



Universidade Federal
de São João del-Rei

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI
COORDENADORIA DO CURSO DE MATEMÁTICA

PEDRO LUCAS RIBEIRO DA SILVA

ANÁLISE DE CAOS EM SISTEMAS
DINÂMICOS DISCRETOS:
O *SHIFT*, A TENDA E UM
AUTOMORFISMO DE $\mathbb{T}^2$.

SÃO JOÃO DEL-REI - MG
2025

PEDRO LUCAS RIBEIRO DA SILVA

ANÁLISE DE CAOS EM SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS: O *SHIFT*, A TENDA E UM AUTOMORFISMO DE $\mathbb{T}^2$.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática, da Universidade Federal de São João del-Rei, como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Wilker Thiago Resende Fernandes, UFSJ-DEMAT.

São João del-Rei, 18 de dezembro de 2025.

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
 WILKER THIAGO RESENDE FERNANDES
Data: 18/12/2025 16:10:04-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Orientador: Prof. Dr. Wilker Thiago Resende Fernandes

Documento assinado digitalmente
 PATRICIA TEMPESTA
Data: 18/12/2025 20:07:19-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Patricia Tempesta

Documento assinado digitalmente
 VIVIANE PARDINI VALERIO
Data: 18/12/2025 21:18:04-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Viviane Pardini Valério

Ficha catalográfica elaborada pela Divisão de Biblioteca (DIBIB)
e Núcleo de Tecnologia da Informação (NTINF) da UFSJ,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586a Silva, Pedro Lucas Ribeiro da.
Análise de caos em sistemas dinâmicos discretos:
o shift, a tenda e um automorfismo em T^2 . / Pedro
Lucas Ribeiro da Silva ; orientador Wilker Thiago
Resende Fernandes. -- São João del-Rei, 2025.
81 p.

Trabalho de Conclusão (Graduação - Matemática) --
Universidade Federal de São João del-Rei, 2025.

1. Definições Básicas. 2. O shift. 3. A tenda. 4.
As transformações hiperbólicas no toro. I. Fernandes,
Wilker Thiago Resende , orient. II. Título.

Agradecimentos

Toda a minha jornada acadêmica não seria possível sem o apoio de pessoas às quais dedico minha sincera gratidão!

Aos meus pais, Carlos e Walkiria, por sempre me motivarem e incentivarem a correr atrás dos meus sonhos e objetivos. Sem o apoio incondicional e o amor de vocês, esta conquista não seria possível.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Wilker Thiago Resende Fernandes, por ter aceito o desafio de me orientar, pela motivação em momentos de dúvida e por todos os ensinamentos compartilhados ao longo do caminho. Evoluí muito sob sua orientação e sou imensamente grato por todo aprendizado.

Aos amigos e amigas feitos na República King Size, incluindo moradores, ex-moradores e agregados, por terem compartilhado um lar e uma família comigo durante toda essa jornada. A amizade, o companheirismo e o apoio de vocês foram fundamentais em todo esse período.

À Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ), aos professores do Departamento de Matemática e Estatística da UFSJ, pelo conhecimento compartilhado e pela formação de excelência durante minha jornada acadêmica. Em especial, à Professora Patrícia Tempesta, pela orientação em um projeto que foi fundamental para a minha graduação e, ao Professor Pedro Benedini Riul, por todos os aprendizados transmitidos e pelo suporte nesta reta final de curso.

Aos amigos do curso de Matemática, com quem tive o prazer de compartilhar essa desafiadora e gratificante jornada.

À banca examinadora, composta pelas professoras Viviane Pardini e Patrícia Tempesta, por terem aceito o convite e pelas contribuições na avaliação e aprimoramento deste trabalho.

E por fim, ao Projeto de Iniciação Científica e Mestrado (PICME), pelas oportunidades de estudo e pelo financiamento dos projetos de iniciação científica que realizei ao longo de minha graduação, que foram cruciais para a minha formação como matemático.

“Cada dia é uma chance pra ser melhor que ontem.”
(Emicida)

Resumo

Este trabalho apresenta uma análise de alguns sistemas dinâmicos discretos, com um foco especial nas dinâmicas das aplicações *shift*, mapa tenda e um automorfismo hiperbólico em $\mathbb{T}^2$. Inicialmente, apresentamos propriedades importantes que esses sistemas devem possuir, acompanhadas de alguns exemplos, visando facilitar a compreensão geométrica da dinâmica. O foco principal é demonstrar, por meio de análises rigorosas, que essas aplicações definem sistemas dinâmicos caóticos nos espaços em que são definidas, sendo eles, respectivamente, o espaço de sequências $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, o intervalo real $[0, 1]$ e o toro bidimensional $\mathbb{T}^2$.

Palavras-chave: sistemas dinâmicos, caos, *shift*, tenda, automorfismo hiperbólico.

Abstract

This study presents an analysis of some discrete dynamical systems, with a special focus on the dynamics of the shift map, the tent map, and a hyperbolic automorphism on $\mathbb{T}^2$. Initially, we present important properties that these systems must possess, along with examples, aiming to facilitate the geometric understanding of the dynamics. The main focus is to demonstrate, through rigorous analyses, that these maps define chaotic dynamical systems on the spaces where they are defined, which are, respectively, the sequence space $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, the real interval $[0,1]$, and the two-dimensional torus $\mathbb{T}^2$.

Palavras-chave: dynamical systems, chaos, shift map, tent map, hyperbolic automorphism.

Sumário

Introdução	9
1 Definições básicas	11
1.1 A dinâmica discreta	11
1.2 Propriedades dinâmicas	18
2 O <i>shift</i>	25
2.1 O espaço de sequências	25
2.2 A aplicação <i>shift</i>	29
2.3 A dinâmica do <i>shift</i>	30
3 A tenda	33
3.1 A dinâmica em intervalos	33
3.1.1 Pontos fixos com derivadas menor que 1	33
3.1.2 Pontos fixos com derivadas maior que 1	35
3.1.3 Pontos fixos com derivadas iguais a 1	37
3.2 A dinâmica da tenda	39
3.3 A família quadrática	45
4 As transformações hiperbólicas no toro	50
4.1 Matrizes Hiperbólicas	50
4.2 O toro $\mathbb{T}^2$	54
4.3 A aplicação f_A	63
4.4 A dinâmica de f_A	68
Considerações finais	79
Referências Bibliográficas	80

Introdução

Os sistemas dinâmicos constituem uma área da Matemática que oferece ferramentas muito úteis tanto para a compreensão quanto para a modelagem de fenômenos que evoluem ao longo do tempo. Esses sistemas podem ser classificados em contínuos e discretos. Enquanto os sistemas dinâmicos contínuos modelam fenômenos cuja evolução ocorre de maneira ininterrupta no tempo, frequentemente descritos por equações diferenciais, os sistemas dinâmicos discretos — foco deste trabalho — estudam a evolução em instantes de tempo separados, isto é, de forma discreta.

A história dos sistemas dinâmicos tem suas raízes no século XVII, quando Isaac Newton (1642–1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) desenvolveram o Cálculo Diferencial e os fundamentos da Mecânica. Tais ferramentas foram posteriormente utilizadas para modelar sistemas físicos que evoluíam no tempo por meio de equações diferenciais. Embora essas equações fossem suficientes para determinar o comportamento de diversos sistemas, segundo (ALLIGOOD et al., 2022), havia uma limitação: muitas vezes era impossível expressar suas soluções de forma analítica simples. Em alguns casos — como no estudo das órbitas planetárias — os períodos eram extremamente difíceis de determinar.

Foi somente no final do século XIX que Henri Poincaré (1854–1912), conforme discutido em (DEVANEY, 2018) e (STROGATZ, 2015), revolucionou o estudo dos sistemas dinâmicos ao introduzir técnicas qualitativas voltadas para a compreensão do comportamento geral das soluções, em vez de soluções particulares. Poincaré defendia que o entendimento global da dinâmica era mais relevante do que a determinação explícita e analítica de uma única solução.

No início do século XX, surgiu um grande interesse pelo estudo de sistemas dinâmicos não-lineares, impulsionado, entre outros fatores, pela teoria de Edward Lorenz sobre previsões meteorológicas. Em seus estudos, Lorenz observou que o sistema atmosférico apresenta extrema sensibilidade às condições iniciais, tornando previsões de longo prazo praticamente impossíveis — um comportamento característico de sistemas caóticos. Essa sensibilidade é uma das principais propriedades associadas ao caos, como descrito em (HIRSCH et al., 2013).

Os sistemas dinâmicos discretos desempenham um papel significativo na área, pois permitem modelar fenômenos cuja evolução no tempo é naturalmente discreta, como destacado em (ALLIGOOD et al., 2022). O desenvolvimento dessa vertente da teoria forneceu podero-

sas ferramentas matemáticas e aplicações em diversos campos, como apresentado em (ELAYDI, 2008). Além disso, observou-se que muitos sistemas dinâmicos discretos exibem comportamento caótico.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma introdução à teoria dos sistemas dinâmicos discretos por meio da análise de três aplicações clássicas: o *shift*, a aplicação tenda e um automorfismo hiperbólico no toro bidimensional. Mostraremos que essas aplicações definem sistemas caóticos, destacando as propriedades que, segundo (DEVANEY, 2018), caracterizam o caos em sistemas dinâmicos.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 1, apresentamos conceitos, resultados e definições fundamentais que servirão de base para a compreensão da dinâmica discreta e das propriedades principais que desejamos demonstrar. No Capítulo 2, estudamos algumas propriedades do espaço de sequências $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ e aplicamos os resultados do Capítulo 1 para entender a dinâmica do *shift*. No Capítulo 3, analisamos a dinâmica de aplicações em intervalos reais, com foco na aplicação tenda definida em $[0, 1]$. Por fim, no Capítulo 4, investigamos, no toro bidimensional $\mathbb{T}^2$, a dinâmica de um automorfismo hiperbólico e finalizamos o trabalho com considerações finais e referências.

Capítulo 1

Definições básicas

Neste capítulo introduziremos alguns conceitos e definições básicas importantes para compreensão deste trabalho, assim como alguns resultados e alguns exemplos envolvendo esses resultados. Ao longo do trabalho, utilizaremos noções básicas da Teoria de Espaços Métricos, baseadas em (??), pois os espaços que trabalharemos, em sua maioria, admitem uma métrica. Vale destacar mais uma vez que na Teoria dos Sistemas Dinâmicos o tempo pode ser observado de maneira contínua ou discreta, neste trabalho o tempo será observado apenas de maneira discreta.

1.1 A dinâmica discreta

Para evitar ambiguidades, estabeleceremos que ao longo do texto o conjunto dos números naturais inclui o zero, ou seja,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

O conjunto dos naturais que não inclui o zero será denotado por,

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Definição 1.1.1. Um **sistema dinâmico** é um par (X, f) , onde X é um conjunto chamado de **espaço de fases**, e $f : X \rightarrow X$ é uma regra ou, mais precisamente, uma aplicação, que nos diz como os pontos de X se movem com o passar do tempo.

A dinâmica, que é a passagem do tempo, é vista como a iteração dessa aplicação. Deste modo, se no instante zero começarmos com um ponto $x \in X$, no instante 1 ele estará em $f(x)$, no instante 2 em $f(f(x))$ e assim sucessivamente. Para evitarmos escrever expressões muito

longas denotaremos as iteradas de uma aplicação f da seguinte forma,

$$f^0(x) := x; \quad f^1(x) := f(x); \quad f^2(x) := f(f(x)); \quad f^3(x) := f(f(f(x)));$$

e, de maneira geral,

$$f^n(x) = \underbrace{(f \circ \cdots \circ f \circ f)}_{n \text{ vezes}}(x).$$

Definição 1.1.2. Chamamos de **órbita** de um ponto x o conjunto das iteradas de x e denotamos como,

$$O(x) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f^n(x)\} = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), f^4(x), \dots\}.$$

Exemplo 1.1.3. Seja $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ a aplicação,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{se } x \text{ é par;} \\ 2^x, & \text{se } x \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Vamos analisar as possíveis órbitas de um ponto de $x \in \mathbb{N}^*$.

Se x for ímpar, então sua imagem é 2^x , que é par. Assim obtemos que a órbita de x é,

$$O(x) = \{x, 2^x, 2^{x-1}, 2^{x-2}, \dots, 1, 2, 1, \dots\}.$$

Já se x for par, pela decomposição em fatores primos, podemos escreve-lo como $x = 2^k p$ onde $k \in \mathbb{N}$ e p é um número ímpar. Assim obtemos a seguinte órbita de x ,

$$O(x) = \{2^k p, 2^{k-1} p, 2^{k-2} p, \dots, 2p, p, \dots\}.$$

Note que p é ímpar, assim essa órbita continua como a órbita acima, e assim,

$$O(x) = \{2^k p, 2^{k-1} p, 2^{k-2} p, \dots, 2p, p, 2^p, 2^{p-1}, \dots, 1, 2, \dots\}.$$

Dessa forma, dado qualquer $x \in \mathbb{N}^*$, $O(x)$ será de um dos dois tipos acima, ambas sempre terminando com a repetição infinita de 1 e 2.

Observação 1.1.4. Quando f possui uma aplicação inversa $f^{-1} : X \rightarrow X$, ou seja, é uma bijeção, podemos também considerar os iterados de f para o passado. Nesse caso, dado $n \in \mathbb{N}$, f^{-n} significa iterar f^{-1} n -vezes, ou seja,

$$f^{-n}(x) = \underbrace{(f^{-1} \circ f^{-1} \circ \cdots \circ f^{-1})}_{n\text{-vezes}}(x).$$

Nesse caso, a órbita de x é dada por,

$$O(x) := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{f^n(x)\}.$$

Mesmo que $f : X \rightarrow Y$ não seja bijeção, é possível definir a **pré-imagem** de um conjunto, que consiste de todos pontos de X que são levados em Y pela aplicação f , ou seja,

$$f^{-1}(Y) = \{x \in X : f(x) \in Y\}.$$

Exemplo 1.1.5. Para a aplicação ilustrada pela Figura 1.1 temos.

$$f^{-1}(y_1) = \{x_1, x_5\}; \quad f^{-1}(y_2) = \{x_2, x_3\}; \quad f^{-1}(y_3) = \emptyset; \quad f^{-1}(y_4) = \{x_4\}.$$

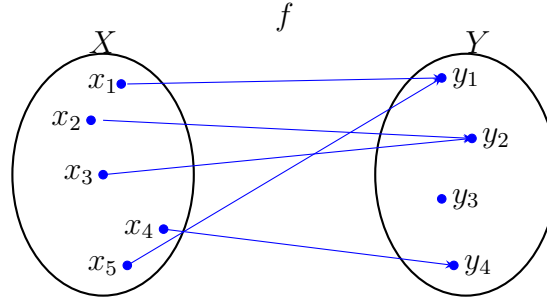


Figura 1.1: Aplicação usada no Exemplo 1.1.5. Fonte: Autor.

Note que o conjunto $f^{-1}(Y)$ pode conter vários pontos, um único ponto ou mesmo ser o conjunto vazio.

Definição 1.1.6. Seja $f : X \rightarrow X$. Dizemos que um conjunto $A \subset X$ é **invariante** se $f^{-1}(A) = A$.

Exemplo 1.1.7. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$. $A = \{0\}$ e $B = \{\mathbb{R}\}$ são conjuntos invariantes por f .

