_E & B \\ C & \Lambda_T \end{pmatrix},$$

onde $\Lambda_E \in M_{n-\nu}(\mathbb{R})$ e $\Lambda_T \in M_\nu(\mathbb{R})$, ou seja, decompondo Λ em uma parte “espacial” e outra “temporal”, respectivamente.

O próximo teorema utiliza a escrita matricial em blocos de Λ e nos dá meios de indexar o grupo $O_1(n, \mathbb{R})$. Embora tal teorema seja fundamental, sua demonstração não é necessária para o argumento desenvolvido nesta seção; portanto, omitiremos sua prova, que pode ser encontrada em (COUTO; LYMBEROPOULOS, 2018).

Teorema 3.92. Sejam $0 < \nu < n$ e $\Lambda \in O_\nu(n, \mathbb{R})$. Então vale a relação

$$\det(\Lambda_E) = \det(\Lambda_T) \cdot \det(\Lambda).$$

Dessa forma, conseguimos indexar os elementos de $O_\nu(r, \mathbb{R})$ pelo sinal dos determinantes da forma:

$$O_\nu^{+\uparrow}(n, \mathbb{R}) = \{\Lambda \in O_\nu(r, \mathbb{R}); \det(\Lambda_E) > 0 \wedge \det(\Lambda_T) > 0\};$$

$$O_\nu^{+\downarrow}(n, \mathbb{R}) = \{\Lambda \in O_\nu(r, \mathbb{R}); \det(\Lambda_E) > 0 \wedge \det(\Lambda_T) < 0\};$$

$$O_\nu^{-\uparrow}(n, \mathbb{R}) = \{\Lambda \in O_\nu(r, \mathbb{R}); \det(\Lambda_E) < 0 \wedge \det(\Lambda_T) > 0\};$$

$$O_\nu^{-\downarrow}(n, \mathbb{R}) = \{\Lambda \in O_\nu(r, \mathbb{R}); \det(\Lambda_E) < 0 \wedge \det(\Lambda_T) < 0\}.$$

Diremos que um elemento de $O_\nu^{+\uparrow}(n, \mathbb{R})$ ou $O_\nu^{+\downarrow}(n, \mathbb{R})$ preserva a orientação espacial; em outras palavras, preserva a orientação de todos os subespaços de tipo espaço em $\mathbb{L}^n$. Enquanto isso, os conjuntos $O_\nu^{-\uparrow}(n, \mathbb{R})$ e $O_\nu^{-\downarrow}(n, \mathbb{R})$ preservam a orientação temporal

Considerando $\nu = 1$, espaço de Lorentz-Minkowski, podemos destacar as seguintes características de cada conjunto

- $O_1^{+\uparrow}(n, \mathbb{R})$:
 - (i) $\det(\Lambda) > 0$, logo $\det(\Lambda) = 1$, ou seja, $\Lambda \in SO_1(n, \mathbb{R})$;
 - (ii) preserva a orientação espacial;
 - (iii) preserva a orientação temporal, ou seja, Λ é uma transformação ortocrônica e $\lambda_{nn} \geq 1$.
- $O_1^{+\downarrow}(n, \mathbb{R})$:
 - (i) $\det(\Lambda) < 0$, logo $\det(\Lambda) = -1$;
 - (ii) preserva a orientação espacial;

- (iii) inverte a orientação temporal.
- $O_1^{-\uparrow}(n, \mathbb{R})$:
 - (i) $\det(\Lambda) < 0$, logo $\det(\Lambda) = -1$;
 - (ii) inverte a orientação espacial;
 - (iii) preserva a orientação temporal, ou seja, Λ é uma transformação ortocrônica e $\lambda_{nn} \geq 1$.
- $O_1^{-\downarrow}(n, \mathbb{R})$:
 - (i) $\det(\Lambda) > 0$, logo $\det(\Lambda) = 1$, ou seja, $\Lambda \in SO_1(n, \mathbb{R})$;
 - (ii) inverte a orientação espacial;
 - (iii) inverte a orientação temporal.

Observação 3.93. Note que $O_1^{+\uparrow}(n, \mathbb{R})$ é subgrupo de $O_1(n, \mathbb{R})$.

De fato, como $O_1^{\uparrow}(n, \mathbb{R})$ e $SO_1(n, \mathbb{R})$, são subgrupos de $O_1(n, \mathbb{R})$, provado na Observação 3.82 (i) e na Proposição 3.90, e

$$O_1^{+\uparrow}(n, \mathbb{R}) = O_1^{\uparrow}(n, \mathbb{R}) \cap SO_1(n, \mathbb{R}),$$

então $O_1^{+\uparrow}(n, \mathbb{R})$ é subgrupo. □

Desse fato, chamamos $O_1^{+\uparrow}(n, \mathbb{R})$ de **grupo ortocrônico especial de Lorentz**, o grupo de transformações pseudo-ortogonais com determinante positivo que preserva a orientação temporal. Com isso, conseguimos o seguinte resultado:

Proposição 3.94. Os conjuntos $O_\nu^{+\downarrow}(n, \mathbb{R})$, $O_\nu^{-\uparrow}(n, \mathbb{R})$ e $O_\nu^{-\downarrow}(n, \mathbb{R})$ são classes laterais de

$$O_1^{+\uparrow}(n, \mathbb{R}) \text{ de representantes } \tau^{+\downarrow} = Id_{n-1,1}, \tau^{-\uparrow} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & Id_{n-1} \end{pmatrix} \text{ e } \tau^{-\downarrow} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & Id_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} O_\nu^{+\downarrow}(n, \mathbb{R}) &= \tau^{+\downarrow} O_1^{+\uparrow}(n, \mathbb{R}) = Id_{n-1,1} O_1^{+\uparrow}(n, \mathbb{R}); \\ O_\nu^{-\uparrow}(n, \mathbb{R}) &= \tau^{-\uparrow} O_1^{+\uparrow}(n, \mathbb{R}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & Id_{n-1} \end{pmatrix} O_1^{+\uparrow}(n, \mathbb{R}); \\ O_\nu^{-\downarrow}(n, \mathbb{R}) &= \tau^{-\downarrow} O_1^{+\uparrow}(n, \mathbb{R}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & Id_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} O_1^{+\uparrow}(n, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Demonstração: Seja $\Lambda = (\lambda_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in O_1^{+\uparrow}(n, \mathbb{R})$, dada por

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_E & B \\ C & \Lambda_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1,n-1} & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n-1,1} & \cdots & \lambda_{n-1,n-1} & \lambda_{n-1,n} \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{n,n-1} & \lambda_{nn} \end{pmatrix},$$

onde $\det(\Lambda_E) > 0$ e $\det(\Lambda_T) = \lambda_{nn} > 0$.

Assim, para cada representante temos:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \tau^{+\downarrow} \cdot \Lambda &= Id_{n-1,1} \cdot \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_E & B \\ C & -\lambda_{nn} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \det(\Lambda_E) > 0 \wedge \det(\Lambda_T) = -\lambda_{nn} < 0 \\ &\Leftrightarrow \tau^{+\downarrow} \cdot \Lambda \in O_\nu^{+\downarrow}(n, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Portanto, $O_\nu^{+\downarrow}(n, \mathbb{R})$ é uma classe lateral.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \tau^{-\uparrow} \cdot \Lambda &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & Id_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_{11} & \cdots & -\lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \det(\Lambda_E) > 0 \wedge \det(\Lambda_T) < 0 \\ &\Leftrightarrow \tau^{-\uparrow} \cdot \Lambda \in O_\nu^{-\uparrow}(n, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Portanto, $O_\nu^{-\uparrow}(n, \mathbb{R})$ é uma classe Lateral.

$$\bullet \quad \tau^{-\downarrow} \cdot \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & Id_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_{11} & \cdots & -\lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n-1,1} & \cdots & \lambda_{n-1,n} \\ -\lambda_{n1} & \cdots & -\lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \det(\Lambda_E) > 0 \wedge \det(\Lambda_T) = -\lambda_{nn} < 0 \Leftrightarrow \tau^{-\downarrow} \cdot \Lambda \in O_\nu^{-\downarrow}(n, \mathbb{R}).$$

Portanto, $O_\nu^{-\downarrow}(n, \mathbb{R})$ é uma classe lateral.

□

Dessa forma, podemos esquematizar as características que estudamos das classes laterais das transformações de Lorentz pela Tabela 1.

Tabela 1: Propriedades das classes laterais de $O_1^{+\uparrow}(n, \mathbb{R})$.

Características	$O_1^{+\uparrow}(n, \mathbb{R})$	$O_1^{+\downarrow}(n, \mathbb{R})$	$O_1^{-\uparrow}(n, \mathbb{R})$	$O_1^{-\downarrow}(n, \mathbb{R})$
Representante	$\tau^{+\uparrow} = Id_n$	$\tau^{+\downarrow}$	$\tau^{-\uparrow}$	$\tau^{-\downarrow}$
det (Λ)	1	-1	-1	1
λ_{nn}	≥ 1	≤ -1	≤ -1	≥ 1
Orientação Espacial	preserva	preserva	inverte	inverte
Orientação Temporal	preserva	inverte	preserva	inverte
Ortocrônica $O_1^{\uparrow}(n, \mathbb{R})$	sim	não	sim	não
Contido em $SO_1(n, \mathbb{R})$	sim	não	não	sim

Fonte: Elaboração própria (2026).

Exemplo 3.95. Um **impulso** de velocidade $v = (v, 0, 0)$ na direção x , onde $\langle v, v \rangle_E = v^2 < 1$, em $\mathbb{L}^4$ é uma transformação da forma:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \langle v, v \rangle_E}} & 0 & 0 & -\frac{\|v\|_E}{\sqrt{1 - \langle v, v \rangle_E}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\|v\|_E}{\sqrt{1 - \langle v, v \rangle_E}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1 - \langle v, v \rangle_E}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} & 0 & 0 & -\frac{|v|}{\sqrt{1 - v^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{|v|}{\sqrt{1 - v^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \end{pmatrix}.$$

Note que, dados dois vetores $p = (p_1, p_2, p_3, p_4), q = (q_1, q_2, q_3, q_4) \in \mathbb{L}^4$, temos

$$\begin{aligned} \langle \Lambda(p), \Lambda(q) \rangle_L &= \left\langle \left(\frac{p_1 - |v|p_4}{\sqrt{1 - v^2}}, p_2, p_3, \frac{p_4 - |v|p_1}{\sqrt{1 - v^2}} \right), \left(\frac{q_1 - |v|q_4}{\sqrt{1 - v^2}}, q_2, q_3, \frac{q_4 - |v|q_1}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right\rangle_L = \\ &= \frac{(p_1 - |v|p_4)(q_1 - |v|q_4)}{1 - v^2} + p_2q_2 + p_3q_3 - \frac{(p_4 - |v|p_1)(q_4 - |v|q_1)}{1 - v^2} = \\ &= \frac{p_1q_1 + v^2p_4q_4 - (p_4q_4 + v^2p_1q_1)}{1 - v^2} + p_2q_2 + p_3q_3 = \\ &= p_1q_1 \frac{1 - v^2}{1 - v^2} + p_2q_2 + p_3q_3 - p_4q_4 \frac{1 - v^2}{1 - v^2} = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 - p_4q_4 = \\ &= \langle p, q \rangle_L. \end{aligned}$$

Portanto, Λ é uma transformação de Lorentz. O determinante de Λ é

$$\det(\Lambda) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 & -\frac{|v|}{\sqrt{1-v^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{|v|}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{1-v^2} - \frac{v^2}{1-v^2} = 1.$$

Assim, Λ pertence ao grupo especial de Lorentz.

Mais que isso, dada uma base futuro-orientada $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_4\}$, onde $u_4 = (u_{4x}, u_{4y}, u_{4z}, u_{4t})$ é de tipo tempo, temos

$$\Lambda \cdot u_4 = \begin{pmatrix} \frac{u_{4x}}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{u_{4t}|v|}{\sqrt{1-v^2}} \\ u_{4y} \\ u_{4z} \\ -\frac{u_{4x}|v|}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{u_{4t}}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix}.$$

Como u_4 é de tipo tempo futuro-dirigido, então $u_{4t} > 0$ e

$$u_{4x}^2 + u_{4y}^2 + u_{4z}^2 - u_{4t}^2 < 0 \Rightarrow u_{4x}^2 < u_{4t}^2 \Rightarrow |u_{4x}| < u_{4t}.$$

Assim, estudando o sinal da última coordenada de $\Lambda \cdot u_4$, como $\|v\|_E^2 < 1$, vale

$$\frac{u_{4x}|v|}{\sqrt{1-v^2}} < \frac{u_{4t}}{\sqrt{1-v^2}} \Rightarrow 0 < -\frac{u_{4x}|v|}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{u_{4t}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Portanto, a base $\Lambda \cdot \mathcal{B}$ é futuro-orientada, consequentemente, Λ é uma transformação de Lorentz própria ortocrônica.

CAPÍTULO 4

TEORIA DE CURVAS NO ESPAÇO DE LORENTZ-MINKOWSKI

Neste capítulo, estudaremos o comportamento local de curvas em $\mathbb{R}_\nu^n$, por meio de adaptações das definições e teoremas da Geometria Diferencial clássica. Apresentaremos exemplos em $\mathbb{L}^n$, objeto principal deste texto, utilizando como referência fundamental (COUTO; LYMBEROPOULOS, 2018).

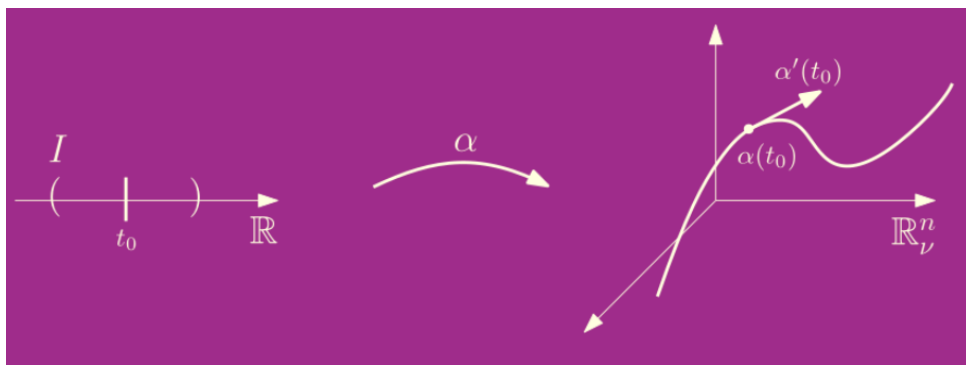
4.1 | Curvas Parametrizadas em $\mathbb{R}_\nu^n$

Ao longo deste capítulo, utilizaremos a notação $I \subseteq \mathbb{R}$ para um intervalo aberto.

Definição 4.1. Uma **curva parametrizada** é uma aplicação suave $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$. A imagem $\alpha(I)$ é dita **traço** de α . E, para cada $t \in I$, a derivada $\alpha'(t)$ é chamada **vetor velocidade** de α em t .

A Figura 16 ilustra um diagrama de uma curva parametrizada em $\mathbb{R}_\nu^n$.

Figura 16: Curva parametrizada em $\mathbb{R}_\nu^n$.



Fonte: Elaboração própria (2026).

Observação 4.2. Também podemos escrever a parametrização α como:

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)).$$

Além disso, o termo **suave** é utilizado como sinônimo de **infinitamente derivável** ou de **classe** $\mathcal{C}^\infty$. Consequentemente, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathcal{C}^\infty$.

Definição 4.3. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$ a parametrização de uma curva e $t_0 \in I$. Dizemos que α é de:

- (i) **tipo espaço em t_0** , se $\alpha'(t_0)$ for de tipo espaço;
- (ii) **tipo tempo em t_0** , se $\alpha'(t_0)$ for de tipo tempo;
- (iii) **tipo luz em t_0** , se $\alpha'(t_0)$ for de tipo luz.

Se $\alpha'(t)$ tiver o mesmo tipo causal para todo $t \in I$, então dizemos que α é de tal tipo causal. Neste caso, se α não for do tipo luz, definimos o **indicador de α** como sendo o indicador do vetor velocidade, ou seja, se α é do tipo espaço, $\epsilon_\alpha = 1$; caso contrário, α é do tipo tempo e $\epsilon_\alpha = -1$.

Observação 4.4. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$ uma curva parametrizada.

- (i) Se α é de tipo espaço em t_1 e do tipo tempo em t_2 , então existe um intervalo aberto em torno de t_1 em que todos os pontos são de tipo espaço e outro em torno de t_2 que todos os pontos são de tipo tempo.

De fato, tome $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(t) = \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_\nu.$$

f é contínua em I , pois é a soma do produto de funções contínuas, já que $\alpha \in \mathcal{C}^\infty$. Assim, como $f(t_1) > 0$, pelo Teorema da Conservação do Sinal, a continuidade de f garante que existe um intervalo I_1 em torno t_1 tal que f é positiva para todos esses pontos. Logo, α é de tipo espaço em todos os pontos de I_1 .

Analogamente, pelo fato de $f(t_2) < 0$, existe um intervalo I_2 tal que f é negativa em todos os pontos de I_2 . Consequentemente, α é de tipo tempo em todos os pontos de I_2 .

- (ii) Se α é de tipo espaço em t_1 e de tipo tempo em t_2 , então existe $t_0 \in (t_1, t_2)$ tal que $\alpha(t_0)$ é de tipo luz.

De fato, tomando f como no item anterior, f é contínua, $f(t_1) > 0$ e $f(t_2) < 0$. Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe t_0 entre t_1 e t_2 tal que

$$f(t_0) = \langle \alpha'(t_0), \alpha'(t_0) \rangle_\nu = 0.$$

Dessa forma, α é de tipo luz em t_0 , ou seja, o tipo causal de uma curva não dá “saltos” entre espaço e tempo.

- (iii) Caso α seja de tipo tempo em $\mathbb{L}^n$, dizemos que α é **futuro-dirigido** ou **passado-dirigido** conforme o vetor velocidade $\alpha'(t)$ o for, pela Definição 3.83.

Exemplo 4.5. Sejam $p \in \mathbb{L}^n$ e $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^n$ dada por $\alpha(t) = p$, um ponto no espaço $\mathbb{L}^n$, como ilustra a Figura 17.

Note que $\alpha'(t) = \vec{0}$, ou seja, α é de tipo espaço para todo $i \in \mathbb{R}$. Logo α é do tipo espaço.

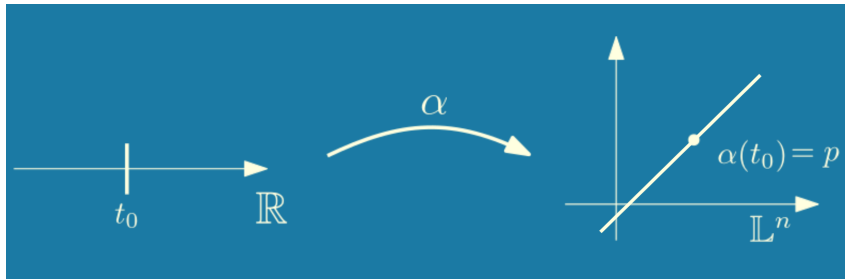
Figura 17: Parametrização do ponto p pela curva α em $\mathbb{L}^n$.



Fonte: Elaboração própria (2026).

Exemplo 4.6. Sejam $p, v \in \mathbb{L}^n$ e $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^n$ dada por $\alpha(t) = p + tv$, uma reta em $\mathbb{L}^n$. Como $\alpha'(t) = v$, o tipo causal de α é o mesmo tipo causal de v . A Figura 18 ilustra a parametrização de α em $\mathbb{L}^n$.

Figura 18: Parametrização de reta em $\mathbb{L}^n$.



Fonte: Elaboração própria (2026).

Exemplo 4.7. Seja $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{L}^2$ dada por $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, o **círculo euclidiano** $\mathbb{S}^1$ no plano. Nesse caso, o vetor velocidade de α é $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t)$ e

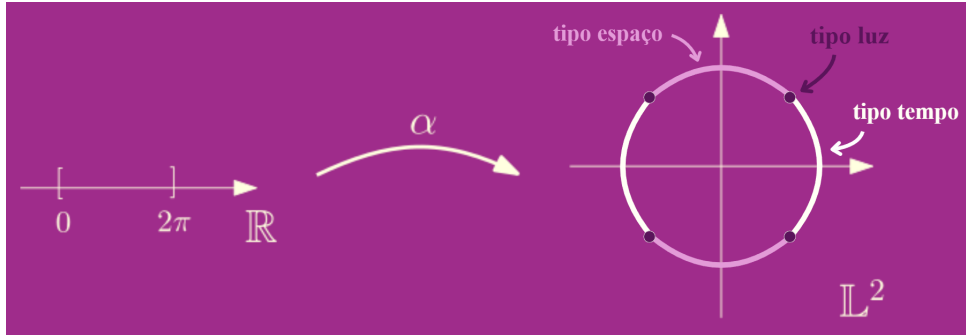
$$\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L = \sin^2 t - \cos^2 t.$$

Assim, α é

- (i) de tipo espaço quando $t \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$;
- (ii) de tipo tempo quando $t \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$;
- (iii) de tipo luz quando $t \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.

A Figura 19 ilustra a parametrização do círculo euclidiano em $\mathbb{L}^2$ e indica seus diferentes tipos causais.

Figura 19: Parametrização do círculo euclidiano em $\mathbb{L}^2$.



Fonte: Elaboração própria (2026).

Definição 4.8. Uma curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$ é dita **plana**, se existe um plano que contém seu traço.

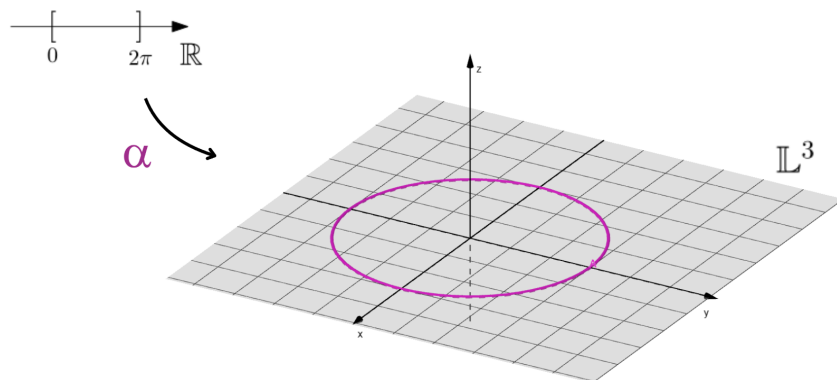
Exemplo 4.9. Sejam $r > 0$ e $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{L}^3$ dada por $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t, 0)$, um círculo euclidiano contido no plano xy de raio r , como ilustrado na Figura 20.

Observe que $\alpha'(t) = (-r \sin t, r \cos t, 0)$, então

$$\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L = r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t - 0 = r^2 > 0.$$

Portanto, α é uma curva plana de tipo espaço.

Figura 20: Parametrização de círculo euclidiano no plano xy .



Fonte: Elaboração própria (2026).

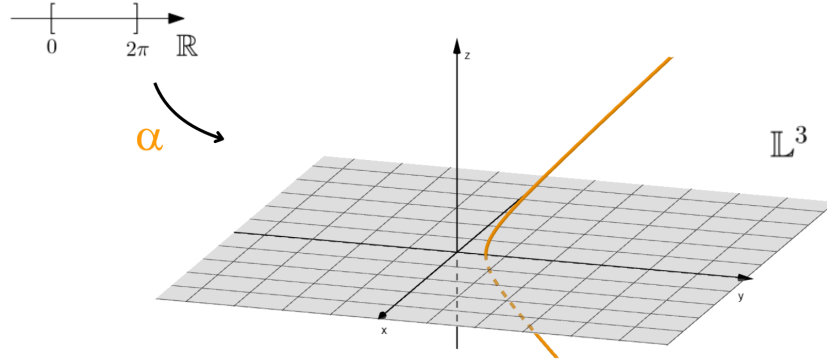
Exemplo 4.10. Sejam $r > 0$ e $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3$ dada por $\alpha(t) = (0, r \cosh t, r \sinh t)$, um ramo de uma hipérbole contida no plano yz de raio r , como listra a Figura 21. Note que

$\alpha'(t) = (0, r \sinh t, r \cosh t)$, então

$$\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L = 0 + r^2 \sinh^2 t - r^2 \cosh^2 t = -r^2 < 0,$$

Portanto, α é uma curva plana de tipo tempo.

Figura 21: Parametrização de um ramo de uma hipérbole no plano yz .



Fonte: Elaboração própria (2026).

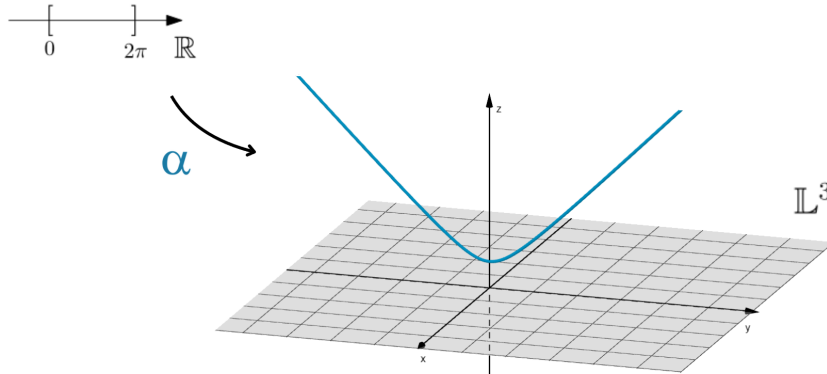
Exemplo 4.11. Sejam $r > 0$ e $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3$ dada por $\alpha(t) = (0, r \sinh t, r \cosh t)$, um ramo de outra hipérbole contida no plano yz de raio r , como listra a Figura 22.

Veja que $\alpha'(t) = (0, r \cosh t, r \sinh t)$, então

$$\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L = 0 + r^2 \cosh^2 t - r^2 \sinh^2 t = r^2 > 0,$$

Portanto, α é uma curva plana de tipo espaço.

Figura 22: Parametrização de um ramo de uma hipérbole no plano yz .



Fonte: Elaboração própria (2026).

Observação 4.12. Note que, as curvas planas dos Exemplos 4.9 e 4.10 estão contidas

em planos do mesmo tipo causal delas. Porém isso não é uma regra, a curva plana do Exemplo 4.11 tem tipo causal diferente do plano que a contém.

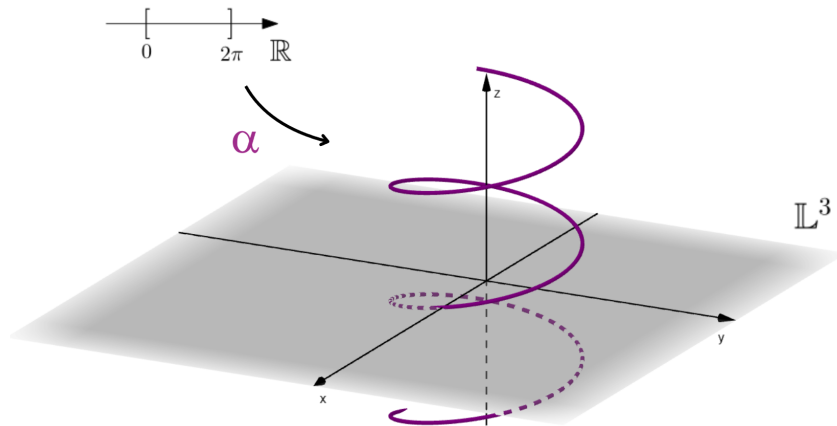
Exemplo 4.13. Seja $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3$ dada por $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $a, b > 0$, uma **hélice euclidiana**, como ilustra a Figura 23. Analisando o vetor velocidade $\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$, temos que

$$\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L = a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t - b^2 = a^2 - b^2.$$

Dessa forma, α é

- (i) de tipo espaço se $a > b$;
- (ii) de tipo tempo se $a < b$;
- (iii) de tipo luz se $a = b$.

Figura 23: Parametrização de uma hélice euclidiana em $\mathbb{L}^3$.



Fonte: Elaboração própria (2026).

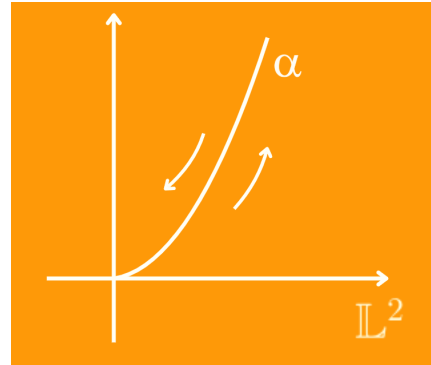
Definição 4.14. Seja a curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$. A orientação de α é o sentido de percurso do traço de α .

Exemplo 4.15. Seja $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^2$, dada por

$$\alpha(t) = (t^2, t^4).$$

Observe que, a orientação da curva para $t \in (-\infty, 0)$ é da direita para a esquerda, ou seja, se aproximando da origem. Em contra partida, para $t \in (0, \infty)$ a orientação da curva é da esquerda para a direita, ou seja, se afastando da origem. A Figura 24 ilustra o traço de α e as setas sua orientação.

Figura 24: Curva α e sua orientação.



Fonte: Elaboração própria (2026).

Definição 4.16. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$ uma curva parametrizada. Dizemos que α é **regular** se $\alpha'(t) \neq \vec{0}$, para todo $t \in I$. Se existe $t_0 \in I$ tal que $\alpha'(t_0) = \vec{0}$, dizemos que t_0 é um **ponto singular** desta parametrização.

Exemplo 4.17. Seja a hélice euclidiana $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3$, $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, onde $a, b > 0$.

Como $\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$, então $\alpha'(t) \neq \vec{0}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Dessa forma, α é regular.

Exemplo 4.18. Seja $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^2$, dada por

$$\alpha(t) = (t^2, t^3),$$

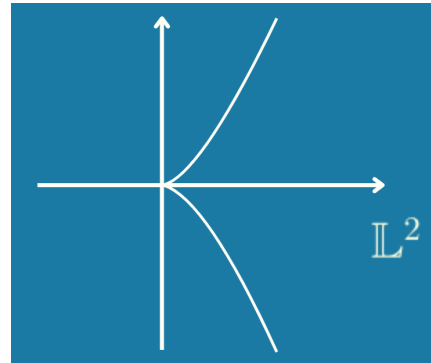
chamada **cúspide**. A Figura 25 ilustra o traço da cúspide α .

O vetor velocidade de α é da forma

$$\alpha'(t) = (2t, 3t^2)$$

e $\alpha'(0) = (0, 0)$, logo 0 é ponto singular de α .

Figura 25: Cúspide em $\mathbb{L}^2$.



Fonte: Elaboração própria (2026).

Teorema 4.19. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^n$ uma curva. Se α é de tipo luz ou tempo, então α é regular.

Demonstração: Tome $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$, então $\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), \dots, \alpha'_n(t))$ e, como α é tipo luz ou tempo, temos

$$\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L = \alpha_1'^2(t) + \alpha_2'^2(t) + \dots + \alpha_{n-1}'^2(t) - \alpha_n'^2(t) \leq 0.$$

Suponha que exista $t \in I$ tal que $\alpha'_n(t) = 0$. Então $\alpha'_1(t) = \alpha'_2(t) = \dots = \alpha'_{n-1}(t) = 0$, logo $\alpha'(t) = \vec{0}$, ou seja, α é de tipo espaço em t , que contradiz a hipótese.

Portanto, $\alpha'_n(t) \neq 0$, para todo $t \in I$, consequentemente, $\alpha'(t) \neq \vec{0}$ e, assim, α é regular. $\square$

Definição 4.20. Uma curva suave $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$ é uma curva parametrizada **fechada** se α e todas as suas derivadas coincidem nos extremos de seu domínio, ou seja,

$$\alpha^{(k)}(a) = \alpha^{(k)}(b), \text{ para todo } k \geq 0.$$

Exemplo 4.21. A curva dada pela forma polar

$$r(\theta) = 2a(1 - \cos \theta),$$

para $\theta \in [0, 2\pi]$, $a > 0$, é chamada de **cardi-
oide**, ilustrada na Figura 26. Uma parametrização do cardi-
oide é dada por:

$$\alpha(t) = (2a \cos t - a \cos 2t - 1, 2a \sin t - a \sin 2t),$$

$t \in [0, 2\pi]$ em $\mathbb{R}_\nu^2$.

Analisando os valores de α nos extremos do seu domínio, temos

$$\alpha(0) = (2a - a - 1, 0 - 0) = (a - 1, 0) = \alpha(2\pi).$$

Agora, analisando as derivadas de α nos extremos de seu domínio, como as derivadas das funções seno e cosseno são periódicas, segue que

- Dado $p \in \mathbb{N}$ par:

$$\alpha^{(p)}(t) = (2a(-1)^{\frac{p}{2}} \cos t + 2^p(-1)^{1+\frac{p}{2}} \cos 2t, 2a(-1)^{\frac{p}{2}} \sin t + 2^p(-1)^{1+\frac{p}{2}} \sin 2t).$$

Assim, $\alpha^{(p)}(0) = ((-1)^{\frac{p}{2}} a(2 - 2^p), 0) = \alpha^{(p)}(2\pi)$, para todo p ;

- Dado $i \in \mathbb{N}$ ímpar:

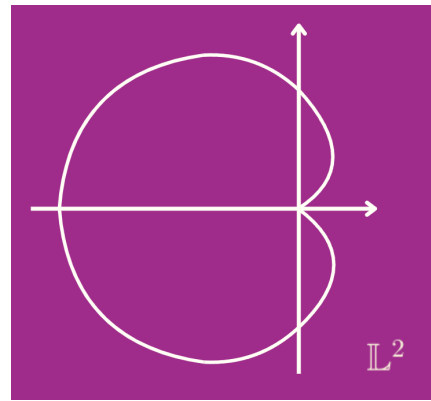
$$\alpha^{(i)}(t) = (2a(-1)^{\frac{i+1}{2}} \sin t + 2^i a(-1)^{\frac{i+3}{2}} \sin 2t, 2a(-1)^{\frac{i-1}{2}} \cos t + 2^i a(-1)^{\frac{i+1}{2}} \cos 2t).$$

Assim, $\alpha^{(i)}(0) = (0, (-1)^{\frac{i-1}{2}} a(2 - 2^i)) = \alpha^{(i)}(2\pi)$, para todo i .

Portanto, o cardi-
oide é uma curva fechada em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{L}^2$.

Teorema 4.22. Não existem curvas parametrizadas fechadas de tipo luz ou tempo em $\mathbb{L}^n$.

Figura 26: Cardioide em $\mathbb{L}^2$.



Fonte: Elaboração própria (2026).

Demonstração: Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{L}^n$, onde $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$, satisfazendo $\alpha^k(a) = \alpha^k(b)$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Como α é suave em $[a, b]$, então α_n é contínua e derivável em $[a, b]$. Assim, $\alpha_n(a) = \alpha_n(b)$ e, pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$, tal que $\alpha'_n(c) = 0$. Daí

$$\langle \alpha'(c), \alpha'(c) \rangle_L = \alpha_1'^2(c) + \alpha_2'^2(c) + \dots + \alpha_{n-1}'^2(c) - 0 \geq 0.$$

Se $\langle \alpha'(c), \alpha'(c) \rangle_L = 0$, então $\alpha'(c) = \vec{0}$ e $\alpha(c)$ é de tipo espaço. Caso contrário, se $\langle \alpha'(c), \alpha'(c) \rangle_L > 0$, então, novamente, $\alpha(c)$ é de tipo espaço.

Portanto, em ambos os casos, α tem um ponto de tipo espaço, logo não é de tipo luz nem de tipo tempo. $\square$

Definição 4.23. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$ uma curva parametrizada e $a, b \in I$. O **comprimento de arco** de α entre a e b é definido por:

$$l(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|_\nu dt.$$

Se α é de tipo tempo futuro-dirigido em $\mathbb{L}^n$, seu comprimento de arco é chamado **tempo próprio**.