De fato, note que $f^{-1}(0) = \{0\}$, logo $f^{-1}(A) = A$. Dado $x \in B$ como $f(x) = 2x \in B$, temos que $x \in f^{-1}(B)$, logo $B \subset f^{-1}(B)$. Agora, dado $x \in f^{-1}(B)$, temos $f(x) = 2x \in B = \mathbb{R}$ então $2x \cdot \frac{1}{2} = x \in \mathbb{R} = B$, logo $x \in B$ e assim $f^{-1}(B) \subset B$. Pelas duas inclusões, segue que $f^{-1}(B) = B$. Portanto A e B são invariantes por f .

Definição 1.1.8. Seja $f : X \rightarrow X$. Dizemos que x é um **ponto periódico** de f se existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $f^n(x) = x$. Nesse caso, seu período é o menor $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $f^p(x) = x$.

A Figura 1.2 ilustra a órbita de um ponto p de período 4.

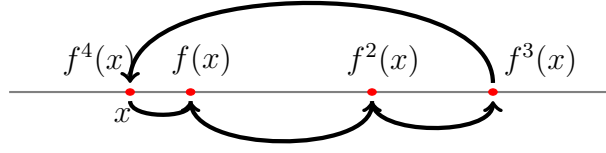


Figura 1.2: Representação da órbita de um ponto periódico de período 4. Fonte: Autor.

Observação 1.1.9. Algumas observações sobre essa definição:

- i) Caso $p = 1$, dizemos que x é um **ponto fixo** de f .
- ii) Quando x é um ponto periódico de período p , sua órbita se resume ao conjunto finito,

$$O(x) := \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x)\}.$$

- iii) Denotamos o conjunto dos pontos periódicos de f como $Per(f)$.

Exemplo 1.1.10. Observe, no Exemplo 1.1.3, que os únicos pontos periódicos são 1 e 2, ambos de período 2.

Exemplo 1.1.11. Seja $f : X \rightarrow X$ onde X é o conjunto finito, $X = \{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$. Então, para todo ponto $x \in X$ temos que $O(x)$ é uma órbita periódica.

De fato, note que a órbita de x é o conjunto $O(x) = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots\}$. Como o contradomínio de f é o conjunto X , temos que $f^n(x) \in X, \forall n \in \mathbb{N}$. Em particular, $O(x) \subset X$ e, portanto, $O(x)$ também é um conjunto finito. Por outro lado, as iteradas, $f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots$ são infinitas. Assim alguma das iteradas de x terá que se repetir, ou seja, existem $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ e $l \in \mathbb{N}$ tais que

$$f^k(x) = f^{l+k}(x).$$

Logo, $O(x) = \{x, f(x), \dots, f^k(x), f^{k+1}(x), \dots, f^{k+l-1}(x)\}$.

Após as definições de órbitas e pontos periódicos é natural se perguntar também sobre pontos de acumulação e limites de uma órbita, ou seja, pontos em torno dos quais a órbita irá passar uma infinidade de vezes. A partir de agora, alguns assuntos que serão abordadas fazem mais sentido quando X possui uma certa estrutura, assim, abordaremos o conjunto X como espaço munido de uma métrica d . Assim, a partir de agora, a menos que mencionemos o contrário, o espaço de fases (X, d) ou simplesmente X , quando não houver perigo de confusão, será sempre considerado um espaço métrico, como definido em (??).

Definição 1.1.12. Seja $f : X \rightarrow X$. Dada uma órbita $O(x)$ de um ponto x , chamamos de ω -limite de x o conjunto,

$$\omega(x) = \{z \in X; \exists (n_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N} \text{ crescente, com } f^{n_i}(x) \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} z\}.$$

Em palavras, o conjunto ω -limite de um ponto x são os pontos de X cuja sua órbita é atraída e passa infinitas vezes.

Exemplo 1.1.13. Seja $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{se } x \text{ é primo ou se } x = 1; \\ \text{menor fator primo na decomposição de } x, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Vamos estudar suas órbitas, conjuntos ω -limite e analisar a existência de pontos periódicos. Observemos inicialmente que,

$$O(1) = \{1, 3, 5, 7, 9, 3, 5, 7, 9, \dots\} = \{1, 3, 5, 7, 9\} \text{ e } O(2) = \{2, 4, 2, 4, 2, \dots\} = \{2, 4\}.$$

Se x é um número par maior do que 2, o menor fator primo na sua decomposição é 2. Portanto $f(x) = 2$ e assim, $O(x) = \{x, 2, 4, 2, 4, 2, \dots\}$. Agora, note que $O(3) = \{3, 5, 7, 9, 3, 5, 7, 9, \dots\} = \{3, 5, 7, 9\}$.

Se p é um primo gêmeo, isto é, um primo tal que $p + 2$ também é primo, e $p \neq 3$, então $p + 1$ é múltiplo de 3. De fato, $p \neq 3$ implica que $p + 1$ ou $p + 2$ é múltiplo de 3, como $p + 2$ também é primo, então segue a afirmação.

Note agora que, sendo p um primo gêmeo, $f(p + 2) = p + 4 = (p + 1) + 3$ é um múltiplo de 3. Assim,

$$O(p) = \{p, p + 2, p + 4, 3, 5, 7, 9, \dots\}$$

Se p é ímpar maior que 3 temos dois casos:

- p é primo não gêmeo: isso implica que $f(p) = p + 2$ onde $p + 1$ ou $p + 2$ são múltiplos de 3. Se $p + 2$ é múltiplo 3, então $O(p) = \{p, p + 2, 3, 5, 7, 9, \dots\}$. Se $p + 1$ é múltiplo de 3, então $f(p + 2) = q_1$, onde q_1 é um primo ímpar menor que p . De fato, pela decomposição em fatores primos, $p + 2 = q_1^{k_1} \cdot q_2^{k_2} \cdot \dots \cdot q_r^{k_r}$, onde $q_1 < q_2 < \dots < q_r$ são primos e $k_i \in \mathbb{N}^*$, para $i \in \{1, 2, \dots, r\}$. Note que $q_r < p$ pois, caso contrário, $q_r \geq p \Rightarrow 2 \cdot q_r \geq 2 \cdot p > p + 2$ e, como $2 < q_1 < q_2 < \dots < q_r$, então $p + 2 < q_1^{k_1} \cdot q_2^{k_2} \cdot \dots \cdot q_r^{k_r}$, o que é um absurdo. Assim, $f(p) = q_1$. Por processo análogo, para $f(q_1) = q_1 + 2$ temos que $q_1 + 1$ ou $q_1 + 2$ são múltiplos de 3. Se $q_1 + 2$ é múltiplo de 3, segue que $O(p) = \{p, p + 2, q_1, q_1 + 2, 3, 5, 7, 9, \dots\}$. E se $q_1 + 1$ é múltiplo de 3, então pelo mesmo processo acima $f(q_1) = a_1$, onde a_1 é um primo ímpar menor que q_1 . Sucessivamente, em algum momento obteremos um primo da

órbita periódica $\{3, 5, 7, 9\}$. Portanto,

$$O(p) = \{p, p+2, q_1, q_1+2, a_1, \dots, 3, 5, 7, 9, \dots\}.$$

- p não é primo: por definição $f(p)$ é primo, logo, voltamos ao caso anterior.

Por fim, pela análise feita acima, podemos observar que 2 e 4 são os únicos pontos periódicos de período 2 e que 3, 5, 7 e 9, são pontos periódicos de período 4. Assim, $Per(f) = \{2, 4, 3, 5, 7, 9\}$. Note também que, se x par, o conjunto $\omega(x) = \{2, 4\}$, pois são os pontos que a órbita de x passa uma infinidade de vezes. Analogamente, se x é ímpar $\omega(x) = \{3, 5, 7, 9\}$.

Definição 1.1.14. Dizemos que um conjunto $A \subset X$ é um **atrator** de $f : X \rightarrow X$ se existe um conjunto aberto $U \subset X$ tal que:

- i) $A \subset U$;
- ii) $f(\overline{U}) \subset U$;
- iii) $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(U)$.

O conjunto aberto U é chamado de *trapping region* (região de captura), pois uma vez que a órbita de um ponto entra numa *trapping region* ela não sai mais. A **bacia de atração** de um atrator A é definida como

$$B(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(U),$$

onde U é uma *trapping region* para A . A bacia de atração de um atrator é formada pelos pontos que são atraídos para A no futuro. Quando $B(A) = X$, isto é, todos os pontos têm sua órbita atraída para A no futuro, dizemos que A é um **atrator global**.

Exemplo 1.1.15. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x}{2}$. $A = \{0\}$ é um atrator global. De fato, note que $f^n(x) = \frac{x}{2^n}$. Dado $x \in \mathbb{R}$ temos que $\frac{x}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Assim, $O(x)$ é atraída por 0, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.1.16. No Exemplo 1.1.3, o conjunto $A = \{1, 2\}$ é um conjunto atrator global, pois, a órbita de todo $x \in \mathbb{N}^*$ é atraída para os pontos 1 e 2.

Exemplo 1.1.17. No Exemplo 1.1.13, os conjuntos $A = \{2, 4\}$ e $B = \{3, 5, 7, 9\}$ são atratores, pois as órbitas dos pontos pares são atraída para A e dos ímpares são atraídas para B .

Observação 1.1.18. i) Note que conjuntos atratores podem apresentar variadas estruturas, podendo ser conjuntos distintos dentro de um mesmo espaço e até mesmo um único ponto.

- ii) Se $f : X \rightarrow X$ é um aplicação invertível, então um conjunto $R \subset X$ é dito **repulsor** de f se é um atrator para f^{-1} . Por exemplo, considere $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 2x$, então $R = \{0\}$ é um repulsor, pois R é um atrator para $g^{-1}(x) = f(x) = \frac{x}{2}$.

Os conjuntos que apresentaremos agora desempenham um papel fundamental no estudo dos sistemas dinâmicos, como veremos de forma mais aprofundada no Capítulo 4 desse trabalho. Eles são os conjuntos estáveis e instáveis de um ponto.

Definição 1.1.19. Sejam $f : X \rightarrow X$ invertível e $x \in X$ um ponto arbitrário. Os **conjuntos estável** e **instável** de x são definidos, respectivamente, por

$$W_f^s(x) = \left\{ y \in X : d(f^n(x), f^n(y)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \right\},$$

e

$$W_f^u(x) = \left\{ y \in X : d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \right\}.$$

De maneira informal, o conjunto estável de x são todos os pontos de X cuja órbita se aproxima da órbita de x quando olhamos para o futuro das órbitas. Analogamente, o conjunto instável de x são todos os pontos de X cuja órbita se aproxima da órbita de x quando olhamos para o passado das órbitas. Geometricamente a interpretação de pontos desse conjunto pode ser vista na Figura 1.3.

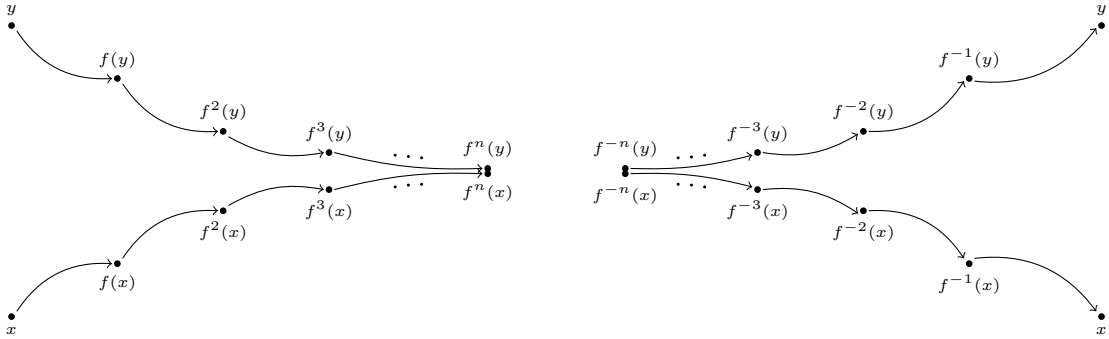


Figura 1.3: Representação dos conjuntos estável e instável de x . Fonte: Autor.

Lema 1.1.20. *Seja $f : X \rightarrow X$ invertível e $x \in X$. Vale que:*

i) $f(W_f^s(x)) = W_f^s(f(x));$

ii) $f^{-1}(W_f^u(x)) = W_f^u(f^{-1}(x)).$

Demonstração: i) Seja $y \in W_f^s(x)$ então $d(f^n(x), f^n(y)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ e $f(y) \in f(W_f^s(x))$. Note que $f^n(f(y)) = f^{n+1}(y)$ e $f^n(f(x)) = f^{n+1}(x)$. Assim,

$$d(f^n(f(x)), f^n(f(y))) = d(f^{n+1}(x), f^{n+1}(y)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

logo, $f(y) \in W_f^s(f(x))$. Agora, seja $y \in W_f^s(f(x))$. Então $d(f^n(f(x)), f^n(y)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, como f é invertível, temos que $\exists z \in X$ tal que $z = f^{-1}(y)$. Assim, $f^n(z) = f^{n-1}(y)$ e

$$d(f^n(x), f^n(z)) = d(f^n(x), f^{n-1}(y)) = d(f^{n-1}(f(x)), f^{n-1}(y)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

logo, $z \in W_f^s(x)$ o que implica $y \in f(W_f^s(x))$. Portanto, $f(W_f^s(x)) = W_f^s(f(x))$.

ii) Seja $y \in W_f^u(x)$ então $d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ e $f^{-1}(y) \in f^{-1}(W_f^u(x))$. Note que $f^{-n}(f^{-1}(y)) = f^{-(n+1)}(y)$ e $f^{-n}(f^{-1}(x)) = f^{-(n+1)}(x)$. Assim,

$$d(f^{-n}(f^{-1}(x)), f^{-n}(f^{-1}(y))) = d(f^{-(n+1)}(x), f^{-(n+1)}(y)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

logo, $f^{-1}(y) \in W_f^u(f^{-1}(x))$. Agora, seja $y \in W_f^u(f^{-1}(x))$. Então $d(f^{-n}(f^{-1}(x)), f^{-n}(y)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, como f^{-1} é invertível, temos que $\exists z \in X$ tal que $z = f(y)$. Assim, $f^{-n}(z) = f^{-n+1}(y)$ e

$$d(f^{-n}(x), f^{-n}(z)) = d(f^{-n}(x), f^{-n+1}(y)) = d(f^{-n+1}(f^{-1}(x)), f^{-n+1}(y)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

logo, $z \in W_f^u(x)$ implica $y \in f^{-1}(W_f^u(x))$. Portanto, $f^{-1}(W_f^u(x)) = W_f^u(f^{-1}(x))$. □

1.2 Propriedades dinâmicas

Agora, veremos propriedades extremamente importantes para o estudo da dinâmica das principais aplicações que trabalharemos de maneira mais aprofundada ao longo desse trabalho. Utilizaremos como base (BACKES et al., 2023).

Definição 1.2.1. Dizemos $f : X \rightarrow X$ é **transitiva** quando existe $x \in X$ tal que $\overline{O(x)} = X$, ou seja, quando f possui alguma órbita densa em X .