Definimos também a **função comprimento de arco** $S : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$S(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\|_\nu du, \quad t_0 \in I.$$

Exemplo 4.24. Seja a curva contida no plano xy de $\mathbb{L}^3$ parametrizada por

$$\alpha(t) = (t \cos t, t \sin t, 0), t \in \mathbb{R},$$

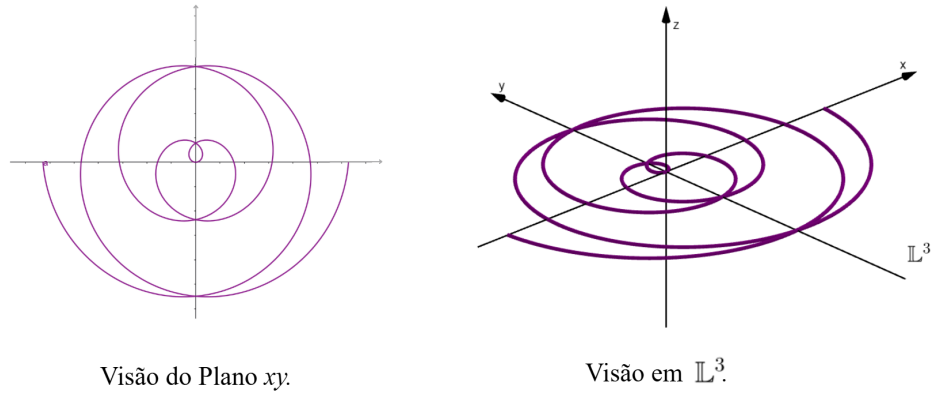
é chamada **Espiral de Arquimedes**, ilustrada na Figura 27. Analisando o vetor velocidade de α , temos

$$(i) \quad \alpha'(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 0);$$

$$(ii) \quad \|\alpha'(t)\|_L = (\cos^2 t - 2t \cos t \sin t + t^2 \sin^2 t + \sin^2 t + 2t \cos t \sin t + t^2 \cos^2 t - 0)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1 + t^2}.$$

Assim, a função comprimento de arco de α a partir de 0 é:

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^t \|\alpha'(u)\|_L du = \int_0^t \sqrt{1 + u^2} du = \frac{1}{2} \left(u\sqrt{1 + u^2} + \ln(u + \sqrt{1 + u^2}) \right) \Big|_0^t = \\ &= \frac{1}{2} \left(t\sqrt{1 + t^2} + \ln(t + \sqrt{1 + t^2}) - (0 + \ln(1)) \right) = \frac{1}{2} \left(t\sqrt{1 + t^2} + \ln(t + \sqrt{1 + t^2}) \right). \end{aligned}$$

Figura 27: Espiral de Arquimedes no plano xy em $\mathbb{L}^3$.

Fonte: Elaboração própria (2026).

Exemplo 4.25. A versão lorentziana da Espiral de Arquimedes no plano $\mathbb{L}^2$ é parametrizada por

$$\alpha(t) = (t \cosh t, t \sinh t), t \in \mathbb{R},$$

e seu traço está ilustrado na Figura 28. Analisando v vetor velocidade de α

- (i) $\alpha'(t) = (\cosh t + t \sinh t, \sinh t + t \cosh t)$;
- (ii) $\|\alpha'(t)\|_L = (\cosh^2 t + 2t \cosh t \sinh t + t^2 \sinh^2 t - \sinh^2 t - 2t \cosh t \sinh t - t^2 \cosh^2 t)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1 - t^2}$.

Assim, a função comprimento de arco de α a partir de 0 é:

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^t \|\alpha'(u)\|_L du = \int_0^t \sqrt{1 - u^2} du = \frac{1}{2} \left(u \sqrt{1 - u^2} + \arcsen u \right) \Big|_0^t = \\ &= \frac{1}{2} \left(t \sqrt{1 - t^2} + \arcsen u - (0 + \arcsen 0) \right) = \frac{1}{2} \left(t \sqrt{1 - t^2} + \arcsen t \right). \end{aligned}$$

Figura 28: Versão Lorentziana da Espiral de Arquimedes $\mathbb{L}^2$.

Fonte: Elaboração própria (2026).

Definição 4.26. Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$ uma curva parametrizada e $a, b \in I$. A **energia** de α entre a e b é definida por:

$$E(\alpha) = \int_a^b \frac{1}{2} \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_\nu dt.$$

Exemplo 4.27. Seja a hélice Euclidiana em $\mathbb{L}^3$, parametrizada por $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, onde $a, b > 0$ e $t \in \mathbb{R}$. Assim, o comprimento de arco de α no intervalo $[0, 2\pi]$ é

$$l(\alpha) = \int_0^{2\pi} \sqrt{|a^2 - b^2|} dt = 2\pi \sqrt{|a^2 - b^2|}.$$

Por outro lado a energia de α em $[0, 2\pi]$ é

$$E(\alpha) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (a^2 - b^2) dt = \pi(a^2 - b^2).$$

Proposição 4.28. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$ uma curva parametrizada de tipo causal constante. Então, dados $a, b \in I$, vale que:

$$l(\alpha) \leq \sqrt{2\epsilon_\alpha E(\alpha)(b - a)},$$

entre a e b , e a igualdade é válida se, e somente se, α tem velocidade constante.

Demonstração: Sejam $f(t) = \sqrt{\epsilon_\alpha \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_\nu}$ e $g(t) = 1$ funções contínuas. Assim, utilizando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &\leq \|f\| \cdot \|g\| \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_a^b \sqrt{\epsilon_\alpha \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_\nu} \cdot 1 dt &\leq \left(\int_a^b \epsilon_\alpha \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_\nu dt \right)^{1/2} \left(\int_a^b dt \right)^{1/2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_a^b \|\alpha'(t)\|_\nu dt &\leq \sqrt{\epsilon_\alpha \int_a^b \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_\nu dt} \cdot \sqrt{b - a} \Rightarrow \\ \Rightarrow l(\alpha) &\leq \sqrt{2\epsilon_\alpha E(\alpha)(b - a)}. \end{aligned}$$

Por fim, se $\alpha'(t)$ é constante, temos que

$$\begin{aligned} \sqrt{2\epsilon_\alpha E(\alpha)(b - a)} &= \sqrt{2\epsilon_\alpha \int_a^b \frac{1}{2} \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_\nu dt (b - a)} = \\ &= \sqrt{2\epsilon_\alpha \frac{1}{2} \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_\nu \int_a^b dt (b - a)} = \sqrt{\epsilon_\alpha \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_\nu} \sqrt{(b - a)(b - a)} = \end{aligned}$$

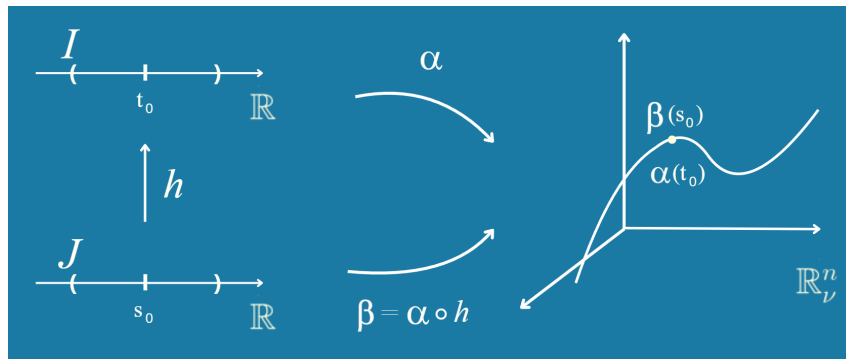
$$= \|\alpha'(t)\|_\nu(b-a) = \|\alpha'(t)\|_\nu \int_a^b dt = \int_a^b \|\alpha'(t)\|_\nu dt = l(\alpha).$$

□

Definição 4.29. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$ uma curva parametrizada. Uma **reparametrização** de α é uma curva parametrizada $\beta = \alpha \circ h$, onde $h : J \rightarrow I$ é um difeomorfismo entre os intervalos abertos J e I . A função h é chamada **mudança de parâmetro**.

A Figura 29 ilustra um diagrama de reparametrizações de curvas em $\mathbb{R}_\nu^n$.

Figura 29: Diagrama de reparametrização de curvas em $\mathbb{R}_\nu^n$.



Fonte: Elaboração própria (2026).

Observação 4.30. Sejam as curvas $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$ e $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$, onde β é uma reparametrização de α pelo difeomorfismo h . Então,

- (i) Se β é uma reparametrização de α por h , então α é uma reparametrização de β por h^{-1} ,

$$\beta = \alpha \circ h \Rightarrow \beta \circ h^{-1} = \alpha \circ h \circ h^{-1} = \alpha;$$

- (ii) A reparametrização é dita **positiva** se $h'(s) > 0$, para todo $s \in J$;

- (iii) α é regular se, e somente se, β o for.

De fato, se α é regular, como $\beta = \alpha \circ h$, então

$$\beta'(s) = \alpha'(h(s))h'(s) \neq 0,$$

pois $\alpha'(h(s)) \neq \vec{0}$, já que é regular e $h'(s) \neq 0$, pelo fato de h ser difeomorfismo, logo injetora e monótona. Assim, β é regular.

Reciprocamente, se β é regular, pelo item (i), $\alpha = \beta \circ h^{-1}$. De forma análoga ao caso ao anterior, α é regular.

(iv) $\beta(s)$ tem o mesmo tipo causal de $\alpha(t)$, onde $h(s) = t$.

Certamente, como $\beta'(s) = \alpha'(h(s))h'(s)$, então

$$\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle_\nu = \langle \alpha'(h(s))h'(s), \alpha'(h(s))h'(s) \rangle_\nu = h'(s)^2 \langle \alpha'(h(s)), \alpha'(h(s)) \rangle_\nu.$$

Dessa forma, o sinal do produto pseudo-euclidiano de β' é igual ao de α' , ou seja, as parametrizações tem o mesmo tipo causal nos pontos correspondentes. $\square$

Corolário 4.31. Sejam $\alpha, \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$ curvas parametrizadas. Se $\langle \alpha(t), \gamma(t) \rangle_\nu$ é constante, então $\langle \alpha'(t), \gamma(t) \rangle_\nu = -\langle \alpha(t), \gamma'(t) \rangle_\nu$, para todo $t \in I$.

Demonstração: Derivando a expressão $\langle \alpha(t), \gamma(t) \rangle_\nu = c$, para $t \in I$ qualquer, $c \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} (\langle \alpha(t), \gamma(t) \rangle_\nu)' &= c' \Rightarrow \langle \alpha'(t), \gamma(t) \rangle_\nu + \langle \alpha(t), \gamma'(t) \rangle_\nu = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \langle \alpha'(t), \gamma(t) \rangle_\nu = -\langle \alpha(t), \gamma'(t) \rangle_\nu. \end{aligned}$$

$\square$

Corolário 4.32. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$ uma curva parametrizada. Se $\langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle_\nu$ é constante, então $\alpha'(t)$ é pseudo-ortogonal a $\alpha(t)$, para todo $t \in I$, isto é, $\alpha(t)$ é pseudo-ortogonal ao vetor velocidade de α em t .

Demonstração: Derivando a expressão $\langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle_\nu = c$, para qualquer $t \in I$, $c \in \mathbb{R}$, temos

$$(\langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle_\nu)' = c' \Rightarrow 2\langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle_\nu = 0 \Rightarrow \langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle_\nu = 0.$$

$\square$

Definição 4.33. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$ uma curva parametrizada. Dizemos que α tem **velocidade unitária** se $\|\alpha'(t)\|_\nu = 1$, para todo $t \in I$.

Além disso, é dito que α está **parametrizada por comprimento de arco** se, para todo $t_0 \in I$, a função comprimento de arco a partir de t_0 é dada por $S(t) = t - t_0$.

Observação 4.34. As duas definições acima são equivalentes. De fato, se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$ é uma curva com velocidade unitária, então a função comprimento de arco de α a partir de um $t_0 \in I$ é:

$$S(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\|_\nu du = \int_{t_0}^t 1 du = t - t_0.$$

Portanto, α está parametrizada pelo comprimento de arco.

Reciprocamente, se α está parametrizada pelo comprimento e $S(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\|_\nu du$ é a função comprimento de arco de α a partir de $t_0 \in I$, então, caso $t \geq t_0$, $S(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\|_\nu du = t - t_0$. Caso contrário, se $t \leq t_0$, $-S(t) = \int_t^{t_0} \|\alpha'(u)\|_\nu du = t_0 - t$.

Em ambos os $S(t) = t - t_0$. Derivando a expressão:

$$\|\alpha'(t)\|_\nu = S'(t) = 1.$$

Portanto, α tem velocidade unitária.

Teorema 4.35. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$ uma curva parametrizada regular e que não seja de tipo luz. Então α admite uma **reparametrização com velocidade unitária**. Mais precisamente, existe um intervalo J aberto e um difeomorfismo $h : J \rightarrow I$, tal que $\beta = \alpha \circ h$ tem velocidade unitária.

Demonstração: Fixe $t_0 \in I$ e tome $S : I \rightarrow \mathbb{R}$ a função comprimento de arco a partir de t_0 . Pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$S'(t) = \left(\int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\|_\nu du \right)' = \|\alpha'(t)\|_\nu > 0.$$

Logo S é crescente e, assim, injetora. Restringindo o contradomínio de S sobre sua imagem $J = S(I) \subseteq \mathbb{R}$, temos que a aplicação entre intervalos $S : I \rightarrow J$ é um difeomorfismo. Considere $S^{-1} = h : J \rightarrow I$ e $\beta = \alpha \circ h$, uma curva parametrizada regular, como provado na Observação 4.30 (iii). Então

$$\|\beta'(s)\|_\nu = \|\alpha'(h(s))h'(s)\|_\nu = \|\alpha'(h(s))\|_\nu h'(s) = S'(h(s))h'(s) = (S \circ h)'(s) = 1.$$

Portanto, β é uma reparametrização de α com velocidade unitária. $\square$

Exemplo 4.36. Seja a hélice euclidiana de tipo espaço ou tempo em $\mathbb{L}^3$ parametrizada por $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, onde $a, b > 0$, $a \neq b$ e $t \in \mathbb{R}$. Vamos encontrar uma reparametrização por comprimento de arco de α :

A função comprimento de arco, fixado $t_0 = 0$, é dada por:

$$S(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\|_L du = t\sqrt{|a^2 - b^2|}.$$

Assim, a inversa de S é:

$$S^{-1}(s) = h(s) = \frac{s}{\sqrt{|a^2 - b^2|}}.$$

Dessa forma, a reparametrização por comprimento de arco de α é:

$$\beta(s) = \alpha(h(s)) = \left(a \cos \left(\frac{s}{\sqrt{|a^2 - b^2|}} \right), a \sin \left(\frac{s}{\sqrt{|a^2 - b^2|}} \right), \frac{bs}{\sqrt{|a^2 - b^2|}} \right).$$

De fato, β é uma curva com velocidade unitária:

$$\begin{aligned} \|\beta'(s)\|_L &= \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - b^2} \sin^2\left(\frac{s}{\sqrt{|a^2 - b^2|}}\right) + \frac{a^2}{a^2 - b^2} \cos^2\left(\frac{s}{\sqrt{|a^2 - b^2|}}\right) - \frac{b^2}{a^2 - b^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - b^2}} = 1. \end{aligned}$$

Nos atentemos agora para o caso excluído pelo teorema anterior: a curva de tipo luz. Não podemos utilizar a mesma técnica com essa curva, pois $\|\alpha'(s)\|_\nu = 0$, para todo $t \in I$. Assim, estudaremos um paralelo para a reparametrização com velocidade unitária de curvas do tipo luz no espaço de Lorentz-Minkowski por meio da **reparametrização por arco-fóton**.

Teorema 4.37. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^n$ uma curva parametrizada regular de tipo luz, tal que $\|\alpha''(t)\|_L \neq 0$. Então α admite uma **reparametrização por arco-fóton**, ou seja, existe um intervalo J aberto e um difeomorfismo $h : J \rightarrow I$, tal que $\beta = \alpha \circ h$ satisfaz $\|\beta''(s)\|_L = 1$, para todo $s \in J$.

Demonstração: Se $h : \mathbb{R} \rightarrow I$ é uma função que satisfaz $\beta(s) = \alpha(h(s))$ e $\|\beta''(s)\|_L = 1$, derivando β , temos que:

$$\beta'(s) = \alpha'(h(s))h'(s),$$

$$\beta''(s) = \alpha''(h(s))h'(s)^2 + \alpha'(h(s))h''(s). \quad (6)$$

Como α é de tipo luz, $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L = 0$, ou seja, constante. Logo, pelo Corolário 4.32, $\alpha'(t)$ é pseudo-ortogonal a $\alpha''(t)$. Além disso, $\|\alpha''(t)\|_L \neq 0$ por hipótese e vetores de tipo luz são pseudo-ortogonais somente a vetores de tipo espaço ou luz, então $\alpha''(t)$ é de tipo espaço, para todo $t \in I$.

Aplicando $\langle \cdot, \beta''(t) \rangle_L$ na Equação (6), temos

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \beta''(s), \beta''(t) \rangle_L = \langle \alpha''(h(s))h'(s)^2 + \alpha'(h(s))h''(s), \alpha''(h(s))h'(s)^2 + \alpha'(h(s))h''(s) \rangle_L \\ &= \langle \alpha''(h(s))h'(s)^2, \alpha''(h(s))h'(s)^2 \rangle_L + 2\langle \alpha''(h(s))h'(s)^2, \alpha'(h(s))h''(s) \rangle_L + \\ &\quad + \langle \alpha'(h(s))h''(s), \alpha'(h(s))h''(s) \rangle_L. \end{aligned}$$

Pela ortogonalidade entre as derivadas e o caráter causal de α , segue que

$$1 = h'(s)^4 \langle \alpha''(h(s)), \alpha''(h(s)) \rangle_L \Rightarrow h'(s) = \|\alpha''(h(s))\|_L^{-\frac{1}{2}}.$$

Assim, obtivemos uma equação diferencial de primeira ordem para h . Fixado $s_0 \in \mathbb{R}$ e $t_0 \in I$, pelo Teorema de Existência e Unicidade de soluções de equações diferenciais,

garantimos que existe um intervalo aberto $J \subseteq \mathbb{R}$ centrado em s_0 e uma única função $h : J \rightarrow I$ que satisfaz

$$h(s_0) = t_0 \text{ e } h'(s) = \|\alpha''(h(s))\|_L^{-\frac{1}{2}}.$$

Como $h'(s) > 0$, para todo $s \in J$, então h é crescente e, assim, injetora. Mais ainda, podemos supor sem perda de generalidade que $h^{-1}(I) = J$. Logo h é bijetora. Por fim, como $h'(s) \neq 0$, pelo Teorema da Aplicação Inversa, h é um difeomorfismo.

Portanto, existe um intervalo aberto, J , e um difeomorfismo, $h : J \rightarrow I$, que garante

$$\beta(s) = \alpha(h(s)) \text{ e } \|\beta''(t)\|_L = 1,$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Exemplo 4.38. Seja a hélice euclidiana em $\mathbb{L}^3$ parametrizada por $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, at)$, onde $a > 0$ e $t \in \mathbb{R}$, vamos encontrar uma reparametrização por arco-fóton de α .

Estudando as derivadas de α , temos

- (i) $\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, a)$;
- (ii) $\alpha''(t) = (-a \cos t, -a \sin t, 0)$, logo $\alpha''(t) \neq \vec{0}$, para todo $t \in \mathbb{R}$;
- (iii) $\langle \alpha''(t), \alpha''(t) \rangle_L = a^2 \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Assim, pelo teorema anterior, temos

$$h'(s) = \|\alpha''(t)\|_L^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \Rightarrow h(s) = \frac{s}{\sqrt{a}}.$$

Portanto, a reparametrização por arco-fóton de α é

$$\beta(s) = \alpha(h(s)) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a}}, \sqrt{a}s \right).$$

Exemplo 4.39. Seja a curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3$, dada por

$$\alpha(t) = (6t - t^3, 3\sqrt{2}t^2, 6t + t^3),$$

ilustrada na Figura 30. Estudando as derivadas de α , temos

- $\alpha'(t) = (6 - 3t^2, 6\sqrt{2}t, 6 + 3t^2)$;
- $\|\alpha'(t)\|_L = (36 - 36t^2 + 9t^4 + 72t^2 - 36 - 36t^2 - 9t^4)^{\frac{1}{2}} = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$;
- $\alpha''(t) = (-6t, 6\sqrt{2}, 6t) \neq \vec{0}$, para todo $t \in \mathbb{R}$;
- $\|\alpha''(t)\|_L = \sqrt{|36t^2 + 36 \cdot 2 - 36t^2|} = \sqrt{72}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

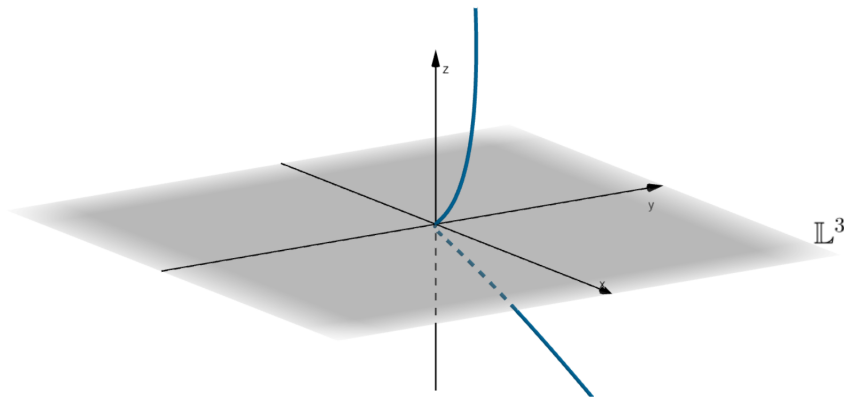
Assim, α é de tipo luz e satisfaz as condições do Teorema 4.37. Então

$$h'(s) = \|\alpha''(h(s))\|_L^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{72}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{72}} \Rightarrow h(s) = \frac{s}{\sqrt[4]{72}}.$$

Logo, a reparametrização por arco-fóton de α é

$$\beta(s) = \alpha(h(s)) = \left(\frac{6s}{\sqrt[4]{72}} - \frac{s^3}{\sqrt[4]{72^3}}, \frac{3\sqrt{2}s^2}{\sqrt{72}}, \frac{6s}{\sqrt[4]{72}} + \frac{s^3}{\sqrt[4]{72^3}} \right).$$

Figura 30: Traço da curva α em $\mathbb{L}^3$.



Fonte: Elaboração própria (2026).

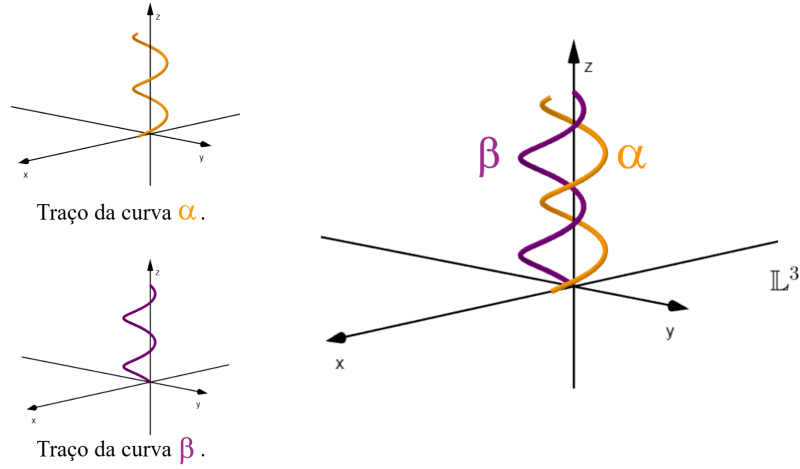
Definição 4.40. Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$ e $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$ duas curvas parametrizadas. Dizemos que α e β são **congruentes** se existe uma isometria $F \in E_\nu(n, \mathbb{R})$ tal que $\beta = F \circ \alpha$.

Observação 4.41. O conceito de congruência apresentado é extremamente importante na Geometria, pois nos permite estudar objetos geométricos de uma curva que independem de sua posição no espaço.

Exemplo 4.42. Sejam as hélices euclidianas em $\mathbb{L}^3$ $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ e $\beta(t) = (2 - \cos t, -\sin t, t)$, onde $t \in \mathbb{R}$, ilustradas na Figura 31.

As curvas α e β são congruentes, pois, tomando $F = T_{(2,0,0)} \circ R_\pi$, onde R_π é a rotação em relação ao eixo z de um ângulo π e $T_{(2,0,0)}$ a translação do vetor $(2, 0, 0)$, temos

$$F(\alpha(t)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \cos t \\ -\sin t \\ t \end{pmatrix} = \beta(t).$$

Figura 31: Hélices euclidianas congruentes em $\mathbb{L}^3$.

Fonte: Elaboração própria (2026).

Proposição 4.43. Sejam $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$ duas curvas parametrizadas congruentes. Então $\langle \beta'(t), \beta'(t) \rangle_\nu = \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_\nu$ para todo $t \in I$.

Demonstração: Como α e β são congruentes, existe $F \in E_\nu(n, \mathbb{R})$ tal que $\beta = F \circ \alpha$. Além disso, o Teorema 3.76 garante que existem $\Lambda \in O_\nu(\mathbb{R})$ e $a \in \mathbb{R}_\nu^n$ tais que $F = T_a \circ \Lambda$, ou seja, $F(\alpha(t)) = T_a(\Lambda(\alpha(t))) = \Lambda(\alpha(t)) + a$.

Então,

$$\begin{aligned} \beta'(t) &= \frac{d}{dt}(F(\alpha(t))) = \frac{d}{dt}(\Lambda(\alpha(t)) + a) = d\Lambda_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = \Lambda\alpha'(t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \langle \beta'(t), \beta'(t) \rangle_\nu = \langle \Lambda\alpha'(t), \Lambda\alpha'(t) \rangle_\nu = \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_\nu. \end{aligned}$$

□

Corolário 4.44. Sejam $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$ duas curvas parametrizadas congruentes. Então $L(\beta) = L(\alpha)$ e $E(\beta) = E(\alpha)$.

Demonstração: Utilizando a proposição anterior, temos que

$$L(\beta) = \int_a^b \sqrt{\langle \beta'(t), \beta'(t) \rangle_\nu} dt = \int_a^b \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_\nu} dt = L(\alpha)$$

e

$$E(\beta) = \int_a^b \frac{1}{2} \langle \beta'(t), \beta'(t) \rangle_\nu dt = \int_a^b \frac{1}{2} \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_\nu dt = E(\alpha).$$

□

4.2 | Curvas no Plano

Nesta seção, faremos um estudo aprofundado de curvas contidas no plano $\mathbb{R}_\nu^2$, ou seja, em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{L}^2$. Para tanto, construiremos um referencial pseudo-ortonormal, ou simplesmente ortonormal, em cada ponto da curva e, por fim, estudaremos o resultado mais importante relacionado às curvas planas: o Teorema Fundamental das Curvas Planas.

Teorema 4.45. Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Então, o gráfico da função suave f , $\text{Graf}(f)$, é o traço de uma curva parametrizável regular em $\mathbb{R}_\nu^2$.

Demonstração: Tome $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^2$, dada por $\alpha(t) = (t, f(t))$. O traço de α é

$$\alpha(I) = \{(t, f(t); t \in T)\} = \text{Graf}(f).$$

Como f é suave, então α é uma curva suave. Além disso, $\alpha'(t) = (1, f'(t)) \neq \vec{0}$, logo α é regular. $\square$

Exemplo 4.46. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

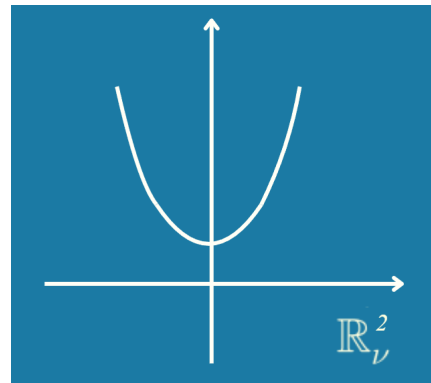
$$f(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right), a \in \mathbb{R}_+.$$

A curva em $\mathbb{R}_\nu^2$ representada pelo gráfico da função f é parametrizada por

$$\alpha(t) = \left(t, a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)\right), t \in \mathbb{R},$$

chamada **catenária**, cujo traço é ilustrado na Figura 32

Figura 32: Catenária em $\mathbb{R}_\nu^2$.



Fonte: Elaboração própria (2026).

Teorema 4.47. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^2$ uma curva parametrizada regular. Para cada $t_0 \in I$ existe um intervalo aberto J , $u_0 \in J$ e uma reparametrização $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}_\nu^2$ de α tal que $\alpha(t_0) = \beta(u_0)$, da forma $\beta(u) = (u, f(u))$ ou $\beta(u) = (f(u), u)$ para alguma função suave f . Ainda em $\mathbb{L}^2$, garantimos que a primeira possibilidade é sempre possível se α é de tipo espaço, e a segunda se α é de tipo tempo.

Demonstração: Seja $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Como α é regular, então $x'(t)$ e $y'(t)$ não são simultaneamente nulos. Suponha, sem perda de generalidade, que $x'(t_0) \neq 0$. Pelo Teorema da Função Inversa, existe um intervalo aberto J tal que $x^{-1} : J \rightarrow x^{-1}(J) \subseteq I$ é bijetora e suave. Tomando $\beta = \alpha \circ x^{-1}$, temos

$$\beta(u) = (x(x^{-1}(u)), y(x^{-1}(u))) = (u, y(x^{-1}(u))).$$

Assim, $f = y \circ x^{-1}$ é suave, pois é a composição de funções suaves e $u_0 = x(t_0)$.

Para a segunda parte do teorema, em $\mathbb{L}^2$, nos atentemos às seguintes situações: se α é de tipo espaço, garantimos que $x'(t_0) \neq 0$, pois $x'^2(t_0) - y'^2(t_0) > 0$. Então, pela demonstração apresentada, existe $J \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\beta(u) = (u, f(u))$, com $u \in J$.

Por outro lado, se α é de tipo tempo, garantimos que $y'(t_0) \neq 0$, pois $x'^2(t_0) - y'^2(t_0) < 0$. Então existe $J \subseteq \mathbb{R}$ tal que $y^{-1} : J \rightarrow y^{-1}(J) \subseteq I$ é bijetora e suave. Tomando $\beta = \alpha \circ y^{-1}$, temos

$$\beta(u) = (x(y^{-1}(u)), y(y^{-1}(u))) = (x(y^{-1}(u)), u).$$

Assim, asseguramos a existência de uma reparametrização de α da forma $\beta(u) = (f(u), u)$, com $f = x \circ y^{-1}$ suave. $\square$

Observação 4.48. O Teorema 4.47 nos garante que, localmente, toda a curva pode ser vista como gráfico de uma função real suave.

Proposição 4.49. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^2$ uma curva de tipo luz. Então o traço de α está contido em uma reta paralela a um dos raios de luz de $\mathbb{L}^2$.

Demonstração: Tomando $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ de tipo luz, temos

$$x'^2(t) - y'^2(t) = 0 \Leftrightarrow |x'(t)| = |y'(t)|.$$

Suponha que $x'(t) = y'(t)$, então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x(t) = y(t) + c$. Daí

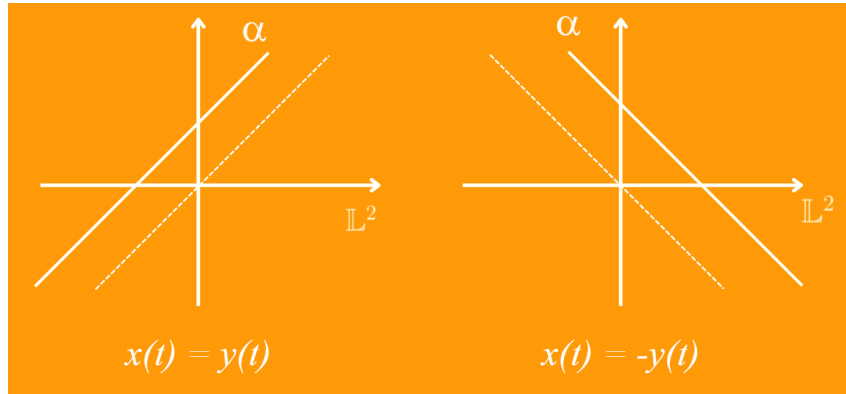
$$\alpha(t) = (y(t) + c, y(t)) = (c, 0) + y'(t)(1, 1).$$

Portanto, α é uma reta paralela ao raio de luz gerado por $(1, 1)$.

Por outro lado, se $x'(t) = -y'(t)$, então existe $d \in \mathbb{R}$, tal que $x(t) = -y(t) + d$ e

$$\alpha(t) = (d, 0) + y(t)(-1, 1).$$

Assim, α é paralela ao outro raio de luz de $\mathbb{L}^2$, gerado por $(-1, 1)$. A Figura 33 ilustra os dois casos comentados. $\square$

Figura 33: Curvas de tipo luz em $\mathbb{L}^2$.

Fonte: Elaboração própria (2026).

Definição 4.50. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_v^2$ uma curva com velocidade unitária. O **Referencial de Frenet-Serret**, ou **Diedro de Frenet-Serret**, de α em $s \in I$ é

$$\mathcal{F} = \{t_\alpha(s), n_\alpha(s)\},$$

onde $t_\alpha(s) = \alpha'(s)$ é o vetor tangente à α em s e $n_\alpha(s)$ é o vetor normal à α em s , caracterizado por ser o único vetor que torna $\mathcal{F}$ uma base pseudo-ortonormal positiva. É usual denominarmos simplesmente **Referencial de Frenet** ou **Diedro de Frenet**.

Se $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ o vetor $n_\alpha(s)$ é obtido da seguinte forma:

- (i) Em $\mathbb{R}^2$, $n_\alpha(s)$ é a rotação do ângulo $\frac{\pi}{2}$ no sentido anti-horário do vetor $t_\alpha(s)$, ou seja,

$$n_\alpha(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t'(s) = (-y'(s), x'(s)),$$

ilustrado na Figura 34 (a).

- (ii) Em $\mathbb{L}^2$, $n_\alpha(s)$ é a reflexão de $t_\alpha(s)$ em relação a um dos raios de luz dependendo do tipo causal de α , para que a base seja positiva. Se α é de tipo espaço, faz-se a reflexão no raio de luz principal ($y = x$) e $n_\alpha(s) = (y'(s), x'(s))$. Enquanto que, se α é de tipo tempo, faz-se a reflexão no raio luz secundário ($y = -x$) e $n_\alpha(s) = (-y'(s), -x'(s))$.

De fato, se $t(s)$ é de tipo espaço, $x'(s)^2 > y'(s)^2$ e

$$\det(t(s), n(s)) = \det \begin{pmatrix} x'(s) & y'(s) \\ y'(s) & x'(s) \end{pmatrix} = x'(s)^2 - y'(s)^2 > 0,$$

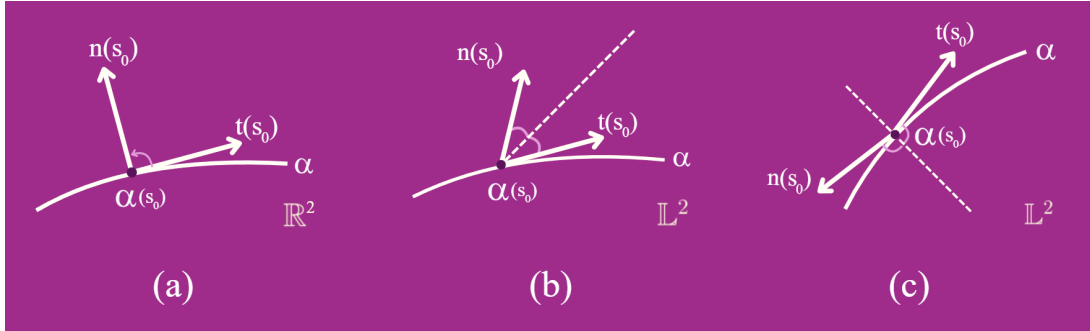
ilustrado na Figura 34 (b).

Enquanto que, se $t(s)$ é de tipo tempo, $x'(s)^2 < y'(s)^2$ e

$$\det(t(s), n(s)) = \det \begin{pmatrix} x'(s) & -y'(s) \\ y'(s) & -x'(s) \end{pmatrix} = -x'(s)^2 + y'(s)^2 > 0,$$

ilustrado na Figura 34 (c). Portanto, em ambos os casos, a base é positiva.

Figura 34: Representação do Referencial de Frenet para curvas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{L}^2$ relacionados aos diferentes tipos causais do vetor tangente.



Fonte: Elaboração própria (2026).

Observação 4.51. Podemos deduzir uma fórmula geral para o vetor normal da seguinte forma: Vamos encontrar $n(s) = (a(s), b(s))$ que satisfaça

$$\begin{cases} \langle t(s), n(s) \rangle_\nu = 0 \\ \det(t(s), n(s)) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(s)a(s) + (-1)^\nu y'(s)b(s) = 0 \\ x'(s)b(s) - y'(s)a(s) = 1 \end{cases}.$$

Como $\epsilon_\alpha = x'(s)^2 + (-1)^\nu y'(s)^2 = \pm 1$, então $a(s) = -\epsilon_\alpha (-1)^\nu y'(s)$ e $b(s) = \epsilon_\alpha x'(s)$, isto é,

$$n(s) = \epsilon_\alpha ((-1)^{\nu+1} y'(s), x'(s)).$$

Mais ainda, analisando o tipo causal de $n(s)$, temos

$$\langle n(s), n(s) \rangle_L = \epsilon_\alpha^2 (y'(s)^2 + (-1)^\nu x'(s)^2) = (-1)^\nu \epsilon_\alpha.$$

Portanto, em $\mathbb{L}^2$, o tipo causal de $n(s)$ é diferente do tipo causal de $t(s)$.

Nesse contexto, como $\|t(s)\|_\nu$ é constante, pelo Corolário 4.32 garantimos que $t(s)$ é ortogonal a $t'(s)$. Por definição, $n(s)$ também é ortogonal a $t(s)$; logo, $t'(s)$ e $n(s)$ são paralelos. Essa conclusão motiva a seguinte definição:

Definição 4.52. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^2$ uma curva com velocidade unitária. A **curvatura orientada** de α é a função $\kappa_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ caracterizada pela relação

$$t'_\alpha(s) = \kappa_\alpha(s) n_\alpha(s).$$

O número κ_α é chamado **curvatura** de α em s .

Observação 4.53. Podemos reescrever a relação da definição anterior, ao aplicar $\langle \cdot, n_\alpha(s) \rangle_\nu$ na igualdade, para encontrar uma fórmula geral da curvatura de α , dada por

$$\begin{aligned} \langle t'_\alpha(s), n_\alpha(s) \rangle_\nu &= \langle \kappa_\alpha(s) n_\alpha(s), n_\alpha(s) \rangle_\nu \Leftrightarrow \langle t'_\alpha(s), n_\alpha(s) \rangle_\nu = \kappa_\alpha(s) (-1)^\nu \epsilon_\alpha \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \kappa_\alpha(s) = (-1)^\nu \epsilon_\alpha \langle t'_\alpha(s), n_\alpha(s) \rangle_\nu. \end{aligned}$$

Proposição 4.54. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^2$ uma curva com velocidade unitária. São chamadas de **Equações de Frenet-Serret**, ou simplesmente **Equações de Frenet**, as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} t'(s) = \kappa(s) n(s); \\ n'(s) = (-1)^{\nu+1} \kappa(s) t(s); \end{cases}$$

ou, em linguagem matricial,

$$\begin{pmatrix} t'(s) \\ n'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) \\ (-1)^\nu \kappa(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t(s) \\ n(s) \end{pmatrix}.$$

Demonstração: A primeira igualdade é imediata da definição da função curvatura. Como $\|n(s)\|_\nu$ é constante, pelo Corolário 4.32 garantimos que $n(s)$ é pseudo-ortogonal a $n'(s)$ e conseqüentemente, $n'(s)$ é paralelo a $t(s)$. Tomando a projeção ortogonal de $n'(s)$ em $t(s)$, pela Definição 3.4, temos

$$n'(s) = \frac{\langle n'(s), t(s) \rangle_\nu}{\langle t(s), t(s) \rangle_\nu} t(s) = \epsilon_\alpha \langle n'(s), t(s) \rangle_\nu t(s). \quad (7)$$

Pelo Corolário 4.31, $\langle n'(s), t(s) \rangle_\nu = -\langle n(s), t'(s) \rangle_\nu$. Aplicando essa relação em $\kappa(s)$:

$$\kappa(s) = (-1)^\nu \epsilon_\alpha \langle t'_\alpha(s), n_\alpha(s) \rangle_\nu = (-1)^{\nu+1} \epsilon_\alpha \langle t_\alpha(s), n'_\alpha(s) \rangle_\nu.$$

Implementando na Equação (7):

$$n'(s) = (-1)^{\nu+1} \kappa(s) t(s).$$

□

Exemplo 4.55. Sejam $p, v = (a, b) \in \mathbb{R}_\nu^2$, onde $\|v\|_\nu = 1$, e a curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\nu^2$ dada por $\alpha(s) = p + sv$, isto é, uma reta.

Note que $\alpha'(s) = v$, portanto α tem velocidade unitária. Assim,

$$(i) \quad t(s) = v = (a, b) \text{ e } t'(s) = \vec{0};$$

$$(ii) \quad n(s) = \epsilon_\alpha((-1)^{\nu+1}b, a);$$

$$(iii) \quad \kappa(s) = (-1)^{\nu+1} \epsilon_\alpha \langle \vec{0}, n(s) \rangle_\nu = 0, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Portanto, as Equações de Frenet de α :

$$\begin{cases} t'(s) = 0n(s) = \vec{0}; \\ n'(s) = (-1)^{\nu+1}0t(s) = \vec{0}; \end{cases}$$

Exemplo 4.56. Sejam $p = (x_p, y_p) \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$. O conjunto

$$\mathbb{S}^1(p, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 = r^2\}$$

forma a circunferência euclidiana centrada em p de raio r , isto é, os pontos que distam r de p em $\mathbb{R}^2$. Tomando a parametrização de $\mathbb{S}^1(p, r)$ como:

$$\alpha(s) = \left(x_p + r \cos\left(\frac{s}{r}\right), y_p + r \sin\left(\frac{s}{r}\right) \right), t \in [0, 2\pi].$$

Note que $\alpha'(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right) \right)$. Portanto α está parametrizada pelo comprimento de arco. Assim,

$$(i) \quad t(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right) \right) \text{ e } t'(s) = \left(-\frac{1}{r} \cos\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r} \sin\left(\frac{s}{r}\right) \right);$$

$$(ii) \quad n(s) = \left((-1)^1 \cos\left(\frac{s}{r}\right), -\sin\left(\frac{s}{r}\right) \right) = \left(-\cos\left(\frac{s}{r}\right), -\sin\left(\frac{s}{r}\right) \right);$$

$$(iii) \quad \kappa(s) = (-1)^0 \left\langle \left(-\frac{1}{r} \cos\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r} \sin\left(\frac{s}{r}\right) \right), \left((-1)^1 \cos\left(\frac{s}{r}\right), -\sin\left(\frac{s}{r}\right) \right) \right\rangle_E = \frac{1}{r}.$$

Dessa forma, as Equações de Frenet de α :

$$\begin{cases} t'(s) = \frac{1}{r} \left(-\cos\left(\frac{s}{r}\right), -\sin\left(\frac{s}{r}\right) \right); \\ n'(s) = -\frac{1}{r} \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right) \right). \end{cases}$$

Já vimos na Seção 2.3 que os objetos que “distam” r de um ponto p em $\mathbb{L}^2$ não formam uma circunferência. Assim, vamos estudar o vetor tangente, normal e a função curvatura desses objetos.

Exemplo 4.57. Sejam $p = (x_p, y_p) \in \mathbb{L}^2$ e $r > 0$. Definimos as **linhas hiperbólicas** como

$$\mathbb{H}_+^1(p, r) = \{(x, y) \in \mathbb{L}^2; (x - x_p)^2 - (y - y_p)^2 = -r^2 \text{ e } y > y_p\} \text{ e}$$

$$\mathbb{H}_-^1(p, r) = \{(x, y) \in \mathbb{L}^2; (x - x_p)^2 - (y - y_p)^2 = -r^2 \text{ e } y < y_p\},$$

isto é, o conjunto dos vetores $v = (x, y) \in \mathbb{L}^2$ tais que $\langle v - p, v - p \rangle_L = -r^2$. As linhas hiperbólicas estão ilustradas na Figura 35.

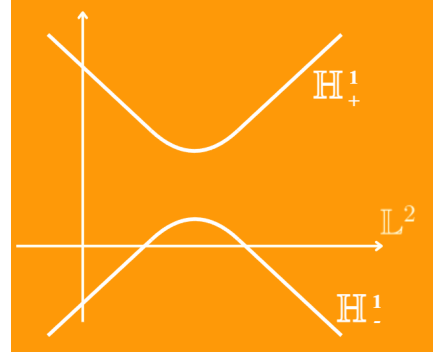
Tome a parametrização de $\mathbb{H}_+^1$ como

$$\alpha(s) = \left(x_p + r \sinh \left(\frac{s}{r} \right), y_p + r \cosh \left(\frac{s}{r} \right) \right),$$

$t \in \mathbb{R}$.

Como $\alpha'(s) = \left(\cosh \left(\frac{s}{r} \right), \sinh \left(\frac{s}{r} \right) \right)$ e

Figura 35: Linhas hiperbólicas em $\mathbb{L}^2$.



Fonte: Elaboração própria (2026).

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = \cosh^2 \left(\frac{s}{r} \right) - \sinh^2 \left(\frac{s}{r} \right) = 1,$$

então α está parametrizada pelo comprimento de arco e é de tipo espaço, logo $\epsilon_\alpha = 1$. Podemos definir

- (i) $t(s) = \left(\cosh \left(\frac{s}{r} \right), \sinh \left(\frac{s}{r} \right) \right)$ e $t'(s) = \left(\frac{1}{r} \sinh \left(\frac{s}{r} \right), \frac{1}{r} \cosh \left(\frac{s}{r} \right) \right)$;
- (ii) $n(s) = 1 \left((-1)^2 \sinh \left(\frac{s}{r} \right), \cosh \left(\frac{s}{r} \right) \right) = \left(\sinh \left(\frac{s}{r} \right), \cosh \left(\frac{s}{r} \right) \right)$;
- (iii) $\kappa(s) = (-1)^1 \cdot 1 \left\langle \left(\frac{1}{r} \sinh \left(\frac{s}{r} \right), \frac{1}{r} \cosh \left(\frac{s}{r} \right) \right), \left(\sinh \left(\frac{s}{r} \right), \cosh \left(\frac{s}{r} \right) \right) \right\rangle_L = \frac{1}{r}$.

Assim, as Equações de Frenet de $\mathbb{H}_+^1$:

$$\begin{cases} t'(s) = \frac{1}{r} \left(\sinh \left(\frac{s}{r} \right), \cosh \left(\frac{s}{r} \right) \right); \\ n'(s) = \frac{1}{r} \left(\cosh \left(\frac{s}{r} \right), \sinh \left(\frac{s}{r} \right) \right). \end{cases}$$

Por outro lado, uma parametrização de $\mathbb{H}_-^1$ é

$$\alpha(s) = \left(x_p - r \sinh \left(\frac{s}{r} \right), y_p - r \cosh \left(\frac{s}{r} \right) \right), t \in \mathbb{R}.$$

De forma similar à outra linha hiperbólica, $\alpha'(s) = \left(-\cosh \left(\frac{s}{r} \right), -\sinh \left(\frac{s}{r} \right) \right)$. Logo, α está parametrizada pelo comprimento de arco e também é de tipo espaço. Assim,

- (i) $t(s) = \left(-\cosh \left(\frac{s}{r} \right), -\sinh \left(\frac{s}{r} \right) \right)$ e $t'(s) = \left(-\frac{1}{r} \sinh \left(\frac{s}{r} \right), -\frac{1}{r} \cosh \left(\frac{s}{r} \right) \right)$;
- (ii) $n(s) = \left(-\sinh \left(\frac{s}{r} \right), -\cosh \left(\frac{s}{r} \right) \right)$;
- (iii) $\kappa(s) = \left\langle \left(\frac{1}{r} \sinh \left(\frac{s}{r} \right), \frac{1}{r} \cosh \left(\frac{s}{r} \right) \right), \left(-\sinh \left(\frac{s}{r} \right), -\cosh \left(\frac{s}{r} \right) \right) \right\rangle_L = \frac{1}{r}$.

Dessa forma, as Equações de Frenet de $\mathbb{H}_-^1$:

$$\begin{cases} t'(s) = \frac{1}{r} \left(-\sinh\left(\frac{s}{r}\right), -\cosh\left(\frac{s}{r}\right) \right); \\ n'(s) = \frac{1}{r} \left(-\cosh\left(\frac{s}{r}\right), -\sinh\left(\frac{s}{r}\right) \right). \end{cases}$$

Exemplo 4.58. Sejam $p = (x_p, y_p) \in \mathbb{L}^2$ e $r > 0$. Definimos as **linhas de Sitter** como

$$\mathbb{S}_1^1(p, r) = \{(x, y) \in \mathbb{L}^2; (x - x_p)^2 - (y - y_p)^2 = r^2\}.$$

isto é, os vetores $v = (x, y) \in \mathbb{L}^2$ tais que $\langle v - p, v - p \rangle_L = r^2$. As linhas de Sitter estão ilustradas na Figura 36.

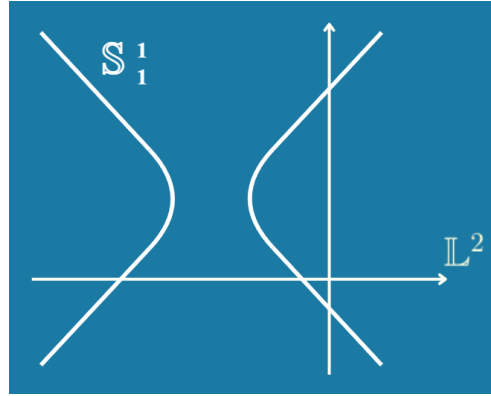
Tome a parametrização do ramo direito de $\mathbb{S}_1^1$ por

$$\alpha(s) = \left(x_p + r \cosh\left(\frac{s}{r}\right), y_p + r \sinh\left(\frac{s}{r}\right) \right),$$

$t \in \mathbb{R}$.

Como $\alpha'(s) = \left(\sinh\left(\frac{s}{r}\right), \cosh\left(\frac{s}{r}\right) \right)$ e

Figura 36: Linhas de Sitter em $\mathbb{L}^2$.



Fonte: Elaboração própria (2026).

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = \sinh^2\left(\frac{s}{r}\right) - \cosh^2\left(\frac{s}{r}\right) = -1,$$

α está parametrizada pelo comprimento de arco e é do tipo tempo, logo $\epsilon_\alpha = -1$. Definimos

- (i) $t(s) = \left(\sinh\left(\frac{s}{r}\right), \cosh\left(\frac{s}{r}\right) \right)$ e $t'(s) = \left(\frac{1}{r} \cosh\left(\frac{s}{r}\right), \frac{1}{r} \sinh\left(\frac{s}{r}\right) \right)$;
- (ii) $n(s) = -1 \left((-1)^2 \cosh\left(\frac{s}{r}\right), \sinh\left(\frac{s}{r}\right) \right) = \left(-\cosh\left(\frac{s}{r}\right), -\sinh\left(\frac{s}{r}\right) \right)$;
- (iii) $\kappa(s) = -(-1) \left\langle \left(\frac{1}{r} \cosh\left(\frac{s}{r}\right), \frac{1}{r} \sinh\left(\frac{s}{r}\right) \right), \left(-\cosh\left(\frac{s}{r}\right), -\sinh\left(\frac{s}{r}\right) \right) \right\rangle_L = -\frac{1}{r}$.

Assim, as Equações de Frenet do ramo direito de $\mathbb{S}_1^1$:

$$\begin{cases} t'(s) = -\frac{1}{r} \left(-\cosh\left(\frac{s}{r}\right), -\sinh\left(\frac{s}{r}\right) \right); \\ n'(s) = -\frac{1}{r} \left(\sinh\left(\frac{s}{r}\right), \cosh\left(\frac{s}{r}\right) \right). \end{cases}$$

No entanto, uma parametrização do ramo esquerdo de $\mathbb{S}_1^1$ é dada por

$$\alpha(s) = \left(x_p - r \cosh\left(\frac{s}{r}\right), y_p - r \sinh\left(\frac{s}{r}\right) \right), t \in \mathbb{R}.$$

Como $\alpha'(s) = \left(-\sinh\left(\frac{s}{r}\right), -\cosh\left(\frac{s}{r}\right)\right)$ e

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = \sinh^2\left(\frac{s}{r}\right) - \cosh^2\left(\frac{s}{r}\right) = -1,$$

α está parametrizada pelo comprimento de arco e é de tipo tempo, $\epsilon_\alpha = -1$. Definimos

- (i) $t(s) = \left(-\sinh\left(\frac{s}{r}\right), -\cosh\left(\frac{s}{r}\right)\right)$ e $t'(s) = \left(-\frac{1}{r}\cosh\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r}\sinh\left(\frac{s}{r}\right)\right)$;
- (ii) $n(s) = -1 \left(-(-1)^2 \cosh\left(\frac{s}{r}\right), -\sinh\left(\frac{s}{r}\right)\right) = \left(\cosh\left(\frac{s}{r}\right), \sinh\left(\frac{s}{r}\right)\right)$;
- (iii) $\kappa(s) = -(-1) \left\langle \left(-\frac{1}{r}\cosh\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r}\sinh\left(\frac{s}{r}\right)\right), \left(\cosh\left(\frac{s}{r}\right), \sinh\left(\frac{s}{r}\right)\right) \right\rangle_L = -\frac{1}{r}$.

Assim, as Equações de Frenet do ramo direito de $\mathbb{S}_1^1$:

$$\begin{cases} t'(s) = -\frac{1}{r} \left(\cosh\left(\frac{s}{r}\right), \sinh\left(\frac{s}{r}\right)\right); \\ n'(s) = -\frac{1}{r} \left(-\sinh\left(\frac{s}{r}\right), -\cosh\left(\frac{s}{r}\right)\right). \end{cases}$$

Pelo fato das linhas hiperbólicas $\mathbb{H}_\pm^1$ e das linhas de Sitter $\mathbb{S}_1^1$ em $\mathbb{L}^2$ compartilharem a mesma propriedade que os círculos euclidianos $\mathbb{S}^1$ em $\mathbb{R}^2$: os pontos dessas curvas apresentam distância constante até um ponto fixo, chamaremos $\mathbb{H}_\pm^1$ e $\mathbb{S}_1^1$ de **pseudo-círculos**.

Definição 4.59. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^2$ uma curva regular, que não é de tipo luz. Tome $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}_\nu^2$ uma reparametrização de α por comprimento de arco, ou seja, $\beta = \alpha \circ h$, onde h é a inversa da função comprimento de arco S de α para algum r_0 fixado. Assim, definimos:

- (i) O **vetor tangente unitário** à α em r como $t_\alpha(r) = t_\beta(S(r))$;
- (ii) O **vetor normal unitário** à α em r como $n_\alpha(r) = n_\beta(S(r))$;
- (iii) A **curvatura** de α em r como $\kappa_\alpha(r) = \kappa_\beta(S(r))$.

Exemplo 4.60. Seja a Catenária do Exemplo 4.46 em $\mathbb{R}^2$ e $a = 1$, parametrizada por $\alpha(r) = (r, \cosh r)$, $r \in \mathbb{R}$. Note que

$$\alpha'(r) = (1, \sinh r) \text{ e } \langle \alpha'(r), \alpha'(r) \rangle_E = 1 + \sinh^2 r.$$

Logo α é regular, mas que não tem velocidade unitária. Tome $h(s) = \sinh^{-1}s$ e

$$\beta(s) = \alpha(h(s)) = \alpha(\sinh^{-1}s) = (\sinh^{-1}s, \cosh(\sinh^{-1}s)).$$

Pela inversa $\sinh h = s$ e a Identidade Fundamental, temos:

$$\cosh^2 h - s^2 = 1 \Rightarrow \cosh h = \cosh(\sinh^{-1} s) = \sqrt{1 + s^2}.$$

Portanto, $\beta(s) = (\sinh^{-1} s, \sqrt{1 + s^2})$, $s \in \mathbb{R}$, é uma reparametrização de α . Além disso,

$$\beta'(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}, \frac{s}{\sqrt{s^2 + 1}} \right) \text{ e } \langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle_E = 1.$$

Assim, β é a reparametrizada pelo comprimento de arco de α e

$$(i) \ t_\beta(s) = \beta'(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}, \frac{s}{\sqrt{s^2 + 1}} \right) \text{ e } \beta''(s) = \left(\frac{-s}{(s^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{(s^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right);$$

$$(ii) \ n_\beta(s) = \left(\frac{-s}{\sqrt{s^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} \right);$$

$$(iii) \ \kappa_\beta(s) = \langle t'_\beta(s), n_\beta(s) \rangle_E = \frac{s^2}{(s^2 + 1)^2} + \frac{1}{(s^2 + 1)^2} = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Assim, tomando $h^{-1}(s) = S(r) = \sinh r$, podemos encontrar as informações de α :

$$(i) \ t_\alpha(r) = t_\beta(S(r)) = \left(\frac{1}{\sqrt{\sinh^2 r + 1}}, \frac{\sinh r}{\sqrt{\sinh^2 r + 1}} \right) = \left(\frac{1}{\cosh r}, \frac{\sinh r}{\cosh r} \right);$$

$$(ii) \ n_\alpha(r) = n_\beta(S(r)) = \left(\frac{-\sinh r}{\cosh r}, \frac{1}{\cosh r} \right);$$

$$(iii) \ \kappa_\alpha(r) = \kappa_\beta(S(r)) = \frac{1}{\cosh^2 r}.$$

O próximo resultado mostrará que a Definição 4.59 está boa, isto é, não depende da reparametrização β .

Proposição 4.61. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^2$ uma curva que não é de tipo luz, dada por $\alpha(r) = (x(r), y(r))$. Então

$$t_\alpha(r) = \frac{\alpha'(r)}{\|\alpha'(r)\|_\nu}, \quad n_\alpha(r) = \epsilon_\alpha \frac{(y'(r), x'(r))}{\|\alpha'(r)\|_\nu} \text{ e}$$

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|_\nu^3}.$$

Demonstração: Seja $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}_\nu^2$ uma reparametrização por comprimento de arco de α , ou seja, $\beta = \alpha \circ h$, onde $h = S^{-1} : J \rightarrow I$. Temos:

$$(i) \ \beta(s) = \alpha(h(s)) = \alpha(r);$$

$$(ii) \ \beta'(s) = \alpha'(h(s))h'(s);$$

$$(iii) \quad \beta''(s) = \alpha'(h(s))h''(s) + \alpha''(h(s))h'(s)^2;$$

$$(iv) \quad S(h(s)) = s \Rightarrow S'(h(s))h'(s) = 1 \Rightarrow h'(s) = \frac{1}{S'(h(s))} = \frac{1}{\|\alpha'(h(s))\|_\nu}.$$

Assim, utilizando os itens acima e a Definição 4.59, temos

$$t_\alpha(r) = t_\beta(S(r)) = \beta'(S(r)) \stackrel{(ii)}{=} \alpha'(h(S(r)))h'(S(r)) \stackrel{(iv)}{=} \frac{\alpha'(r)}{\|\alpha'(r)\|_\nu},$$

$$n_\alpha(r) = n_\beta(S(r)) = \epsilon_\alpha \frac{((-1)^{\nu+1}y'(h(S(r))), x'(h(S(r))))}{\|\alpha'(r)\|_\nu} = \epsilon_\alpha \frac{((-1)^{\nu+1}y'(r), x'(r))}{\|\alpha'(r)\|_\nu},$$

e, finalmente, temos

$$\begin{aligned} \kappa_\alpha(r) &= \kappa_\beta(S(r)) = (-1)^\nu \epsilon_\beta \langle \beta''(S(r)), n_\beta(S(r)) \rangle_\nu = \\ &= (-1)^\nu \epsilon_\beta \langle \alpha'(h(S(r)))h''(S(r)) + \alpha''(h(S(r)))h'(S(r))^2, n_\beta(S(r)) \rangle_\nu = \\ &= (-1)^\nu \epsilon_\alpha \langle t_\alpha(r) \|\alpha'(r)\|_\nu h''(S(r)) + \alpha''(r)h'(S(r))^2, n_\alpha(r) \rangle_\nu = \\ &= (-1)^\nu \epsilon_\alpha \left\langle \frac{\alpha''(r)}{\|\alpha'(h(S(r)))\|_\nu^2}, \epsilon_\alpha \frac{((-1)^{\nu+1}y'(r), x'(r))}{\|\alpha'(r)\|_\nu} \right\rangle_\nu = \\ &= (-1)^\nu \frac{(-1)^{\nu+1}x''(r)y'(r) + (-1)^\nu y''(r)x'(r)}{\|\alpha'(r)\|_\nu^3} = \\ &= \frac{x'(r)y''(r) - y'(r)x''(r)}{\|\alpha'(r)\|_\nu^3} = \frac{\det(\alpha'(r), \alpha''(r))}{\|\alpha'(r)\|_\nu^3}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 4.62. Considere a parábola $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^2$, parametrizada por $\alpha(r) = (r, ar^2)$, onde $a > 0$. Note que

$$\alpha'(r) = (1, 2ar) \text{ e } \langle \alpha'(r), \alpha'(r) \rangle_L = 1 - 4a^2r^2,$$

e assim α não tem velocidade unitária e nem tem tipo causal constante:

- (i) α é de tipo espaço se $1 - 4a^2r^2 > 0$, isto é, $|r| < \frac{1}{2a}$;
- (ii) α é de tipo tempo em $1 - 4a^2r^2 < 0$, isto é, $|r| > \frac{1}{2a}$;
- (iii) α é de tipo luz se $1 - 4a^2r^2 = 0$, ou seja, $|r| = \frac{1}{2a}$.

Pelo Teorema 4.61, definimos para $r \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}\}$

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad t_\alpha(r) &= \frac{(1, 2ar)}{\sqrt{|1 - 4a^2r^2|}}; \\
\text{(ii)} \quad n_\alpha(r) &= \epsilon_{\alpha(r)} \frac{(2ar, 1)}{\sqrt{|1 - 4a^2r^2|}}; \\
\text{(iii)} \quad \kappa_\alpha(r) &= \frac{\det((1, 2ar), (0, 2a))}{|1 - 4a^2r^2|^{\frac{3}{2}}} = \frac{2a}{|1 - 4a^2r^2|^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

Corolário 4.63. Sejam $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^2$ duas curvas regulares, congruentes e que não são do tipo luz. Então $|\kappa_\alpha(r)| = |\kappa_\beta(r)|$, para todo $r \in I$. Em particular, vale a igualdade sem os módulos se a parte linear da isometria que realiza a congruência preserva a orientação do plano.

Demonstração: Seja a isometria $F = T_a \circ \Lambda \in E_\nu(2, \mathbb{R})$, tal que $\beta = F \circ \alpha$, onde T_a é uma translação em relação ao vetor a e $\Lambda \in O_\nu(2, \mathbb{R})$, uma transformação de Lorentz. Pela Proposição 4.43, sabemos que $\beta'(r) = \Lambda\alpha'(r)$. Assim,

$$\det(\beta'(r), \beta''(r)) = \det(\Lambda\alpha'(r), \Lambda\alpha''(r)) = \det(\Lambda \cdot (\alpha'(r), \alpha''(r))) = \det \Lambda \cdot \det(\alpha'(r), \alpha''(r)).$$

Como $\det \Lambda \in \{-1, 1\}$, então

$$\kappa_\beta(r) = \frac{\det(\beta'(r), \beta''(r))}{\|\beta'(r)\|_\nu^3} = \pm \frac{\det(\alpha'(r), \alpha''(r))}{\|\alpha'(r)\|_\nu^3} = \pm \kappa_\alpha(r).$$

Portando, $|\kappa_\beta(r)| = |\kappa_\alpha(r)|$. Mais ainda, se $\Lambda \in O^{+\uparrow}$, isto é, preserva a orientação do plano, então $\det \Lambda = 1$ e $\kappa_\beta(r) = \kappa_\alpha(r)$. $\square$

Corolário 4.64. A função curvatura, a menos de um sinal, é invariante para reparametrização de curvas que não são de tipo luz. Em particular, a curvatura tem mesmo sinal se estão orientadas no mesmo sentido, e sinal oposto se estão orientadas em sentidos opostos.

Demonstração: Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^2$, $h : J \rightarrow I$ um difeomorfismo e $\beta = \alpha \circ h$ uma reparametrização de α por h .

Como $\beta'(r) = \alpha'(h(r))h'(r)$ e $\beta''(r) = \alpha''(h(r))h'(r)^2 + \alpha'(h(r))h''(r)$, então

$$\begin{aligned}
\kappa_\beta(r) &= \frac{\det(\beta'(r), \beta''(r))}{\|\beta'(r)\|_\nu^3} = \frac{\det(\alpha'(h(r))h'(r), \alpha''(h(r))h'(r)^2 + \alpha'(h(r))h''(r))}{\|\alpha'(h(r))h'(r)\|_\nu^3} = \\
&= \frac{h'(r)^3 \det(\alpha'(h(r)), \alpha''(h(r)))}{|h'(r)|^3 \|\alpha'(h(r))\|_\nu^3} = \pm \frac{\det(\alpha'(h(r)), \alpha''(h(r)))}{\|\alpha'(h(r))\|_\nu^3} = \pm \kappa_\alpha(h(r)),
\end{aligned}$$

dependendo do sinal de $h'(r)$.

Mais ainda, se α e β estão orientadas no mesmo sentido, então $\alpha'(h(r))$ e $\beta'(r)$ tem a mesma direção, consequentemente $h'(r) > 0$ e $\kappa_\beta(r) = \kappa_\alpha(h(r))$. Por outro lado, se estão em sentido opostos, $h'(r) < 0$ e $\kappa_\beta(r) = -\kappa_\alpha(h(r))$. $\square$

Observe que os dois últimos resultados mostram que uma reparametrização e um movimento rígido de uma curva preservam o valor da curvatura em módulo. Seguindo no estudo dessa função, vejamos a interpretação geométrica do sinal da curvatura.

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^2$ uma curva regular com velocidade unitária, com $\alpha(0) = \vec{0}$ e $\kappa(0) \neq 0$. Observe que $\alpha''(0)$ aponta na direção da concavidade da curva α em 0.

De fato, seja a reta tangente à α em $s = 0$:

$$r_0(s) = \alpha(0) + (s - 0)\alpha'(0) = st(0), s \in \mathbb{R}.$$

Tomando a Fórmula de Taylor de ordem 2 de α centrada em 0, temos

$$\alpha(s) = \underbrace{\alpha(0) + s\alpha'(0)}_{r_0(s)} + \frac{s^2}{2}\alpha''(0) + R(s), \text{ onde } \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R(s)}{s^2} = 0,$$

logo,

$$\alpha(s) - st(0) = \frac{s^2}{2}\alpha''(0) + R(s) \quad (8)$$

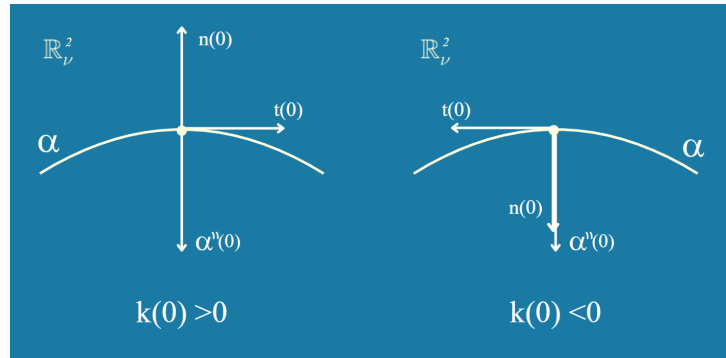
Assim, quando s é suficientemente pequeno, os vetores $\alpha(s) - st(0)$ e $\frac{s^2}{2}\alpha''(0)$ tem o mesmo sentido: o da concavidade da curva. Em outras palavras, $\alpha''(0)$ aponta na direção do semiplano determinado pela reta tangente que contém localmente o traço de α .

Nesse contexto, pela Fórmula de Frenet de α em $s = 0$,

$$\alpha''(0) = t'(0) = \kappa(0)n(0).$$

Dessa forma, $n(0)$ aponta na direção da concavidade da curva α se $\kappa(0) > 0$, e aponta na direção contrária se $\kappa(0) < 0$. A Figura 37 ilustra a interpretação descrita.

Figura 37: Interpretação geométrica da curvatura em $\mathbb{L}^2$.



Fonte: Elaboração própria (2026).

Teorema 4.65. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^2$ uma curva regular e que não é de tipo luz. Suponha que a curvatura de α é uma constante $\kappa \in \mathbb{R}$. Vale que:

- (i) se $\kappa = 0$, o traço de α está contido em uma reta;
- (ii) se $\kappa \neq 0$ em $\mathbb{R}^2$, existe p tal que o traço de α está contido em $\mathbb{S}^1\left(p, \frac{1}{|\kappa|}\right)$;
- (iii) se $\kappa \neq 0$ em $\mathbb{L}^2$, existe p tal que o traço de α está contido em
 - $\mathbb{H}_{\pm}^1\left(p, \frac{1}{|\kappa|}\right)$, se α é de tipo espaço;
 - $\mathbb{S}_1^1\left(p, \frac{1}{|\kappa|}\right)$, se α é de tipo tempo.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_{\nu}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco. Pela primeira equação do Diedro de Frenet $t'_{\alpha}(s) = \kappa n_{\alpha}(s)$, logo

- (i) Se $\kappa = 0$, então

$$t'_{\alpha}(s) = \alpha''(s) = 0 \Rightarrow \alpha'(s) = v \Rightarrow \alpha(s) = p + sv,$$

para todo $s \in I$. Portanto, o traço de α é uma reta;

- (ii) Se $\kappa \neq 0$, tome $p(s) = \alpha(s) + \frac{(-1)^{\nu}}{\kappa} n_{\alpha}(s)$. Derivando a expressão:

$$p'(s) = t_{\alpha}(s) + \frac{(-1)^{\nu}}{\kappa} n'_{\alpha}(s) \Rightarrow p'(s) = t_{\alpha}(s) + \frac{(-1)^{\nu}}{\kappa} (-1)^{\nu+1} \kappa t_{\alpha}(s) = 0 \Rightarrow p(s) = p,$$

para todo $s \in I$, onde $p \in \mathbb{R}_{\nu}^2$. Logo, a função que definimos é constante. Veremos mais sobre essa função no Capítulo 5.

Com a definição de p , temos que

$$\begin{aligned} \langle \alpha(s) - p, \alpha(s) - p \rangle_{\nu} &= \left\langle \alpha(s) - \alpha(s) - \frac{(-1)^{\nu}}{\kappa} n_{\alpha}(s), \alpha(s) - \alpha(s) - \frac{(-1)^{\nu}}{\kappa} n_{\alpha}(s) \right\rangle_{\nu} = \\ &= \frac{(-1)^{(\nu+1) \cdot 2}}{\kappa^2} \langle n_{\alpha}(s), n_{\alpha}(s) \rangle_{\nu} = \frac{1}{\kappa^2} (-1)^{\nu} \epsilon_{\alpha}. \end{aligned}$$

Assim, restam-nos três possibilidades:

- Se $\alpha \in \mathbb{R}^2$ ($\nu = 0$), então

$$\langle \alpha(s) - p, \alpha(s) - p \rangle_E = \frac{1}{\kappa^2} (-1)^0 \cdot 1 \Rightarrow \|\alpha(s) - p\|_E = \frac{1}{|\kappa|}.$$

Dessa forma, como a distância de $\alpha(s)$ a p é constante igual a $\frac{1}{|\kappa|}$, para todo

$s \in I$, então o traço de α é um círculo $\mathbb{S}^1\left(p, \frac{1}{|\kappa|}\right)$;

- Se $\alpha \in \mathbb{L}^2$ ($\nu = 1$) e é de tipo espaço, então

$$\langle \alpha(s) - p, \alpha(s) - p \rangle_L = \frac{1}{\kappa^2}(-1)^1 \cdot 1 = -\frac{1}{\kappa^2}.$$

Portanto, o produto lorentziano de $\alpha(s)$ a p é constante igual a $-\frac{1}{\kappa^2}$, para todo $s \in I$. Então o traço de α está contido em linhas hiperbólicas $\mathbb{H}_{\pm}^1\left(p, \frac{1}{|\kappa|}\right)$;

- Por fim, se $\alpha \in \mathbb{L}^2$ ($\nu = 1$) e é de tipo tempo, então

$$\langle \alpha(s) - p, \alpha(s) - p \rangle_L = \frac{1}{\kappa^2}(-1)^1 \cdot (-1) = \frac{1}{\kappa^2}.$$

Consequentemente, como o produto lorentziano de $\alpha(s)$ a p é constante igual a $\frac{1}{\kappa^2}$, para todo $s \in I$. Então o traço de α está contido em uma linha de Sitter $\mathbb{S}_1^1\left(p, \frac{1}{|\kappa|}\right)$.

□

Para concluir esta seção, veremos um dos teoremas mais importantes para curvas planas em $\mathbb{L}^2$: o **Teorema Fundamental das Curvas Planas**. Esse teorema assegura que, dada uma função diferenciável, existe uma curva de curvatura igual a tal função. Tal como sua versão em $\mathbb{R}^2$ (TENENBLAT, 2008), este teorema também garante que, dadas duas curvas com a mesma curvatura e mesmo tipo causal, elas são congruentes, ou seja, diferem apenas pela sua posição no plano.