Observação 1.2.2. Em outras palavras, f é transitiva quando existe $x \in X$ tal que dado um ponto $a \in X$ qualquer e qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in B(a, \varepsilon) = \{x \in X; d(a, x) < \varepsilon\}$ (chamada de bola aberta de centro a e raio ε).

Exemplo 1.2.3. Seja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(x) = x + 1$. A órbita $O(0)$ é densa em $\mathbb{N}$. De fato, note que $O(0) = \{1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\} = \mathbb{N}$, logo, $\overline{O(0)} = \mathbb{N}$.

O resultado a seguir fornece uma condição equivalente para que uma aplicação $f : X \rightarrow X$ seja transitiva. Sua demonstração utiliza resultados provados em (LIMA, 1993) e (LIMA, 2009b), que utilizaremos aqui sem demonstrar, mas fornecendo as referências de onde encontramos.

Teorema 1.2.4. Seja $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua em um espaço métrico (X, d) de Hausdorff localmente compacto e conexo. Então f é transitiva se, e somente se, para todo par de abertos U e V existe algum $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Se f é transitiva, então existe $x \in X$, tal que $O(x) = \{f^n(x); n \in \mathbb{N}\}$ é densa em X , ou seja, dados U, V abertos em X , existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_1}(x) \in U$ e $f^{n_2}(x) \in V$. Supondo, sem perda de generalidade que $n_1 < n_2$, tome $n = n_2 - n_1$, assim $f^n(f^{n_1}(x)) = f^{n_2-n_1}(f^{n_1}(x)) = f^{n_2}(x) \in V$, como $f^{n_1}(x) \in U$, então,

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

($\Leftarrow$) Suponha $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então existe $x \in f^n(U) \cap V$. Como $x \in f^n(U)$ existe $y \in U$ tal que $x = f^n(y)$ e assim $y \in f^{-n}(f^n(U))$, ou seja, $y \in U \cap f^{-n}(f^n(U))$. Note que, como $x \in V$ e $f^{-n}(V)$ é um conjunto de pré-imagens dos elementos de V , $f^{-n}(V)$ contém todas as pré-imagens de x , incluindo y . Logo, $y \in U \cap f^{-n}(V)$, ou seja, $U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$. Daí, $U \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(V) \right) \neq \emptyset$.

Como U é um aberto qualquer de X e $U \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(V) \right) \neq \emptyset$, segue que, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(V)$ é denso em X .

Como V é um subconjunto aberto de X e f^n é contínua para todo $n \in \mathbb{N}$ (pois é composta de contínuas), segue que $f^{-n}(V)$ é aberto de X para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(V)$ é um subconjunto aberto e denso em X .

Como X é um espaço métrico localmente compacto, pelo Exemplo 11 e a Proposição 3 do Capítulo 9 do livro (LIMA, 1993), segue que X é um espaço métrico separável. Utilizando o Proposição 4 do Capítulo 8 do livro (LIMA, 2009b), obtemos que X tem uma base enumerável de conjuntos abertos, vamos denotá-la como a família $\{V_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Logo, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(V_j)$ é aberto e denso para todo $j \in \mathbb{N}$.

Como X é um espaço de *Hausdorff*, pela Proposição 19 do Capítulo 7 do livro (LIMA, 2009b), X é um espaço de Baire. Daí, como enunciado na Seção 6 do Capítulo 6 do livro (LIMA, 2009b), $Z = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(V_j) \right)$ é um subconjunto denso em X (pois é a interseção de uma família enumerável de abertos densos em X), em particular, é não vazio, ou seja, existe $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(V_j)$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Provemos agora que a órbita de x é densa em X . Dado $a \in X$ qualquer, para todo aberto G de X tal que $a \in G$, existe $V_j \in \{V_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $a \in V_j \subset G$. Como $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(V_j)$ existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in f^{-n}(V_j)$, logo $f^n(x) \in V_j$.

Portanto, para todo aberto G em torno de a , existe um ponto da órbita de $O(x)$ contido nele, ou seja, $\overline{O(x)} = X$. $\square$

A Figura 1.4 ilustra o Teorema 1.2.4. Para quaisquer dois conjuntos abertos U e V de X ,

existe $n \in \mathbb{N}$ tal que a iterada $f^n(U)$ intersecta V .

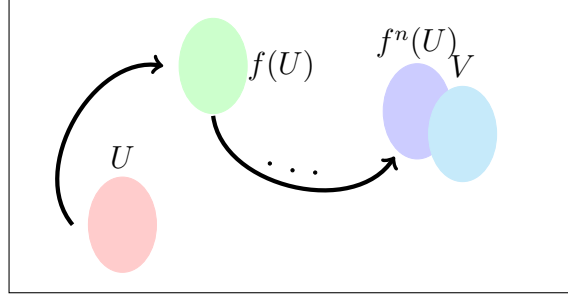


Figura 1.4: Representação da transitividade. Fonte: Autor.

Definição 1.2.5. Seja $f : X \rightarrow X$ uma aplicação. Dizemos que f é **expansiva** se existe $\varepsilon > 0$ tal que, se $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$, então $x = y$.

Caso f possua inversa, dizemos f é **expansiva** se existe $\varepsilon > 0$ tal que, se $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{Z}$, então $x = y$.

Observação 1.2.6. Em outras palavras, f ser expansiva significa que dados dois pontos distintos x e y , então para todo $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Z}$), tal que $d(f^k(x), f^k(y)) \geq \varepsilon$.

Exemplo 1.2.7. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 2x$ e d a métrica usual de $\mathbb{R}$. A aplicação f é expansiva.

De fato, dados $x, y \in \mathbb{R}$ com $x \neq y$, temos que $f^n(x) = 2^n x$ e $f^n(y) = 2^n y$. Daí,

$$d(f^n(x), f^n(y)) = 2^n |x - y|.$$

Logo, dado qualquer $\varepsilon > 0$, basta tomar $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que $2^n \geq \frac{\varepsilon}{|x-y|}$ visto que $2^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Assim, $d(f^n(x), f^n(y)) = 2^n |x - y| > \varepsilon$.

Uma definição extremamente importante para este trabalho, que é uma consequência da definição anterior, é a de ter sensibilidade às condições iniciais, descrita abaixo.

Definição 1.2.8. Seja (X, d) um espaço métrico e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação. Dizemos que f tem **sensibilidade às condições iniciais** se existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $x \in X$ e todo $\delta > 0$, existem $y \in B(x, \delta)$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que,

$$d(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon.$$

Observação 1.2.9. Algumas observações para entendermos um pouco melhor a definição acima:

- i) Geometricamente, isso significa dado um $x \in X$ existe um ponto $y \in X$ em qualquer vizinhança de x tal que em algum momento as iteradas de x e y tornam-se distantes.
- ii) A grande diferença entre expansividade e sensibilidade às condições iniciais está no fato de que, na primeira, as órbitas de todos os pontos (distintos) por mais próximos que estejam, devem eventualmente se separar. Enquanto que, na segunda, basta que para todo $x \in X$, exista algum ponto perto de x cuja a órbita eventualmente se separa da órbita de x .
- iii) Da observação anterior, concluímos que se uma aplicação é expansiva, então tem sensibilidade às condições iniciais. Porém, recíproca não é verdadeira.

Essa diferença entre expansividade e sensibilidade às condições iniciais pode ser interpretada geometricamente como nas Figuras 1.5 e 1.6, respectivamente.

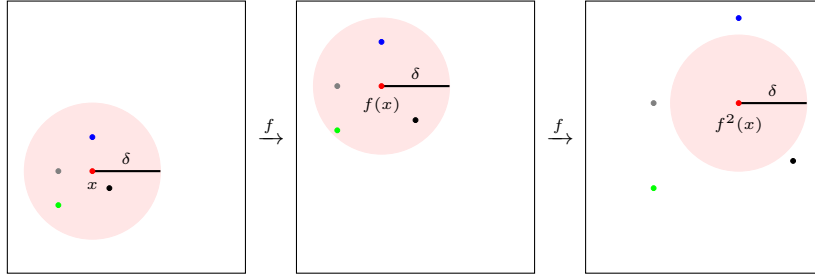


Figura 1.5: Representação da expansividade. Fonte: Autor.

Na Figura 1.5, vemos as órbitas de todos os pontos de uma vizinhança de x se afastarem da órbita de x , enquanto na Figura 1.6 existe apenas um ponto da vizinhança cujo a órbita se afasta da órbita de x .

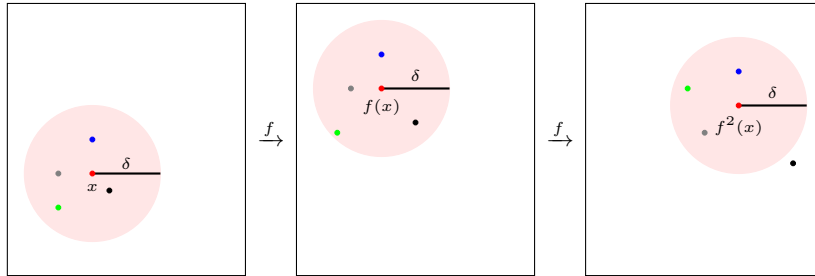


Figura 1.6: Representação da sensibilidade às condições iniciais. Fonte: Autor.

Definição 1.2.10. Um sistema dinâmico $f : X \rightarrow X$ é dito **caótico** se:

- i) o conjunto dos pontos periódicos de f é denso em X , isto é, $\overline{\text{Per}(f)} = X$;
- ii) f é transitiva;

iii) f tem sensibilidade às condições iniciais.

Observação 1.2.11. Cabe ressaltar que existem diferentes definições sobre o que significa um sistema ser caótico, porém a mais utilizada atualmente é a definição acima que provém dos trabalhos de Devaney (DEVANEY, 2018). Existem trabalhos onde se mostra que, sob certas hipóteses, as condições *i*) e *ii*) implicam à condição *iii*). Vide (ELAYDI, 2008), p. 137-162.

Por fim, apresentaremos a definição de conjugação que é uma mudança de coordenadas que relaciona duas dinâmicas distintas. Ela será utilizada para facilitar a demonstração de propriedades dinâmicas para funções mais complexas.

Definição 1.2.12. Sejam $f : X \rightarrow X$ e $g : Y \rightarrow Y$. Uma **conjugação** entre f e g é uma aplicação $h : X \rightarrow Y$, contínua e com inversa também contínua, ou seja, h é um homeomorfismo, que satisfaça

$$h \circ f = g \circ h.$$

Proposição 1.2.13. Sejam $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$ e $h : X \rightarrow Y$ uma conjugação entre f e g . Então:

- i) x é um ponto periódico de período n de f se, e somente se, $h(x)$ é um ponto periódico de período n de g .*
- ii) f é transitiva se, e somente se, g é transitiva.*
- iii) $\overline{Per(f)} = X$ se, e somente se, $\overline{Per(g)} = Y$.*
- iv) f tem sensibilidade às condições iniciais se, e somente se, g tem sensibilidade às condições iniciais.*

Demonstração: *i)* Primeiramente, note que como h é uma conjugação, segue da definição que

$$f = h^{-1} \circ g \circ h.$$

Deste modo,

$$f^2 = f \circ f = (h^{-1} \circ g \circ h) \circ (h^{-1} \circ g \circ h) = h^{-1} \circ g \circ id \circ g \circ h = h^{-1} \circ g^2 \circ h.$$

Logo f^2 é conjugada a g^2 . Sucessivamente obtemos que,

$$\begin{aligned}
f^n &= f \circ f \circ \cdots \circ f \\
&= (h^{-1} \circ g \circ h) \circ (h^{-1} \circ g \circ h) \circ \cdots \circ (h^{-1} \circ g \circ h) \\
&= h^{-1} \circ g \circ (h \circ h^{-1}) \circ g \circ (h \circ \cdots \circ h^{-1}) \circ g \circ h \\
&= h^{-1} \circ g \circ id \circ g \circ id \circ \cdots \circ id \circ g \circ h \\
&= h^{-1} \circ g \circ g \circ \cdots \circ g \circ h \\
&= h^{-1} \circ g^n \circ h,
\end{aligned}$$

ou seja, $g^n \circ f = h \circ f^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, $p \in X$ é um ponto periódico de período k de f , se, e somente se,

$$p = f^k(p) = (h^{-1} \circ g^k \circ h)(p) \Leftrightarrow h(p) = g^k(h(p)),$$

se, e somente se, $h(p) \in Y$ é um ponto periódico de período k de g .

ii) Queremos mostrar que $\overline{O(x)} = X$ se, e somente se, $\overline{O(h(x))} = Y$.

($\Rightarrow$) Seja V um aberto qualquer em Y e $y \in Y$. Como $h : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo sabemos que,

- h é contínua, então $h^{-1}(V)$ é aberto;
- h é bijetiva, particularmente, existe um único $x \in X$ tal que $h(x) = y$.

Deste modo, como $h^{-1}(V)$ é aberto em X e $O(x)$ é densa em X , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(x) \in h^{-1}(V)$, logo $h(f^{n_0}(x)) \in V$. Pelo item i), $h(f^{n_0}(x)) = g^{n_0}(h(x)) \in V$. Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g^{n_0}(h(x)) \in V$. Portanto, $O(h(x))$ é densa em Y e g é transitiva.

($\Leftarrow$) Analogamente, dado um aberto $U \in X$ e $x \in X$. Como h é um homeomorfismo, segue que h^{-1} é contínua e bijetiva e $(h^{-1})^{-1}(U) = h(U)$ é aberto em Y . Como $O(h(x))$ é densa em Y , existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $g^{n_1}(h(x)) \in h(U)$, assim $h^{-1}(g^{n_1}(h(x))) \in h^{-1}(h(U)) = U$. Novamente, pelo item i), temos $h^{-1}(g^{n_1}(h(x))) = f^{n_1}(x) \in U$. Assim, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_1}(x) \in U$. Portanto, $O(x)$ é densa em X e f é transitiva.

iii) ($\Rightarrow$) Seja V aberto em Y , como h é homeomorfismo, $h^{-1}(V)$ é aberto em X . Como $\overline{Per(f)} = X$ existe $x \in Per(f)$ tal que $x \in h^{-1}(V)$, logo $h(x) \in V$. Note que $h(Per(f)) = \{h(x) \in Y; x \in Per(f)\}$ e, pelo item i), se x é um ponto periódico de f , $h(x)$ é um ponto periódico de g , logo $h(Per(f)) \subset Per(g)$. Ou seja, dado um aberto V em Y , existe $h(x) \in Per(g)$ tal que $h(x) \in V$. Portanto, $\overline{Per(g)} = Y$.