Teorema 4.66. (Teorema Fundamental das Curvas Planas) Dados $p, v \in \mathbb{L}^2$, v unitário, uma função contínua $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $s_0 \in I$, existe uma única curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^2$, com velocidade unitária tal que $\kappa_{\alpha}(s) = \kappa(s)$, para todo $s \in I$, $\alpha(s_0) = p$ e $\alpha'(s_0) = v$. Além disso, se duas curvas com velocidade unitária têm a mesma curvatura e o mesmo tipo causal, então são congruentes.

Demonstração: Sejam $p = (x_p, y_p)$, $v = (a, b)$ e $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^2$ dada por $\alpha(s) = (x(s), y(s))$. Vamos fazer um estudo de cada tipo causal separadamente.

- (i) Para encontrar uma curva de tipo espaço, definimos $\theta(s) = \int_{s_0}^s \kappa(u) du$,

$$x(s) = x_p + \int_{s_0}^s \cosh(\theta(t) - \theta_0) dt \text{ e } y(s) = y_p + \int_{s_0}^s \sinh(\theta(t) - \theta_0) dt.$$

Dessa forma, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ é uma curva parametrizada e suave. Como

$$\alpha'(s) = (\cosh(\theta(s) - \theta_0), \sinh(\theta(s) - \theta_0)) \neq \vec{0},$$

para todo $s \in I$, pois $\cosh(\theta(s) - \theta_0) \neq 0$, para todo $\theta(s) - \theta_0 \in \mathbb{R}$, então α é regular. Além disso, $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = 1$, então α é de tipo espaço e está parametrizada pelo comprimento de arco.

Agora, vamos analisar a curvatura de α :

- $\alpha''(s) = (\theta'(s)\sinh(\theta(s) - \theta_0), \theta'(s)\cosh(\theta(s) - \theta_0)) = (\kappa(s)\sinh(\theta(s) - \theta_0), \kappa(s)\cosh(\theta(s) - \theta_0));$
- $n(s) = (\sinh(\theta(s) - \theta_0), \cosh(\theta(s) - \theta_0));$
- $\alpha''(s) = \kappa_\alpha(s)n(s) \Rightarrow \kappa_\alpha(s) = \kappa(s).$

Assim, garantimos que existe uma curva α com velocidade unitária de curvatura $\kappa(s)$.

Suponha, sem perda de generalidade, que $a > 0$ (o caso que $a < 0$ é análogo) e tome $v = (a, b) = (\cosh(\theta_0), \sinh(\theta_0))$. Note que $\alpha(s_0) = p$, $\alpha'(s_0) = v$ e pelo Diedro de Frenet:

$$t'(s) = \kappa(s)n(s) \Rightarrow (x''(s), y''(s)) = (\kappa(s)y'(s), \kappa(s)x'(s)) \Rightarrow \begin{cases} x''(s) = \kappa(s)y'(s); \\ y''(s) = \kappa(s)x'(s). \end{cases}$$

Pelo Teorema de Existência e Unicidade de soluções de sistemas de equações diferenciais, α é única.

(ii) Para uma curva de tipo tempo, definimos $\theta(s) = -\int_{s_0}^s \kappa(u)du$ e

$$x(s) = x_p + \int_{s_0}^s \sinh(\theta(t) - \theta_0)dt \text{ e } y(s) = y_p + \int_{s_0}^s \cosh(\theta(t) - \theta_0)dt.$$

Novamente, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ é uma curva parametrizada e suave. Como

$$\alpha'(s) = (\sinh(\theta(s) - \theta_0), \cosh(\theta(s) - \theta_0)) \neq \vec{0},$$

para todo $s \in I$, α é regular. Além disso, $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = -1$, então α é de tipo tempo e está parametrizada pelo comprimento de arco.

Analisando a curvatura de α :

- $\alpha''(s) = (\theta'(s)\cosh(\theta(s) - \theta_0), \theta'(s)\sinh(\theta(s) - \theta_0)) = (-\kappa(s)\cosh(\theta(s) - \theta_0), -\kappa(s)\sinh(\theta(s) - \theta_0));$
- $n(s) = (-\sinh(\theta(s) - \theta_0), -\cosh(\theta(s) - \theta_0));$
- $\alpha''(s) = \kappa_\alpha(s)n(s) \Rightarrow \kappa_\alpha(s) = \kappa(s).$

Assim, garantimos que existe uma curva α com velocidade unitária cuja curvatura é $\kappa(s)$.

Suponha que $b > 0$ (novamente $b < 0$ é análogo) e tome $v = (a, b) = (\sinh(\theta_0), \cosh(\theta_0))$. Note que $\alpha(s_0) = p$, $\alpha'(s_0) = v$ e pelo Diedro de Frenet

$$t'(s) = \kappa(s)n(s) \Rightarrow (x''(s), y''(s)) = (-\kappa(s)y'(s), -\kappa(s)x'(s)) \Rightarrow \begin{cases} x''(s) = -\kappa(s)y'(s); \\ y''(s) = -\kappa(s)x'(s). \end{cases}$$

Logo, pelo Teorema de Existência e Unicidade de soluções de sistemas de equações diferenciais, α é única.

Por fim, para a segunda parte do teorema, sejam $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{L}^2$ curvas regulares com velocidade unitária de mesmo tipo causal, $\alpha(s) = (x_\alpha(s), y_\alpha(s))$, $\beta(s) = (x_\beta(s), y_\beta(s))$ tais que $\kappa_\alpha(s) = \kappa_\beta(s)$, para todo $s \in I$. Defina a rotação $R_\theta : \mathbb{L}^2 \rightarrow \mathbb{L}^2$ de um ângulo $\theta = \angle(\alpha'(s_0), \beta'(s_0))$, isto é, R_θ faz com que o ângulo do vetor $\beta'(s_0)$ seja igual ao ângulo de $\alpha'(s_0)$, e $T : \mathbb{L}^2 \rightarrow \mathbb{L}^2$ a translação que leva $(R_\theta \circ \beta)(s_0)$ em $\alpha(s_0)$, da forma:

$$T(u) = u - R_\theta(\beta(s_0)) + \alpha(s_0), u \in \mathbb{L}^2.$$

Dessa forma, definimos a isometria $F = T \circ R_\theta \in E_1(2, \mathbb{R})$ e $\gamma = F \circ \beta : I \rightarrow \mathbb{L}^2$, então

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= F(\beta(s)) = \\ &= \left(\begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\beta(s) \\ y_\beta(s) \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} \cosh \theta x_\beta(s_0) + \sinh \theta y_\beta(s_0) \\ \sinh \theta x_\beta(s_0) + \cosh \theta y_\beta(s_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_\alpha(s_0) \\ y_\alpha(s_0) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \theta x_\beta(s) + \sinh \theta y_\beta(s) - \cosh \theta x_\beta(s_0) - \sinh \theta y_\beta(s_0) + x_\alpha(s_0) \\ \sinh \theta x_\beta(s) + \cosh \theta y_\beta(s) - \sinh \theta x_\beta(s_0) - \cosh \theta y_\beta(s_0) + y_\alpha(s_0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\gamma'(s) = (\cosh \theta x'_\beta(s) + \sinh \theta y'_\beta(s), \sinh \theta x'_\beta(s) + \cosh \theta y'_\beta(s)) \text{ e}$$

$$\gamma''(s) = (\cosh \theta x''_\beta(s) + \sinh \theta y''_\beta(s), \sinh \theta x''_\beta(s) + \cosh \theta y''_\beta(s)).$$

Assim, omitindo o parâmetro s , podemos calcular a curvatura de γ :

$$\begin{aligned} \kappa_\gamma &= (-1)^\nu \epsilon_\gamma \langle t'_\gamma, n_\gamma \rangle_L = \\ &= -\epsilon_\gamma \langle (\cosh \theta x''_\beta + \sinh \theta y''_\beta, \sinh \theta x''_\beta + \cosh \theta y''_\beta), \epsilon_\gamma (\sinh \theta x'_\beta + \cosh \theta y'_\beta, \cosh \theta x'_\beta + \sinh \theta y'_\beta) \rangle_L \\ &= -(x''_\beta y'_\beta \cosh^2 \theta + y''_\beta x'_\beta \sinh^2 \theta - (x''_\beta y'_\beta \sinh^2 \theta + y''_\beta x'_\beta \cosh^2 \theta)) = \\ &= -\epsilon_\beta \epsilon_\beta (x''_\beta y'_\beta - y''_\beta x'_\beta) = -\epsilon_\beta \langle t'_\beta, n_\beta \rangle_L = \kappa_\beta = \kappa_\alpha. \end{aligned}$$

Logo, $\kappa_\gamma(s) = \kappa_\alpha(s)$, para todo $s \in I$. Mais ainda, vale que

- (i) $\gamma(s_0) = (x_\alpha(s_0), y_\alpha(s_0)) = \alpha(s_0)$
- (ii) $\gamma'(s_0) = (\cosh \theta x'_\beta(s_0) + \sinh \theta y'_\beta(s_0), \sinh \theta x'_\beta(s_0) + \cosh \theta y'_\beta(s_0)) =$
 $= R_\theta(x'_\beta(s_0), y'_\beta(s_0)) = (x'_\alpha(s_0), y'_\alpha(s_0)) = \alpha'(s_0).$

Portanto, pela unicidade garantida no início da prova, $\gamma(s) = \alpha(s)$, logo α e β são congruentes. $\square$

4.3 | Curvas no Espaço

Nesta seção, vamos analisar resultados de curvas espaciais em $\mathbb{R}_\nu^3$, onde $\nu = 0, 1$. Analogamente ao que fizemos na seção de curvas planas, construiremos um referencial ortonormal e estudaremos o resultado mais importante de curvas no espaço, o Teorema Fundamental das Curvas Admissíveis.

Definição 4.67. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^3$ uma curva parametrizada. Diremos que α é **admissível** se:

- (i) α é **bi-regular**, ou seja, $\{\alpha'(t), \alpha''(t)\}$ é linearmente independente para todo $t \in I$;
- (ii) $\alpha'(t)$ e $[\alpha'(t), \alpha''(t)]$ não são de tipo luz, para qualquer que seja $t \in I$.

Observação 4.68. Ser admissível é propriedade intrínseca da curva, ou seja, independe da parametrização.

De fato, sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^3$ uma curva admissível e $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}_\nu^3$ uma reparametrização de α pelo difeomorfismo $h : J \rightarrow I$. Como

$$\beta'(s) = h'(s)\alpha'(h(s)) \text{ e } \beta''(s) = h'(s)^2\alpha''(h(s)) + h''(s)\alpha'(h(s)),$$

temos que:

- (i) Analisando a seguinte combinação linear, onde $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} a\beta'(s) + b\beta''(s) = \vec{0} &\Rightarrow ah'(s)\alpha'(h(s)) + b(h'(s)^2\alpha''(h(s)) + h''(s)\alpha'(h(s))) = \vec{0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (ah'(s) + bh''(s))\alpha'(h(s)) + bh'(s)^2\alpha''(h(s)) = \vec{0}. \end{aligned}$$

Por hipótese $\{\alpha'(t), \alpha''(t)\}$ é linearmente independente, então $bh'(s)^2 = 0$. Como $h'(s) \neq 0$, pois h é difeomorfismo, $b = 0$. Assim,

$$ah'(s) + \underbrace{bh''(s)}_{=0} = 0 \Rightarrow a = 0.$$

Dessa forma, o conjunto $\{\beta'(s), \beta''(s)\}$ é linearmente independente;

- (ii) Pela Observação 4.30 (iv), $\beta(s)$ tem o mesmo tipo causal de $\alpha(t)$ para todo $s \in J$, onde $h(s) = t \in I$. Portanto, como $\alpha'(t)$ não é de tipo luz para nenhum $t \in I$, então $\beta'(s)$ também não é de tipo luz, para qualquer $s \in J$;
- (iii) Supondo que $[\beta'(s), \beta''(s)]$ é de tipo luz, então $\beta'(s) \times_L \beta''(s)$ é de tipo luz, mas

$$\begin{aligned} \beta'(s) \times_L \beta''(s) &= h'(s)\alpha'(h(s)) \times_L (h'(s)^2\alpha''(h(s)) + h''(s)\alpha'(h(s))) = \\ &= h'(s)^3(\alpha'(h(s)) \times_L \alpha''(h(s))). \end{aligned}$$

Assim, $\alpha'(h(s)) \times_L \alpha''(h(s))$ é de tipo luz e $[\alpha'(h(s)), \alpha''(h(s))]$ também será, que contradiz a hipótese. Portanto, $[\beta'(s), \beta''(s)]$ não é de tipo luz.

Dessa forma, β é uma curva admissível.

Exemplo 4.69. Seja a curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3$ do Exemplo 4.10 dada por $\alpha(t) = (0, r \cosh t, r \sinh t)$. Sabemos que $\alpha'(t) = (0, r \sinh t, r \cosh t)$ é de tipo tempo. Assim, $\alpha''(t) = (0, r \cosh t, r \sinh t)$ e

$$\langle \alpha''(t), \alpha''(t) \rangle_L = 0 + r^2 \cosh^2 t - r^2 \sinh^2 t = r^2 > 0.$$

Logo $\alpha''(t)$ é de tipo espaço e $[\alpha'(t), \alpha''(t)]$ não é de tipo luz.

Por fim, se $a, b \in \mathbb{R}$, a combinação linear:

$$\begin{aligned} a\alpha'(t) + b\alpha''(t) = \vec{0} &\Rightarrow (0, ar \sinh t + br \cosh t, ar \cosh t + br \sinh t) = \vec{0} \\ &\Rightarrow \begin{cases} ar \sinh t + br \cosh t = 0; \\ ar \cosh t + br \sinh t = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \sinh t = -b \cosh t; \\ a \cosh t = -b \sinh t; \end{cases} \\ &\Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{\cosh t}{\sinh t} = -\frac{\sinh t}{\cosh t} \Rightarrow \sinh^2 t = \cosh^2 t. \end{aligned}$$

Mas não existe $t \in \mathbb{R}$, tal que $\sinh^2 t = \cosh^2 t$. Portanto, a única solução é $a = b = 0$, ou seja, $\{\alpha'(t), \alpha''(t)\}$ é linearmente dependente. Consequentemente, α é uma curva admissível.

Definição 4.70. (Triedro de Frenet-Serret) Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^3$ uma curva admissível e com velocidade unitária. O **vetor tangente** à α em $s \in I$ é $t(s) = \alpha'(s)$ e a **curvatura** de α em s é $\kappa(s) = \|t'(s)\|_\nu = \|\alpha''(s)\|_\nu$.

Definimos o **vetor normal** à α em s pela relação $t'(s) = \kappa(s)n(s)$ e o **co-indicador de α** , η_α , como o indicador de $n(s)$, isto é, $\eta_\alpha = \epsilon_{n_\alpha}$.

Finalmente, o **vetor binormal** à α em s é o único vetor $b(s)$ que torna a base $\{t(s), n(s), b(s)\}$ pseudo-ortonormal e positiva. Essa base é chamada **Referencial de Frenet-Serret**, ou **Triedro de Frenet-Serret**, ou simplesmente **Triedro de Frenet**.

Observação 4.71. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^3$ uma curva admissível e com velocidade unitária.

- (i) A hipótese de curva admissível na definição anterior garante que $[\alpha'(s), \alpha''(s)]$ nunca é de tipo luz e, se α não é uma reta, $\kappa_\alpha(s) > 0$, para todo $s \in I$, pois $\alpha''(s)$ não pode ser de tipo luz;
- (ii) Para deduzir uma fórmula geral para o vetor binormal, podemos encontrar um vetor ortogonal a $t(s)$ e $n(s)$ da forma:

$$b(s) = \lambda t(s) \times_\nu n(s),$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ deve garantir que a base seja positiva. Assim, pela Proposição 2.24, temos

$$\begin{aligned} \det(t(s), n(s), b(s)) = 1 &\Rightarrow \det(b(s), t(s), n(s)) = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda \langle t(s) \times n(s), t(s) \times n(s) \rangle_\nu = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda (-1)^\nu \det \begin{pmatrix} \langle t(s), t(s) \rangle_\nu & \langle t(s), n(s) \rangle_\nu \\ \langle n(s), t(s) \rangle_\nu & \langle n(s), n(s) \rangle_\nu \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda (-1)^\nu \det \begin{pmatrix} \epsilon_\alpha & 0 \\ 0 & \eta_\alpha \end{pmatrix} = \lambda (-1)^\nu \epsilon_\alpha \eta_\alpha = 1 \Rightarrow \lambda = (-1)^\nu \epsilon_\alpha \eta_\alpha. \end{aligned}$$

Dessa forma, $b(s) = (-1)^\nu \epsilon_\alpha \eta_\alpha t(s) \times_\nu n(s)$ e

$$\langle b(s), b(s) \rangle_L = ((-1)^\nu \epsilon_\alpha \eta_\alpha)^2 \langle t(s) \times_\nu n(s), t(s) \times_\nu n(s) \rangle_\nu = (-1)^\nu \epsilon_\alpha \eta_\alpha.$$

Portanto, $b(s)$ é um vetor unitário e seu tipo causal é determinado pelo produto apresentado.

Definição 4.72. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^3$ uma curva admissível e com velocidade unitária. A **torção** de α em s , denotada por $\tau(s)$, é a componente de $n'(s)$ na direção $b(s)$, isto é, $n(s) = \tau(s)b(s)$.

Teorema 4.73. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^3$ uma curva admissível e com velocidade unitária. Vale que:

$$\begin{cases} t'(s) &= \kappa(s)n(s); \\ n'(s) &= -\epsilon_\alpha \eta_\alpha \kappa(s) + \tau(s)b(s); \\ b'(s) &= (-1)^{\nu+1} \epsilon_\alpha \tau(s)n(s), \end{cases}$$

ou, em linguagem matricial,

$$\begin{pmatrix} t'(s) \\ n'(s) \\ b'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\epsilon_\alpha \eta_\alpha \kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & (-1)^{\nu+1} \epsilon_\alpha \tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{pmatrix}.$$

Demonstração: A primeira equação é imediata da Definição 4.70. Dado $s \in I$, pelos Corolários 4.31, 4.32, valem as seguintes identidades:

- (i) $\langle t(s), n(s) \rangle_\nu = 0 \Rightarrow \langle t'(s), n(s) \rangle_\nu = -\langle t(s), n'(s) \rangle_\nu$;
- (ii) $\langle t(s), b(s) \rangle_\nu = 0 \Rightarrow \langle t'(s), b(s) \rangle_\nu = -\langle t(s), b'(s) \rangle_\nu$;
- (iii) $\langle n(s), b(s) \rangle_\nu = 0 \Rightarrow \langle n'(s), b(s) \rangle_\nu = -\langle n(s), b'(s) \rangle_\nu$;
- (iv) $t'(s) = \kappa(s)n(s) \Rightarrow \langle t'(s), n(s) \rangle_\nu = \kappa(s)\langle n(s), n(s) \rangle_\nu \Rightarrow \kappa(s) = \eta_\alpha \langle t'(s), n(s) \rangle_\nu$;
- (v) $n'(s) = \tau(s)b(s) \Rightarrow \langle n'(s), b(s) \rangle_\nu = \tau(s)\langle b(s), b(s) \rangle_\nu \Rightarrow \tau(s) = (-1)^\nu \epsilon_\alpha \eta_\alpha \langle n'(s), b(s) \rangle_\nu$.

Como $\{t(s), n(s), b(s)\}$ formam uma base, vamos escrever $n'(s)$ nessa base a partir de suas projeções ortogonais em cada uma das direções:

$$\begin{aligned} n'(s) &= \underbrace{\frac{\langle t(s), n'(s) \rangle_\nu}{\langle t(s), t(s) \rangle_\nu}}_{\text{(i) e (iv)}} t(s) + \underbrace{\frac{\langle n(s), n'(s) \rangle_\nu}{\langle n(s), n(s) \rangle_\nu}}_{=0, \text{ pois } n \perp n'} n(s) + \underbrace{\frac{\langle b(s), n'(s) \rangle_\nu}{\langle b(s), b(s) \rangle_\nu}}_{\text{(ii) e (v)}} b(s) = \\ &= -\epsilon_\alpha \eta_\alpha \kappa(s) t(s) + \frac{(-1)^\nu \epsilon_\alpha \eta_\alpha \tau(s)}{(-1)^\nu \epsilon_\alpha \eta_\alpha} b(s) = -\epsilon_\alpha \eta_\alpha \kappa(s) t(s) + \tau(s) b(s), \end{aligned}$$

que resulta na segunda equação.

Por fim, para a última equação, note que

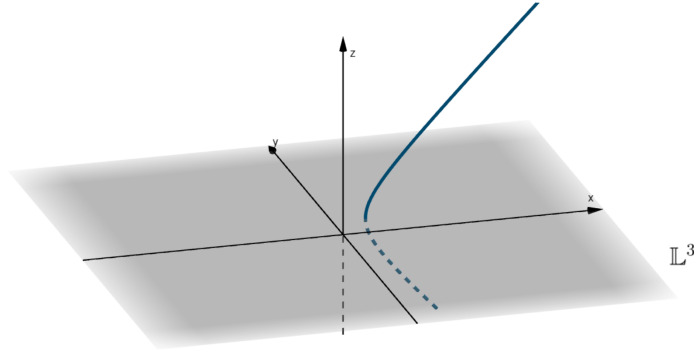
$$\begin{aligned} b'(s) &= (-1)^\nu \epsilon_\alpha \eta_\alpha (t'(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s)) = \\ &= (-1)^\nu \epsilon_\alpha \eta_\alpha \left(\underbrace{t'(s) \times \frac{1}{\kappa(s)} t'(s)}_{=0} + t(s) \times (-\epsilon_\alpha \eta_\alpha \kappa(s) t(s) + \tau(s) b(s)) \right) = \\ &= (-1)^\nu \epsilon_\alpha \eta_\alpha \left(\underbrace{t(s) \times -\epsilon_\alpha \eta_\alpha \kappa(s) t(s)}_{=0} + t(s) \times \tau(s) b(s) \right) = \\ &= -(-1)^\nu \epsilon_\alpha \eta_\alpha \tau(s) (\eta_\alpha n(s)) = (-1)^{\nu+1} \epsilon_\alpha n(s). \end{aligned}$$

□

Exemplo 4.74. Seja a curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3$ dada por

$$\alpha(s) = \left(\cosh \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \right), \frac{2s}{\sqrt{3}}, \sinh \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \right) \right),$$

parametrizada pelo comprimento de arco, cujo traço é um ramo de uma linha de Sitter no plano $y = \frac{2}{\sqrt{3}}$, ilustrado na Figura 38.

Figura 38: Traço da curva α em $\mathbb{L}^3$.

Fonte: Elaboração própria (2026).

Note que:

- (i) $\alpha'(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sinh \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \right), \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \cosh \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \right) \right) = t(s);$
- (ii) $\alpha''(s) = \left(\frac{1}{3} \cosh \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \right), 0, \frac{1}{3} \sinh \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \right) \right) = t'(s);$
- (iii) $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = 1$, logo α é de tipo espaço e $\epsilon_\alpha = 1$;
- (iv) $\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_L = \frac{1}{9}$, então α'' é também de tipo espaço para todo $s \in \mathbb{R}$.

Analisando o plano $\pi = [\alpha'(s), \alpha''(s)]$, temos

$$G_\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \Rightarrow \det G_\pi = \frac{1}{9} > 0.$$

Portanto, o plano é de tipo espaço e, assim, a curva é admissível. Logo,

- (i) $\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|_L = \frac{1}{3}$, para todo $s \in \mathbb{R}$;
- (ii) $n(s) = \frac{1}{\kappa(s)} t'(s) = \left(\cosh \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \right), 0, \sinh \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \right) \right)$ e $\eta_\alpha = 1$;
- (iii) $b(s) = (-1)^1 \epsilon_\alpha \eta_\alpha t(s) \times_L n(s) = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \sinh \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \right), -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}} \cosh \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \right) \right);$
- (iv) $b'(s) = (-1)^2 \cdot 1 \cdot \tau(s) n(s) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \left(-\frac{2}{3} \cosh \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \right), 0, -\frac{2}{3} \sinh \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \right) \right) = \tau(s) \left(\cosh \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \right), 0, \sinh \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \right) \right) \Rightarrow$
 $\tau(s) = -\frac{2}{3}$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Definição 4.75. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^3$ uma curva regular admissível e S a função comprimento de arco de α . Tome $\alpha(t) = \beta(S(t))$, os vetores **tangente**, **normal** e **binormal** a α em t são definidos por:

$$t_\alpha(t) = t_\beta(S(t)), \quad n_\alpha(t) = n_\beta(S(t)) \quad \text{e} \quad b_\alpha(t) = b_\beta(S(t)).$$

Definimos também a **curvatura** e a **torção** de α em t como

$$\kappa_\alpha(t) = \kappa_\beta(S(t)) \quad \text{e} \quad \tau_\alpha(t) = \tau_\beta(S(t)).$$

Proposição 4.76. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^3$ uma curva regular admissível. Dado $t \in I$, valem as fórmulas:

$$\kappa_\alpha(s) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(s)\|_\nu}{\|\alpha'(t)\|_\nu^3} \quad \text{e} \quad \tau_\alpha(s) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|_\nu^2}.$$

Demonstração: Sejam S a função comprimento de arco de α e $\alpha(t) = \beta(S(t))$, ou seja, β é uma reparametrização por comprimento de arco de α . Utilizando a definição anterior, temos que

$$(i) \quad \alpha'(t) = (\beta(S(t)))' = S'(t)t_\beta(S(t));$$

$$(ii) \quad \alpha''(t) = S''(t)t_\beta(S(t)) + S'(t)^2 t_\beta'(S(t)) = S''(t)t_\beta(S(t)) + S'(t)^2 \kappa_\beta(S(t))n_\beta(S(t));$$

(iii) Omitindo o parâmetro t :

$$\begin{aligned} \alpha''' &= S'''t_\beta(S) + S'S''t_\beta'(S) + 2S'S''\kappa_\beta(S)n_\beta(S) + S'^2(S'\kappa_\beta'(S)n_\beta(S) + S'\kappa_\beta(S)n_\beta'(S)) = \\ &= \underbrace{(S''' - S'^3\kappa_\alpha\epsilon_\alpha\eta_\alpha)}_A t_\alpha + \underbrace{(3S'S''\kappa_\alpha + S'^3\kappa_\alpha)}_B n_\alpha + \underbrace{S'^3\kappa_\alpha\tau_\alpha}_C b_\alpha = \\ &= At_\alpha + Bn_\alpha + Cb_\alpha; \end{aligned}$$

$$(iv) \quad \alpha'(t) \times_\nu \alpha''(t) = (S'(t)t_\beta(S(t))) \times_\nu (S''(t)t_\beta(S(t)) + S'(t)^2 \kappa_\beta(S(t))n_\beta(S(t))) = \\ = \kappa_\beta(S(t))S'(t)^3(t_\beta(S(t)) \times_\nu n_\beta(S(t))) = S'(t)^3\kappa_\alpha(t)(t_\alpha(t) \times_\nu n_\alpha(t)).$$

Assim, estudando a norma pseudo-euclidiana do vetor do item (iv), temos

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t) \times_\nu \alpha''(t)\|_\nu &= \|S'(t)^3\kappa_\alpha(t)(t_\alpha(t) \times_\nu n_\alpha(t))\|_\nu = \underbrace{|S'(t)^3|}_{=\|\alpha'(t)\|_\nu} \cdot |\kappa_\alpha(t)| \cdot \underbrace{\|t_\alpha(t) \times_\nu n_\alpha(t)\|_\nu}_{=1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\|\alpha'(t) \times_\nu \alpha''(t)\|_\nu}{\|\alpha'(t)\|_\nu^3} = \kappa_\alpha(t). \end{aligned}$$

Para a segunda igualdade, omitindo novamente o parâmetro t , temos

$$\begin{aligned} \det(\alpha', \alpha'', \alpha''') &= \det(S't_\alpha, S''t_\alpha + S'^2\kappa_\alpha n_\alpha, At_\alpha + Bn_\alpha + Cb_\alpha) = \\ &= \det(S't_\alpha, S'^2\kappa_\alpha n_\alpha, (S'^3\kappa_\alpha\tau_\alpha)b_\alpha) = S'^6\kappa_\alpha^2\tau_\alpha \underbrace{\det(t_\alpha, n_\alpha, b_\alpha)}_{=1} = S'^6\kappa_\alpha^2\tau_\alpha \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tau_\alpha = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{S'^6 \kappa_\alpha^2} = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''') \cdot (\|\alpha'\|_\nu^3)^2}{\|\alpha'\|_\nu^6 \cdot \|\alpha' \times_\nu \alpha''\|_\nu^2} = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times_\nu \alpha''\|_\nu^2}$$

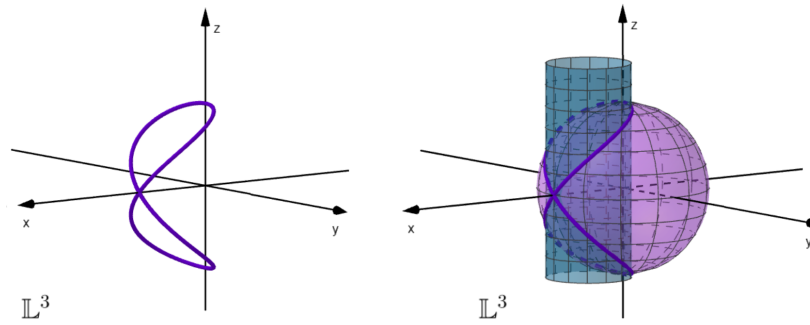
□

Exemplo 4.77. Seja a curva $\alpha : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{L}^3$ dada por

$$\alpha(t) = \left(1 + \cos t, \sin t, 2\sin \frac{t}{2} \right).$$

A curva α é chamada **Curva de Viviani** e é encontrada pela interseção do cilindro paralelo ao eixo z de raio 1 centrada em $(1, 0, 0)$ e a esfera de raio 2 centrado na origem. A Figura 39 ilustra o traço da Curva de Viviani à direita e a interseção da esfera e do cilindro que originam a mesma à esquerda.

Figura 39: Traço da Curva de Viviani e as superfícies que a originam em $\mathbb{L}^3$.



Fonte: Elaboração própria (2026).

Para encontrar o valor da curvatura e da torção de α é necessário fazer o seguinte estudo

$$(i) \quad \alpha'(t) = \left(-\sin t, \cos t, \cos \frac{t}{2} \right);$$

$$(ii) \quad \alpha''(t) = \left(-\cos t, -\sin t, -\frac{1}{2}\sin \frac{t}{2} \right);$$

$$(iii) \quad \alpha'''(t) = \left(\sin t, -\cos t, -\frac{1}{4}\cos \frac{t}{2} \right);$$

$$(iv) \quad \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L = \sin^2 t + \cos^2 t - \cos^2 \frac{t}{2} = 1 - \cos^2 \frac{t}{2} \geq 0, \text{ para todo } t \in [0, 4\pi].$$

Assim, α não está parametrizada pelo comprimento de arco, é de tipo luz em $0, 2\pi$ e 4π e é de tipo espaço nos demais pontos do domínio.

$$(v) \quad \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle_L = \sin t \cos t - \sin t \cos t - \frac{1}{2} \cos \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} = -\frac{1}{2} \cos \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2};$$

$$(vi) \quad \langle \alpha''(t), \alpha''(t) \rangle_L = \sin^2 t + \cos^2 t - \frac{1}{4} \sin^2 \frac{t}{2} = 1 - \frac{1}{4} \sin^2 \frac{t}{2};$$

(vii) Seja $\pi = [\alpha'(t), \alpha''(t)]$, temos

$$G_\pi = \begin{pmatrix} 1 - \cos^2 \frac{t}{2} & -\frac{1}{2} \cos \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} \\ -\frac{1}{2} \cos \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} & 1 - \frac{1}{4} \sin^2 \frac{t}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det(G_\pi) = 1 - \frac{1}{4} \sin^2 \frac{t}{2} - \cos^2 \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{t}{2} \cos^2 \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin^2 \frac{t}{2} \cos^2 \frac{t}{2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cos^2 \frac{t}{2} = \frac{3}{4} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2} \right) \geq 0,$$

para todo $t \in [0, 4\pi]$. Dessa forma, π é de tipo espaço para t diferente de $0, 2\pi$ e 4π , isto é, a curva é admissível em t fora desses pontos;

$$(viii) \quad \alpha'(t) \times_L \alpha''(t) = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ -\sin t & \cos t & \cos \frac{t}{2} \\ -\cos t & -\sin t & -\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{1}{2} \cos t \sin \frac{t}{2} + \sin t \cos \frac{t}{2}, -\frac{1}{2} \sin t \sin \frac{t}{2} - \cos t \cos \frac{t}{2}, -1 \right);$$

$$(ix) \quad \|\alpha'(t) \times_L \alpha''(t)\|_L = \left(\left| \frac{1}{4} \sin^2 \frac{t}{2} + \cos^2 \frac{t}{2} - 1 \right| \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left| \frac{3}{4} \cos^2 \frac{t}{2} - \frac{3}{4} \right| \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\left| \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos t) - \frac{3}{4} \right| \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left| \frac{3}{8} \cos t - \frac{3}{8} \right| \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \sqrt{|\cos t - 1|};$$

$$(x) \quad \det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)) = \det \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t & \cos \frac{t}{2} \\ -\cos t & -\sin t & -\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} \\ \sin t & -\cos t & -\frac{1}{4} \cos \frac{t}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{4} \cos \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2} = \frac{3}{4} \cos \frac{t}{2}.$$

Dessa forma, para cada $t \in (0, 4\pi) - \{2\pi\}$, temos

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times_L \alpha''(t)\|_L}{\|\alpha'(t)\|_L^3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \sqrt{|\cos t - 1|}}{\left(\frac{1}{2} (1 - \cos t) \right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{1 - \cos t}$$

$$\text{e } \tau(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{\|\alpha'(t) \times_L \alpha''(t)\|_L^2} = \frac{\frac{3}{4} \cos \frac{t}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{|\cos^2 \frac{t}{2} - 1|} \right)^2} = \frac{\cos \frac{t}{2}}{1 - \cos^2 \frac{t}{2}} = \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} = \cot \frac{t}{2} \csc \frac{t}{2}.$$

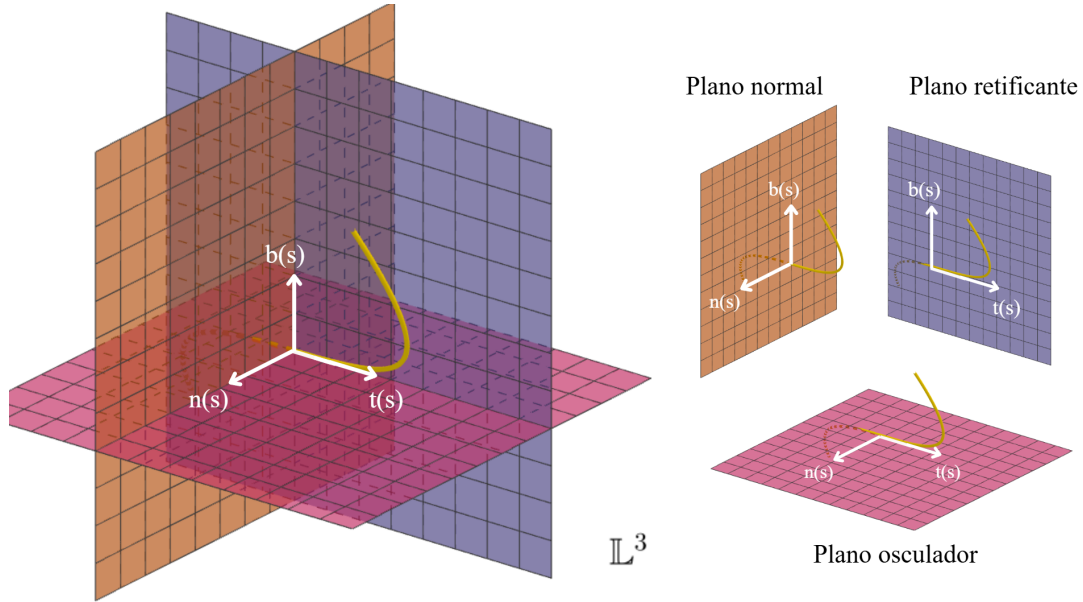
Definição 4.78. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_v^3$ uma curva regular admissível e $t_0 \in I$.

- (i) O **plano osculador** a α em t_0 é o plano gerado por $t_\alpha(t_0)$ e $n_\alpha(t_0)$, passando por $\alpha(t_0)$, denotado por π_o ;
- (ii) O **plano normal** a α em t_0 é o plano gerado por $n_\alpha(t_0)$ e $b_\alpha(t_0)$, passando por $\alpha(t_0)$, denotado por π_n ;

- (iii) O **plano retificante** a α em t_0 é o plano gerado por $t_\alpha(t_0)$ e $b_\alpha(t_0)$, passando por $\alpha(t_0)$, denotado por π_r .