($\Leftarrow$) Agora, dado U aberto em X , como h é um homeomorfismo, $h(U)$ é aberto em Y e como $\overline{Per(g)} = Y$ existe $y \in Per(g)$ tal que $y \in h(U)$, onde $y = h(x)$ para algum $x \in X$. Deste modo, $h^{-1}(y) = x \in h^{-1}(h(U)) = U$. Note que $h^{-1}(Per(g)) = \{x \in X; y = h(x) \in Per(g)\}$ e, pelo item i), se y é um ponto periódico de g , x é um ponto periódico de f , logo $h^{-1}(Per(g)) \subset Per(f)$. Logo, para todo U aberto em X , existe $x \in Per(f)$ tal que $x \in U$. Portanto, $\overline{Per(f)} = X$.

iv) ($\Rightarrow$) Seja $y \in Y$ e $\delta_y > 0$ quaisquer. Note que, como h é homeomorfismo, existem $x \in X$ e $\delta_x > 0$ tais que $h(x) = y$ e, a bola aberta de centro x e raio δ_x , $B(x, \delta_x) = h^{-1}(B(y, \delta_y))$, bola aberta de centro y e raio δ_y . Como f tem sensibilidade às condições iniciais, existe $\varepsilon_x > 0$ tal que existem $n \in \mathbb{N}$ e $z \in B(x, \delta_x)$ tais que $d(f^n(z), f^n(x)) \geq \varepsilon_x$. Pela demonstração do item *i*), temos que $h(f^n(x)) = g^n(h(x))$ e $h(f^n(z)) = g^n(h(z))$. Como $f^n(x) \neq f^n(z)$, então $g^n(h(x)) \neq g^n(h(z))$, assim existe $\varepsilon_y > 0$ tal que $d(g^n(h(x)), g^n(h(z))) \geq \varepsilon_y$. Note que, como $z \in B(x, \delta_x)$ segue que $h(z) \in h(B(x, \delta_x)) = h(h^{-1}(B(y, \delta_y))) = B(y, \delta_y)$. Ou seja, existe $\varepsilon_y > 0$ tal que, para $y \in Y$ e $\delta_y > 0$ quaisquer, existem $h(z) \in B(y, \delta_y)$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $d(g^n(h(z)), g^n(y)) \geq \varepsilon_y$. Portanto, g tem sensibilidade às condições iniciais.

($\Leftarrow$) Agora, dado $x \in X$ e $\delta_x > 0$ quaisquer. Como h é homeomorfismo, existem $y \in Y$ e $\delta_y > 0$ tais que $h(x) = y$ e $B(h(x), \delta_y) = h(B(x, \delta_x))$. Como g tem sensibilidade às condições iniciais, existem $\varepsilon_y > 0$, $h(z) \in B(h(x), \delta_y)$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $d(g^n(h(z)), g^n(h(x))) \geq \varepsilon_y$. Pela demonstração do item *i*), temos que $h^{-1}(g^n(y)) = h^{-1}(g^n(h(x))) = f^n(x)$ e $h^{-1}(g^n(h(z))) = f^n(z)$, assim existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $d(f^n(x), f^n(z)) \geq \varepsilon_x$. Note que, como $h(z) \in B(y, \delta_y)$ segue que $h^{-1}(h(z)) = z \in h^{-1}(B(y, \delta_y)) = h^{-1}(h(B(x, \delta_x))) = B(x, \delta_x)$. Ou seja, existe $\varepsilon_x > 0$ tal que para $x \in Y$ e δ_x quaisquer, existem $z \in B(x, \delta_x)$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $d(f^n(z), f^n(x)) \geq \varepsilon_x$. Portanto, f tem sensibilidade às condições iniciais. $\square$

Observação 1.2.14. Como dito anteriormente, a conjugação é uma importante ferramenta dos sistemas dinâmicos, pois a partir dela ganhamos que funções compartilham propriedades dinâmicas, incluindo transitividade, sensibilidade às condições iniciais e $Per(f)$ denso. Isso nos auxilia pois, como veremos mais tarde neste trabalho, existem aplicações com uma dinâmica complexa e difícil de se analisar. Assim, podemos estudar a dinâmica de uma aplicação mais simples conjugada a ela.

Capítulo 2

O *shift*

No capítulo anterior, vimos exemplos de sistemas dinâmicos, em maioria, definidos no conjunto dos números naturais. Neste capítulo, apoiados em (RESENDE, 2024) e (BACKES et al., 2023), estudaremos um sistema dinâmico em que o espaço de fases se quer é enumerável. Esse exemplo, muito conhecido na teoria de sistemas dinâmicos, se trata da aplicação chamada de *shift*, que é definido em um espaço de sequências. Ele é bem interessante, pois a noção de distância se torna um pouco diferente da usada nos números reais. Veremos primeiro algumas propriedades sobre essa aplicação e em seguida estudaremos suas propriedades dinâmicas.

2.1 O espaço de sequências

Considere o conjunto,

$$\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots); x_i \in \{0, 1\} \text{ para todo } i \in \mathbb{N}\},$$

formado por sequências infinitas de 0's e 1's. Dizemos que cada x_i é uma **coordenada** da sequência $(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots)$. Um elemento desse espaço tem a forma, por exemplo,

$$(0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, \dots),$$

que será também representado por,

$$0110011110011\dots$$

Observação 2.1.1. Algumas explicações sobre o espaço de sequências

- i) O conjunto $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ é também chamado de **espaço de palavras**, as sequências de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ de **palavras** e 0 e 1 de **letras**.

ii) Para simplificar a notação, usaremos os seguintes símbolos:

- $0^{+\infty}$ corresponde a uma sequência infinito de 0's, ou seja, $0^{+\infty} = 000000\dots$;
- $1^{+\infty}$ corresponde a uma sequência infinito de 1's, ou seja, $1^{+\infty} = 111111\dots$;
- $(0110)^{+\infty} = 0110011001100110\dots$;
- $00001(1011)^{+\infty} = 000011011101110111011\dots$.

Conforme dito no capítulo anterior, várias propriedades dinâmicas podem ser melhores compreendidas quando o espaço de fases possui uma estrutura, deste modo, vamos definir uma métrica para o conjunto $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Inicialmente, dadas duas sequências $x = (x_0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ e $y = (y_0, y_1, y_2, y_3, \dots)$ em $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, vamos considerar $N : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por

$$N(x, y) := \min\{k \geq 0 : x_k \neq y_k\}.$$

Ou seja, $N(x, y)$ nos diz qual é a primeira coordenada em que as sequências x e y diferem. Por exemplo,

$$N(011101(1)^{+\infty}, 011100(0)^{+\infty}) = 5$$

pois a primeira coordenada em que estas sequências diferem é a coordenada cinco. Note que $N(x, y) = N(y, x)$ e $N(x, x) = +\infty$. Mais ainda, se $N(x, y) = +\infty$, então necessariamente todas as coordenadas das palavras x e y coincidem, ou seja, $x = y$.

Agora, fazendo uso dessa noção, podemos definir uma distância em $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ da seguinte forma: dados x e y em $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, seja $d : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por,

$$d(x, y) := \left(\frac{1}{2}\right)^{N(x, y)}.$$

O que a definição diz é que a distância entre as sequências x e y depende da coordenada que elas deixam de coincidir. Assim, quanto maior for $N(x, y)$, menor é $d(x, y)$, ou seja, quanto mais próximas as sequências forem, em mais coordenadas elas coincidem.

Exemplo 2.1.2. Alguns exemplos para entendermos melhor a noção de distância.

- Considere $x = 1^{+\infty}$ e $y = 01^{+\infty}$. Como elas diferem na primeira coordenada, segue que $N(x, y) = 0$, logo $d(x, y) = d(1^{+\infty}, 01^{+\infty}) = 1$ (a maior distância possível).
- Agora, considere $x = 101^{+\infty}$ e $y = 1101^{+\infty}$. Elas diferem na segunda coordenada, logo $N(x, y) = 1$ e $d(x, y) = d(101^{+\infty}, 1101^{+\infty}) = \frac{1}{2}$.

Proposição 2.1.3. A aplicação $d : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x, y) := \left(\frac{1}{2}\right)^{N(x, y)}$ é uma métrica.

Demonstração: Vamos provar que d cumpre as propriedades de uma métrica segundo (LIMA, 1993). Sejam x, y e $z \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ quaisquer.

i) Como para todo $n \in \mathbb{N}$, $(\frac{1}{2})^n$ é positivo, segue que $d(x, y) = (\frac{1}{2})^{N(x, y)} > 0$ para todos $x, y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

ii) Como $N(x, y) = N(y, x)$ para todos $x, y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, segue que,

$$d(x, y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{N(x, y)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{N(y, x)} = d(y, x).$$

iii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow N(x, y) = +\infty \Leftrightarrow x = y$.

iv) Para todos $x, y, z \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, se:

- Se $d(x, z) \leq d(x, y)$, segue que $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ e não há nada a fazer.
- Se $d(x, z) > d(x, y)$ então $(\frac{1}{2})^{N(x, z)} > (\frac{1}{2})^{N(x, y)} \Rightarrow N(x, y) > N(x, z)$, isto é, as sequências x e y coincidem por mais coordenadas do que x e z . Assim, temos,

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_{N(x, y)-1} = y_{N(x, y)-1} \text{ e } x_{N(x, y)} \neq y_{N(x, y)},$$

e

$$x_1 = z_1, x_2 = z_2, \dots, x_{N(x, z)-1} = z_{N(x, z)-1} \text{ e } x_{N(x, z)} \neq z_{N(x, z)}.$$

Daí, como $N(x, z) < N(x, y)$, segue que,

$$y_1 = z_1, y_2 = z_2, \dots, y_{N(x, z)-1} = z_{N(x, z)-1} \text{ e } y_{N(x, z)} \neq z_{N(x, z)}.$$

Logo, $N(y, z) = N(x, z)$ e assim $d(y, z) = d(x, z)$. Daí

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Portanto d é uma métrica em $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. □

As definições a seguir no futuro, nos vão nos ajudar a compreender melhor o espaço de sequências e posteriormente a provar suas propriedades dinâmicas

Definição 2.1.4. Chamamos de **espaço de palavras de comprimento n** em $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ o conjunto,

$$W_n := \{(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) : x_i \in \{0, 1\}\}.$$

Definição 2.1.5. Dada uma palavra $w \in W_n$, dizemos que o conjunto,

$$[w] = [w_0 w_1 w_2 \dots w_{n-1}] = \{x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}; x_0 = w_0, \dots, x_{n-1} = w_{n-1}\},$$

é um **cilindro**.

Observação 2.1.6. Algumas observações importantes:

- i) Dada uma palavra $w \in W_n$, um cilindro $[w]$ contém as sequências de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ que coincidem as n primeiras coordenadas com w .
- ii) Se $w \in W_n$ e as sequências $x, y \in [w]$, então $N(x, y) \geq n$. Assim, pela definição de distância, $d(x, y) \leq (\frac{1}{2})^n$, não sendo estritamente menor pois x e y podem coincidir em mais coordenadas, isto é $N(x, y) > n$.
- iii) Cilindros podem ser vistos como bolas abertas, pois
 $[w] = \{z \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : d(z, w_0w_1 \dots w_{n-1}0^{+\infty}) < (\frac{1}{2})^n + \varepsilon\}$, onde $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$.

Como mencionamos na introdução deste capítulo, uma das principais diferenças do espaço que estamos estudando agora, dos exemplos do capítulo anterior, está no fato de que ele não é enumerável. Veremos que, mesmo não sendo enumerável, conseguimos definir uma aplicação para este espaço e estudar sua dinâmica. Para a demonstração usaremos uma técnica introduzida por Georg Cantor no final do Século XIX.

Proposição 2.1.7. $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ é não enumerável.

Demonstração: Suponha que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ seja enumerável, isto é, e que exista uma bijeção $h : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Deste modo, é possível montar uma lista com os elementos de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$,

$$x_0 = h(0), x_1 = h(1), x_2 = h(2), \dots$$

Mas cada x_i dessa lista é uma sequência de símbolos 0's e 1's, logo

$$\begin{aligned} h(0) &= x_0 = (x_{00}, x_{01}, x_{02}, x_{03}, \dots) \\ h(1) &= x_1 = (x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots) \\ h(2) &= x_2 = (x_{20}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, \dots) \\ h(3) &= x_3 = (x_{30}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, \dots) \\ \vdots &\quad \quad \quad \vdots \end{aligned}$$

onde $x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i, j \in \mathbb{N}$.

Por h ser uma bijeção, particularmente, h é sobrejetiva, ou seja, $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = h(\mathbb{N})$, mas o elemento $y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ dado por,

$$y = (1 - x_{00}, 1 - x_{11}, 1 - x_{22}, 1 - x_{33}, \dots),$$

não pertence a $f(\mathbb{N})$. De fato, y não pode ser o elemento x_0 , pois a primeira coordenada de y é diferente da coordenada x_{00} de x_0 ; y também não pode ser x_1 , pois sua segunda coordenada

também é distinta de x_{11} . Sucessivamente, podemos notar que $y \neq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, y não pertence à lista acima. Logo, existe $y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tal que $y \notin h(\mathbb{N})$ o que contradiz, h ser bijeção. Portanto, concluímos que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ é não enumerável. $\square$

2.2 A aplicação *shift*

Agora, vamos apresentar a aplicação principal deste capítulo: o *shift*. Seja $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, dada por,

$$f(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots),$$

ou seja, essa aplicação "apaga" a primeira coordenada e desloca as demais para a esquerda, por isso recebe o nome de "shift", que significa deslocamento, em inglês.

Proposição 2.2.1. *A aplicação $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ é contínua.*

Demonstração: Vamos mostrar que f é uniformemente contínua, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $d(x, y) \leq \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$. Primeiramente, vamos considerar $\varepsilon = (\frac{1}{2})^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Dados $x, y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, se $d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$ então por definição

$$d((x_1, x_2, x_3, \dots), (y_1, y_2, y_3, \dots)) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

isto é, $x_i = y_i$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Tome $\delta = (\frac{1}{2})^{n+1}$. Deste modo, se $d(x, y) \leq (\frac{1}{2})^{n+1}$, temos que $x_i = y_i$ para todo $i \in \{0, 1, 2, \dots, n, n+1\}$. Dessa forma, concluímos que se $d(x, y) \leq \delta$, então $d(f(x), f(y)) \leq (\frac{1}{2})^n = \varepsilon$. Por fim, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, basta tomarmos $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de forma que $(\frac{1}{2})^n \leq \varepsilon$ e $\delta = (\frac{1}{2})^{n+1}$. Daí, segue do caso anterior que, se $d(x, y) \leq \delta$, então $d(f(x), f(y)) \leq (\frac{1}{2})^n \leq \varepsilon$. Isto mostra que o *shift* é uma aplicação uniformemente contínua e, portanto, contínua. $\square$

Nosso objetivo principal neste capítulo é mostrar que o *shift* possui uma dinâmica caótica, vamos conhecer quais são seus pontos periódicos. Faremos esse processo por partes, determinando primeiro seus pontos fixos.

Observe que um elemento $x = (x_0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ é um ponto fixo de f se, e somente se,

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots) = f(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots).$$

Ou seja, x é ponto fixo de f se, e somente se, $x_0 = x_1$, $x_1 = x_2$, $x_2 = x_3, \dots$, ou seja, $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = \dots$. Note que as duas seqüências em que isso ocorre são:

$$0^{+\infty} = (0, 0, 0, \dots) \text{ e } 1^{+\infty} = (1, 1, 1, \dots).$$

Portanto esses são os dois únicos pontos fixos do *shift*.

Vamos agora determinar os pontos periódicos de período 2 de f (ou pontos fixos de f^2), ou seja, as sequências x em $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ tais que,

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots) = f^2(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, x_5, \dots).$$

Nesse caso temos, $x_0 = x_2$, $x_1 = x_3$, $x_2 = x_4$, $x_3 = x_5$, $x_4 = x_6, \dots$, que equivale a ter $x_0 = x_2 = x_4 = x_6 = \dots$ e $x_1 = x_3 = x_5 = \dots$, assim existem os 4 pontos fixos de f^2 , são eles:

$$(00)^{+\infty} = (0, 0, 0, 0, \dots); \quad (11)^{+\infty} = (1, 1, 1, 1, \dots);$$

$$(01)^{+\infty} = (0, 1, 0, 1, \dots) \quad e \quad (10)^{+\infty} = (1, 0, 1, 0, \dots).$$

Note que os dois primeiros são os pontos fixos de f . De maneira análoga, para determinar os pontos periódicos de período n (ou pontos fixos de f^n), basta tomar uma palavra de comprimento n , $b = (b_0 b_1 b_2 \dots b_{n-2} b_{n-1}) \in W_n$ assim a sequência ,

$$(b)^{+\infty} = b_0 b_1 \dots b_{n-2} b_{n-1} b_0 b_1 \dots b_{n-2} b_{n-1} b_0 b_1 b_2 \dots b_{n-2} b_{n-1} \dots$$

dada pela repetição dessa palavra, é um ponto fixo de f^n , desde que $b_1 b_2 \dots b_{n-1}$ não tenha repetição periódica. Note ainda que, para cada coordenada de b temos apenas dois valores possíveis, como b tem n coordenadas, f^n possui 2^n pontos fixos.

2.3 A dinâmica do *shift*

Agora que entendemos um pouco sobre a dinâmica do *shift*, mostraremos que ele cumpre as três condições da Definição 1.2.10, sendo assim um sistema dinâmico caótico.

Teorema 2.3.1. O conjunto dos pontos periódicos do *shift* são densos em $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Demonstração: Dados $x = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ e $\varepsilon > 0$ quaisquer, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\frac{1}{2})^{n_0} = \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$. Assim, seja $y = (x_0, x_1, \dots, x_{n_0})^{+\infty}$. Observe que $f^{n_0}(y) = y$, ou seja, y é periódico de período n_0 e $d(x, y) \leq (\frac{1}{2})^{n_0} < \varepsilon$. Logo, para todo $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, existe $y \in Per(f)$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$. Ou seja, $B(x, \varepsilon) \cap Per(f) \neq \emptyset$ e assim que $\overline{Per(f)} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. $\square$

Teorema 2.3.2. O *shift* é uma aplicação transitiva.

Demonstração: Vamos mostrar agora que existe algum $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ que possua órbita densa. Tomemos $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ dado por,

$$x = 0100011011000001010100110111\dots,$$

ou seja, x é construído pela concatenação de todas as palavras de comprimento 1, seguida de todas as palavras de comprimento 2, todas as palavras de comprimento 3 e assim sucessivamente.

Considere um ponto qualquer $y = (y_0, y_1, y_2, \dots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Note que o primeiro símbolo de y , y_0 , só pode ser 0 ou 1. Dessa forma, a primeira coordenada de y coincide com o próprio x ou coincide com $f(x)$. Assim, ou $d(x, y) = \frac{1}{2}$ ou $d(f(x), y) = \frac{1}{2}$, isto é, existe um elemento da órbita de x tal que sua distância para y é menor que ou igual a $\frac{1}{2}$.

Agora note que como x é formado por todas as palavras de comprimento 2, existe alguma iterada de x que coincide com as coordenadas $y_0 y_1$ de y . Assim, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^{n_1}(x), y) \leq (\frac{1}{2})^2$. Por um processo sucessivo, podemos concluir que, como x é composto por todas as palavras de comprimento n , sempre existe $n_2 \in \mathbb{N}$ de modo que $d(f^{n_2}(x), y) \leq (\frac{1}{2})^n$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\frac{1}{2})^n < \varepsilon$ e assim $d(f^n(x), y) = (\frac{1}{2})^n < \varepsilon$, ou seja, x possui órbita densa em $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. $\square$

Observação 2.3.3. O elemento x definido na demonstração do Teorema 2.3.2 não é o único que possui órbita densa, modificando a ordem dos termos de x como por exemplo,

$$x' = 1\,0\,00\,01\,10\,11\,000\,001\,010\,100\,110\,101\,111\,\dots,$$

ou,

$$x'' = 0\,1\,01\,00\,11\,10\,000\,001\,010\,100\,110\,101\,111\,\dots,$$

que são distintos de x , podemos notar que pelos mesmos argumentos usados para demonstração do Teorema 2.3.2 esses pontos também possuem órbita densa em $\{0, 1\}$.

Teorema 2.3.4. O *shift* tem sensibilidade às condições iniciais.

Demonstração: Queremos mostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo x e para todo $\delta > 0$ existe um $y \in B(x, \delta)$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Sejam $x = (x_0, x_1, x_2, x_3, \dots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ e $\delta > 0$ quaisquer. Note que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\frac{1}{2})^n \leq \delta$. Tome $y = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, y_n, y_{n+1}, \dots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ tal que, $x \neq y$. Note que $d(x, y) \leq (\frac{1}{2})^n < \delta$, pois x e y com certeza coincidem até a coordenada $n - 1$. Por definição, como x e y são sequências distintas, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que a coordenada $x_{n+k} \neq y_{n+k}$. Assim as sequências,

$$f^{n+k}(x) = (x_{n+k}, x_{n+k+1}, x_{n+k+2}, \dots) \text{ e } f^{n+k}(y) = (y_{n+k}, y_{n+k+1}, y_{n+k+2}, \dots),$$

diferem na primeira coordenada, isto é, $d(f^{n+k}(x), f^{n+k}(y)) = 1$.

Tome então $\varepsilon = 1$. Daí $d(f^{n+k}(x), f^{n+k}(y)) \geq 1 = \varepsilon$. Portanto, o *shift* tem sensibilidade às condições iniciais. $\square$

Teorema 2.3.5. O *shift* é caótico.

Demonstração; Pelo Teorema 2.3.1, $Per(f)$ é denso em $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, pelo Teorema 2.3.2 o *shift* é transitivo e pelo Teorema 2.3.4 possui sensibilidade às condições iniciais. Portanto, pela Definição 1.2.10 o *shift* é um sistema dinâmico caótico. $\square$

Capítulo 3

A tenda

Nos capítulos anteriores vimos sistemas dinâmicos definidos em $\mathbb{N}$ e em um espaço de sequências. Neste capítulo, com alguns resultados apoiados em (BACKES et al., 2023), vamos trabalhar com sistemas dinâmicos definidos em intervalos de $\mathbb{R}$, mais especificamente, duas aplicações famosas no estudo de sistema dinâmicos, uma delas é a aplicação $T : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, $T(x) = 1 - 2|x|$, chamada de *tenda* e a segunda, se trata de uma família de funções, conhecida por *família quadrática*, definida por $f_a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $f_a(x) = ax(1 - x)$. Primeiramente, veremos como a dinâmica se comporta em intervalos por meio de alguns exemplos. Em seguida, estudaremos a dinâmica da tenda analisando seus pontos periódicos e algumas propriedades dinâmicas definidas na Seção 1.2. E, ao fim, mostraremos a existência de uma conjugação entre a tenda e o caso $a = 4$ da família quadrática e que essas aplicações definem sistemas dinâmicos caóticos.

3.1 A dinâmica em intervalos

Começaremos analisando o comportamento de funções contínuas na vizinhança de pontos fixos, utilizando algumas ferramentas do Cálculo Diferencial e Análise Real, apoiados em (LIMA, 2009a).

3.1.1 Pontos fixos com derivadas menor que 1

Nesta seção, mostraremos o que acontece na vizinhança de um ponto fixo que possui derivada, em módulo, menor que 1.

Proposição 3.1.1. *Sejam $f : I \rightarrow I$ uma aplicação de classe C^1 , e $p \in I$ um ponto tal que $f(p) = p$ e $|f'(p)| = \lambda_0 < 1$. Então, existe uma vizinhança $V_p = (p - \varepsilon, p + \varepsilon) \subset I$ tal que,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = p, \quad \text{para todo } x \in V_p.$$

Particularmente, p é um ponto fixo atrator. Mais ainda, dado $\lambda \in (\lambda_0, 1)$, a vizinhança V_p pode ser escolhida de forma que,

$$|f^n(x) - p| \leq \lambda^n |x - p|, \text{ para todo } x \in V_p \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Como $|f'(p)| = \lambda_0 < 1$ e $f'(x)$ é contínua, dado $\lambda \in (\lambda_0, 1)$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $|f'(x)| \leq \lambda < 1$, para todo $x \in V_p = (p - \varepsilon, p + \varepsilon) \subset I$. Como f é derivável em V_p , segue, do Teorema do Valor Médio (TVM), que pode ser encontrado em (LIMA, 2009a), que dado $x \in V_p \setminus \{p\}$ existe $c \in (x, p)$ (ou $c \in (p, x)$) tal que

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(p)}{x - p},$$

Logo $|f(x) - f(p)| = |f'(c)| |x - p|$. Note que $c \in (x, p)$ (ou (p, x)) $\subset V_p$, logo $|f'(c)| \leq \lambda$ e, consequentemente,

$$|f(x) - f(p)| \leq \lambda |x - p|.$$

Como p é ponto fixo e $\lambda < 1$, a igualdade acima implica que $|f(x) - p| \leq |x - p| < \varepsilon$, ou seja, $f(x) \in V_p$. Pelo mesmo processo, segue do TVM que existe $d \in (f(x), p)$ (ou $(p, f(x))$) tal que

$$f'(d) = \frac{f^2(x) - f(p)}{f(x) - p} \Rightarrow |f(x) - p| \cdot |f'(d)| = |f^2(x) - f(p)|$$

e como $d \in V_p$, temos $|f'(d)| < \lambda$, o que implica,

$$|f^2(x) - p| = |f'(d)| \cdot |f(x) - p| \leq \lambda |f(x) - p| \leq \lambda^2 |x - p|.$$

Ou seja, $f^2(x) \in V_p$. Repetindo esse processo n -vezes, obtemos que,

$$|f^n(x) - p| \leq \lambda^n |x - p|.$$

Como $\lambda \in (0, 1)$, segue que $\lambda^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ e, consequentemente, $|f^n(x) - p| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = p, \text{ para todo } x \in V_p.$$

como queríamos demonstrar. □

Observação 3.1.2. O que Proposição 3.1.1 nos diz é que $f^n(x)$ se aproxima exponencialmente de p .

Exemplo 3.1.3. Seja $f : (0, 1] \rightarrow (0, 1]$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$. Então 1 é atrator global.

De fato, observe que 1 é ponto fixo de f pois $\sqrt{1} = 1$, além disso, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$. Logo, segue da Proposição 3.1.1 que 1 é um ponto fixo atrator de f e que todos os pontos de

$(0, 1]$ são atraídos para 1. (Vale a pena observar que $f^n(x) = \sqrt[n]{x}$, assim já sabíamos, de Análise Real, como em (LIMA, 2009a), que $f^n(x) \rightarrow 1$).

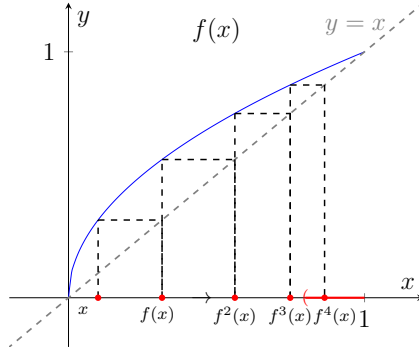


Figura 3.1: Representação da órbita de $x = 0.1$ para $f(x) = \sqrt{x}$. Fonte: Autor.

A Figura 3.1 nos mostra como a órbita de $x = 0.1$ converge para 1. A interpretação é feita obtendo a imagem de x por f , em seguida, com o auxílio da reta $y = x$, identificamos esse o ponto sobre o eixo x . Repetindo esse processo sucessivamente, obtemos uma representação de como $O(x)$ se aproxima de 1.

3.1.2 Pontos fixos com derivadas maior que 1

Agora, analisaremos o que acontece na vizinhança de um ponto fixo que possui derivada, em módulo, maior que 1.

Proposição 3.1.4. *Sejam $f : I \rightarrow I$ uma aplicação de classe C^1 e $p \in I$ um ponto tal que $f(p) = p$ e $|f'(p)| = \lambda_0 > 1$. Então, existe uma vizinhança $V_p = (p - \varepsilon, p + \varepsilon) \subset I$ tal que para todo $x \in V_p \setminus \{p\}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $f^{n_0}(x) \notin V_p$. Particularmente, p é um ponto fixo repulsor. Mais ainda, dado $\lambda \in (1, \lambda_0)$, a vizinhança V_p pode ser escolhida de forma que,*

$$|f^n(x) - p| \geq \lambda^n |x - p| \text{ para todo } x \in V_p \setminus \{p\}.$$

Demonstração. Semelhante à Proposição 3.1.1, como $|f'(p)| = \lambda_0 > 1$ e $f'(x)$ é contínua, dado $\lambda \in (1, \lambda_0)$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $|f'(x)| \geq \lambda > 1$, para todo $x \in V_p = (p - \varepsilon, p + \varepsilon) \subset I$. Como f é derivável em V_p , dado $x \in V_p \setminus \{p\}$ segue do TVM que existe $c \in (x, p) \subset V_p$ (ou (p, x)) tal que,

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \Rightarrow |f(x) - f(p)| = |f'(c)| |x - p|.$$

Como $c \in V_p$, segue que $|f'(c)| \geq \lambda$, e como $f(p) = p$, segue que,

$$|f(x) - p| \geq \lambda |x - p|.$$

Se $f(x) \notin V_p$, a demonstr  o está completa. Caso contrário, $f(x) \in V_p$, e podemos repetir o processo trocando x por $f(x)$ e usando que $p = f(p)$. Assim, novamente segue do TVM que existe $d \in (f(x), p)$ (ou $(p, f(x))$) tal que,

$$f'(d) = \frac{f^2(x) - f(p)}{f(x) - p} \Rightarrow |f^2(x) - f(p)| = |f'(d)| \cdot |f(x) - p|.$$

Como $d \in V_p$, temos que $|f'(d)| > \lambda$, e assim,

$$|f^2(x) - f(p)| = |f'(d)| \cdot |f(x) - p| \geq \lambda |f(x) - p| \geq \lambda^2 |x - p|.$$

Se $f^2(x) \notin V_p$, basta tomarmos $n_0 = 2$ e a demonstr  o está concl ida. Caso contrário, podemos repetir o argumento e, recursivamente, obteremos que, para $n \geq 1$, ou $f^{n-1}(x) \notin V_p$ completando a demonstr  o, ou $f^{n-1}(x) \in V_p$ e $|f^n(x) - p| \geq \lambda^n |x - p|$. Note que como $\lambda > 1$, $\lambda^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$. Daí, como $|x - p| > 0$ (pois $x \neq p$) segue que $\lambda^n |x - p| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Logo, $|f(x) - p| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, ou seja, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \notin V_p$, como queríamos demonstrar. $\square$

Observação 3.1.5. O que a Proposição 3.1.4 nos diz   que $f^n(x)$ se afasta exponencialmente de p .

Exemplo 3.1.6. Seja $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ dada por $f(x) = \sin(2\pi x)$. 0   um repulsor global. De fato, note que $f(0) = \sin(0) = 0$, ou seja, 0   ponto fixo de f e além disso, $f'(x) = 2\pi \cos(2\pi x)$ e $f'(0) = 2\pi > 1$. Assim, pela Proposição 3.1.4, 0   um ponto fixo repulsor e, em particular, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0} \notin (-\varepsilon, \varepsilon)$.