A Figura 40 ilustra os planos π_o , π_n e π_r da curva α em $\alpha(s)$.

Figura 40: Planos gerados pelo Triedro de Frenet de uma curva α em $\mathbb{L}^3$.



Fonte: Elaboração própria (2026).

Proposição 4.79. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^3$ uma curva regular admissível. Então o traço de α está contido em um plano se, e somente se, $\tau(t) = 0$, para todo $t \in I$.

Demonstração: Suponha sem perda de generalidade que α tem velocidade unitária e que seu traço está contido em um plano.

Afirmção: O plano osculador $\pi_o = [t_\alpha, n_\alpha]$ é o plano contém o traço de α e independe de s .

De fato, seja $v \in \mathbb{R}_\nu^3$ unitário e ortogonal ao plano de contém o traço de α . Fixado $s_0 \in I$, temos

$$\langle \alpha(s) - \alpha(s_0), v \rangle_\nu = 0, \text{ para todo } s \in I.$$

Derivando a igualdade duas vezes:

$$(\langle \alpha(s) - \alpha(s_0), v \rangle_\nu)' = 0' \Rightarrow \langle t(s), v \rangle_\nu = 0$$

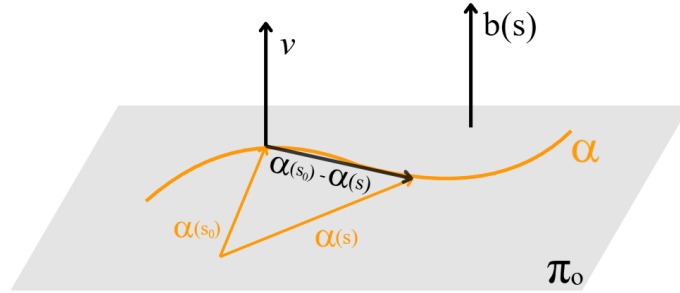
$$(\langle t(s), v \rangle_\nu)' = 0' \Rightarrow \langle t'(s), v \rangle_\nu = \langle \kappa(s)n(s), v \rangle_\nu = 0.$$

Dessa forma, v é ortogonal a $t(s)$ e $n(s)$, assim, $b(s) = \pm v$ e, consequentemente, o plano que contém o traço de α é π_o . Mais ainda, essas propriedades de v valem para todo s em I , logo o plano osculador independe de s . A Figura 41 ilustra a afirmação.

Assim, pela afirmação, $\alpha \subseteq \pi_o$. Da última Equação de Frenet, temos

$$0 = b'(s) = (-1)^{\nu+1} \tau(s) \underbrace{\epsilon_\alpha n(s)}_{\neq \vec{0}} \Rightarrow \tau(s) = 0, \text{ para todo } s \in I.$$

Figura 41: Representação da curva α no plano oscular, o vetor v e o vetor binormal à α .



Fonte: Elaboração própria (2026).

Reciprocamente, se $\tau(s) = 0$ para todo $s \in I$, novamente pela última Equação de Frenet, temos

$$b'(s) = 0, \text{ para todo } s \in I \Rightarrow b(s) = b, b \in \mathbb{R}_\nu^3.$$

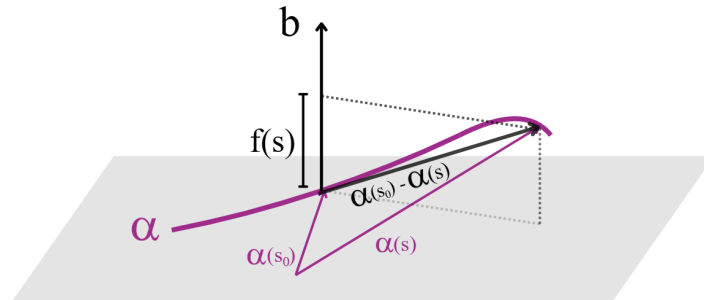
Fixado $s_0 \in I$, tome $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), b \rangle_\nu$. Geometricamente, f mede o quanto $\alpha(s)$ se afasta do plano ortogonal à $b(s)$ passando por $\alpha(s_0)$, ou seja, o plano osculador, ilustrado na Figura 42. Derivando f :

$$f'(s) = \langle \alpha'(s), b \rangle_\nu = \langle t(s), b(s) \rangle_\nu = 0.$$

Dessa forma, f é uma função constante, porém, como $f(s_0) = \langle \vec{0}, b \rangle_\nu = 0$, então f é identicamente nula, isto é, α não se afasta do plano.

Portanto, o traço de α está contido no plano ortogonal a b passando por s_0 , ou seja, o plano osculador à α em s_0 .

Figura 42: Representação geométrica da função f em relação a curva α .



Fonte: Elaboração própria (2026).

□

No contexto desse teorema, notamos que a torção da curva α mede o quanto uma curva se afasta de ser plana.

Observação 4.80. Nesse caso, a hipótese de admissível é essencial, pois, caso a curva não fosse admissível, ela pode não ser plana, mas ter torção nula.

De fato, seja $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3$ dada por:

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{-\frac{1}{t^2}}), & \text{se } t > 0; \\ (t, e^{-\frac{1}{t^2}}, 0), & \text{se } t < 0; \\ (0, 0, 0), & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Note que

$$\alpha'(t) = \begin{cases} \left(1, 0, \frac{2}{t^3}e^{-\frac{1}{t^2}}\right), & \text{se } t > 0; \\ \left(1, \frac{2}{t^3}e^{-\frac{1}{t^2}}, 0\right), & \text{se } t < 0; \end{cases}$$

$$\text{e } \lim_{t \rightarrow 0^-} \alpha'(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(1, \frac{2}{t^3}e^{-\frac{1}{t^2}}, 0\right) = (1, 0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(1, \frac{2}{t^3}e^{-\frac{1}{t^2}}, 0\right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \alpha'(t).$$

Assim, α é regular.

Analisando a segunda derivada de α :

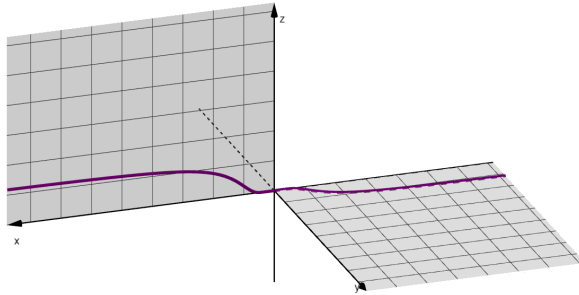
$$\alpha''(t) = \begin{cases} \left(0, 0, \frac{4}{t^6}e^{-\frac{1}{t^2}} - \frac{6}{t^4}e^{-\frac{1}{t^2}}\right), & \text{se } t > 0; \\ \left(0, \frac{4}{t^6}e^{-\frac{1}{t^2}} - \frac{6}{t^4}e^{-\frac{1}{t^2}}, 0\right), & \text{se } t < 0; \end{cases} \quad \text{e}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \alpha''(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(0, \frac{4}{t^6}e^{-\frac{1}{t^2}} - \frac{6}{t^4}e^{-\frac{1}{t^2}}, 0\right) = \vec{0} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(0, 0, \frac{4}{t^6}e^{-\frac{1}{t^2}} - \frac{6}{t^4}e^{-\frac{1}{t^2}}\right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \alpha''(t).$$

Dessa forma, em $t = 0$, $\alpha''(t) = \vec{0}$, logo as derivadas $\alpha'(t)$ e $\alpha''(t)$ são linearmente dependentes. Consequentemente a curva α não é admissível.

Apesar disso, a parte da curva α para $t > 0$ está contida no plano xz , logo $\tau(t) = 0$ para $t > 0$. Analogamente, quando $t < 0$ a curva α está contida no plano xy , logo $\tau(t) = 0$ para $t < 0$. Por fim, como $\alpha''(0) = \vec{0}$, então $\tau(0) = 0$.

Portanto, a torção da curva α é identicamente nula, mas o traço de α não está contido em um único plano, como ilustra a Figura 43.

Figura 43: Traço da curva α em $\mathbb{L}^3$.

Fonte: Elaboração própria (2026).

O próximo resultado caracteriza os pseudo-círculos estudados na Seção 4.2 de curvas planas, como curvas espaciais, por meio da curvatura e da torção. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (COUTO; LYMBEROPOULOS, 2018).

Proposição 4.81. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^3$ uma curva regular admissível. Então $\kappa(s) = \kappa$ é constante e $\tau = 0$ se, e somente se, α é congruente a um pedaço de $\mathbb{S}^1\left(\frac{1}{\kappa}\right)$, $\mathbb{H}_\pm^1\left(\frac{1}{\kappa}\right)$ ou $\mathbb{S}_1^1\left(\frac{1}{\kappa}\right)$.

Definição 4.82. Sejam $p \in \mathbb{L}^3$ e $r > 0$.

- (i) O **espaço de Sitter** de centro p e raio r é o conjunto

$$\mathbb{S}_1^2(p, r) = \{v \in \mathbb{L}^3; \langle v - p, v - p \rangle_L = r^2\};$$

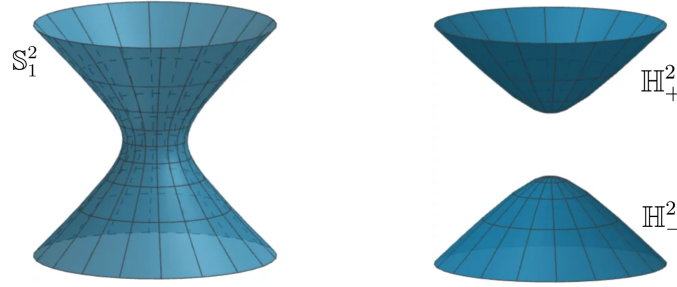
- (ii) O **espaço hiperbólico** de centro p e raio r é o conjunto

$$\mathbb{H}_+^2(p, r) = \{v \in \mathbb{L}^3; \langle v - p, v - p \rangle_L = -r^2 \wedge \langle v - p, e_3 \rangle_L < 0\}.$$

Analogamente, definimos a seção

$$\mathbb{H}_-^2(p, r) = \{v \in \mathbb{L}^3; \langle v - p, v - p \rangle_L = -r^2 \wedge \langle v - p, e_3 \rangle_L > 0\}.$$

Quando $p = \vec{0}$ e $r = 1$, tais parâmetros serão omitidos.

Figura 44: O espaço de Sitter e o espaço hiperbólico em $\mathbb{L}^3$.

Fonte: Elaboração própria (2026).

A Figura 44 ilustra os espaços $\mathbb{S}_1^2$ e $\mathbb{H}_\pm^2$. Note que essas superfícies são análogas as esferas no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, pois distam um valor constante de um ponto fixo, que também estudamos durante a Seção 2.3.

Teorema 4.83. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^3$, $\nu = 0, 1$, uma curva admissível com velocidade unitária e torção não nula. Se o traço de α está contido em $\mathbb{S}^2(p, r)$, $\mathbb{S}_1^2(p, r)$, $\mathbb{H}_\pm^2(p, r)$ ou $C_L(p)$, então valem:

$$\alpha(s) - p = \frac{-\epsilon_\alpha \eta_\alpha}{\kappa(s)} n(s) + (-1)^{\nu+1} \frac{\eta_\alpha}{\tau(s)} \left(\frac{1}{\kappa(s)} \right)' b(s)$$

$$\text{e } \pm r^2 = \frac{\eta_\alpha}{\kappa(s)^2} + (-1)^\nu \epsilon_\alpha \eta_\alpha \left(\frac{1}{\tau(s)} \left(\frac{1}{\kappa(s)} \right)' \right)^2,$$

para todo $s \in I$. Por outro lado, se a última relação é satisfeita e $\kappa(s)$ é não constante, existe $p \in \mathbb{R}_\nu^3$ tal que o traço de α está contido em $\mathbb{S}^2(p, r)$, $\mathbb{S}_1^2(p, r)$, $\mathbb{H}_\pm^2(p, r)$ ou $C_L(p)$.

Demonstração: Suponha sem perda de generalidade que $p = \vec{0}$. Omitindo o parâmetro $s \in I$, os vetores t, n, b formam uma base ortonormal do espaço. Assim, podemos escrever α como combinação linear desses vetores e, pelo Lema 3.1, segue que:

- (i) $\text{proj}_t \alpha = \frac{\langle \alpha, t \rangle_\nu}{\langle t, t \rangle_\nu} t = \epsilon_\alpha \langle \alpha, t \rangle_\nu t$;
- (ii) $\text{proj}_n \alpha = \frac{\langle \alpha, n \rangle_\nu}{\langle n, n \rangle_\nu} n = \eta_\alpha \langle \alpha, n \rangle_\nu n$;
- (iii) $\text{proj}_b \alpha = \frac{\langle \alpha, b \rangle_\nu}{\langle b, b \rangle_\nu} b = (-1)^\nu \epsilon_\alpha \eta_\alpha \langle \alpha, b \rangle_\nu b$.

Dessa forma,

$$\alpha(s) = \epsilon_\alpha \langle \alpha, t \rangle_\nu t + \eta_\alpha \langle \alpha, n \rangle_\nu n + (-1)^\nu \epsilon_\alpha \eta_\alpha \langle \alpha, b \rangle_\nu b, \quad \forall s \in I. \quad (9)$$

Como o traço de α está contido em uma das superfícies do enunciado, então $\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle_\nu$ é constante. Logo $\alpha(s)$ é ortogonal a $t(s)$ e, para cada $s \in I$,

$$\langle \alpha, t \rangle_\nu = 0 \Rightarrow \langle t, t \rangle_\nu + \langle \alpha, t' \rangle_\nu = 0 \Rightarrow \langle \alpha, n \rangle_\nu = \frac{-\epsilon_\alpha}{\kappa}.$$

Derivando novamente a expressão:

$$\begin{aligned} (\langle \alpha, n \rangle_\nu)' &= \left(\frac{-\epsilon_\alpha}{\kappa} \right)' \Rightarrow \underbrace{\langle t, n \rangle_\nu}_{=0} + \langle \alpha, n' \rangle_\nu = -\epsilon_\alpha \left(\frac{1}{\kappa} \right)' \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle \alpha, -\epsilon_\alpha \eta_\alpha \kappa t + \tau b \rangle_\nu &= -\epsilon_\alpha \left(\frac{1}{\kappa} \right)' \Rightarrow \langle \alpha, b \rangle_\nu = -\frac{\epsilon_\alpha}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa} \right)'. \end{aligned}$$

Aplicando essas identidades na Equação (9), temos

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= 0 + \eta_\alpha \frac{-\epsilon_\alpha}{\kappa(s)} n(s) + (-1)^\nu \epsilon_\alpha \eta_\alpha \frac{(-\epsilon_\alpha)}{\tau(s)} \left(\frac{1}{\kappa(s)} \right)' b(s) \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha(s) - \vec{0} &= \frac{-\eta_\alpha \epsilon_\alpha}{\kappa(s)} n(s) + (-1)^{\nu+1} \frac{\eta_\alpha}{\tau(s)} \left(\frac{1}{\kappa(s)} \right)' b(s) \end{aligned}$$

que garante a primeira igualdade.

Para a segunda, temos que

$$\begin{aligned} \pm r^2 &= \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle_\nu = \\ &= \left\langle \frac{-\eta_\alpha \epsilon_\alpha}{\kappa(s)} n(s) + (-1)^{\nu+1} \frac{\eta_\alpha}{\tau(s)} \left(\frac{1}{\kappa(s)} \right)' b(s), \frac{-\eta_\alpha \epsilon_\alpha}{\kappa(s)} n(s) + (-1)^{\nu+1} \frac{\eta_\alpha}{\tau(s)} \left(\frac{1}{\kappa(s)} \right)' b(s) \right\rangle_\nu = \\ &= \left(\frac{-\eta_\alpha \epsilon_\alpha}{\kappa(s)} \right)^2 \langle n(s), n(s) \rangle_\nu + \left((-1)^{\nu+1} \frac{\eta_\alpha}{\tau(s)} \left(\frac{1}{\kappa(s)} \right)' \right)^2 \langle b(s), b(s) \rangle_\nu = \\ &= \frac{\eta}{\kappa(s)^2} + \left(\frac{1}{\tau(s)} \left(\frac{1}{\kappa(s)} \right)' \right)^2 (-1)^\nu \epsilon_\alpha \eta_\alpha. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $\kappa(s)$ não é constante e a segunda igualdade é satisfeita, vamos mostrar que $p(s)$, o “centro” da curva, é constante. Reescrevendo a primeira equação e derivando, temos que

$$\begin{aligned} p &= \alpha + \frac{\epsilon_\alpha \eta_\alpha}{\kappa} n + (-1)^\nu \frac{\eta_\alpha}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa} \right)' b \Rightarrow \\ p' &= t + \frac{\epsilon_\alpha \eta_\alpha}{\kappa} n' + \left(\frac{\epsilon_\alpha \eta_\alpha}{\kappa} \right)' n + (-1)^\nu \frac{\eta_\alpha}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa} \right)' b' + (-1)^\nu \eta_\alpha \left(\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa} \right)' \right)' b = \\ t + \frac{\epsilon_\alpha \eta_\alpha}{\kappa} (-\epsilon_\alpha \eta_\alpha \kappa t + \tau b) &+ \epsilon_\alpha \eta_\alpha \left(\frac{1}{\kappa} \right)' n + (-1)^\nu \frac{\eta_\alpha}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa} \right)' (-1)^{\nu+1} \epsilon_\alpha \tau n + (-1)^\nu \eta_\alpha \left(\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa} \right)' \right)' b \\ &= \frac{\epsilon_\alpha \eta_\alpha}{\kappa} \tau b + (-1)^\nu \eta_\alpha \left(\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa} \right)' \right)' b = \eta_\alpha \left[\frac{\epsilon_\alpha}{\kappa} \tau + (-1)^\nu \left(\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa} \right)' \right)' \right] b. \end{aligned}$$

Escrevendo $\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$ e $\sigma(s) = \frac{1}{\tau(s)}$ para simplificar a notação:

$$p' = \eta_\alpha \left[\frac{\epsilon_\alpha \rho}{\sigma} + (-1)^\nu \rho'' \sigma + (-1)^\nu \rho' \sigma' \right] b. \quad (10)$$

Derivando a igualdade satisfeita por hipótese, temos

$$\begin{aligned} (\pm r^2)' &= \left(\frac{\eta_\alpha}{\kappa^2} + (-1)^\nu \epsilon_\alpha \eta_\alpha \left(\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa} \right)' \right)^2 \right)' \Rightarrow \\ 0 &= 2\eta_\alpha \rho \rho' + 2(-1)^\nu \epsilon_\alpha \eta_\alpha \sigma \sigma' \rho'^2 + 2(-1)^\nu \epsilon_\alpha \eta_\alpha \sigma^2 \rho' \rho'' \Rightarrow \\ 0 &= \underbrace{2\epsilon_\alpha \eta_\alpha \rho' \sigma}_{\neq 0} \left(\frac{\epsilon_\alpha \rho}{\sigma} + (-1)^\nu \rho' \sigma' + (-1)^\nu \rho'' \sigma \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 = \frac{\epsilon_\alpha \rho}{\sigma} + (-1)^\nu \rho' \sigma' + (-1)^\nu \rho'' \sigma. \end{aligned}$$

Aplicando na Equação (10), $p'(s) = \vec{0}$, para todo $s \in I$. Portanto, p é constante. Dessa forma,

$$\langle \alpha(s) - p, \alpha(s) - p \rangle_\nu = \frac{\eta_\alpha}{\kappa_\alpha(s)^2} + (-1)^\nu \epsilon_\alpha \eta_\alpha \left(\frac{1}{\tau(s)} \left(\frac{1}{\kappa(s)} \right)' \right)^2 = \pm r^2,$$

isto é, o traço de α está contido em $\mathbb{S}^2(p, r)$, $\mathbb{S}_1^2(p, r)$, $\mathbb{H}_\pm^2(p, r)$ ou $C_L(p)$. $\square$

Exemplo 4.84. Seja a curva $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$, $t \in \mathbb{R}$, em $\mathbb{L}^3$. Note que $\alpha'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \cos t + e^t \sin t, e^t)$ e

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = e^{2t} + e^{2t} - e^{2t} = e^{2t} > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

então α é regular, de tipo espaço e não está parametrizada pelo comprimento de arco. A função comprimento de arco de α é

$$S(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\|_L du = \int_0^t e^u du = e^t - 1 \Rightarrow h(s) = t = \ln(s + 1).$$

A reparametrização com velocidade unitária de α é

$$\beta(s) = \alpha(h(s)) = ((s + 1) \cos(\ln(s + 1)), (s + 1) \sin(\ln(s + 1)), s + 1), s \in (-1, \infty).$$

Assim, definimos

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \beta'(s) &= t(s) = \\ &(\cos(\ln(s + 1)) - \sin(\ln(s + 1)), \cos(\ln(s + 1)) + \sin(\ln(s + 1)), 1); \end{aligned}$$

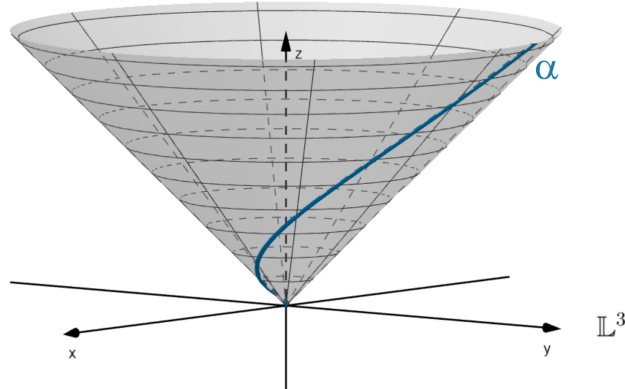
- (ii) $\langle t(s), t(s) \rangle_L = 1$ e $\epsilon_\beta = 1$;
- (iii) $t'(s) = \left(\frac{1}{s+1}(-\cos(\ln(s+1)) - \operatorname{sen}(\ln(s+1))), \frac{1}{s+1}(\cos(\ln(s+1)) - \operatorname{sen}(\ln(s+1))), 0 \right)$;
- (iv) $\kappa(s) = \|t'(s)\|_L = \sqrt{\frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^2} - 0} = \frac{\sqrt{2}}{s+1}, s \in \mathbb{R} - \{-1\}$;
- (v) $n(s) = \frac{t'(s)}{\kappa(s)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos(\ln(s+1)) - \operatorname{sen}(\ln(s+1))), \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(\ln(s+1)) - \operatorname{sen}(\ln(s+1))), 0 \right)$;
- (vi) $\langle n(s), n(s) \rangle_L = 1$ e $\eta_\beta = 1$;
- (vii) $b(s) = (-1)^1 \epsilon_\beta \eta_\beta t(s) \times_L n(s) = - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(\ln(s+1)) - \operatorname{sen}(\ln(s+1))), \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos(\ln(s+1)) - \operatorname{sen}(\ln(s+1))), \frac{2}{\sqrt{2}} \right)$;
- (viii) $b'(s) = \frac{1}{\sqrt{2}(s+1)}(-\cos(\ln(s+1)) - \operatorname{sen}(\ln(s+1)), \cos(\ln(s+1)) - \operatorname{sen}(\ln(s+1)), 0)$;
- (ix) $\tau(s) = \frac{1}{s+1}$.

Mais ainda, note que

$$\frac{\eta_\alpha}{\kappa(s)^2} + (-1)^\nu \epsilon_\alpha \eta_\alpha \left(\frac{1}{\tau(s)} \left(\frac{1}{\kappa(s)} \right)' \right)^2 = \frac{(s+1)^2}{2} - \left(\frac{s+1}{\sqrt{2}} \right)^2 = 0. \quad (11)$$

Dessa forma, como a Equação (11) é verdadeira com $r = 0$ e a curvatura de β não é constante, pela volta do Teorema 4.83, garantimos que o traço de β está contido em no cone $C_L(\vec{0})$, como ilustra a Figura 45. Além disso, pela ida do Teorema 4.83, podemos parametrizar β da forma:

$$\begin{aligned} \beta(s) - p &= \frac{-\epsilon_\beta \eta_\beta}{\kappa(s)} n(s) + (-1)^{\nu+1} \frac{\eta_\beta}{\tau(s)} \left(\frac{1}{\kappa(s)} \right)' b(s) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \beta(s) = \beta(s) - \vec{0} = -\frac{s+1}{\sqrt{2}} n(s) + \frac{s+1}{\sqrt{2}} b(s). \end{aligned}$$

Figura 45: Traço da curva em $\mathbb{L}^3$.

Fonte: Elaboração própria (2026).

Definição 4.85. Uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^3$ admissível com velocidade unitária é chamada **hélice** se existe um vetor $v \in \mathbb{R}_\nu^3$, $v \neq \vec{0}$, tal que $\langle t(s), v \rangle_\nu$ é constante. Dizemos ainda, em $\mathbb{L}^3$, que a hélice é:

- (i) **hiperbólica**, se v for de tipo espaço;
- (ii) **elíptica**, se v for de tipo tempo;
- (iii) **parabólica**, se v for de tipo luz.

A direção determinada por v é chamada **eixo da hélice**.

Exemplo 4.86. Seja a curva α em $\mathbb{L}^3$ do Exemplo 4.84 e β uma reparametrização de α por $h(s) = \ln(s + 1)$ dada por

$$\beta(s) = \alpha(h(s)) = ((s + 1) \cos(\ln(s + 1)), (s + 1) \sin(\ln(s + 1)), s + 1), s \in (-1, \infty).$$

Note que, o produto de $t(s)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ é

$$\langle t(s), e_3 \rangle_L = -1, \forall s \in (-1, \infty).$$

Portanto, α é uma hélice e e_3 é a direção de seu eixo.

Teorema 4.87. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^3$ uma curva admissível com velocidade unitária. Então α é uma hélice se, e somente se, $\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}$ é constante.

Demonstração: Seja α uma hélice cujo eixo é determinado por v , $\alpha'(s) = t(s)$ e $\langle t(s), v \rangle_\nu = c$, $c \in \mathbb{R}$. Então

$$\langle t(s), v \rangle'_\nu = c' \Rightarrow \langle t'(s), v \rangle_\nu = 0 \Rightarrow \langle \kappa(s)n(s), v \rangle_\nu = 0 \Rightarrow \langle n(s), v \rangle_\nu = 0. \quad (12)$$

Derivando novamente a equação:

$$\begin{aligned}\langle n'(s), v \rangle_\nu = 0 &\Rightarrow \langle -\epsilon_\alpha \eta_\alpha \kappa(s) t(s) + \tau(s) b(s), v \rangle_\nu = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\epsilon_\alpha \eta_\alpha \kappa(s) \langle t(s), v \rangle_\nu + \tau(s) \langle b(s), v \rangle_\nu = 0 \Rightarrow \frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \frac{-\epsilon_\alpha \eta_\alpha c}{\langle b(s), v \rangle_\nu}.\end{aligned}$$

Pela terceira Equação de Frenet, temos

$$b'(s) = (-1)^\nu \epsilon_\alpha \tau(s) n(s) \Rightarrow \langle b'(s), v \rangle_\nu = \underbrace{\langle (-1)^\nu \epsilon_\alpha \tau(s) n(s), v \rangle_\nu}_{=0 \text{ (Equação 12)}} = 0.$$

Dessa forma, $\langle b'(s), v \rangle_\nu$ é constante e, consequentemente, $\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}$ é também constante.

Reciprocamente, suponha que $\tau(s) = c\kappa(s)$, $c \in \mathbb{R}$.

Se $c = 0$, então $\tau(s) = 0$, a curva α é plana e

$$b'(s) = \vec{0} \Rightarrow b(s) = b \in \mathbb{R}^3, \quad \forall s \in I.$$

Como $\langle t(s), b(s) \rangle_\nu = 0$, pois são vetores ortonormais, então b é o vetor procurado.

Se $c \neq 0$, vamos procurar $v \in \mathbb{R}_\nu^3$ tal que $\langle t(s), v \rangle_\nu = c$. Escrevendo v na base $\{t(s), n(s), b(s)\}$:

$$v = v_x(s)t(s) + v_y(s)n(s) + v_z(s)b(s). \quad (13)$$

Pelo Lema 3.1, a componente de v na direção de $t(s)$ é $\langle v, t(s) \rangle_\nu$, que por hipótese é constante. Então $v_x(s) = v_x \in \mathbb{R}$. Assim, a derivada da Equação (13) é:

$$\begin{aligned}0 &= v_x t'(s) + v_y'(s)n(s) + v_y(s)n'(s) + v_z'(s)b(s) + v_z(s)b'(s) = \\ &= v_x \kappa(s)n(s) + v_y'(s)n(s) + v_y(s)(-\epsilon_\alpha \eta_\alpha \kappa(s)t(s) + \tau(s)b(s)) + v_z'(s)b(s) + v_z(s)(-1)^{\nu+1} \epsilon_\alpha \tau(s)n(s) \\ &= -v_y(s)\epsilon_\alpha \eta_\alpha \kappa(s)t(s) + (v_x \kappa(s) + v_y'(s) + v_z(s)(-1)^{\nu+1} \epsilon_\alpha \tau(s))n(s) + (v_y(s)\tau(s) + v_z'(s))b(s) = \\ &= -v_y(s)\epsilon_\alpha \eta_\alpha \kappa(s)t(s) + (v_x \kappa(s) + v_y'(s) + v_z(s)(-1)^{\nu+1} \epsilon_\alpha c\kappa(s))n(s) + (v_y(s)c\kappa(s) + v_z'(s))b(s).\end{aligned}$$

Pela independência linear de $t(s)$, $n(s)$ e $b(s)$

$$\begin{cases} -v_y(s)\epsilon_\alpha \eta_\alpha \kappa(s) = 0 & \text{(i)} \\ v_x \kappa(s) + v_y'(s) + v_z(s)(-1)^{\nu+1} \epsilon_\alpha c\kappa(s) = 0 & \text{(ii)} \\ v_y(s)c\kappa(s) + v_z'(s) = 0 & \text{(iii)} \end{cases}.$$

De (i): $v_y = \vec{0}$. Aplicando em (iii), temos

$$v_x \kappa(s) + 0 + v_z(s)(-1)^{\nu+1} \epsilon_\alpha c\kappa(s) = 0 \Rightarrow v_z(s) = (-1)^\nu \frac{v_x \kappa(s)}{\epsilon_\alpha c\kappa(s)} = (-1)^\nu \epsilon_\alpha \frac{v_x}{c}.$$

Assim, $v = v_x t(s) + (-1)^\nu \epsilon_\alpha \frac{v_x}{c} b(s)$ é tal que

$$\langle t(s), v \rangle_\nu = v_x \langle t(s), t(s) \rangle_\nu = v_x \epsilon_\alpha.$$

Portanto, α é uma hélice na direção v . □

Teorema 4.88. (Teorema Fundamental das Curvas Admissíveis) Sejam $\kappa, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas, com κ positiva, $p_0 \in \mathbb{R}_\nu^3$, $s_0 \in I$ e $\{t_0, n_0, b_0\}$ uma base pseudo-ortonormal positiva de $\mathbb{R}_\nu^3$. Então existe uma única curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^3$ admissível e com velocidade unitária tal que $\alpha(s_0) = p_0$, $\{t_\alpha(s_0), n_\alpha(s_0), b_\alpha(s_0)\} = \{t_0, n_0, b_0\}$, $\kappa_\alpha(s) = \kappa(s)$ e $\tau_\alpha(s) = \tau(s)$, para todo $s \in I$.

Demonstração: Vamos mostrar que existe um referencial ortonormal $\{t(s), n(s), b(s)\}$ que satisfaz as Equações de Frenet e, em seguida, definir uma curva $\alpha(s)$ com torção e curvatura procuradas.

Sejam $\epsilon = \epsilon_{t_0}$, $\eta = \epsilon_{n_0}$, $t(s), n(s)$ e $b(s)$, tais que

$$\begin{cases} t'(s) = \kappa(s)n(s); \\ n'(s) = -\epsilon\eta\kappa(s)t(s) + \tau(s)b(s); \\ b'(s) = (-1)^{\nu+1}\epsilon\tau(s)n(s); \\ (t(s_0), n(s_0), b(s_0)) = (t_0, n_0, b_0). \end{cases}$$

Dessa forma, podemos escrever esse sistema a partir das seguintes equações diferenciais:

- (i) $\frac{d}{ds}(\langle t(s), t(s) \rangle_\nu) = 2\kappa(s)\langle t(s), n(s) \rangle_\nu;$
- (ii) $\frac{d}{ds}(\langle n(s), n(s) \rangle_\nu) = -2\kappa(s)\langle t(s), n(s) \rangle_\nu - 2\tau(s)\langle b(s), n(s) \rangle_\nu;$
- (iii) $\frac{d}{ds}(\langle b(s), b(s) \rangle_\nu) = 2\tau(s)\langle n(s), b(s) \rangle_\nu;$
- (iv) $\frac{d}{ds}(\langle t(s), n(s) \rangle_\nu) = \kappa(s)\langle n(s), n(s) \rangle_\nu - 2\kappa(s)\langle t(s), n(s) \rangle_\nu - \tau(s)\langle t(s), b(s) \rangle_\nu;$
- (v) $\frac{d}{ds}(\langle t(s), b(s) \rangle_\nu) = \kappa(s)\langle b(s), n(s) \rangle_\nu + \tau(s)\langle t(s), n(s) \rangle_\nu;$
- (vi) $\frac{d}{ds}(\langle b(s), n(s) \rangle_\nu) = \tau(s)\langle n(s), n(s) \rangle_\nu - \kappa(s)\langle t(s), b(s) \rangle_\nu - \tau(s)\langle b(s), b(s) \rangle_\nu,$

com condições iniciais

$$\langle t(s_0), t(s_0) \rangle_\nu = \epsilon, \langle n(s_0), n(s_0) \rangle_\nu = \eta, \langle b(s_0), b(s_0) \rangle_\nu = (-1)^\nu \epsilon \eta$$

$$\text{e } \langle t(s_0), n(s_0) \rangle_\nu = \langle t(s_0), b(s_0) \rangle_\nu = \langle n(s_0), b(s_0) \rangle_\nu = 0.$$

Do Teorema de Existência e Unicidade de soluções de sistemas de equações diferenciais, fixado s_0 , existe uma única solução $\{t(s), n(s), b(s)\}$ do sistema, onde, para cada $s \in I$,

$$\langle t(s), t(s) \rangle_\nu = \epsilon, \langle n(s), n(s) \rangle_\nu = \eta, \langle b(s), b(s) \rangle_\nu = (-1)^\nu \epsilon \eta \quad (14)$$

$$\text{e } \langle t(s), n(s) \rangle_\nu = \langle t(s), b(s) \rangle_\nu = \langle n(s), b(s) \rangle_\nu = 0. \quad (15)$$

Portanto, as Equações (14) e (15) são a única solução para o PVI e $\{t(s), n(s), b(s)\}$ é o referencial ortonormal procurado. Por fim, defina $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^3$ da forma:

$$\alpha(s) = p_0 + \int_{s_0}^s t(u) du.$$

Nesse caso, temos

- $\alpha(s_0) = p_0$;
- $\alpha'(s) = t(s)$, um vetor unitário, para todo $s \in I$;
- $[\alpha'(s), \alpha''(s)] = [t(s), n(s)]$ não é de tipo luz, pois $b(s)$ não é de tipo luz, logo a curva é admissível;
- $\kappa_\alpha(s) = \|\alpha''(s)\|_\nu = \|t'(s)\|_\nu = \|\kappa(s)n(s)\|_\nu = |\kappa(s)| \cdot \|n(s)\|_\nu = \kappa(s)$;
- $(-1)^{\nu+1} \epsilon \tau(s) n(s) = b'(s) = (-1)^{\nu+1} \epsilon \tau_\alpha(s) n(s) \Rightarrow \tau_\alpha(s) = \tau(s)$.

Portanto, existe uma curva com a mesma curvatura, torção e Referencial de Frenet dados.

Suponha outra curva $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^3$ admissível com velocidade unitária tal que $\alpha(s_0) = \beta(s_0)$, com o mesmo referencial de Frenet que α em s_0 , $\kappa_\beta(s) = \kappa_\alpha(s)$ e $\tau_\beta(s) = \tau_\alpha(s)$, para todo $s \in I$. Como elas tem o mesmo referencial, $\{t_\alpha, n_\alpha, b_\alpha\} = \{t_\beta, n_\beta, b_\beta\}$, são ambas soluções para o mesmo PVI, logo, pela unicidade da solução, $t_\alpha(s) = t_\beta(s)$, para todo $s \in I$.

Dessa forma, α e β diferem por uma constante. Apesar disso, $\alpha(s_0) = \beta(s_0)$, logo $\alpha = \beta$. Portanto, a curva procurada é única, que conclui a prova. $\square$

Por fim, de forma análoga ao encontrado no Teorema Fundamental das Curvas Planas, se duas curvas tem a mesma curvatura, torção, referencial de Frenet em um ponto e mesmo tipo causal, então elas diferem apenas pela posição no espaço. O Corolário 4.89 formaliza tal conceito e sua demonstração pode ser encontrada em (COUTO; LYMBE-ROPOULOS, 2018).

Corolário 4.89. Duas curvas admissíveis com velocidade unitária, mesma curvatura e mesma torção, cujos referenciais de Frenet possuam o mesmo tipo causal diferem por uma isometria positiva de $\mathbb{R}_\nu^3$.

CAPÍTULO 5

CONTATO EM $\mathbb{L}^n$

Neste capítulo, estudaremos o contato de curvas com objetos “padrão”, buscando entender o quanto elas se assemelham. Esses objetos “padrão” são as retas, os círculos e os pseudo-círculos. A escolha de tais curvas não é aleatória, visto que poderíamos estudar o contato com qualquer tipo de objeto. Apesar disso, além de serem as curvas com curvatura constante, quando pensamos no caso euclidiano usual, ao comparar uma curva a um círculo ou uma reta, conseguimos extrair informações sobre o quanto curvada ela é, o que justifica sua escolha e, de forma análoga, a dos pseudo-círculos. Para tanto, desenvolveremos muitas demonstrações somente para o $\mathbb{L}^2$, mas tais resultados no espaço euclidiano usual podem ser encontrados em (RIUL; BARRETO; MOREIRA, 2022), (BRUCE; GIBLIN, 1992) e (IZUMIYA et al., 2015).

5.1 | Equivalências de funções reais

Inicialmente, vejamos os primeiros objetos de estudo ligados a teoria de contato, os germes e a **$\mathcal{R}$ -equivalência**. Seja $s_0 \in \mathbb{R}$, denotamos por $f : (\mathbb{R}, s_0) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em alguma vizinhança de s_0 . Dizemos que duas funções são iguais se elas coincidem em alguma vizinhança, possivelmente menor, de s_0 . Essa igualdade define uma relação de equivalência no conjunto de funções definidas em uma vizinhança de s_0 . Chamamos as classes de equivalência de **germes de f em s_0** . Mais detalhes em (GIBSON, 1979). Quando também desejamos fixar a imagem de s_0 , escrevemos

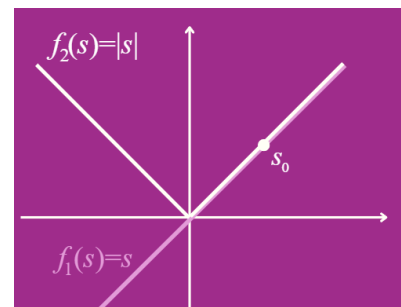
$f : (\mathbb{R}, s_0) \rightarrow (\mathbb{R}, p)$, onde $f(s_0) = p$.

Exemplo 5.1. As funções $f_1(s) = s$ e $f_2(s) = |s|$ estão no mesmo germe em s_0 , para todo $s_0 > 0$.

De fato, se $s_0 > 0$, em uma vizinhança $V \subseteq (0, \infty)$ de s_0 , temos $f_1(s) = s = f_2(s)$, para todo $s \in V$. A Figura 46 ilustra o gráfico das funções f_1 e f_2 próximas a algum $s_0 > 0$.

De agora em diante, ao citar um germe $f : (\mathbb{R}, s_0) \rightarrow \mathbb{R}$ como uma função, nos referimos a um representante da classe de equivalência de f .

Figura 46: O germe $|s|$ em s_0 .



Fonte: Elaboração própria (2026).

Definição 5.2. Sejam $f_1 : (\mathbb{R}, s_1) \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_2 : (\mathbb{R}, s_2) \rightarrow \mathbb{R}$ funções suaves. Dizemos que f_1 em s_1 é **$\mathcal{R}$ -equivalente** à f_2 em s_2 se existem intervalos abertos $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}$ tais que

$s_1 \in V_1$, $s_2 \in V_2$, um difeomorfismo $h : V_1 \rightarrow V_2$ e uma constante c , tais que $h(s_1) = s_2$ e $f_1(s) = f_2(h(s)) + c$, para todo $s \in V_1$.

Dessa forma, a função f_1 , em uma vizinhança de s_1 , é obtida de f_2 , em uma vizinhança de s_2 através de uma mudança de coordenadas e da adição de uma constante $c = f_1(s_1) - f_2(s_2)$, de modo que o diagrama a seguir seja comutativo.

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{R} \\ h \downarrow & & \downarrow x \rightarrow x-c \\ V_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbb{R} \end{array}$$

Observação 5.3. A $\mathcal{R}$ -equivalência é uma relação de equivalência.

(i) Reflexiva: f_1 é $\mathcal{R}$ -equivalente à f_1 .

De fato, tome $h(s) = s$ a função identidade e $c = 0$, temos $f_1(s) = f_1(h(s)) + 0$;

(ii) Simétrica: f_1 é $\mathcal{R}$ -equivalente à f_2 se, e somente se, f_2 é $\mathcal{R}$ -equivalente à f_1 .

Se f_1 é $\mathcal{R}$ -equivalente à f_2 , existe um difeomorfismo h e uma constante c , tal que $f_1(s) = f_2(h(s)) + c$. Tomando o difeomorfismo h^{-1} e $-c$, vale que $f_2(s) = f_1(h^{-1}(s)) - c$. Portanto, f_2 é $\mathcal{R}$ -equivalente à f_1 e a recíproca é análoga;

(iii) Transitiva: Se f_1 é $\mathcal{R}$ -equivalente à f_2 e f_2 é $\mathcal{R}$ -equivalente à f_3 , então f_1 é $\mathcal{R}$ -equivalente à f_3 .

De fato, sejam h, g difeomorfismos e $c, d \in \mathbb{R}$ tais que

$$f_1(s) = f_2(h(s)) + c \text{ e } f_2(s) = f_3(g(s)) + d.$$

Então, $f_1(s) = (f_3(g(h(s)))) + d + c$, logo f_1 é $\mathcal{R}$ -equivalente à f_3 , pois $g \circ h$ é difeomorfismo.

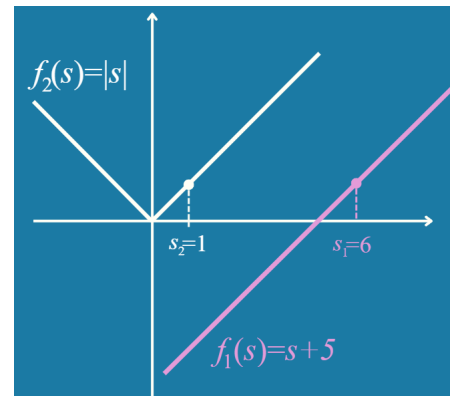
Exemplo 5.4. As funções $f_1(s) = s + 5$ e $f_2(s) = |s|$ são $\mathcal{R}$ -equivalentes em $s_1 = 6$ e $s_2 = 1$.

De fato, tome $s_1 \in V_1 = (5, 7)$, $s_2 \in V_2 = (0, 2)$ e $h(s) = s - 5$, um difeomorfismo definido em V_1 . Assim,

$$\begin{aligned} f_2(h(s)) + 5 &= \underbrace{|s - 5|}_{>0} + 10 = s - 5 + 10 = \\ &= s + 5 = f_1(s), \quad \forall s \in V_1. \end{aligned}$$

Portanto, f_1 em s_1 é $\mathcal{R}$ -equivalente à f_2 em s_2 . A Figura 47 ilustra o gráfico de f_1 em s_1 e f_2 em s_2 .

Figura 47: Gráfico de f_1 e f_2 .



Fonte: Elaboração própria (2026).

Exemplo 5.5. Seja $k \in \mathbb{N}$, $f_1(s) = s^k$ em $s_1 = 0$ e $f_2(s) = -s^k$ em $s_2 = 0$ são $\mathcal{R}$ -equivalentes se, e somente se, k é ímpar.

De fato, para que f_1 e f_2 sejam $\mathcal{R}$ -equivalentes em $s_1 = s_2 = 0$ é necessário que exista um difeomorfismo $h : V_1 \rightarrow V_2$ e $c = f_1(s_1) - f_2(s_2) = f_1(0) - f_2(0) = 0$, tais que

$$f_1(s) = f_2(h(s)) + 0 \Rightarrow s^k = -(h(s))^k.$$

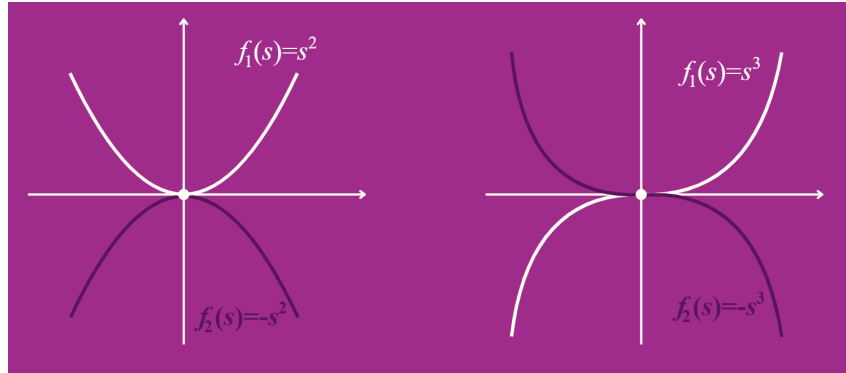
Se k é par, então a única solução é $s = h(s) = 0$, ou seja, não conseguimos definir intervalos tais que h seja difeomorfismo. Portanto, as funções não são $\mathcal{R}$ -equivalentes.

Se k é ímpar, então $h(s) = -s$, para todo s em um intervalo centrado em 0. Portanto,

$$f_2(h(s)) + 0 = -(-s)^k = s^k = f_1(s),$$

isto é, as funções são $\mathcal{R}$ -equivalentes. A Figura 48 ilustra as relações discutidas por meio dos gráficos das funções $s^2, -s^2, s^3$ e $-s^3$.

Figura 48: Comparação do gráfico das funções $\pm s^2$ e $\pm s^3$.



Fonte: Elaboração própria (2026).

Lema 5.6. (Lema de Hadamard) Seja $f : (\mathbb{R}, s_0) \rightarrow \mathbb{R}$ suave, e suponha $f^{(p)}(s_0) = 0$ para todo $p = 1, \dots, k$. Então, existe uma função $f_1 : (\mathbb{R}, s_0) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(s) = f(s_0) + (s - s_0)^{k+1} f_1(s) \quad (16)$$

para todo s em alguma vizinhança de s_0 . Mais ainda, se $f^{(k+1)}(s_0) \neq 0$, então $f_1(s_0) \neq 0$.

Demonstração: Inicialmente, suponha $s_0 = 0$ e $f(s_0) = 0$. Para tanto, considere a função suave $F : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F^{(p)}(0) = 0$, para todo $p = 1, \dots, k$. Queremos mostrar que

$$F(s) = F(s_0) + (s - s_0)^{k+1} F_1(s) = s^{k+1} F_1(s),$$

para todo s em uma vizinhança de 0, onde F_1 é suave. Vamos desenvolver a prova por indução em k .

Se $k = 0$, temos $F(0) = 0$ e buscamos $F(s) = sF_1(s)$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_0^1 \frac{d}{du} F(su) du = F(s) - F(0) = F(s),$$

portanto,

$$F(s) = \int_0^1 \frac{d}{du} F(su) du = \int_0^1 sF'(su) du = s \int_0^1 F'(su) du,$$

de onde podemos tomar $F_1(s) = \int_0^1 F'(su) du$, suave, como queríamos. Mais ainda, se $F'(0) \neq 0$, então

$$0 \neq F'(0) = 0F'_1(0) + F_1(0) = F_1(0).$$

Suponha o resultado válido para $k \in \mathbb{N}$ qualquer, ou seja, se $F^{(p)} = 0$, para todo $p = 1, \dots, k$, existe $F_1(s)$ suave, tal que $F(s) = s^{k+1}F_1(s)$ (Hipótese de Indução).

Assim, tomando seu sucessor, $k + 1$, quando $F^{(p)}(0) = 0$, para todo $p = 1, \dots, k + 1$, temos que, pelo caso $k = 0$, $F(s) = sF_2(s)$. Derivando a igualdade repetidas vezes

$$F^{(p)}(s) = pF_2^{(p-1)}(s) + sF_2^{(p)}(s), \forall p = 1, \dots, k + 1.$$

Avaliando em $s = 0$:

$$F^{(p)}(0) = pF_2^{(p-1)}(0) + 0F_2^{(p)}(0) = 0 \Rightarrow F_2^{(p-1)}(0) = 0, \forall p = 1, \dots, k + 1.$$

Aplicando a hipótese de indução em $F_2(s)$, temos $F_2(s) = s^{k+1}F_1(s)$. Consequentemente, $F(s) = s^{k+2}F_1(s)$.

Por fim, se $F^{(k+1)}(0) \neq 0$, a $k + 1$ -ésima derivada de F é

$$F^{(k+1)}(s) = (k+1)!F_1(s) + \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k+1}{i} \frac{(k+1)!}{(k+1-i)!} s^{k+1-i} F_1^{(i)}(s).$$

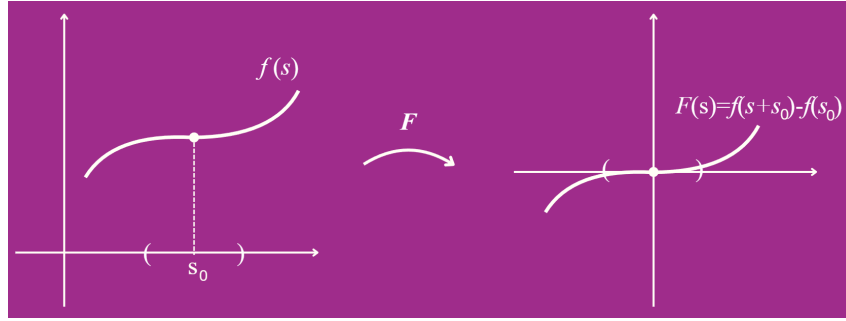
Logo, em $s = 0$, $F^{(k+1)}(0) = (k+1)!F_1(0) \Rightarrow F_1(0) \neq 0$, que finaliza a prova para $s_0 = 0$.

Para o caso geral, o desenvolvimento segue de modo análogo. Tome s em uma vizinhança de s_0 e $F(s) = f(s + s_0) - f(s_0)$, como ilustra a Figura 49. Como $F^{(p)}(0) = 0$, para $1 \leq p \leq k$, segue que $F(s) = s^{k+1}F_1(s)$. Logo $f(s + s_0) = f(s_0) + s^{k+1}F_1(s)$, onde $s + s_0$ está em uma vizinhança de s_0 .

Fazendo $s + s_0 = u$ e $f_1(u) = F_1(u - s_0)$, segue que

$$f(u) = f(s_0) + (u - s_0)^{k+1}f_1(u),$$

onde, se $u = s$, a prova segue com os mesmos argumentos usados no caso particular.

Figura 49: Representação da função $F(s)$.

Fonte: Elaboração própria (2026).

□

Exemplo 5.7. Seja $f(s) = \sin(s) - s$. Como $f'(s) = \cos(s) - 1$ e $f''(s) = -\sin(s)$, então $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$. Dessa forma, pelo Lema de Hadamard, existe uma função f_1 suave definida em $I \subset \mathbb{R}$ em torno de 0, tal que

$$f(s) = f(0) + (s - 0)^{2+1} f_1(s) \Rightarrow \sin(s) - s = s^3 f_1(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_1(s) = \begin{cases} \frac{\sin(s) - s}{s^3}, & \text{se } s \neq 0; \\ -\frac{1}{6}, & \text{se } s = 0. \end{cases}$$

Na posse do Lema de Hadamard, desenvolveremos um método simples para identificar funções $\mathcal{R}$ -equivalentes a monômios no próximo teorema. Note que aproximar localmente funções a monômios é significativo, já que conseguimos estudar funções que, em sua forma original seriam trabalhosas, por meio de simples polinômios.

Teorema 5.8. (Classificação de Funções) Sejam $f : (\mathbb{R}, s_0) \rightarrow \mathbb{R}$ suave e $k \geq 0$. Suponha que $f^{(p)}(s_0) = 0$ para todo $p = 1, \dots, k$, e que $f^{(k+1)}(s_0) \neq 0$. Então f é $\mathcal{R}$ -equivalente à $g : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ definida por $g(s) = \pm s^{k+1}$, sendo o sinal positivo quando $f^{(k+1)}(s_0) > 0$ e o sinal negativo quando $f^{(k+1)}(s_0) < 0$.

Demonstração: Seja a função f enunciada. Pelo Lema de Hadamard, existe f_1 tal que $f(s) = f(s_0) + (s - s_0)^{k+1} f_1(s)$. Defina a função $h(s) = (s - s_0)(\pm f_1(s))^{\frac{1}{k+1}}$, onde o sinal é o mesmo de $f_1(s_0)$. Observe que $h(s_0) = 0$ e

$$h'(s) = (\pm f_1(s))^{\frac{1}{k+1}} + (s - s_0) \frac{1}{k+1} (\pm f_1(s))^{\frac{1}{k+1}-1},$$

de modo que $h'(s_0) = (\pm f_1(s_0))^{\frac{1}{k+1}} \neq 0$. Assim, h é um difeomorfismo em uma vizinhança de s_0 . Note ainda que $f^{(k+1)}(s_0) = (k+1)! f_1(s_0)$, e uma vez que $(k+1)!$ é sempre positivo, o sinal de $f^{(k+1)}(s_0)$ coincide com o sinal de $f_1(s_0)$.

Temos que para g como no enunciado,

$$g(h(s)) = \left[(s - s_0)(\pm f_1(s))^{\frac{1}{k+1}} \right]^{k+1} = (s - s_0)^{k+1} f_1(s).$$

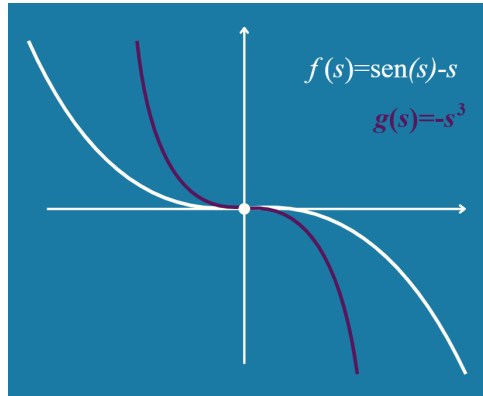
Como $f_1(s) = \frac{f(s) - f(s_0)}{(s - s_0)^{k+1}}$, para $s \neq s_0$, segue que $g(h(s)) = f(s) - f(s_0)$, ou seja,

$$f(s) = g(h(s)) + f(s_0),$$

sendo $c = f(s_0)$. Logo, $f(s)$ em s_0 é $\mathcal{R}$ -equivalente à $g(s)$ em 0. $\square$

Exemplo 5.9. A função $f(s) = \sin(s) - s$ em $s = 0$, estudada no Exemplo 5.7, é $\mathcal{R}$ -equivalente à $g(s) = -s^3$ em $s = 0$. A Figura 50 ilustra o gráfico das duas funções em torno de 0.

Figura 50: Comparação do gráfico das funções $\sin(s) - s$ e $-s^3$.



Fonte: Elaboração própria (2026).

Observação 5.10. A recíproca do Teorema 5.8 também é válida, isto é, se $f : (\mathbb{R}, s_0) \rightarrow \mathbb{R}$ é $\mathcal{R}$ -equivalente à $g(s) = \pm s^{k+1}$, então $f^{(p)}(s_0) = 0$, para todo $p = 1, \dots, k$, e $f^{(k+1)}(s_0) \neq 0$.

De fato, se as funções são $\mathcal{R}$ -equivalentes, existem abertos $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}$, $s_0 \in V_1$, $0 \in V_2$ e um difeomorfismo $h : V_1 \rightarrow V_2$, tais que $h(s_0) = 0$ e

$$f(s) = g(h(s)) + c = \pm h(s)^{k+1} + c.$$

Analisando as derivadas de f , temos que $f^{(p)}(s_0) = 0$, para todo $p = 1, \dots, k$, pois todos os termos acompanham $h(s)$. Por outro lado, $f^{(k+1)}(s_0) = (k+1)!h'(s_0)^{k+1} \neq 0$, pois h é um difeomorfismo, logo $h'(s_0) \neq 0$, que conclui a prova.

Dessa forma, a poderosa equivalência estudada entre funções e monômios motiva a seguinte nomenclatura das classes $\mathcal{R}$ -equivalentes:

Definição 5.11. Seja $f : (\mathbb{R}, s_0) \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{R}$ -equivalente à $\pm s^{k+1}$. Neste caso, para $k \geq 0$, dizemos que f tem uma **singularidade do tipo A_k** ou uma **singularidade A_k** em s_0 . Mais ainda, dizemos que f tem singularidade do tipo $A_{\geq k}$ quando $f^{(p)}(s_0) = 0$ para $1 \leq p \leq k$.

Exemplo 5.12. A função $f(s) = \sin(s) - s$ em $s = 0$, estudada no Exemplo 5.7, tem singularidade de tipo A_2 .

Apesar disso, podemos nos perguntar: toda função f possui singularidade do tipo A_k para algum k ? Para que isso ocorra, é necessário que a derivada de f de alguma ordem seja não nula. Se f é uma função analítica, ou seja, que pode ser escrita como uma série de potências convergente

$$f(s) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p (s - s_0)^p,$$

basta tomar o menor p tal que a_p não se anule e, assim, f teria singularidade do tipo A_{p-1} . No entanto, nem todas as funções suaves são analíticas. As que não satisfazem essa propriedade são chamadas **funções flat**. No decorrer deste texto, não serão consideradas funções flat.

5.2 | Contato de Curvas Planas

Durante esta seção, estudaremos a teoria de contato em $\mathbb{R}_{\nu}^n$, onde $\nu = 0, 1$. Devemos ressaltar que algumas definições serão feitas para $n = 2, 3$, porém estamos interessados somente no contato de curvas planas, logo os exemplos apresentam curvas de $\mathbb{L}^2$. As referências principais durante essa seção são (SALOON; TARI, 2012), (FRANCISCO, 2019) e (RIUL; BARRETO; MOREIRA, 2022). Para mais detalhes da teoria de contato no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ consultar (BRUCE; GIBLIN, 1992) e (IZUMIYA et al., 2015). Mais informações sobre a teoria de contato desenvolvida em $\mathbb{L}^3$ também podem ser encontradas em (IZUMIYA et al., 2015).

Seja $F : \mathbb{R}_{\nu}^n \rightarrow \mathbb{R}$, uma aplicação diferenciável e suponha que 0 é um valor regular de F , isto é, não existem pontos críticos no nível 0, ou seja, se $F(x) = 0$, então $\nabla F(x) \neq \vec{0}$. Assim, o conjunto

$$F^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}_{\nu}^n : F(x) = 0\}$$

é uma hipersuperfície. Quando $n = 2$, temos que $F^{-1}(0)$ é uma curva regular e quando $n = 3$, $F^{-1}(0)$ é uma superfície regular. O conceito de hipersuperfície é discutido com mais detalhes em (LIMA, 2004).

Exemplo 5.13. Sejam $v = (v_1, \dots, v_n)$, $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_{\nu}^n$ tais que $v \neq p$, $v \neq \vec{0}$ e $F : \mathbb{R}_{\nu}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função.

- (i) Seja $F(x) = \langle x - p, x - p \rangle_\nu - \langle v - p, v - p \rangle_\nu$, onde $x = (x_1, \dots, x_n)$, então 0 é valor regular de F .

De fato, como

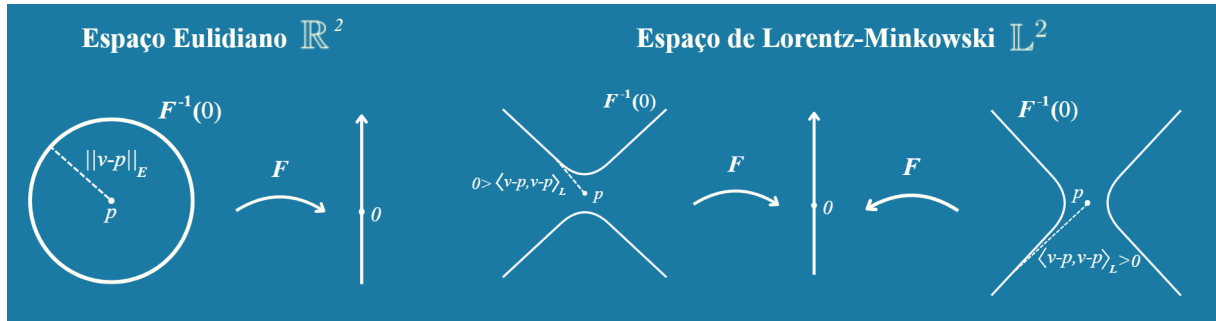
$$\begin{aligned} \nabla F(x) &= \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x) \right) = \\ &= \left(2 \left\langle x - p, \frac{\partial F}{\partial x_1}(x - p) \right\rangle_\nu, \dots, 2 \left\langle x - p, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x - p) \right\rangle_\nu \right) = \\ &= 2(\langle x - p, e_1 \rangle_\nu, \dots, \langle x - p, e_n \rangle_\nu) = 2(x_1 - p_1, \dots, (-1)^\nu(x_n - p_n)). \end{aligned}$$

Então $\nabla F(x) = \vec{0}$ se, e somente se, $x_i = v_i$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, mas neste caso $F(v) = -\langle v - p, v - p \rangle_\nu \neq 0$, se $v - p$ não é de tipo luz. Portanto, 0 é valor regular de F .

Em $\mathbb{R}^2$, $F^{-1}(0)$ é o círculo centrado em p passando por v . Enquanto que, em $\mathbb{L}^2$, $F^{-1}(0)$ é, ou um pseudo-círculo centrado em p passando por v a depender do tipo causal de $v - p$. Observe que se $v - p$ é de tipo luz, então 0 não é mais valor regular.

A Figura 51 ilustra o círculo $\mathbb{S}^1$ em $\mathbb{R}^2$ e os pseudo-círculos $\mathbb{H}_\pm^1$, onde $v - p$ é de tipo espaço, e $\mathbb{S}_1^1$, onde $v - p$ é de tipo tempo, em $\mathbb{L}^2$;

Figura 51: Representação do conjunto $F^{-1}(0)$ em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{L}^2$ nos diferentes tipos causais de $v - p$.



Fonte: Elaboração própria (2026).

- (ii) Se $F(x) = \langle x - p, v \rangle_\nu$, com $x = (x_1, \dots, x_n)$, 0 também é valor regular de F .

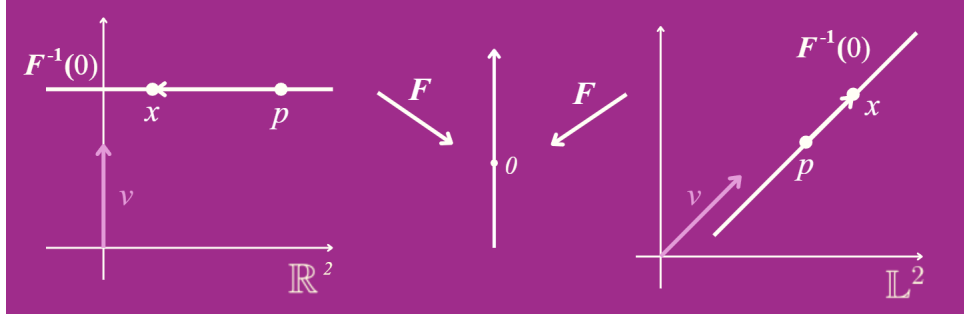
De fato, pois

$$\begin{aligned} \nabla F(x) &= \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x) \right) = \\ &= \left(\left\langle \frac{\partial F}{\partial x_1}(x - p), v \right\rangle_\nu, \dots, \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_n}(x - p), v \right\rangle_\nu \right) = \\ &= (\langle e_1, v \rangle_\nu, \dots, \langle e_n, v \rangle_\nu) = (v_1, \dots, (-1)^\nu v_n) \neq \vec{0}. \end{aligned}$$

Portanto, 0 é valor regular. Neste caso, $F^{-1}(0)$ é a reta passando por p ortogonal à v em $\mathbb{R}^2$ à direita e em

$\mathbb{L}^2$ à esquerda, onde v é de tipo luz. Nesse caso, a reta ortogonal à v passando por p tem a mesma direção que v .

Figura 52: Representação do conjunto $F^{-1}(0)$ em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{L}^2$, onde v é de tipo luz.



Fonte: Elaboração própria (2026).

Definição 5.14. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$, $n = 2, 3$ uma curva regular e $F : \mathbb{R}_\nu^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que 0 é um valor regular. Dizemos que α e $F^{-1}(0)$ tem **contato de ordem k em $s = s_0$** (ou em $p = \alpha(s_0)$) se a função suave

$$g(s) = F(\alpha(s)) = F(\alpha_1(s), \dots, \alpha_n(s)) \quad (17)$$

satisfaz $g^{(i)}(s_0) = 0$, para $i \in \{0, \dots, k-1\}$ e $g^{(k)}(s_0) \neq 0$. Dizemos que o contato é de **ordem pelo menos k** se retirarmos a condição $g^{(k)}(s_0) \neq 0$.

Teorema 5.15. Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$, $n = 2, 3$, uma curva regular e $F : \mathbb{R}_\nu^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que 0 é um valor regular. Então, α e $F^{-1}(0)$ tem contato de ordem $k \geq 0$ em s_0 se, e somente se, a função $g = F \circ \alpha$ tem singularidade do tipo A_{k-1} em s_0 .

Demonstração: De acordo com a Definição 5.14, α e $F^{-1}(0)$ tem contato de ordem k em s_0 se, e somente se, a função $g = F \circ \alpha$ satisfaz as seguintes condições:

$$g'(s_0) = \dots = g^{(k-1)}(s_0) = 0 \text{ e } g^{(k)}(s_0) \neq 0.$$

No entanto, pela Definição 5.11, isso é equivalente a dizer que a função g tem singularidade do tipo A_{k-1} em s_0 . $\square$

Exemplo 5.16. O gráfico da função $f_k(s) = s^k$, $k \in \mathbb{N}$, tem contato de ordem k com o eixo coordenado x na origem.

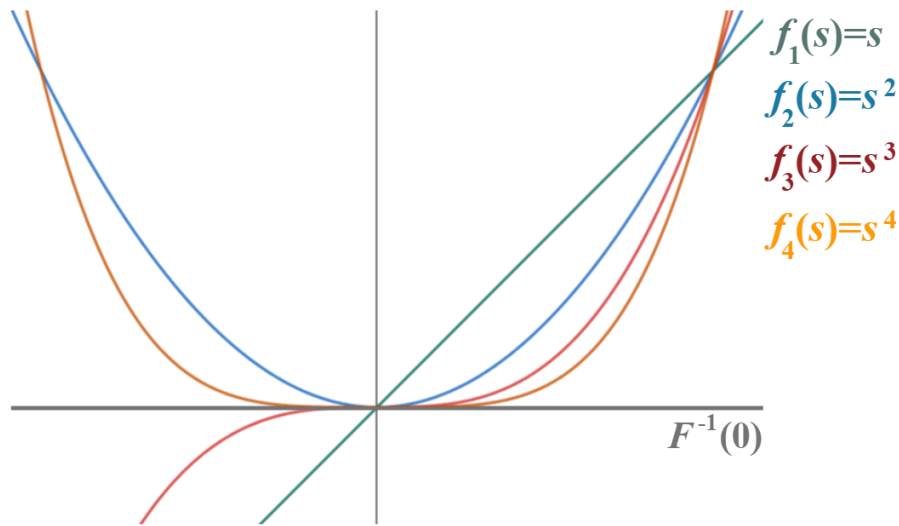
De fato, seja $\alpha(s) = (s, s^k)$, $s \in \mathbb{R}$, a parametrização do gráfico da função s^k em $\mathbb{R}_\nu^2$ e $F(x, y) = y$ uma aplicação em $\mathbb{R}_\nu^2$, tal que $F^{-1}(0)$ representa o eixo x . Pelo fato de $\nabla F(x, y) = (0, 1) \neq \vec{0}$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}_\nu^2$, então 0 é valor regular de F .

Tomando $g(s) = F(\alpha(s)) = s^k$, temos

$$g'(s) = ks^{k-1}, \quad g''(s) = k(k-1)s^{k-2}, \dots, g^{(k)}(s) = k!.$$

Para tanto, em $s = 0$, $g'(0) = g''(0) = \dots = g^{(k-1)}(0) = 0$, mas $g^{(k)}(0) = k! \neq 0$. Dessa forma, g tem singularidade de tipo A_{k-1} em $s = 0$. Portanto, pelo Teorema 5.15, o gráfico de s^k tem contato de ordem k com a reta $y = 0$ em $s = 0$. A Figura 53 ilustra o gráfico das funções s, s^2, s^3 e s^4 e, conforme k cresce, a função s^k se aproxima mais da reta $y = 0$ próximo da origem.

Figura 53: Gráfico da função $f_k(s) = s^k$, para $k = 1, 2, 3, 4$.



Fonte: Elaboração própria (2026).

Definição 5.17. Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$, $n = 2, 3$ uma curva regular e $v \in \mathbb{R}_\nu^n$ um vetor não nulo.

(i) A **função distância ao quadrado** de α à v é a função

$$\begin{aligned} f_d : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto f_d(s) = \langle \alpha(s) - v, \alpha(s) - v \rangle_\nu. \end{aligned}$$

(ii) A **função altura** de α na direção v é a função

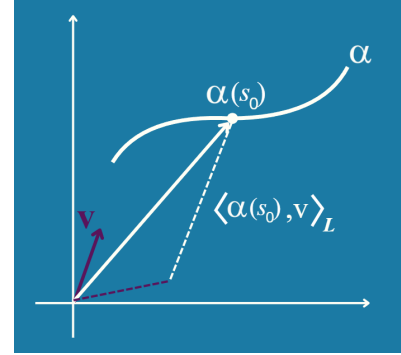
$$\begin{aligned} f_h : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto f_h(s) = \langle \alpha(s), v \rangle_\nu. \end{aligned}$$

Observe que, quando v é unitário e não do tipo luz, a função altura f_h calcula a componente de $\alpha(s)$ na direção de v , isto é, a “distância” de $\alpha(s)$ à reta que passa pela origem pseudo-ortogonal à v :

$$\text{proj}_v \alpha(s) = \frac{\langle \alpha(s), v \rangle_\nu}{\langle v, v \rangle_\nu} v = \langle \alpha(s), v \rangle_\nu v = f_h(\alpha(s))v.$$

A Figura 54 ilustra a componente de $\alpha(s_0)$ em $\mathbb{L}^2$ na direção do vetor de tipo tempo v .

Figura 54: Interpretação de f_h .



Fonte: Elaboração própria (2026).

Proposição 5.18. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^2$, uma curva regular e $\alpha(s_0)$ um ponto que não é de tipo luz.

- (i) A curva α tem contato de ordem k , em $s = s_0$ com o círculo ($\nu = 0$) ou com o pseudo-círculo ($\nu = 1$) de centro $v \in \mathbb{R}^n$, passando por $\alpha(s_0)$, se, e somente se, a função distância ao quadrado f_d de α à v tem singularidade do tipo A_{k-1} em s_0 ;
- (ii) A curva α tem contato de ordem k com a reta ortogonal à v em $s = s_0$ se, e somente se, a função altura f_h de α na direção de v tem singularidade do tipo A_{k-1} em s_0 .