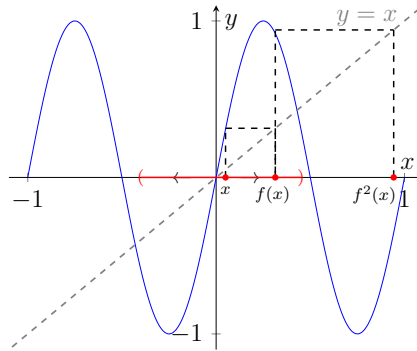


Figura 3.2: Representação da órbita de $x = 0.05$ para $f(x) = \sin(2\pi x)$. Fonte: Autor.

A Figura 3.2 representa como a órbita do ponto $x = 0.05$ se afasta de 0. Semelhante ao Exemplo 3.1.3, obtemos a imagem de x por f , em seguida, com o auxílio da reta $y = x$, identificamos o ponto sobre o eixo x e repetimos o processo para o ponto $f(x)$.

3.1.3 Pontos fixos com derivadas iguais a 1

Para pontos fixos com derivadas, em módulo, iguais a 1 não existem resultados gerais como nas Proposições 3.1.1 e 3.1.4. Nesse caso, o comportamento pode ser bastante variado, como veremos nos exemplos a seguir.

Exemplo 3.1.7. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$. Note que $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$. Além disso, todo ponto $x \in \mathbb{R}$ é um ponto fixo de f , logo 0 não atrai nem repele nenhum ponto.

Nosso próximo exemplo, representado na Figura 3.3, é um caso onde $x = 0$ é um repulsor.

Exemplo 3.1.8. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + x^3$.

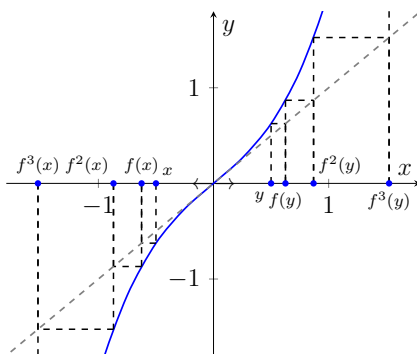


Figura 3.3: Representações de dinâmica para $f(x) = x + x^3$. Fonte: Autor.

Note que $f(x) = x \Leftrightarrow x + x^3 = x \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, ou seja, 0 é o único ponto fixo de f . Além disso, f é diferenciável e $f'(0) = 1$. Vamos analisar a dinâmica de f para uma vizinhança de 0.

Se $x > 0$, então $f(x) = x + x^3 > x$, isso implica que $(x, f(x), f^2(x), \dots)$ é uma sequência estritamente crescente. Logo, a órbita de x se afasta do ponto fixo 0.

Se $x < 0$, então $f(x) = x + x^3 < x$ e, portanto, a sequência $(x, f(x), f^2(x), \dots)$ é estritamente decrescente e também se afasta de 0. Logo 0 é um repulsor.

Para o próximo temos que $x = 0$ é um ponto atrator, ilustrado na Figura 3.4.

Exemplo 3.1.9. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x - x^3$.

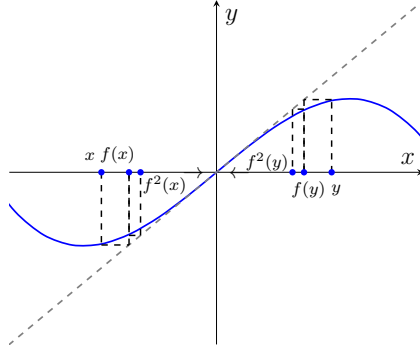


Figura 3.4: Representações de dinâmica para $f(x) = x - x^3$. Fonte: Autor.

Novamente 0 é o único ponto fixo de f , pois $f(x) = x - x^3 = x \Leftrightarrow x = 0$ e $f'(0) = 1$. Agora, dado $x \in (-\frac{1}{10}, 0)$ obtemos que $x^3 < 0 \Rightarrow x^3 < x - x \Rightarrow x < x - x^3$, logo $f(x) > x$. Além disso, temos que $x < x^3 \Rightarrow x - x^3 < 0$, ou seja, $x < f(x) < 0, \forall x \in (-\frac{1}{10}, 0)$. O que isso nos diz é que a sequência $(x, f(x), f^2(x), \dots)$ é estritamente crescente e limitada superiormente por 0. Analogamente, se $x \in (0, \frac{1}{10})$ obtemos que $f(x) = x - x^3 < x$ e que $f(x) > 0$, implicando que $0 < f(x) < x$, isto é, a sequência $(x, f(x), f^2(x), \dots)$ é estritamente decrescente e limitada inferiormente por 0. Portanto, 0 é um ponto fixo atrator.

Vamos observar agora um exemplo dado pela combinação dos dois anteriores, representado na Figura 3.5.

Exemplo 3.1.10. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} x + x^3, & \text{se } x \leq 0; \\ x - x^3, & \text{se } x > 0 \end{cases}$.

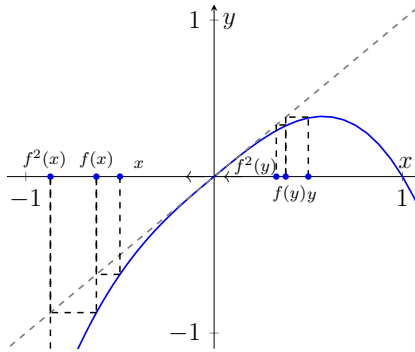


Figura 3.5: Representações da dinâmica da aplicação do Exemplo 3.1.10. Fonte: Autor.

Pelas análises feitas nos exemplos anteriores, temos que: $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ e, para $x < 0$ a dinâmica se afasta de 0 enquanto para $x \in (0, \frac{1}{10})$ a dinâmica se aproxima de 0. Portanto, 0 não nem atrator, nem repulsor nesse exemplo.

O que esses exemplos nos mostram é que para pontos fixos com derivada igual 1 a dinâmica pode apresentar um comportamento variado, podendo ser atrator, repulsor ou nenhum dos dois.

3.2 A dinâmica da tenda

Agora, nos concentraremos na segunda aplicação ponto de destaque desse trabalho, conhecida como *tenda*, nome bem explicativo dado seu gráfico. Seja $T : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ dada por $T(x) = 1 - 2|x|$ que também pode ser escrita como,

$$T(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{se } x \geq 0 \\ 1 + 2x & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

o gráfico de T é dado na Figura 3.6.

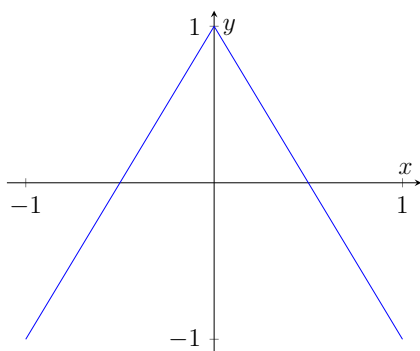


Figura 3.6: Gráfico da tenda $T(x) = 1 - 2|x|$. Fonte: Autor.

A primeira característica que diferencia a *tenda* das aplicações anteriores é que ela não possui derivada em todos os pontos do intervalo em que está definida. De fato, a derivada $T'(x)$ não existe em 0, é igual a -2 para todo $x > 0$, e 2 para todo $x < 0$. A seguir, veremos dois lemas que nos ajudarão a provar sua caoticidade.

Lema 3.2.1. *Se um intervalo não degenerado $I \subset [-1, 1]$ é tal que $0 \notin I$, então $T(I)$ tem o dobro do tamanho de I .*

Demonstração: Considere $I = [a, b] \subset [-1, 1]$ que não contém 0, os outros casos são análogos. Temos que $T(x)$ é derivável nesse intervalo, logo, pelo Teorema do Valor Médio existe $c \in [a, b]$, com $|T'(c)| = 2$ tal que,

$$T'(c) = \frac{T(b) - T(a)}{b - a} \Rightarrow |T(b) - T(a)| = |T'(c)| |b - a| \Rightarrow |T(b) - T(a)| = 2 |b - a|$$

concluindo que $T([a, b])$ tem o dobro do tamanho de $[a, b]$. Na Figura 3.7 temos um exemplo com $I = (-\frac{1}{4}, 0)$ e $T(I) = (\frac{1}{2}, 1)$. $\square$

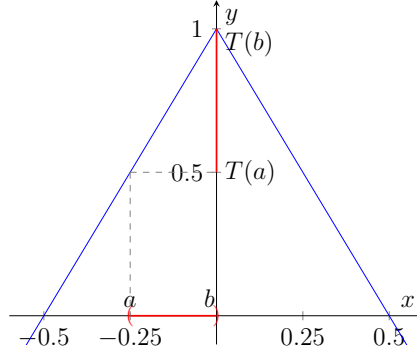


Figura 3.7: Representação do Lema 3.2.1, em $I = (\frac{1}{4}, 0)$ e $T(I) = (\frac{1}{2}, 0)$. Fonte: Autor.

Lema 3.2.2. *Dado $a \in (-1, 1]$, considere o intervalo da forma $[-1, a]$. Então, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, $T^n([-1, a]) = [-1, 1]$.*

Demonstração: Seja $[-1, a]$ um intervalo como no enunciado. Se $a > 0$, $[-1, 0] \subset [-1, a] \Rightarrow [-1, 1] = T([-1, 0]) \subseteq T([-1, a])$. Logo $T([-1, a]) = [-1, 1]$. Se $a < 0$, como -1 é ponto fixo, pois $T(-1) = -1$, temos, $T([-1, a]) = [-1, b]$ onde $b \in (-1, 1]$. Pelo Lema 3.2.1, $[-1, b]$ tem o dobro do tamanho de $[-1, a]$, e assim existem duas possibilidades:

- se $0 \in [-1, b]$, isto é, $b > 0$, voltamos ao primeiro caso e a prova está concluída;
- se $0 \notin [-1, b]$, aplicando T sucessivamente, dobrando o tamanho do intervalo iterado. Assim, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n([-1, a]) = [-1, c]$ onde $c > 0$, voltando novamente ao primeiro caso, onde $T^{n+1}([-1, a]) = [-1, 1]$, concluindo a prova. $\square$

Os próximos resultados provam que a tenda satisfaz as propriedades para ser um sistema dinâmico caótico.

Teorema 3.2.3. A tenda é transitiva.

Demonstração: Para essa prova utilizaremos o Teorema 1.2.4, ou seja, vamos mostrar que dados $U, V \subset [-1, 1]$, U, V abertos, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Sendo U aberto, existe um intervalo $I \subset U$. Se $0 \in I$, temos que $T^2(0) = T(1) = -1$ e assim $[-1, a] \subseteq T^2(I) \subseteq T^2(U)$ para algum $a \in (-1, 1]$. Segue pelo Lema 3.2.2 que existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $[-1, 1] = T^n([-1, a]) \subseteq T^{n+2}(U)$, em particular $T^{n+2}(U) \cap V \neq \emptyset$, para qualquer aberto $V \subset [-1, 1]$. Se $0 \notin I$, segue, do Lema 3.2.1, que $T(I)$ tem o dobro do tamanho de I . Deste modo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 \in T^n(I)$ e retornamos ao caso anterior. Portanto, concluímos que a tenda é uma aplicação transitiva. $\square$

No próximo resultado vamos provar que o conjunto dos pontos periódicos $Per(T)$ são densos em $[-1, 1]$. Para isso, faremos uma análise das iteradas T para entender quais são os seus pontos periódicos.

Primeiramente, analisaremos os pontos fixos (pontos periódicos de período 1) de T , dada por,

$$T(x) = \begin{cases} 1 + 2x, & \text{se } x < 0 \\ 1 - 2x, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

Note que $1 - 2x = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ e $1 + 2x = x \Leftrightarrow x = -1$ assim $x = \frac{1}{3}$ e $x = -1$ são os únicos pontos fixos de T . Podemos observar na, Figura 3.8, que os pontos fixos de $T(x)$ são as interseções com a reta $y = x$.

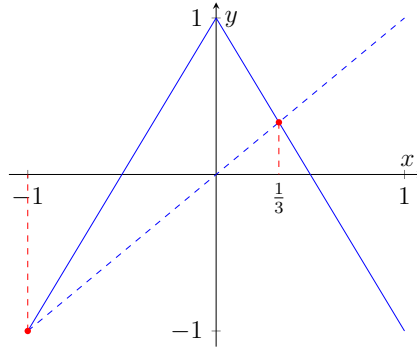


Figura 3.8: Representação dos pontos fixos de T . Fonte: Autor.

Agora, analisaremos os pontos fixos de $T^2(x)$ (pontos periódicos de período 2 de T). Note que,

$$T(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \text{ e } 1 + 2x \geq 0 \\ x \geq 0 \text{ e } 1 - 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \text{ e } x \geq -\frac{1}{2} \\ x \geq 0 \text{ e } x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases},$$

e

$$T(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \text{ e } 1 + 2x < 0 \\ x \geq 0 \text{ e } 1 - 2x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \text{ e } x < -\frac{1}{2} \\ x \geq 0 \text{ e } x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}.$$

Assim,

$$T^2(x) = \begin{cases} 1 + 2(1 + 2x), & \text{se } -1 \leq x < -\frac{1}{2} \\ 1 - 2(1 + 2x), & \text{se } -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ 1 - 2(1 - 2x), & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 + 2(1 - 2x), & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} 3 + 4x, & \text{se } -1 \leq x < -\frac{1}{2} \\ -1 - 4x, & \text{se } -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ -1 + 4x, & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 3 - 4x, & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}.$$

Analisando caso a caso temos $T^2(x) = x \Leftrightarrow x \in \{-1, -\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}\}$, ou seja, existem 2^2 pontos fixos de T^2 .

Utilizando o mesmo raciocínio anterior, obtemos a seguinte expressão para T^3 :

$$T^3(x) = \begin{cases} 7 + 8x, & \text{se } -1 \leq x < -\frac{3}{4} \\ -5 - 8x, & \text{se } -\frac{3}{4} \leq x < -\frac{2}{4} \\ 3 + 8x, & \text{se } -\frac{2}{4} \leq x \leq -\frac{1}{4} \\ -1 - 8x, & \text{se } -\frac{1}{4} < x < 0 \\ -1 + 8x, & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 3 - 8x, & \text{se } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{2}{4} \\ -5 + 8x, & \text{se } \frac{2}{4} < x \leq \frac{3}{4} \\ 7 - 8x, & \text{se } \frac{3}{4} < x \leq 1 \end{cases}.$$

Assim, $T^3(x) = x \Leftrightarrow x \in \{-1, -\frac{5}{9}, -\frac{3}{7}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \frac{3}{9}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}\}$, ou seja, existem $2^3 = 8$ pontos fixos de T^3 . Na figura 3.9 apresentamos os gráficos de T^2 e T^3 e seus pontos fixos localizados nas intersecções com a reta $y = x$.

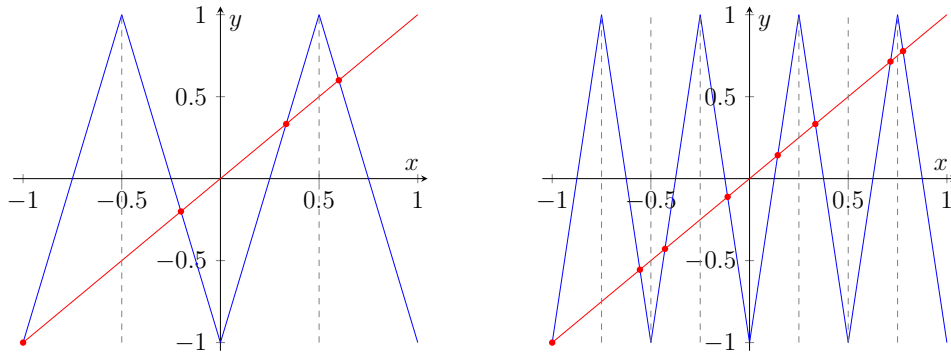


Figura 3.9: Gráficos de $T^2(x)$ e $T^3(x)$. Fonte: Autor.

Para T^n , vamos analisar, através de um processo indutivo, que sua expressão é dada por:

$$T^n(x) = \begin{cases} (2^n - 1) + 2^n x, & \text{se } -1 = \frac{-2^{n-1}}{2^{n-1}} \leq x < \frac{-2^{n-1}+1}{2^{n-1}} \\ -(2^n - 3) - 2^n x, & \text{se } \frac{-2^{n-1}+1}{2^{n-1}} \leq x < \frac{-2^{n-1}+2}{2^{n-1}} \\ (2^n - 5) + 2^n x, & \text{se } \frac{-2^{n-1}+2}{2^{n-1}} \leq x < \frac{-2^{n-1}+3}{2^{n-1}} \\ \vdots & \vdots \\ 3 + 2^n x, & \text{se } \frac{-2}{2^{n-1}} < x \leq \frac{-1}{2^{n-1}} \\ -1 - 2^n x, & \text{se } \frac{-1}{2^{n-1}} < x < 0 \\ -1 + 2^n x, & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2^{n-1}} \\ 3 - 2^n x, & \text{se } \frac{1}{2^{n-1}} \leq x < \frac{2}{2^{n-1}} \\ \vdots & \vdots \\ -(2^n - 3) + 2^n x, & \text{se } \frac{2^{n-1}-2}{2^{n-1}} < x \leq \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} \\ (2^n - 1) + 2^n x, & \text{se } \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} < x \leq \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}} = 1 \end{cases}.$$

Para $n = 1, 2, 3$, já mostramos que a expressão acima é válida. Agora, supondo que vale para T^n , mostraremos para alguns intervalos que vale para T^{n+1} .

Para o intervalo $-1 \leq x < \frac{-2^{n-1}+1}{2^{n-1}}$:

- Se $T^n(x) = (2^n - 1) + 2^n x < 0 \Rightarrow -1 \leq x < \frac{-2^{n-1}+1}{2^{n-1}}$, daí,

$$T^{n+1}(x) = T(T^n(x)) = 1 + 2((2^n - 1) + 2^n x) = 1 + 2^{n+1} - 2 + 2^{n+1}x = (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1}x.$$

- Se $T^n(x) = (2^n - 1) + 2^n x \geq 0 \Rightarrow \frac{-2^{n-1}+1}{2^{n-1}} \leq x < \frac{-2^{n-1}+2}{2^{n-1}}$, daí,

$$T^{n+1}(x) = T(T^n(x)) = 1 - 2((2^n - 1) + 2^n x) = 1 - 2^{n+1} + 2 - 2^{n+1}x = -(2^{n+1} - 3) - 2^{n+1}x.$$

Para o intervalo $\frac{-2^{n-1}+1}{2^{n-1}} \leq x < \frac{-2^{n-1}+2}{2^{n-1}}$:

- Se $T^n(x) = -(2^n - 3) - 2^n x \geq 0 \Rightarrow \frac{2}{2} \cdot \frac{-2^{n-1}+1}{2^{n-1}} = \frac{-2^{n-1}+1}{2^{n-1}} \leq x < \frac{-2^{n-1}+2}{2^{n-1}}$, daí,

$$T^{n+1}(x) = T(T^n(x)) = 1 - 2(-(2^n - 3) - 2^n x) = 1 + 2^{n+1} - 6 + 2^{n+1}x = (2^{n+1} - 5) + 2^{n+1}x.$$

- Se $T^n(x) = -(2^n - 3) - 2^n x < 0 \Rightarrow \frac{-2^{n-1}+2}{2^{n-1}} \leq x < \frac{-2^{n-1}+3}{2^{n-1}}$, daí,

$$T^{n+1}(x) = T(T^n(x)) = 1 + 2(-(2^n - 3) - 2^n x) = 1 - 2^{n+1} + 6 + 2^{n+1}x = (-2^{n+1} + 7) + 2^{n+1}x.$$

E para o último intervalo, $\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} < x \leq \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}}$:

- Se $T^n(x) = (2^n - 1) - 2^n x \geq 0 \Rightarrow \frac{2}{2} \cdot \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} = \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} < x \leq \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}}$, daí,

$$T^{n+1}(x) = T(T^n(x)) = 1 - 2((2^n - 1) - 2^n x) = 1 - 2^{n+1} + 2 + 2^{n+1}x = -(2^{n+1} - 3) + 2^{n+1}x.$$

- Se $T^n(x) = (2^n - 1) - 2^n x < 0 \Rightarrow \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} = \frac{2^n}{2^n} < x \leq \frac{2^n}{2^n} = 1$, daí,

$$T^{n+1}(x) = T(T^n(x)) = 1 + 2((2^n - 1) - 2^n x) = 1 + 2^{n+1} - 2 - 2^{n+1}x = (2^{n+1} - 1) - 2^{n+1}x.$$

Os demais casos são feitos de maneira análoga e, portanto, a expressão de T^n acima vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Assim, $T^n = x \Leftrightarrow x \in \{-1, -\frac{2^n-3}{2^{n+1}}, -\frac{2^n-5}{2^{n+1}}, \dots, \frac{2^n-3}{2^{n+1}}, \frac{2^n-1}{2^{n+1}}\}$, ou seja T^n possui 2^n pontos fixos.

Como ilustrado na Figura 3.9 para os casos $n = 2, 3$, vemos que os gráficos de T^2 e T^3 são, respectivamente, 4 retas com inclinação $\pm 2^2$, cada uma contida em intervalos da forma $[-1 + \frac{i}{2}, -1 + \frac{i+1}{2}]$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ e, 8 retas com inclinação $\pm 2^3$ cada uma contida em intervalos da forma $[-1 + \frac{i}{2^2}, -1 + \frac{i+1}{2^2}]$, $i \in \{0, 1, 2, \dots, 2^3 - 2, 2^3 - 1\}$. Para o caso geral, T^n com $n \in \mathbb{N}$, o gráfico é descrito por 2^n retas com inclinação $\pm 2^n$, cada uma contida em intervalos da forma $[-1 + \frac{i}{2^{n-1}}, -1 + \frac{i+1}{2^{n-1}}]$, com $i \in \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 2, 2^n - 1\}$, cada um deles contendo um ponto fixo de T^n . Isso nos diz que podemos particionar o intervalo $[-1, 1]$ em 2^n intervalos de tamanho $|(-1 + \frac{i}{2^{n-1}}) - (-1 + \frac{i+1}{2^{n-1}})| = \frac{1}{2^{n-1}}$, onde cada intervalo contém um ponto fixo de T^n .

Teorema 3.2.4. O conjunto dos pontos periódicos de T é denso em $[-1, 1]$.

Demonstração: Dados $a \in [-1, 1]$ e $\varepsilon > 0$ quaisquer. Seja $I_a = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ em torno de a , como é sempre possível conseguir $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$, segue que o intervalo $(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}) \subset I_a$. Particionando o intervalo $[-1, 1]$ em 2^n intervalos (como feito acima para T^n), obteremos 2^n intervalos da forma $I_i = [-1 + \frac{i}{2^{n-1}}, -1 + \frac{i+1}{2^{n-1}}]$ com $i \in \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 2, 2^n - 1\}$. Assim, existe $i_0 \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ tal que $-1 + \frac{i_0}{2^{n-1}} \leq a \leq -1 + \frac{i_0+1}{2^{n-1}}$, ou seja, $a \in I_{i_0}$. Como para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, $\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{n}$, segue que:

$$-1 + \frac{i_0}{2^{n-1}} \leq a \Rightarrow -1 + \frac{i_0}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} = -1 + \frac{i_0 + 1}{2^{n-1}} \leq a + \frac{1}{2^{n-1}} < a + \frac{1}{n} \Rightarrow -1 + \frac{i_0 + 1}{2^{n-1}} < a + \frac{1}{n},$$

e

$$-1 + \frac{i_0 + 1}{2^{n-1}} \geq a \Rightarrow -1 + \frac{i_0 + 1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}} = -1 + \frac{i_0}{2^{n-1}} \geq a - \frac{1}{2^{n-1}} > a - \frac{1}{n} \Rightarrow -1 + \frac{i_0}{2^{n-1}} > a - \frac{1}{n}.$$

Logo, como $a - \frac{1}{n} < -1 + \frac{i_0}{2^{n-1}} < -1 + \frac{i_0+1}{2^{n-1}} < a + \frac{1}{n}$, segue que, $I_{i_0} \subset (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}) \subset I_a$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como visto acima, cada intervalo da forma I_i contém um ponto fixo de T^n , particularmente, o intervalo I_{i_0} contém um ponto fixo de T^n . Portanto, dado $a \in [-1, 1]$ e $\varepsilon > 0$ quaisquer, existe um ponto periódico T nessa vizinhança. Consequentemente, $Per(T)$ é denso em $[-1, 1]$. $\square$

Teorema 3.2.5. A tenda tem sensibilidade às condições iniciais.

Demonstração: Queremos mostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $x \in [-1, 1]$ e todo $\delta > 0$, existe $y \in B(x, \delta) \cap [-1, 1]$ tal que $d(T^n(x), T^n(y)) \geq \varepsilon$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Seja $\varepsilon = \frac{1}{10}$. Dado um x qualquer em $[-1, 1]$, tome o intervalo $I = (x - \frac{1}{10}, x + \frac{1}{10}) \cap [-1, 1]$. Se $0 \notin I$ então $I \subset [0, 1]$ ou $I \subset [-1, 0]$. Se $I \subset [0, 1]$. Note que $T(I) = (T(x) - \frac{2}{10}, T(x) + \frac{2}{10})$, ou seja, existe $T(y) \in T(I)$ tal que $y \in I$, assim $d(T(x), T(y)) > \frac{1}{10}$ com $d(x, y) < \frac{1}{10}$. Analogamente, temos o mesmo resultado se $I \subset [-1, 0]$.

Se $0 \in I$, supondo sem perda de generalidade que $x < 0$ segue que $T(I) = (T(x) - \frac{2}{10}, 1)$ e, assim, também existe $T(y) \in T(I)$ tal que $|T(x) - T(y)| > \frac{1}{10}$ com $y \in I$. Portanto, dado um x qualquer em $[-1, 1]$ e $\delta > 0$ qualquer, existe $y \in B(x, \delta)$ tal que $d(T(x), T(y)) = |T(x) - T(y)| > \frac{1}{10}$, concluindo que $T(x)$ possui sensibilidade às condições iniciais. $\square$

Teorema 3.2.6. A tenda é uma aplicação caótica.

Demonstração: Pelo Teorema 3.2.4, $Per(T)$ é denso em $[-1, 1]$, pelo Teorema 3.2.3, T é transitiva e pelo Teorema 3.2.5 T possui sensibilidade às condições iniciais. Portanto, pela Definição 1.2.10, T define um sistema dinâmico caótico em $[-1, 1]$. $\square$

3.3 A família quadrática

Nesta parte do trabalho, estudaremos a família de funções conhecida como *família quadrática*, definida da seguinte forma: dado $a \in [0, 4]$, $f_a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $f_a(x) = ax(1 - x)$. Na Figura 3.10 exibimos alguns gráficos de f_a para diferentes valores de a .

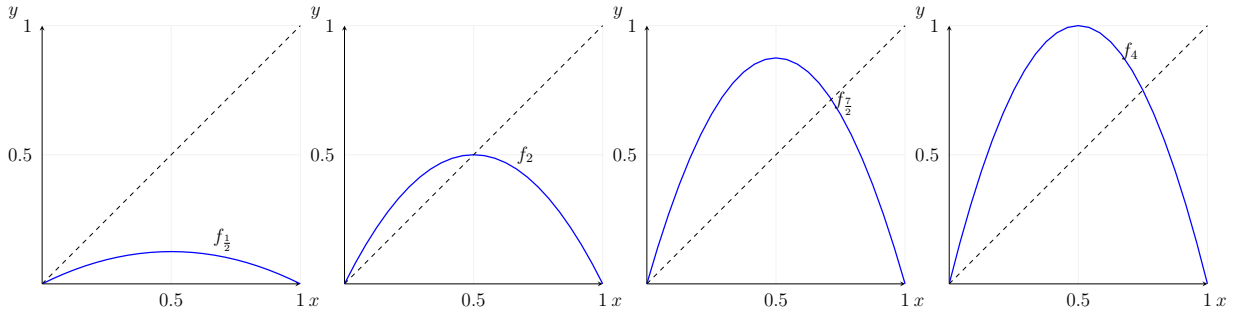


Figura 3.10: Gráficos de f_a para $a = \frac{1}{2}$, $a = 2$, $a = \frac{7}{2}$ e $a = 4$, respectivamente. Fonte: Autor.

Essa família é bem famosa no estudo de sistemas dinâmicos, pois conforme o valor de a se altera no intervalo $[0, 4]$, a dinâmica ganha diferentes propriedades, sendo o mais interessante para este trabalho o caso $a = 4$. Mostraremos que existe uma conjugação entre a tenda e a f_4 , como enunciado na Observação 1.2.14, fornecendo propriedades dinâmicas da tenda à f_4 . Em particular, as propriedades provadas na Proposição 1.2.13 mostram que f_4 é uma aplicação caótica.

Observação 3.3.1. Sobre os outros casos $a \in [0, 4)$, existem análises em (BACKES et al., 2023) e (DEVANEY, 2018) que descrevem o comportamento de f_a conforme a se altera. Abaixo citamos brevemente alguns casos.

1. Quando $0 < a \leq 1$, 0 é um atrator global e a órbita de qualquer ponto $x \in [0, 1]$ converge para ele, como ilustrado na Figura 3.11.

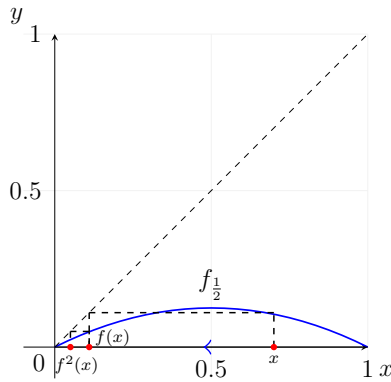


Figura 3.11: Representação da dinâmica de f_a para $a = \frac{1}{2} \in (0, 1]$. Fonte: Autor.