Demonstração: O círculo ou pseudo-círculo de centro $v \in \mathbb{R}^n$, passando por $\alpha(s_0)$ e a reta ortogonal à v em $s = s_0$ são dados pelas equações $F^{-1}(0)$, onde $F_h, F_d : \mathbb{R}_\nu^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são expressas, respectivamente, por:

$$F_d(x) = \langle x - v, x - v \rangle_\nu - \langle \alpha(s_0) - v, \alpha(s_0) - v \rangle_\nu \quad \text{e} \quad F_h(x) = \langle x - \alpha(s_0), v \rangle_\nu$$

com $x \in \mathbb{R}_\nu^2$, estudadas no Exemplo 5.13. Dessa forma, as funções $g_d = F_d \circ \alpha$ e $g_h = F_h \circ \alpha$,

$$g_d(s) = \langle \alpha(s) - v, \alpha(s) - v \rangle_\nu - \langle \alpha(s_0) - v, \alpha(s_0) - v \rangle_\nu \quad \text{e} \quad g_h(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), v \rangle_\nu$$

medem os contatos de α com os respectivos conjuntos $F^{-1}(0)$ em $s = s_0$. Por fim, determinar o número de derivadas da função g_d que se anulam em $s = s_0$, ou seja, determinar a singularidade de tipo A_k de g_d , é equivalente a determinar o número de derivadas da função distância ao quadrado, f_d , que se anulam no mesmo parâmetro, uma vez que o fator constante $-\langle \alpha(s_0) - v, \alpha(s_0) - v \rangle_\nu$ não interfere. De maneira análoga, o número de derivadas da função g_h e da função altura $f_h(s) = \langle \alpha(s), v \rangle_\nu$ que se anulam em $s = s_0$ é o mesmo. Portanto, do Teorema 5.15, o resultado segue imediatamente. $\square$

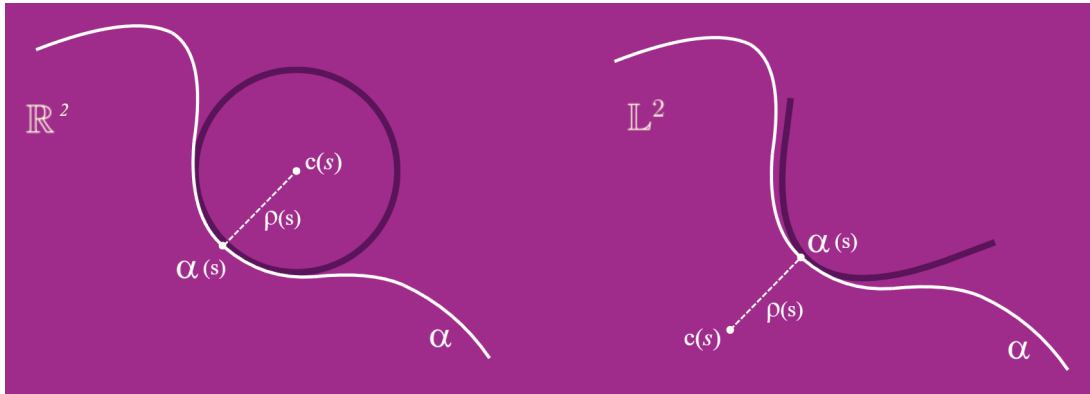
Além disso, podemos classificar um ponto de uma curva α pela ordem de contato do ponto com um círculo ou pseudo-círculo, por meio da seguinte definição:

Definição 5.19. Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^2$ uma curva regular e $p = \alpha(s_0)$ um ponto que não é do tipo luz.

- (i) Dizemos que p é um **vértice ordinário** (respectivamente **degenerado**) se existe um círculo ($\nu = 0$) ou um pseudo-círculo ($\nu = 1$) que possui contato de ordem 4 (resp. pelo menos 5) com α em s_0 ;
- (ii) Dizemos que p é uma **inflexão ordinária** (respectivamente **degenerada**) se existe uma reta que possui contato de ordem 3 (resp. pelo menos 4) com α em s_0 .

Definição 5.20. Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^2$ é uma curva regular tal que $\kappa(s) \neq 0$ para todo s , a quantidade $\rho(s) = \frac{1}{|\kappa(s)|}$ é denominada **raio de curvatura** de α em s . O círculo ou pseudo-círculo de raio $\rho(s)$ e centro $c(s) = \alpha(s) - \frac{1}{\kappa(s)}n(s)$ é chamado **círculo osculador** e $c(s)$ é dito **centro de curvatura**. A Figura 55 ilustra as duas definições em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{L}^2$.

Figura 55: Raio de curvatura e centro de curvatura em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{L}^2$.



Fonte: Elaboração própria (2026).

Observação 5.21. O termo círculo osculador é um abuso de linguagem, já que os pseudo-círculos de $\mathbb{L}^2$ não são circunferências (COUTO; LYMBEROPOULOS, 2018).

O próximo resultado esquematiza tudo o que foi estudado sobre contato no plano $\mathbb{L}^2$. A tabela apresentada é baseada na tabela de (RIUL; BARRETO; MOREIRA, 2022), onde também é feito um estudo detalhado de contato no espaço euclidiano.

Teorema 5.22. Sejam $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^2$ uma curva com velocidade unitária e $v \in \mathbb{L}^2$ um vetor.

- (i) A Tabela 2 apresenta condições geométricas sobre a curva α e o tipo A_k de singularidade da função distância ao quadrado para que tenhamos contato de ordem até 5 entre α e um pseudo-círculo centrado em v , passando por $\alpha(s)$.

Tabela 2: Função distância ao quadrado para curvas em $\mathbb{L}^2$.

Singularidade	Condição	Interpretação geométrica
A_1	$v = \alpha(s) - \lambda n(s), \lambda \in \mathbb{R}$	v pertence à reta normal à α em s e o contato de α em s com qualquer pseudo-círculo com centro em $n(s)$ é de ordem 2.
A_2	$v = \alpha(s) - \frac{1}{\kappa(s)}n(s),$ $\kappa(s) \neq 0$	O único pseudo-círculo passando por α com contato de ordem 3 com a curva em s é o círculo osculador.
A_3	$v = \alpha(s) - \frac{1}{\kappa(s)}n(s)$ $\kappa(s) \neq 0, \kappa'(s) = 0$	O círculo osculador tem contato de ordem 4 com α em s e α tem um vértice ordinário em s .
A_4	$v = \alpha(s) - \frac{1}{\kappa(s)}n(s)$ $\kappa(s) \neq 0, \kappa'(s) = \kappa''(s) = 0$	O círculo osculador tem contato de ordem 5 com α em s e α tem um vértice degenerado em s .

Fonte: Elaboração própria (2026).

- (ii) A Tabela 3 apresenta condições geométricas sobre a curva α e o tipo de A_k -singularidade da função altura para que tenhamos contato de ordem até 4 entre α e a reta ortogonal à v , passando por $\alpha(s)$.

Tabela 3: Função altura para curvas em $\mathbb{L}^2$.

Singularidade	Condição	Interpretação geométrica
A_1	$t(s) \perp v$	A reta tangente é a única que tem contato de ordem (pelo menos) 2.
A_2	$\kappa(s) = 0$	α possui uma inflexão ordinária em s e contato de ordem 3 com a reta tangente.
A_3	$\kappa(s) = \kappa'(s) = 0$	α possui uma inflexão degenerada em s e contato de ordem 4 com a reta tangente.

Fonte: Elaboração própria (2026).

Demonstração: Vamos demonstrar este resultado utilizando as Fórmulas de Frenet-

Serret para curvas planas e estabelecendo as condições para diferentes ordens de contato da curva com pseudo-círculos e retas.

- (i) Para o contato com pseudo-círculos, estudaremos os tipos de singularidade da função distância ao quadrado $f_d(s) = \langle \alpha(s) - v, \alpha(s) - v \rangle_L$.

- $f'_d(s) = 2\langle t(s), \alpha(s) - v \rangle_L$. Dessa forma,

$$f'_d(s) = 0 \Leftrightarrow \alpha(s) - v = \lambda n(s), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Logo, v pertence à reta normal à α em s . Sendo assim, o contato de α em s com qualquer pseudo-círculo cujo centro pertence à reta normal da curva é de ordem pelo menos 2 e f_d tem singularidade do tipo $A_{\geq 1}$, sendo exatamente A_1 se o contato for exatamente de ordem 2.

- $f''_d(s) = 2(\kappa(s)\langle n(s), \alpha(s) - v \rangle_L + \epsilon_\alpha)$. Temos $f'_d(s) = f''_d(s) = 0$ se, e somente se, $\alpha(s) - v = \lambda n(s)$ e

$$\kappa(s)\langle n(s), \alpha(s) - v \rangle_L = -\epsilon_\alpha \Leftrightarrow \kappa(s)\lambda(-\epsilon_\alpha) = -\epsilon_\alpha \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{\kappa(s)}.$$

Sendo assim, $v = \alpha(s) - \frac{1}{\kappa(s)}n(s)$. Portanto, o círculo osculador é o único pseudo-círculo passando por $\alpha(s)$ que tem contato de ordem pelo menos 3 e f_d com singularidade $A_{\geq 2}$ com a curva em s ;

- $f'''_d(s) = 2(\kappa'(s)\langle n(s), \alpha(s) - v \rangle_L + \kappa(s)^2\langle t(s), \alpha(s) - v \rangle_L)$. Neste caso, temos $f'_d(s) = f''_d(s) = f'''_d(s) = 0$ se, e somente se, $v = \alpha(s) - \frac{1}{\kappa(s)}n(s)$, $\kappa(s) \neq 0$ e

$$\kappa'(s)\left\langle n(s), \frac{n(s)}{\kappa(s)} \right\rangle_L + \kappa(s)^2\left\langle t(s), \frac{n(s)}{\kappa(s)} \right\rangle_L = 0 \Rightarrow \kappa'(s) = 0.$$

Nessas condições, a função f_d ter singularidade de tipo A_3 e α em s contato de ordem 4 com o círculo osculador, isto é, $\alpha(s)$ é um vértice ordinário;

- $f^{(4)}_d(s) = 2[(\kappa''(s) + \kappa(s)^3)\langle n(s), \alpha(s) - v \rangle_L + 3\kappa(s)\kappa'(s)\langle t(s), \alpha(s) - v \rangle_L - \epsilon_\alpha\kappa(s)^2]$. Finalmente, para $f'_d(s) = f''_d(s) = f'''_d(s) = f^{(4)}_d(s) = 0$, é necessário e suficiente que $v = \alpha(s) - \frac{1}{\kappa(s)}n(s)$, $\kappa(s) \neq 0$, $\kappa'(s) = 0$ e

$$(\kappa''(s) + \kappa(s)^3)\left\langle n(s), \frac{n(s)}{\kappa(s)} \right\rangle_L - \epsilon_\alpha\kappa(s)^2 = 0 \Rightarrow -\epsilon_\alpha\frac{\kappa''(s)}{\kappa(s)} = 0 \Rightarrow \kappa''(s) = 0.$$

Dessa forma, a função f_d ter singularidade de tipo A_4 e α contato de ordem 5 em s com o círculo osculador, ou seja, $\alpha(s)$ é um vértice degenerado.

(ii) Para o contato com retas, estudaremos as singularidades da função altura $f_h(s) = \langle \alpha(s), v \rangle_L$.

- $f'_h(s) = \langle t(s), v \rangle_L$. Temos que $f'_h(s) = 0$ se, e somente se, $t(s)$ é ortogonal a v , ou seja, $n(s) = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Logo, a reta tangente à α em s é a única reta que tem contato de ordem pelo menos 2 com a curva no ponto. Neste caso f_h tem singularidade do tipo $A_{\geq 1}$;
- $f''_h(s) = \kappa(s) \langle n(s), v \rangle_L$. Dessa forma, $f'_h(s) = f''_h(s) = 0$ se, e somente se, $n(s) = \lambda v$ e, conseqüentemente, $\kappa(s) = 0$. Assim, o contato de α em s com a reta tangente é de ordem 3 e f_h tem singularidade de tipo A_2 . Portanto, $\alpha(s)$ é uma inflexão de ordinária;
- $f'''_h(s) = \kappa'(s) \langle n(s), v \rangle_L + \kappa(s)^2 \langle t(s), v \rangle_L$. Neste caso, $f'_h(s) = f''_h(s) = f'''_h(s) = 0$ se, e somente se, $n(s) = \lambda v$ e $\kappa(s) = 0$ $\kappa(s) = \kappa'(s) = 0$. Logo, o contato de α com a reta tangente é de ordem 4 e f_h tem singularidade de tipo 3. Dessa forma, $\alpha(s)$ é uma inflexão degenerada.

□

Exemplo 5.23. Seja a curva $\alpha(s) = (s, s^2)$, $s \in \mathbb{R}$, estudada no Exemplo 4.62 com $a = 1$. Se $s \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, α é de tipo espaço e se $s \in \mathbb{R} - [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, α é de tipo tempo. Caso contrário, se $s \in \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$, α é de tipo luz. Para $s \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$, definimos

$$t_\alpha(s) = \frac{(1, 2s)}{\sqrt{\epsilon_\alpha(1 - 4s^2)}}, \quad n_\alpha(s) = \frac{\epsilon_\alpha(2s, 1)}{\sqrt{\epsilon_\alpha(1 - 4s^2)}} \quad \text{e} \quad \kappa_\alpha(s) = \frac{2}{\sqrt{\epsilon_\alpha(1 - 4s^2)}^3}.$$

Pelo teorema anterior, para que α tenha o maior contato com um pseudo-círculo, o vetor v deve ser da forma:

$$\begin{aligned} v &= \alpha(s) - \frac{1}{\kappa_\alpha(s)} n_\alpha(s) = (s, s^2) - \frac{\sqrt{\epsilon_\alpha(1 - 4s^2)}^3}{2} \frac{\epsilon_\alpha(2s, 1)}{\sqrt{\epsilon_\alpha(1 - 4s^2)}} \\ &= (s, s^2) - \frac{(1 - 4s^2)}{2} (2s, 1) = \left(s - s + 4s^3, s^2 - \frac{1}{2} + 2s^2 \right) \\ &= \left(4s^3, -\frac{1}{2} + 3s^2 \right). \end{aligned}$$

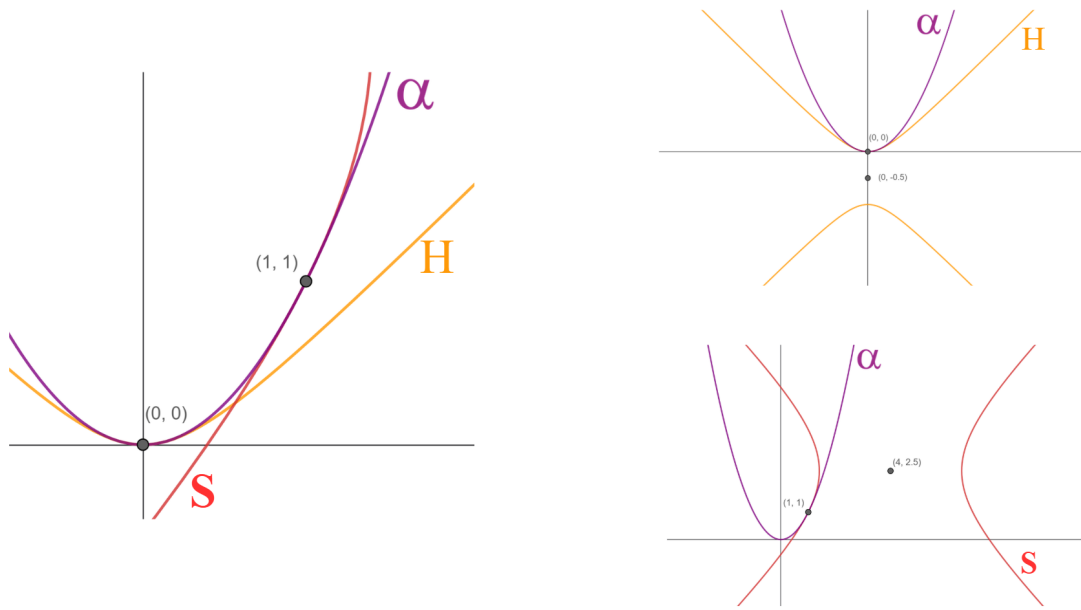
Assim, o círculo oscular que tem contato de ordem pelo menos 3 com α em

- (i) $s = 0$ tem centro de curvatura $v = \left(0, -\frac{1}{2} \right)$, raio de curvatura $\rho(0) = \frac{1}{2}$ e equação implícita: $H : x^2 - \left(y + \frac{1}{2} \right)^2 = -\frac{1}{4}$.

- (ii) $s = 1$ tem centro de curvatura $v = \left(4, \frac{5}{2}\right)$, raio de curvatura $\rho(1) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ e equação implícita $S : (x - 4)^2 - \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$.

A Figura 56 ilustra à direita o traço de α com relação aos círculos osculadores H e S , destacando os centros dos pseudo-círculos, e à esquerda as três curvas próximas dos pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$, que mostra o quanto os círculos osculadores tem comportamento aproximado ao de α localmente.

Figura 56: Traço da curva α e os círculos osculadores H e S .



Fonte: Elaboração própria (2026).

5.3 | A evoluta em $\mathbb{L}^2$

Nesta seção, estudaremos a evoluta de uma curva α em $\mathbb{L}^2$. A evoluta é construída a partir dos círculos osculadores da curva, ou seja, ela contém informações dos pseudo-círculos de maior contato com cada ponto de α .

Definição 5.24. Seja α uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e $\kappa(s) \neq 0$, para todo s . Variando o parâmetro s , o centro de curvatura $c(s)$ descreve o traço de uma curva $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}_p^2$, chamada de **evoluta de α** , dada por

$$\varepsilon(s) = \alpha(s) - \frac{1}{\kappa(s)}n(s).$$

Mas, especificamente em $\mathbb{L}^2$, se $\alpha(s_0)$ é um ponto do tipo luz, não conseguimos definir a curvatura κ de α em s_0 , pois $\|\alpha'(s_0)\|_L = 0$. Assim, é impossível determinar a

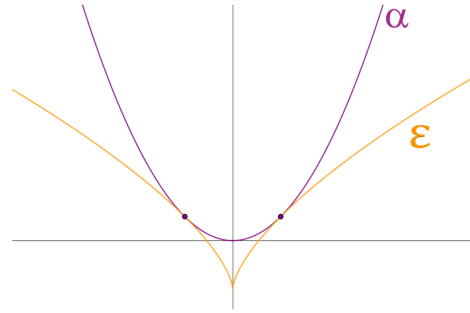
evoluta de um ponto de tipo luz. Apesar disso, em (FRANCISCO, 2019) e (SALOOM; TARI, 2012) esse problema é contornado com o uso de **cáusticas**, que não estudaremos. No entanto, veremos alguns resultados sobre evolutas apresentados nesses trabalhos fora dos pontos de tipo luz.

Exemplo 5.25. Seja a curva $\alpha(s) = (s, s^2)$, $s \in \mathbb{R}$, do Exemplo 5.23, onde calculamos os centros de curvatura dos círculos osculadores de α . Assim, a evoluta de α é:

$$\varepsilon(s) = \left(4s^3, -\frac{1}{2} + 3s^2\right), s \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}.$$

A Figura 57 ilustra o traço de α e sua evoluta ε .

Figura 57: Traço da curva α e ε .



Fonte: Elaboração própria (2026).

Proposição 5.26. Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^2$ uma curva com velocidade unitária e $s_0 \in I$ um ponto que não é de inflexão de α . Então localmente em s_0 , a evoluta de α está contida no semiplano determinado pela reta tangente à α em s_0 , que não contém a curva α .

Demonstração: Note que, como $\alpha(s_0)$ não é ponto de inflexão, então $\kappa(s_0) \neq 0$. Dessa forma, a evoluta de α está bem definida e, como $\kappa(s)$ é uma função contínua, pelo Teorema da Conservação do Sinal, existe um intervalo $I_0 \subseteq I$, $s_0 \in I_0$, tal que o sinal de $\kappa(s)$ é constante em I_0 .

Além disso, pelo que foi discutido na Equação (8), $\alpha''(s)$ aponta na direção da concavidade da curva α . Mais ainda, se $\kappa(s) > 0$, então $n(s)$ e $\alpha''(s)$ apontam na direção do mesmo semiplano determinado pela reta tangente à α em s_0 , o semiplano que contém o traço de α . Caso contrário, se $\kappa(s) < 0$, então $n(s)$ e $\alpha''(s)$ apontam em direções contrárias. Nesse contexto, vamos analisar a localização do traço da evoluta ε de α em s_0 com relação a reta tangente à α em s_0 , por meio de

$$\varepsilon(s_0) - \alpha(s_0) = -\frac{1}{\kappa(s_0)}n(s_0). \quad (18)$$

Se $\kappa(s_0) > 0$, então $\varepsilon(s_0) - \alpha(s_0)$ aponta na direção contrária a de $n(s_0)$, consequentemente, contrária a $\alpha''(s_0)$. Caso contrário, se $\kappa(s_0) < 0$, então $\varepsilon(s_0) - \alpha(s_0)$ e $n(s_0)$ apontam na mesma direção, que é contrária a direção $\alpha''(s_0)$. Em ambos os casos, $\varepsilon(s_0) - \alpha(s_0)$ aponta para o semiplano que não contém o traço de α .

Portanto, em um intervalo $I_0 \subset I$, $s_0 \in I_0$, tal que o sinal de $\kappa(s)$ é constante em $s \in I_0$, o traço da evoluta ε está contido no semiplano determinado pela reta tangente à α em s_0 que não contém o traço de α .

□

Proposição 5.27. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^2$ uma curva com velocidade unitária sem pontos de inflexão.

- (i) A evoluta de uma curva de tipo espaço (resp. tempo) é uma curva de tipo tempo (resp. espaço);
- (ii) A evoluta de uma curva de tipo espaço ou tempo é singular precisamente em seus vértices;
- (iii) Toda curva de tipo tempo ou espaço conexa não intercepta sua evoluta.

Demonstração: Seja a evoluta de α : $\varepsilon(s) = \alpha(s) - \frac{1}{\kappa(s)}n(s)$.

- (i) O vetor velocidade de ε em s é

$$\varepsilon'(s) = \alpha'(s) - \frac{1}{\kappa(s)} \underbrace{n'(s)}_{=\kappa(s)t(s)} + \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2}n(s) = \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2}n(s).$$

Assim, $\langle \varepsilon'(s), \varepsilon'(s) \rangle_L = \left(\frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2} \right)^2 \langle n(s), n(s) \rangle_L = -\epsilon_\alpha \left(\frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2} \right)^2$. Dessa forma, o tipo causal de ε é contrário ao tipo causal de α ;

- (ii) Se $\alpha(s_0)$ é um vértice de α , pelo Teorema 5.22, $\kappa'(s_0) = 0$. Logo, pela equação do vetor velocidade de ε descrita no item anterior:

$$\varepsilon'(s_0) = \frac{\kappa'(s_0)}{\kappa(s_0)^2}n(s_0) = \vec{0}.$$

Ou seja, ε é singular em s_0 ;

- (iii) Suponha que α intercepte sua evoluta. Assim, existem $s_1, s_2 \in I$, suponha $s_1 < s_2$, tais que

$$\alpha(s_1) - \frac{1}{\kappa(s_1)}n(s_1) = \varepsilon(s_1) = \alpha(s_2) \Rightarrow \alpha(s_1) - \alpha(s_2) = \frac{1}{\kappa(s_1)}n(s_1).$$

Defina $g(s) = \alpha(s) - \alpha(s_2)$, $s \in [s_1, s_2]$, uma função contínua. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $s_3 \in (s_1, s_2)$ tal que

$$\begin{aligned} g'(s_3) = \alpha'(s_3) &= \frac{-(\alpha(s_1) - \alpha(s_2))}{s_2 - s_1} = \frac{\alpha(s_1) - \alpha(s_2)}{s_1 - s_2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (s_1 - s_2)t(s_3) = \alpha(s_1) - \alpha(s_2) = \frac{1}{\kappa(s_1)}n(s_1). \end{aligned} \quad (19)$$

Visto que α tem tipo causal constante, $t(s)$ tem o mesmo tipo causal para todo $s \in I$. Consequentemente, $n(s)$ também tem mesmo tipo causal para qualquer

$s \in I$ contrário ao de t . Apesar disso, da Equação (19), $\alpha(s_1) - \alpha(s_2)$ é paralelo a $t(s)$ e a $n(s)$. Assim, $\alpha(s_1) - \alpha(s_2)$ deveria admitir dois tipos causais, que é absurdo. Portanto, α não intercepta sua evoluta.

□

Exemplo 5.28. Seja a elipse em $\mathbb{L}^2$ parametrizada por

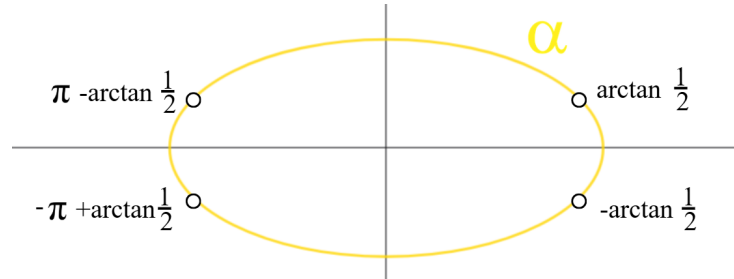
$$\alpha(s) = (2 \cos s, \sin s), s \in I = \left(-\pi + \arctan \frac{1}{2}, \pi + \arctan \frac{1}{2} \right).$$

Vamos encontrar a evoluta da elipse.

Note que $\alpha'(s) = (-2 \sin s, \cos s)$ e $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = 4 \sin^2 s - \cos^2 s$. Assim, α é de tipo:

- (i) espaço se $s \in \left(-\pi + \arctan \frac{1}{2}, -\arctan \frac{1}{2} \right) \cup \left(\arctan \frac{1}{2}, \pi - \arctan \frac{1}{2} \right)$;
- (ii) tempo se $s \in \left(-\arctan \frac{1}{2}, \arctan \frac{1}{2} \right) \cup \left(\pi - \arctan \frac{1}{2}, \pi + \arctan \frac{1}{2} \right)$;
- (iii) luz se $s \in M = \left\{ -\arctan \frac{1}{2}, \arctan \frac{1}{2}, \pi - \arctan \frac{1}{2}, \pi + \arctan \frac{1}{2} \right\}$.

Figura 58: Traço da elipse α em $\mathbb{L}^2$ com os pontos de tipo luz destacados.



Fonte: Elaboração própria (2026).

A Figura 58 ilustra o traço de elipse α e os pontos em que ela é de tipo luz. Fore desses pontos, pela Proposição 4.61, definimos

$$t_\alpha(s) = \frac{(-2 \sin s, \cos s)}{\sqrt{\epsilon_{\alpha(s)}(4 \sin^2 s - \cos^2 s)}}, \quad n_\alpha(s) = \frac{\epsilon_{\alpha(s)}(\cos s, -2 \sin s)}{\sqrt{\epsilon_{\alpha(s)}(4 \sin^2 s - \cos^2 s)}}$$

$$\text{e } \kappa_\alpha(s) = \frac{\det(\alpha'(s), \alpha''(s))}{\sqrt{\epsilon_{\alpha(s)}(4 \sin^2 s - \cos^2 s)^3}} = \frac{2}{\sqrt{\epsilon_{\alpha(s)}^3(4 \sin^2 s - \cos^2 s)^3}}.$$

Dessa forma, a equação da evoluta de α fora dos pontos de tipo luz é dada por

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_\alpha(s) &= \alpha(s) - \frac{1}{\kappa_\alpha(s)} n_\alpha(s) = \\
 &= (2 \cos s, \sin s) - \frac{\sqrt{\epsilon_{\alpha(s)}^3 (4 \sin^2 s - \cos^2 s)^3}}{2} \frac{\epsilon_{\alpha(s)} (\cos s, -2 \sin s)}{\sqrt{\epsilon_{\alpha(s)} (4 \sin^2 s - \cos^2 s)}} = \\
 &= (2 \cos s, \sin s) - \frac{\epsilon_{\alpha(s)} (4 \sin^2 s - \cos^2 s)}{2} \epsilon_{\alpha(s)} (\cos s, -2 \sin s) = \\
 &= (2 \cos s, \sin s) - \frac{4 \sin^2 s - \cos^2 s}{2} ((\cos s, -2 \sin s)) = \\
 &= \left(2 \cos s - \frac{4(1 - \cos^2 s) - \cos^2 s}{2} \cos s, \sin s - \frac{4 \sin^2 s - (\sin^2 s + 1)}{2} (-2 \sin s) \right) = \\
 &= \left(2 \cos s - 2 \cos s + \frac{5 \cos^3 s}{2}, \sin s + 5 \sin^3 s - \sin s \right) = \\
 &= \left(\frac{5 \cos^3 s}{2}, 5 \sin^3 s \right), s \in I - M.
 \end{aligned}$$

Vamos estudar agora a evoluta da evoluta de α , ε_2 . Como ε é definida somente nos pontos de tipo tempo e espaço de α , então, pela Proposição 5.27 (i), temos que

- (i) $\varepsilon'_\alpha(s) = \left(-\frac{15}{2} \cos^2 s \sin s, 15 \sin^2 s \cos s \right);$
- (ii) $\varepsilon''_\alpha(s) = \left(-\frac{15}{2} (-2 \cos s \sin^2 s + \cos^3 s), 15(2 \sin s \cos^2 s - \sin^3 s) \right);$
- (iii) $\langle \varepsilon'_\alpha(s), \varepsilon'_\alpha(s) \rangle_L = \frac{255}{4} \cos^4 s \sin^2 s - 255 \cos^2 s \sin^4 s;$
- (iv) ε_α é de tipo tempo se $s \in \left(-\pi + \arctan \frac{1}{2}, -\arctan \frac{1}{2} \right) \cup \left(\arctan \frac{1}{2}, \pi - \arctan \frac{1}{2} \right);$
- (v) ε_α é de tipo espaço se $s \in \left(-\arctan \frac{1}{2}, \arctan \frac{1}{2} \right) \cup \left(\pi - \arctan \frac{1}{2}, \pi + \arctan \frac{1}{2} \right);$
- (vi) $\varepsilon'_\alpha(s) = \vec{0}$ se, e somente se $s \in N = \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \pi \right\}$, logo ε_1 é singular nesses pontos, que são precisamente os vértices de α .

Novamente, pela Proposição 4.61, definimos

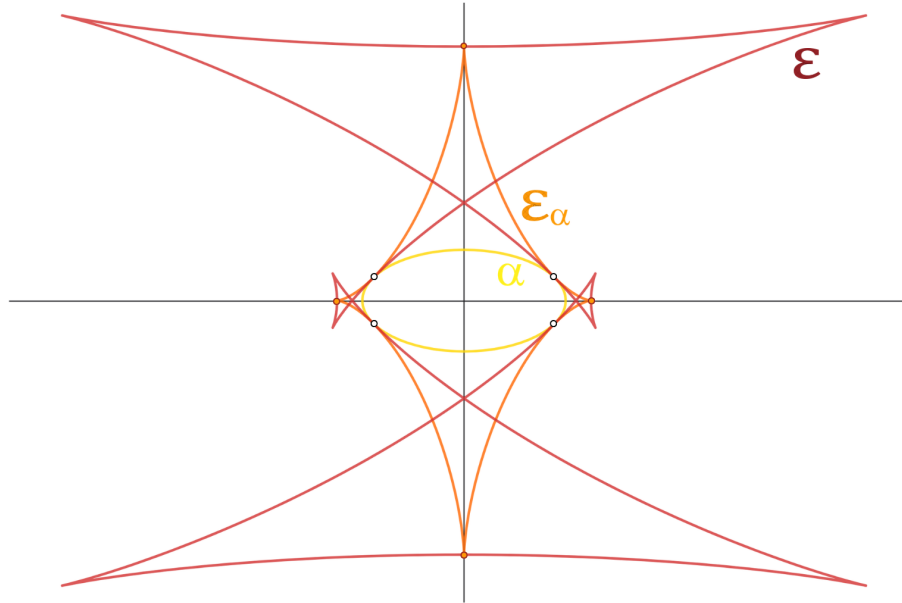
$$\begin{aligned}
 t_{\varepsilon_\alpha}(s) &= \frac{\left(-\frac{15}{2} \cos^2 s \sin s, 15 \sin^2 s \cos s \right)}{\|\varepsilon_\alpha(s)\|_L}, \quad n_{\varepsilon_\alpha}(s) = \epsilon_{\varepsilon_\alpha(s)} \frac{\left(15 \sin^2 s \cos s, -\frac{15}{2} \cos^2 s \sin s \right)}{\|\varepsilon_\alpha(s)\|_L} \\
 \text{e } \kappa_{\varepsilon_\alpha}(s) &= \frac{\det(\varepsilon'_\alpha(s), \varepsilon''_\alpha(s))}{\|\varepsilon_\alpha(s)\|_L^3} = \frac{-255 \sin^2 s \cos^2 s}{2 \|\varepsilon_\alpha(s)\|_L^3}.
 \end{aligned}$$

A equação da evoluta de ε_α para $s \in I - (M \cup N)$ é:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(s) &= \varepsilon_\alpha(s) - \frac{1}{\kappa_{\varepsilon_\alpha}(s)} n_{\varepsilon_\alpha}(s) = \\
 &= \left(\frac{5 \cos^3 s}{2}, 5 \sin^3 s \right) + \frac{2 \|\varepsilon_\alpha(s)\|_L^3}{255 \sin^2 s \cos^2 s} \epsilon_{\varepsilon_\alpha(s)} \frac{(15 \sin^2 s \cos s, -\frac{15}{2} \cos^2 s \sin s)}{\|\varepsilon_\alpha(s)\|_L} = \\
 &= \left(\frac{5 \cos^3 s}{2} + \epsilon_{\varepsilon_\alpha(s)} \frac{2 \|\varepsilon_\alpha(s)\|_L^2}{15 \cos s}, 5 \sin^3 s - \epsilon_{\varepsilon_\alpha(s)} \frac{\|\varepsilon_\alpha(s)\|_L^2}{15 \sin s} \right) = \\
 &= \left(\frac{5 \cos^3 s}{2} + \frac{15}{2} \cos^3 s \sin^2 s - 30 \cos s \sin^4 s, 5 \sin^3 s - \frac{15}{4} \cos^4 s \sin s + 15 \cos^2 s \sin^3 s \right) = \\
 &= \left(\frac{5 \cos^3 s}{2} (1 + 3 \sin^2 s) - 30 \cos s \sin^4 s, 5 \sin^3 s (1 + 3 \cos^2 s) - \frac{15}{4} \cos^4 s \sin s \right).
 \end{aligned}$$

A Figura 59 ilustra o traço de α , ε_α e ε em $\mathbb{L}^2$.

Figura 59: Traço da elipse α , sua evoluta ε_α e a evoluta de sua evoluta ε , em $\mathbb{L}^2$.



Fonte: Elaboração própria (2026).

Exemplo 5.29. Seja a curva parametrizada por $\alpha(s) = (s, s^3)$, $s \in \mathbb{R}$ em $\mathbb{L}^2$. Vamos estudar a evoluta de α próxima de $\alpha(0) = \vec{0}$. Observe que

- (i) $f(s) = s^3$ tem singularidade de tipo A_2 em 0, logo $\alpha(0)$ é um ponto de inflexão;
- (ii) $\alpha'(s) = (1, 3s^2) \neq \vec{0}$, logo α é regular para todo $s \in \mathbb{R}$;
- (iii) $\alpha''(s) = (0, 6s)$;
- (iv) $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = 1 - 9s^4$;

(v) $\langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_L = 1$, ou seja, $\alpha(0)$ é de tipo espaço.

Do item (iii), garantimos que existe um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, em torno de 0, tal que α é de tipo espaço em todo $s \in I$. Como, por exemplo, $I = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Pela Proposição 4.61, para $s \in I$, definimos

$$t(s) = \frac{(1, 3s^2)}{\sqrt{\epsilon_\alpha(1-9s^4)}} = \frac{(1, 3s^2)}{\sqrt{1-9s^4}}, \quad n(s) = \frac{(3s^2, 1)}{\sqrt{\epsilon_\alpha(1-9s^4)}} = \frac{(1, 3s^2)}{\sqrt{1-9s^4}}$$

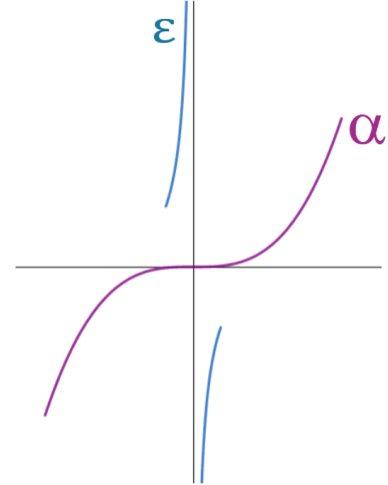
$$\text{e } \kappa(s) = \frac{\det((1, 3s^2), (0, 6s))}{\sqrt{\epsilon_\alpha(1-9s^4)}^3} = \frac{\det((1, 3s^2), (0, 6s))}{\sqrt{(1-9s^4)}^3} = \frac{6s}{\sqrt{(1-9s^4)}^3}.$$

Note que $\kappa(0) = 0$ (ponto de inflexão), então não conseguimos definir a evoluta de α em 0. Dessa forma, para $s \in I - \{0\}$, a evoluta de α em s é escrita como

$$\begin{aligned} \varepsilon(s) &= \alpha(s) - \frac{1}{\kappa(s)}n(s) = \\ &= (s, s^3) - \frac{\sqrt{(1-9s^4)}^3}{6s} \frac{(3s^2, 1)}{\sqrt{1-9s^4}} = \\ &= \left(s - \frac{(1-9s^4)s}{2}, s^3 - \frac{(1-9s^4)}{6s} \right) = \\ &= \left(\frac{s+9s^5}{2}, \frac{15s^4-1}{6s} \right). \end{aligned}$$

A Figura 60 ilustra o gráfico de α em comparação com o traço de sua evoluta ε , próximos do 0.

Figura 60: Traço da curva α e sua evoluta próximos da origem.



Fonte: Elaboração própria (2026).

APLICAÇÕES FÍSICAS

Neste capítulo, estudaremos algumas interpretações físicas dos conceitos vistos durante todo o trabalho. Para tanto, nos centraremos no espaço $\mathbb{L}^n$, $n = 2, 3, 4$, onde as primeiras dimensões são espaciais e a última é temporal, mas, no contexto físico, o tempo é associado a primeira coordenada. Hermann Minkowski, matemático que desenvolveu uma formalização matemática da Relatividade e grande divulgador da teoria, nomeia o espaço quadridimensional em que vivemos de “mundo” ou “universo”, conhecido atualmente como **espaço-tempo**, o $\mathbb{L}^4$ (EINSTEIN; PEREIRA, 2021).

6.1 | Transformações de Lorentz

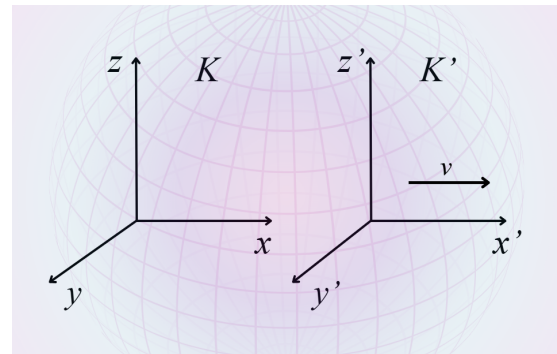
No fim do século XIX, foram desenvolvidas as equações de Maxwell (MAXWELL, 1865), que descrevem o comportamento de ondas eletromagnéticas. Essas equações, além de revolucionárias, mostravam as limitações da física da época. Isso porque, elas não eram compatíveis com as transformações de Galileu (TIPLER; LLEWELLYN, 2017).

As transformações clássicas, ou transformações de Galileu, eram equações que possibilitavam mudar de um sistema de coordenadas de um referencial inercial para outro, da seguinte forma: Sejam K e K' dois referenciais inerciais (não acelerados) do espaço-tempo com coordenadas x, y, z, t e x', y', z', t' , respectivamente. Suponha que, inicialmente, as origens dos dois referenciais coincidam em $t = t' = 0$ e que K' se mova com velocidade constante v na direção do eixo x , em relação a K , como ilustrado na Figura 61. Então, as coordenadas de K' podem ser escritas em função das coordenadas de K pelas equações:

$$\begin{cases} x' = x - vt; \\ y' = y; \\ z' = z \\ t' = t. \end{cases}$$

Mas, o estudo de objetos que se moviam com velocidades mais altas revelava que tais transformações eram insuficientes para explicar seus fenômenos, como ocorreu com as equações de Maxwell. Assim, uma nova teoria era necessária.

Figura 61: Representação de K e K' em $t = t_0$ e $t' = t'_0$.



Fonte: Elaboração própria (2026).

Em 1905, Albert Einstein publicou o artigo Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento, originalmente *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* (EINSTEIN, 1905), onde desenvolveu a Teoria da Relatividade Restrita (SANTOS, 2009). Essa teoria é baseada em dois postulados:

- (i) As leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais;
- (ii) A velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor c em todas as direções e em todos os referenciais inerciais (TIPLER; LLEWELLYN, 2017).

Em (EINSTEIN; PEREIRA, 2021), Einstein enuncia o primeiro postulado, também conhecido como **princípio da relatividade**, para dois referenciais inerciais K e K' , da seguinte forma:

Se K' é um sistema de coordenadas que efetua um movimento uniforme e sem rotação em relação a K , os fenômenos da natureza que se desenrolam em relação a K' obedecem exatamente às mesmas leis que em relação a K . (EINSTEIN; PEREIRA, 2021, p. 19)

Ou seja, não existem referenciais privilegiados, nem leis particulares que devem ser formuladas a cada referencial. Vejamos alguns conceitos necessários para o prosseguimento da teoria:

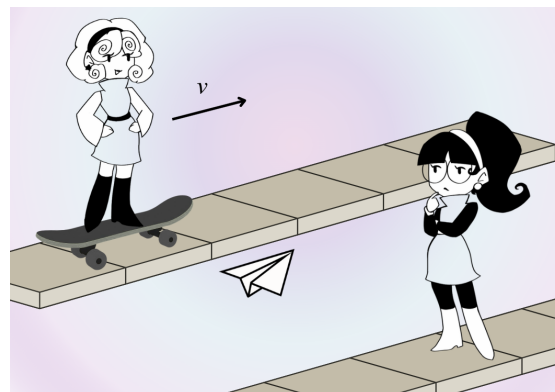
Definição 6.1. Um **evento** é um acontecimento no universo, que pode ser descrito como um ponto em relação a um sistema de coordenadas desse universo. Um **observador** é um objeto ou uma pessoa, relacionado a um referencial, que registra e descreve um evento.

A formalização do registro de eventos no espaço-tempo é feita a partir da construção de um complexo sistema de réguas e relógios que pode ser encontrada em (WALKER; HALLIDAY; RESNICK, 2009) e (EINSTEIN; PEREIRA, 2021), que omitiremos neste trabalho.

Exemplo 6.2. Sejam as amigas Ana e Bruna, a primeira parada em uma calçada e a outra em movimento retilíneo uniforme em um skate na outra calçada. As duas observam um avião de papel voando entre elas, como ilustrado na Figura 62.

Nesse contexto, a calçada e o skate são referenciais inerciais, Ana é uma observadora em repouso em relação a calçada, Bruna é uma observadora em repouso em relação ao skate e o avião voando é um evento.

Figura 62: Ana, Bruna e o avião de papel.



Fonte: Elaboração própria (2026).

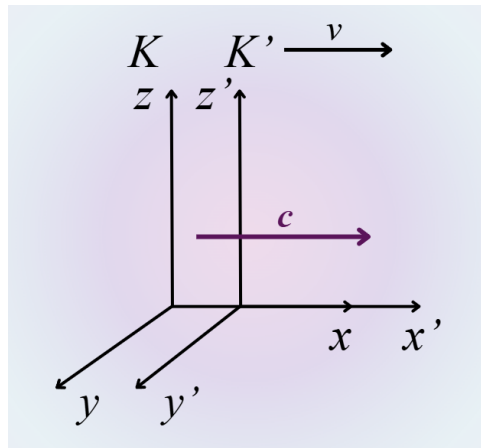
Note que o evento é registrado pelas duas observadoras, mas não “pertence” a nenhuma delas, ou seja, eventos ocorrem no espaço-tempo sem necessariamente se relacionar com um referencial.

Observe que as transformações de Galileu não respeitam o segundo postulado da relatividade. De fato, tome os referenciais K e K' como descritos anteriormente, e um raio de luz com velocidade c em relação a K , caminhando na direção do eixo x positivo, como ilustra a Figura 63. A velocidade do raio de luz relativa a K' deveria ser

$$c_{K'} = c - v < c.$$

Logo, a velocidade não seria constante para todos os referenciais inerciais. Consequentemente, uma nova transformação de referenciais era necessária de tal forma que a velocidade da luz fosse constante para todos os referenciais, mas, para corpos com baixas velocidades, as transformações de Galileu deveriam seguir válidas.

Figura 63: Raio de luz com velocidade c e referenciais K e K' .



Fonte: Elaboração própria (2026).

Em 1904, o físico holandês Hendrik Antoon Lorentz, formulou transformações para referenciais inerciais que conservaram a velocidade da luz, alterando os comprimentos e o tempo e considerando a existência do éter (LORENTZ, 1904). Nos trabalhos de Einstein de 1905, ele chegou as mesmas transformações propostas por Lorentz, a partir dos postulados da relatividade e sem considerar a existência do éter (BERENDS, 2009).

Dessa forma, esse modelo de transformação é conhecido atualmente como **transformações de Lorentz**, em sua homenagem, porém são as interpretações de Einstein que utilizamos, ou seja, sem considerar o éter. Tal modelo é descrito a seguir: Tome K e K' os referenciais inerciais nas mesmas condições descritas anteriormente. As coordenadas

de K' podem ser escritas em termos das coordenadas de K , pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt); \\ y' = y; \\ z' = z; \\ t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right); \end{cases} \quad (20)$$

onde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ é conhecido como **fator de Lorentz** e $\beta = \frac{v}{c}$ é o **parâmetro da velocidade** (WALKER; HALLIDAY; RESNICK, 2009).

Note que, quando v é muito menor do que c , $\beta \approx 0$ e $\gamma \approx 1$. Assim, $x' = x - vt$ e $t' = t$, que satisfazem as transformações clássicas. Um raciocínio análogo pode ser feito para v com componentes em mais direções. Mais detalhes podem ser encontrados em (TIPLER; LLEWELLYN, 2017). Omitiremos a demonstração das transformações de Lorentz, mas ela pode ser encontrada em (EINSTEIN; PEREIRA, 2021).

Observação 6.3. No Capítulo 2, definimos transformações de Lorentz como as transformações pseudo-ortogonais quando $\nu = 1$, isto é, transformações lineares que preservam o produto interno lorentziano. E, surpreendentemente, a transformação de Lorentz vista nesse capítulo é uma transformação pseudo-ortogonal.

De fato, demostramos essa afirmação no Exemplo 3.95, que chamamos de impulso, também conhecida em textos físicos como **boost**, onde também apresenta a forma matricial da transformação de Lorentz definida nesse capítulo. O primeiro a estudar o conjunto das transformações de Lorentz como um grupo, o grupo de Lorentz, foi Poincaré em (POINCARÉ, 1924). Apesar disso, ele trabalhou com $c = 1$ e automorfismos definidos em $\mathbb{R}^3 \times i\mathbb{R}$, que preservavam o produto interno usual (SANTOS, 2009), diferente da abordagem deste trabalho.

6.2 | O Invariante no Espaço-tempo

Nesta seção, veremos fenômenos que são consequências diretas da Teoria da Relatividade e que justificam seu nome. Isso porque, tais fenômenos revelam que intervalos de tempo e espaço dependem diretamente do observador e não são universais. Porém, nem tudo é relativo. No final da seção, encontraremos uma medida que é invariante a qualquer referencial e, mesmo sem saber de sua importância, ela foi estudada desde o começo deste trabalho.

Inicialmente, vamos analisar a variação espacial entre referenciais inerciais. Tomando novamente os mesmos referenciais K e K' definidos no começo deste capítulo, duas observadoras, Ana (A) e Bruna (B), estão em repouso em relação a K e K' , respectivamente. Uma régua está em repouso em relação ao referencial K' e, medida em

relação a K' , tem comprimento L' . Bruna mede as extremidades da régua x'_1 e x'_2 , tais que $L' = x'_2 - x'_1$. Ana decide medir a régua. Em um tempo t ela mede as extremidades x_1 e x_2 da régua. Assim, pela transformação de Lorentz, os pontos x'_1 e x'_2 são escritos em relação as coordenadas de K como

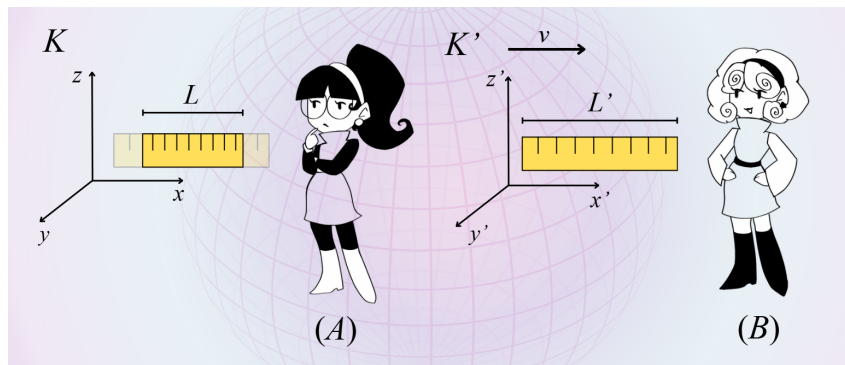
$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt) \text{ e } x'_2 = \gamma(x_2 - vt).$$

Logo,

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) \Rightarrow \frac{L'}{\gamma} = L.$$

Dessa forma, como $\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \beta^2} < 1$, então $L' > L$, ou seja, a régua medida pelo referencial K é menor do que o medida do referencial K' . Esse fenômeno é conhecido como **contração dos comprimentos**, ou **contração das distâncias**. A Figura 64 ilustra a situação e o fenômeno da contração.

Figura 64: Ana e Bruna medindo a mesma régua em repouso em relação a K' .

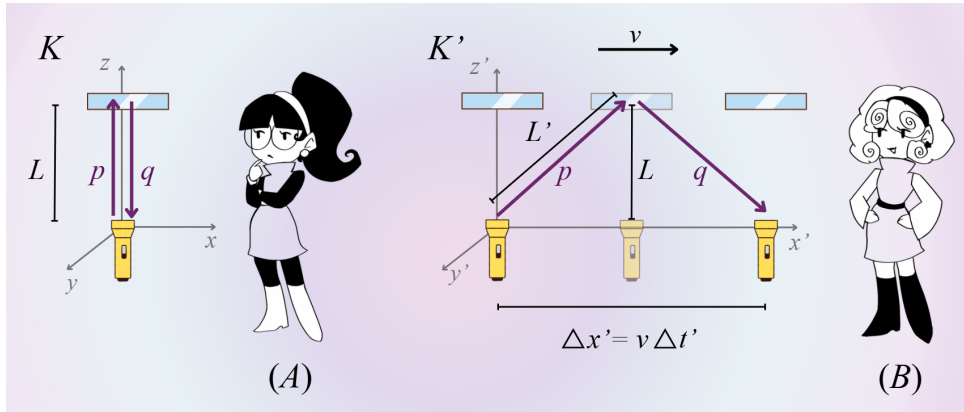


Fonte: Elaboração própria (2026).

Para uma análise de um intervalo temporal, seja o seguinte experimento: uma lanterna é posicionada na origem dos sistemas K e K' e um espelho está afastado a uma altura L da lanterna. A lanterna e o espelho estão em repouso em relação ao referencial K . A lanterna é ligada e ocorrem dois eventos:

- p : Um raio de luz é emitido da lanterna e até o espelho;
- q : O raio de luz é refletido pelo espelho até a lanterna.

Ana observa os eventos e descreve a trajetória do raio de luz como retas verticais, enquanto Bruna descreve uma trajetória diagonal. A Figura 65 ilustra a descrição de cada evento em relação a cada observadora.

Figura 65: Ana e Bruna observando os eventos p e q .

Fonte: Elaboração própria (2026).

Vamos estudar a distância temporal e espacial de p e q na visão de cada uma delas. Respeitando o segundo postulado da Teoria da Relatividade, no qual a velocidade da luz é constante igual a c para qualquer observador, Ana e Bruna medem as seguintes distâncias espaciais e temporais entre os eventos:

$$(A) = \begin{cases} \Delta x = 0 - 0 = 0; \\ \Delta y = 0 - 0 = 0; \\ \Delta z = L - L = 0; \\ \Delta t = \frac{\Delta s}{c} = \frac{2L}{c}; \end{cases} \quad \text{e} \quad (B) = \begin{cases} \Delta x' = v\Delta t'; \\ \Delta y' = 0 - 0 = 0; \\ \Delta z' = L - L = 0; \\ \Delta t' = \frac{\Delta s'}{c} = \frac{2L'}{c}. \end{cases}.$$

O movimento do raio de luz observado por Bruna forma dois triângulos retângulos de catetos L , $\frac{\Delta x'}{2}$ e hipotenusa L' . Para tanto, podemos reescrever a variação de tempo observada por ela da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Delta t' &= \frac{2\sqrt{L^2 + (\frac{1}{2}v\Delta t')^2}}{c} = \frac{2\sqrt{(\frac{1}{2}c\Delta t)^2 + (\frac{1}{2}v\Delta t')^2}}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta t'^2 &= \Delta t^2 + \frac{v^2\Delta t'^2}{c^2} \Rightarrow \Delta t'^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \Delta t^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta t'^2 &= \frac{\Delta t^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\Delta t. \end{aligned} \quad (21)$$

Portanto, $\Delta t \neq \Delta t'$, ou seja, Ana e Bruna percebem durações de tempo diferentes entre os eventos. Mais ainda, como $\gamma > 1$, então $\Delta t < \Delta t'$, ou seja, Bruna acredita que a separação temporal entre os eventos é maior do que Ana. Esse fenômeno é chamado **dilatação do tempo**.

Dessa forma, concluímos que as medições espaciais e temporais são relativas a cada

observador. Assim, uma pergunta natural surge: existe alguma grandeza que é invariante ao referencial no espaço-tempo?

Voltamos as medições de Ana e Bruna do raio de luz incidindo em um espelho. Pela Equação (21), temos que:

$$\begin{aligned}\Delta t' &= \frac{2\sqrt{L^2 + (\frac{1}{2}v\Delta t')^2}}{c} \Rightarrow c\Delta t' = 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}c\Delta t\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\Delta x'\right)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow c^2(\Delta t')^2 = c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x')^2 \Rightarrow -c^2(\Delta t)^2 = (\Delta x')^2 - c^2(\Delta t')^2.\end{aligned}$$

Como $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta y' = \Delta z' = 0$, então

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - c^2(\Delta t')^2.$$

Dessa forma, essa soma é uma grandeza mensurável entre dois eventos que é invariante para qualquer referencial inercial. Além disso, essa grandeza é exatamente o produto pseudo-euclidiano de índice 1 definido no Capítulo 2. Portanto, o intervalo no espaço-tempo, ou a métrica de Minkowski, é um invariante do espaço-tempo, que revela a importância de seu estudo.

Originalmente, Minkowski modelou a coordenada temporal como uma quantidade imaginária $ict = \sqrt{-1}ct$ (EINSTEIN; PEREIRA, 2021). Mas, para um estudo matemático, podemos utilizar $c = 1$, mensurando tempo como uma unidade de distância, a distância que a luz percorre em um determinado tempo (O'NEILL, 1983).

6.3 | Diagrama espaço-tempo

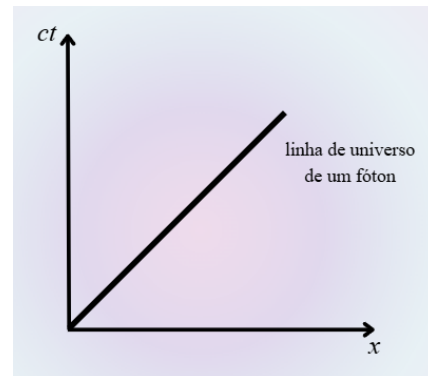
Nesta seção, veremos uma nova forma de esquematizar o movimento de partículas no espaço-tempo baseadas em (CARROLL, 2019) e (WALKER; HALLIDAY; RESNICK, 2009). Observe que as figuras apresentadas nas outras seções são como fotos, chamadas **instantâneos**, onde visualizamos a parte espacial de um experimento em um tempo $t = t_0$. Porém, existe outra representação de experimentos onde enxergamos a passagem do tempo, chamada **diagrama espaço-tempo**. O diagrama espaço-tempo é o plano $\mathbb{L}^2$, ou o espaço $\mathbb{L}^3$, onde a coordenada x é espacial e a coordenada $y = ct$ é temporal, ou as coordenadas x e y são espaciais e a coordenada $z = ct$ é temporal. Note que, pela limitação ao tridimensional, a única desvantagem do diagrama é que perdemos uma ou duas coordenadas espaciais.

Conforme uma partícula se movimenta no espaço-tempo, o lugar geométrico de suas posições produz uma curva em $\mathbb{L}^n$, $n = 2, 3, 4$, chamada **linha de universo** da partícula.

Dessa forma, podemos utilizar o estudo do Capítulo 4 para entender as linhas de universo de partículas no espaço-tempo.

Exemplo 6.4. Seja um fóton se movendo no universo na velocidade da luz c na direção positiva do eixo x . A linha de universo desse fóton em $\mathbb{L}^2$ é representado pela raio de luz principal ilustrado na Figura 66.

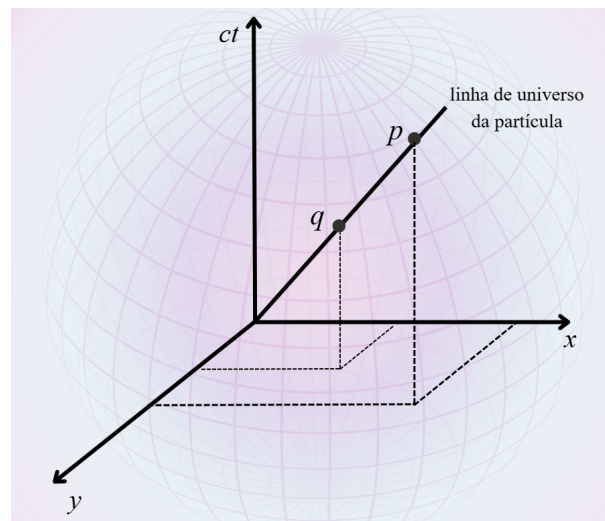
Figura 66: Linha de universo de um fóton.



Fonte: Elaboração própria (2026).

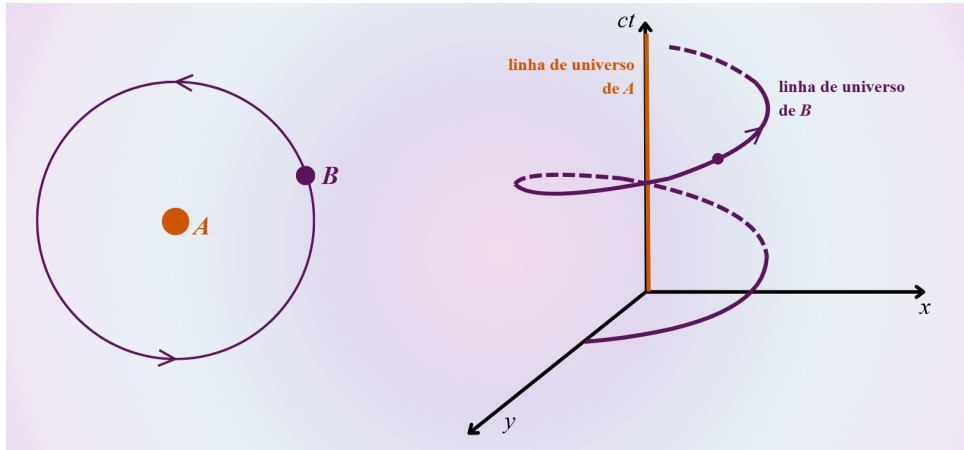
Exemplo 6.5. Seja uma partícula bidimensional que se move do evento p ao evento q com velocidade constante. A linha de universo da partícula é uma reta que passa pelos pontos p e q de $\mathbb{L}^3$, ilustrada na Figura 67.

Figura 67: Linha de universo da partícula em $\mathbb{L}^3$.



Fonte: Elaboração própria (2026).

Exemplo 6.6. Sejam duas partículas bidimensionais A e B , tais que a partícula A está em repouso e a partícula B orbita A em um movimento circular. A linha de universo de A é a reta paralela ao eixo ct , pois sua posição espacial não se altera com o passar do tempo. Por outro lado, a linha de universo da partícula B é uma hélice euclidiana. A Figura 68 ilustra o movimento bidimensional das partículas, à esquerda, e, à direita, o diagrama espaço-tempo das duas partículas. Observe que, como o movimento de B é acelerado, pois é circular, sua linha de universo não é mais uma reta.

Figura 68: Movimento bidimensional e diagrama espaço-tempo em $\mathbb{L}^3$ de A e B .

Fonte: Elaboração própria (2026).

Examinaremos a interpretação física dos tipos causais, fundamentada por (COUTO; LYMBEROPOULOS, 2018). Sejam dois eventos, p e q , no espaço-tempo $\mathbb{L}^4$. A linha de universo que relaciona os dois eventos é definida como o vetor

$$v = q - p = (\Delta x, \Delta y, \Delta z, c\Delta t).$$

Se $\Delta t = 0$, então os eventos são simultâneos para o referencial inercial relacionado ao sistema de coordenadas. Se $\Delta t \neq 0$ e v^* é a **velocidade espacial** entre p e q , ou seja, $v^* = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}\right)$, temos que

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle_L &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2 \\ &= (\Delta t)^2 \left(\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2 - c^2 \right) \\ &= (\Delta t)^2 (\|v^*\|_E^2 - c^2) \\ &= (\Delta t)^2 (\|v^*\|_E + c)(\|v^*\|_E - c). \end{aligned}$$

Dessa forma, o tipo causal de v é determinado pelo valor de $(\|v^*\|_E - c)$, o que resulta na seguinte interpretação

- (i) Se v é do tipo tempo, então $\|v^*\|_E < c$. Isto é, a velocidade necessária para interligar os eventos é menor do que a velocidade da luz. Quando $\Delta t > 0$, o evento p pode influenciar o evento q . Caso contrário, $\Delta t < 0$, o evento p pode ser influenciado pelo evento q ;
- (ii) Se v é do tipo luz, então $\|v^*\|_E = c$, ou seja, a velocidade necessária para interligar os eventos é a velocidade da luz e a relação de influência entre p e q é determinada pelo sinal de Δt como no caso anterior;

- (iii) Se v é do tipo espaço, então $\|v^*\|_E > c$, ou seja, a velocidade necessária para relacionar os eventos é maior do que a velocidade da luz.

Dessa forma, a classificação causal definida no Capítulo 2 nos revela a velocidade espacial necessária para se relacionar dois eventos. Quando o vetor v é de tipo espaço, não é possível relacionar os dois eventos, pois a velocidade da luz é uma velocidade limite (CARROLL, 2019). Dessa forma, a separação entre os eventos é espacial.

Por outro lado, se a velocidade necessária para relacionar os dois eventos for menor do que ou igual a velocidade da luz, então é possível que um corpo acelere o suficiente para que eles se relacionem. O sinal de Δt pode ser interpretado como a ordem em que ocorreram os eventos para o referencial inercial nessa relação. Isto é, como o sinal expressa a influência entre eles, se $\Delta t > 0$, o evento q ocorre depois de p e o vetor v está direcionado para o futuro de p . Caso contrário, $\Delta t < 0$, então q ocorre antes de p e o vetor v está direcionado para o passado de p . Note que, tal interpretação esclarece a Definição 3.83, justificando os termos futuro-dirigido e passado-dirigido. Motivados por essas ideias, definimos:

Definição 6.7. Seja $p \in \mathbb{L}^n$, $n = 2, 3, 4$. Definimos os conjuntos

- (i) **cone de luz futuro** centrado em p :

$$C_L^+(p) = \{q \in \mathbb{L}^n; q - p \text{ é de tipo luz futuro-dirigido}\};$$

- (ii) **cone luz passado** centrado em p :

$$C_L^-(p) = \{q \in \mathbb{L}^n; q - p \text{ é de tipo luz passado-dirigido}\};$$

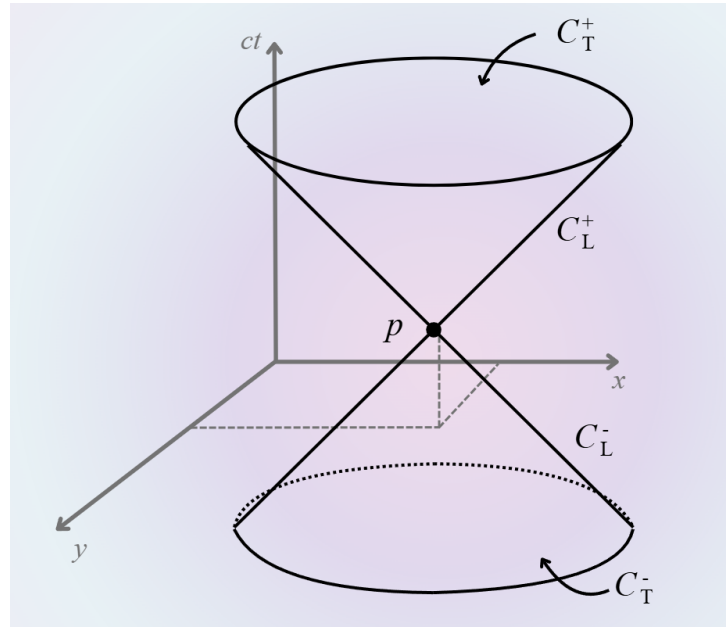
- (iii) **cone de tempo futuro** centrado em p :

$$C_T^+(p) = \{q \in \mathbb{L}^n; q - p \text{ é de tipo tempo futuro-dirigido}\};$$

- (iv) **cone de tempo passado** centrado em p :

$$C_T^-(p) = \{q \in \mathbb{L}^n; q - p \text{ é de tipo tempo passado-dirigido}\}.$$

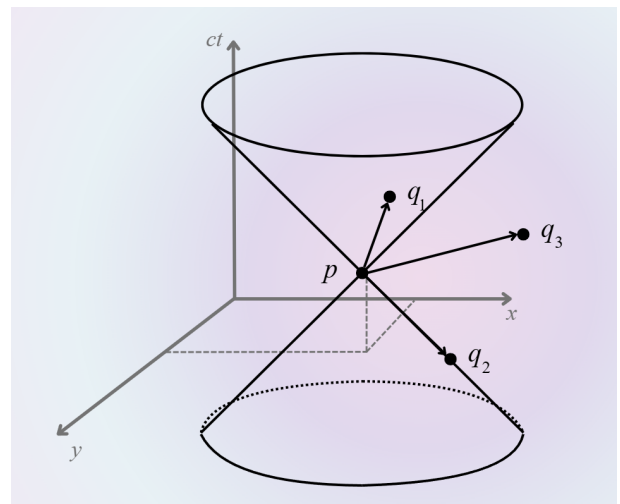
Dizemos que $C_L(p) = C_L^+ \cup C_L^-$ e $C_T(p) = C_T^+ \cup C_T^-$ são os cones de luz e de tempo centrados em p , respectivamente. A Figura 69 ilustra os conjuntos em $\mathbb{L}^3$.

Figura 69: Cones de luz e de tempo em $\mathbb{L}^3$.

Fonte: Elaboração própria (2026).

Com tais cones, podemos estudar a relação causal de todos os pontos de $\mathbb{L}^n$ com p . Assim, um evento q_1 contido em C_T^+ ou C_L^+ está no futuro de p e eles podem se relacionar com um corpo que viaja com velocidade espacial menor do que ou igual a velocidade da luz.

Um evento q_2 contido em C_T^- ou C_L^- está no passado de p e a velocidade espacial necessária para que eles se relacionem é menor do que o igual a velocidade da luz. Por fim, caso um evento q_3 esteja fora de $C_T(p)$ ou de $C_L(p)$, então os eventos não conseguem estabelecer influência entre si, pois a velocidade espacial necessária para que se relacionem é maior do que a velocidade da luz. A Figura 70 exemplifica alguns eventos q_1 , q_2 e q_3 descritos, em $\mathbb{L}^3$.

Figura 70: Eventos q_1 , q_2 e q_3 relacionados a p em $\mathbb{L}^3$.

Fonte: Elaboração própria (2026).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa explorou a estrutura algébrica e geométrica de curvas nos espaços pseudo-euclidianos, concentrando-se no espaço de Lorentz-Minkowski. Por meio da Álgebra Linear, formalizamos matematicamente o espaço pseudo-euclidiano e observamos suas principais diferenças com o espaço euclidiano usual, que contestam nossa intuição. Mais ainda, examinamos a teoria de Geometria Diferencial clássica desenvolvida para curvas em espaços pseudo-euclidianos. Para tanto, estudamos resultados paralelos aos estabelecidos para espaços euclidianos usuais, como o Referencial de Frenet-Serret, o Teorema Fundamental das Curvas Planas e o Teorema Fundamental das Curvas Admissíveis.

Além disso, investigamos a teoria de contato de curvas e objetos padrão do espaço de Lorentz-Minkowski: os pseudo-círculos e as retas. Nesse contexto, estabelecemos condições para existência de contato e um método para classificação da ordem do mesmo. Além do mais, definimos a evoluta e examinamos sua relação com a curva original, por meio do tipo causal e pontos singulares.

Por fim, analisamos os postulados da Relatividade Restrita e suas consequências, que motivam e justificam a pesquisa do espaço de Lorentz-Minkowski. Desse modo, o trabalho interliga áreas como Álgebra Linear, Estruturas Algébricas, Cálculo Diferencial, Geometria Diferencial, Singularidades e Física Teórica, analisando como se correlacionam. Essa integração é fundamental, pois o produto interno pseudo-euclidiano de índice 1 surge como um invariante do espaço-tempo, e as modelagens de movimentos de partículas como curvas parametrizadas impulsionam o estudo geométrico.

Apesar da ampla investigação de curvas que desenvolvemos, tal trabalho ainda contém diversas perguntas e áreas não exploradas. Alguns exemplos de perspectivas de estudos futuros são: o desenvolvimento da Geometria Diferencial de superfícies no espaço de Lorentz-Minkowski, o estudo do contato de curvas espaciais com objetos padrão (esferas, planos, espaços de Sitter e espaços hiperbólicos) e a formalização matemática da relatividade geral.

De um ponto de vista mais pessoal, vejo que este trabalho foi fundamental para minha formação. Isso porque uniu e aprofundou diversas áreas que estudei durante a graduação. Também pude desenvolver minha escrita matemática e acadêmica de forma mais completa, estruturando um texto longo. Além disso, durante a produção deste texto, percebi que poderia trabalhar com pesquisa e seguir uma carreira acadêmica, que sempre foi um sonho para mim.

Referências Bibliográficas

- BERENDS, F. Hendrik antoon lorentz: his role in physics and society. **Journal of Physics: Condensed Matter**, v. 21, n. 16, p. 164223, 2009.
- BOLDRINI, J. L. **Álgebra Linear**. [S.l.]: Harper e Row, 1980.
- BRUCE, J. W.; GIBLIN, P. J. **Curves and Singularities: a geometrical introduction to singularity theory**. [S.l.]: Cambridge university press, 1992.
- CARROLL, S. M. **Spacetime and geometry**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019.
- COUTO, I. T.; LYMBEROPOULOS, A. **Introdução à Geometria Lorentziana: Curvas e Superfície**. [S.l.]: SBM, 2018.
- EINSTEIN, A. On the electrodynamics of moving bodies. **Annalen der Physik**, v. 17, p. 891–921, 1905. English translation of “Zur Elektrodynamik bewegter Körper”.
- EINSTEIN, A.; PEREIRA, C. A. **A teoria da relatividade especial e geral**. [S.l.]: Contraponto Editora, 2021.
- FRANCISCO, A. P. **Deformações geométricas de curvas no plano Minkowski**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2019.
- GIBSON, C. G. **Singular points of smooth mappings**. [S.l.]: Pitman publishing, 1979.
- IZUMIYA, S. et al. **Differential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint**. Singapore: World Scientific, 2015. 384 p. ISBN 9789814590464.
- LIMA, E. L. **Análise Real Vol. 2 Coleção Matemática Universitária, IMPA**. [S.l.]: Rio de Janeiro, 2004.
- LORENTZ, H. A. Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less than that of light. **Proceedings of the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences**, v. 6, p. 809–831, 1904.
- MAXWELL, J. C. A dynamical theory of the electromagnetic field. The Royal Society, v. 155, p. 459–512, 1865.
- O’NEILL, B. **Semi-Riemannian geometry with applications to relativity**. [S.l.]: Academic press, 1983. v. 103.
- POINCARÉ, H. **La mécanique nouvelle**. [S.l.]: Gauthier-Villars Paris, 1924.
- POOLE, D. **Algebra Linear**. [S.l.]: Thomson Learning, 2003.
- RIUL, P. B.; BARRETO, E. de O.; MOREIRA, M. M. Geometria diferencial de curvas em espaços euclidianos e teoria de contato. **Revista de Matemática da UFOP**, v. 3, n. 03, p. 41–63, 2022.

SALOOM, A.; TARI, F. Curves in the minkowski plane and their contact with pseudo-circles. **Geom. Dedicata**, v. 159, n. 1, p. 109–124, 2012.

SANTOS, J. C. Minkowski, geometria e relatividade. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 9, n. 18, p. 115–131, 2009.

TENENBLAT, K. **Introdução à geometria diferencial**. [S.l.]: Editora Blucher, 2008.

TIPLER, P. A.; LLEWELLYN, R. A. **Física Moderna**. [S.l.]: LTC, 2017.

WALKER, J.; HALLIDAY, D.; RESNICK, R. **Fundamentos de física: volume 4: óptica e física moderna**. [S.l.]: LTC, 2009.

WALTER, S. The historical origins of spacetime. In: **Springer Handbook of Space-time**. [S.l.]: Springer, 2014. p. 27–38.