2. Quando $1 < a \leq 2$, com auxílio das Proposições 3.1.1 e 3.1.4, obtemos que 0 é um ponto fixo repulsor, enquanto $x = 1 - \frac{1}{a}$ é um ponto fixo atrator, dando à dinâmica o comportamento parecido com o da Figura 3.12,

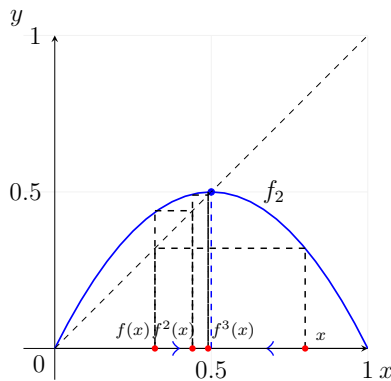


Figura 3.12: Representação da dinâmica de f_a para $a = 2 \in (1, 2]$. Fonte: Autor.

3. Quando $2 < a < 3$, f_a ainda tem $x = 1 - \frac{1}{a}$ como ponto fixo, que é um atrator, com $B(A) = (0, 1)$, onde a órbita de um ponto $x \in (0, 1)$ é atraída para $x = 1 - \frac{1}{a}$ com suas iteradas se acumulando ora à esquerda, ora à direita de $x = 1 - \frac{1}{a}$. Sua representação é feita abaixo na Figura 3.13.

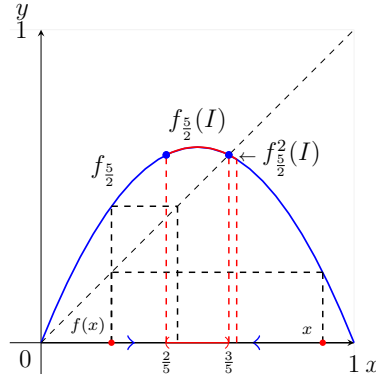


Figura 3.13: Representação da dinâmica de f_a para $a = 2 \in (1, 2]$. Fonte: Autor.

4. Quando $3 < a < 4$, $x = 1 - \frac{1}{a}$ se torna um ponto fixo repulsor tornando a dinâmica a partir daí mais detalhada e complexa.

Nos próximo lema vamos mostrar a existência de uma homeomorfismo entre uma aplicação auxiliar Q e a f_4 , em seguida, vamos mostrar que também existe uma conjugação entre Q e T , e mostraremos que a composição dessas duas conjugações é um homeomorfismo entre f_4 e T , ou seja, são conjugadas.

Lema 3.3.2. *Seja $Q(x) : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ dada por $Q(x) = 1 - 2x^2$. Então Q e f_4 são conjugadas.*

Demonstração: Vamos provar que existe uma transformação $h : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ contínua, bijetiva e com inversa contínua, tal que $h \circ Q = f_4 \circ h$.

Tome $h : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $h(x) = \frac{x+1}{2}$. Note que:

- $h(x)$ é contínua, pois é a soma de funções contínuas, $\frac{x}{2}$ e $\frac{1}{2}$;
- $h(x)$ é injetora, pois dados $x, y \in [-1, 1]$, se $h(x) = h(y) \Rightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{2} \Rightarrow x+1 = y+1 \Rightarrow x = y$;
- $h(x)$ é sobrejetiva, pois $h([-1, 1]) = [0, 1]$;
- $h(x)$ tem inversa dada por $h^{-1} : [0, 1] \rightarrow [-1, 1]$, $h^{-1}(x) = 2x - 1$, que é contínua.

Além disso, dado $x \in [-1, 1]$, temos

$$\begin{aligned}
 h^{-1}(f_4(h(x))) &= h^{-1}\left(f_4\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) \\
 &= h^{-1}\left(4\left(\frac{x+1}{2}\right)\left(1 - \frac{x+1}{2}\right)\right) \\
 &= h^{-1}(1 - x^2) \\
 &= 2(1 - x^2) - 1 \\
 &= 1 - 2x^2 \\
 &= Q(x).
 \end{aligned}$$

Consequentemente $h \circ Q = f_4 \circ h$, e portanto Q e f_4 são conjugadas. □

Lema 3.3.3. *As aplicações T e Q são conjugadas.*

Demonstração: Seja $H : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ dada por $H(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$. Mostremos que H é uma conjugação entre T e Q . Note que:

- $H(x)$ é contínua, pois é a composição de funções contínuas;
- $H(x)$ é bijetiva, pois se $x \in [-1, 1]$, segue que $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, intervalo onde $\sin(\frac{\pi}{2}x)$ é bijetora com inversa $H^{-1}(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin(x)$ e $H^{-1}(x)$ é contínua.

Além disso, dado $x \in [-1, 1]$, vale que:

$$\begin{aligned}
 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi|x|\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(-\pi|x|) + \sin(-\pi|x|) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
 &= \cos(-\pi|x|) = \cos(\pi|x|).
 \end{aligned}$$

Agora, como $\cos(-2x) = \cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$, obtemos que, $\cos(\pi|x|) = 1 - 2\sin^2(\frac{\pi}{2}x)$. Logo,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(1 - 2|x|)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi|x|\right) = \cos(\pi|x|) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

Por fim, obtemos que, para todo $x \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned}
H^{-1}(Q(H(x))) &= H^{-1}\left(Q\left(\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)\right) \\
&= H^{-1}\left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) \\
&= H^{-1}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}(1 - 2|x|)\right)\right) \\
&= \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}(1 - 2|x|)\right)\right) \\
&= 1 - 2|x| = T(x).
\end{aligned}$$

e, conseqüentemente, $H \circ T = Q \circ H$. Portanto Q e T são conjugadas. $\square$

Combinando os Lemas 3.3.2 e 3.3.3, obtemos o seguinte resultado

Teorema 3.3.4. *As aplicações f_4 e T são conjugadas.*

Demonstração: Considere $h \circ H : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$, dada por $h(H(x)) = \frac{1}{2} \left(\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)$. $h \circ H$ é bijetora e contínua, pois é a composta de funções bijetoras e contínuas, com inversa $H^{-1} \circ h^{-1}$ também contínua, pois também é a composta de aplicações contínuas. Além disso,

$$f_4 \circ (h \circ H) = (f_4 \circ h) \circ H = (h \circ Q) \circ H = h \circ (Q \circ H) = h \circ (H \circ T) = (h \circ H) \circ T$$

ou seja, $h \circ H$ é uma conjugação entre T e f_4 . $\square$

Sendo assim, segue da Proposição 1.2.12 que como T e f_4 são conjugadas, elas compartilham diversas propriedades dinâmicas, particularmente, f_4 é uma aplicação transitiva, o conjunto de seus pontos periódicos é denso e também tem sensibilidade às condições iniciais. Portanto, f_4 é um caso da família quadrática que é caótico.

Esse exemplo mostra a importância da conjugação em sistemas dinâmicos, dado que é mais simples entendermos o comportamento da tenda por ser uma função afim, do que o comportamento de f_4 , que apresenta certa complexidade em sua dinâmica, devido à sua não linearidade.

Capítulo 4

As transformações hiperbólicas no toro

No último capítulo deste trabalho, nos concentraremos em uma aplicação que é um exemplo de um *automorfismo hiperbólico* do toro $\mathbb{T}^2$. Inicialmente, com base em (BACKES et al., 2023), entenderemos alguns conceitos e propriedades sobre a dinâmica de uma matriz hiperbólica A em $\mathbb{R}^2$. Em seguida, nos concentraremos no toro bidimensional, onde definimos uma métrica e uma projeção $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$. Ao fim, analisaremos a dinâmica da composição dessas duas aplicação que é o que chamamos de automorfismo hiperbólico no toro.

4.1 Matrizes Hiperbólicas

Começemos essa seção definindo o que é uma matriz hiperbólica.

Definição 4.1.1. Dizemos que uma matriz $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é **uma transformação hiperbólica** quando todos os seus autovalores valores tem norma diferente de 1.

Daqui em diante, vamos considerar sempre que A é a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos observar que

$$\lambda^u = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda^s = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

são autovalores de A . Em particular, $|\lambda^u| \approx 1,618 > 1$ e $|\lambda^s| \approx 0,618 < 1$, ou seja, A é uma matriz hiperbólica. Além disso, para $v = (a, b)$ temos

$$Av = \lambda^u v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a + b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} a \\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} b \end{pmatrix}$$

e

$$Av = \lambda^s v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a + b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1 - \sqrt{5}}{2} a \\ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} b \end{pmatrix}.$$

Tomando $a = 2$, obtemos para os autovalores $\lambda^u v$ e $\lambda^s v$, respectivamente, os seguintes autovetores

$$\tilde{v}^u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 + \sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{v}^s = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 - \sqrt{5} \end{pmatrix}. \quad (4.1.1)$$

Com o intuito de facilitar algumas manipulações, trabalharemos a partir de agora com os autovetores unitários,

$$v^u = \frac{\tilde{v}^u}{\|\tilde{v}^u\|} \quad \text{e} \quad v^s = \frac{\tilde{v}^s}{\|\tilde{v}^s\|}, \quad (4.1.2)$$

associados a λ^u e λ^s , respectivamente. Assim,

$$Av^u = \lambda^u v^u \quad \text{e} \quad Av^s = \lambda^s v^s \quad (4.1.3)$$

No resultado abaixo apresentamos algumas propriedades, que serão muito utilizadas à frente e que são consequências direta da Álgebra Linear.

Proposição 4.1.2. *Sejam v^u e v^s autovetores da matriz hiperbólica A definida anteriormente. Valem as seguintes propriedades:*

- i) $A^n v^u = (\lambda^u)^n v^u \quad \text{e} \quad A^n v^s = (\lambda^s)^n v^s$, para todo $n \in \mathbb{Z}$
- ii) Os vetores v^u e v^s são linearmente independentes (L.I.);
- iii) $\mathbb{R}^2 = \mathbb{E}^u \oplus \mathbb{E}^s$, onde $\mathbb{E}^u = \{t \cdot v^u; t \in \mathbb{R}\}$ e $\mathbb{E}^s = \{t \cdot v^s; t \in \mathbb{R}\}$ são chamados de autoespaço instável e estável, respectivamente;
- iv) Fixado um $\lambda \in (0, 1)$ tal que $|\lambda^s| < \lambda$ e $\lambda^{-1} < |\lambda^u|$, vale que,

$$\|A^n u\| \geq \lambda^{-n} \|u\| \quad \text{e} \quad \|A^n v\| \leq \lambda^n \|v\|,$$

e também,

$$\|A^{-n} u\| \leq \lambda^n \|u\| \quad \text{e} \quad \|A^{-n} v\| \geq \lambda^{-n} \|v\|$$

para todos $u \in \mathbb{E}^u$ e $v \in \mathbb{E}^s$ e $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: i) Note que, por 4.1.3, temos que $A^2 v^s = A(Av^s) = A(\lambda v^s) = \lambda(\lambda v^s) = \lambda^2 v^s$, ou seja, $A^2 = \lambda^2 v$ fazendo a multiplicação por A n vezes obteremos que $A^n v = \lambda^n v$ e segue o resultado.

ii) Suponha que v^s e v^u são linearmente dependentes. Assim, existe $\alpha \neq 0$ tal que $v^s = \alpha v^u$. Logo, $\lambda^s v^s = A v^s = A \alpha v^u = \lambda^u \alpha v^u = \lambda^u v^s \Rightarrow (\lambda^s - \lambda^u) v^s = 0$. Com $v^s \neq \vec{0}$, segue que $\lambda^s = \lambda^u$, o que é uma contradição, pois são autovalores distintos. Portanto, v^s e v^u são linearmente independentes.

iii) Como os autovetores v^s e v^u são L.I., formam uma base para $\mathbb{R}^2$. Vamos considerar os autoespaços gerados por esses dois vetores, respectivamente, os conjuntos $\mathbb{E}^s = \{t \cdot v^s; t \in \mathbb{R}\}$ e $\mathbb{E}^u = \{t \cdot v^u; t \in \mathbb{R}\}$. Assim dado um vetor $v \in \mathbb{R}^2$, podemos escrever v como combinação linear de v^s e v^u , ou seja, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{E}^u \oplus \mathbb{E}^s$.

iv) Como $|\lambda^s| < \lambda$ segue que para todo $v \in \mathbb{E}^s$, $\|A^n v\| = \|(\lambda^s)^n v\| = |\lambda^s|^n \cdot \|v\| < \lambda^n \cdot \|v\|$. Analogamente, como $\lambda^{-1} < |\lambda^u|$ para todo $v \in \mathbb{E}^s$, temos $\|A^n u\| = \|(\lambda^u)^n u\| = |\lambda^u|^n \cdot \|u\| > \lambda^{-n} \cdot \|u\|$, e segue o resultado.

Agora, para as iteradas negativas temos que, para todo $u \in \mathbb{E}^u$, $\|A^{-n} u\| = \|(\lambda^u)^{-n} u\| = \frac{1}{|\lambda^u|^n} \cdot \|u\| < \lambda^n \cdot \|u\|$ e para todo $v \in \mathbb{E}^s$, $\|A^{-n} v\| = \|(\lambda^s)^{-n} v\| = \frac{1}{|\lambda^s|^n} \cdot \|v\| > \frac{1}{\lambda^n} \cdot \|v\| = \lambda^{-n} \cdot \|v\|$. □

Observação 4.1.3. Como $|\lambda^u| > 1$, geometricamente, aplicar A n vezes expande o tamanho de v^u por $|\lambda^u|^n$, ou seja, há um crescimento exponencial. Analogamente, como $|\lambda^s| < 1$, a aplicação de A n -vezes diminui o tamanho de v^s por $|\lambda^s|^n$, ou seja, há um decrescimento exponencial. Dizemos que v^u tem **direção instável** e v^s **direção estável**.

Nos próximos resultados estudamos algumas propriedades para a dinâmica de $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Relembremos que como visto na Seção 1.1, dado um $p \in \mathbb{R}^2$, os conjuntos estáveis e instáveis de $p \in \mathbb{R}^2$ por A , são dados por

$$W_A^s(p) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2; \|A^n p - A^n x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \right\},$$

e

$$W_A^u(p) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2; \|A^{-n} p - A^{-n} x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \right\}.$$

O lema a seguir nos fornece uma visão geométrica dos conjuntos estáveis e instáveis de A . Ele nos diz que $W_A^s(p)$ e $W_A^u(p)$ são translações dos autoespaços $\mathbb{E}^s$ e $\mathbb{E}^u$, respectivamente.

Lema 4.1.4. Para todo $p \in \mathbb{R}^2$, vale que

$$i) W_A^s(p) = \{x \in \mathbb{R}^2; x = p + v \text{ para algum } v \in \mathbb{E}^s\} := p + \mathbb{E}^s.$$

$$ii) W_A^u(p) = \{x \in \mathbb{R}^2; x = p + u \text{ para algum } u \in \mathbb{E}^u\} := p + \mathbb{E}^u.$$

Demonstração: i) Seja $X = \{x \in \mathbb{R}^2; x = p + v \text{ para algum } v \in \mathbb{E}^s\}$. Mostraremos primeiro que $X \subset W_A^s(p)$.

Seja $x \in X$. Então, $x = p + v$, onde $v \in \mathbb{E}^s$. Podemos escrever $v = p - x$, assim, pelo item *iv*) da Proposição 4.1.2, segue que,

$$\|A^n p - A^n x\| = \|A^n(p - x)\| = \|A^n v\| \leq \lambda^n \|v\|,$$

onde $\lambda \in (0, 1)$. Daí, como $\lambda^n \|v\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, concluímos que $\|A^n p - A^n x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Logo, $x \in W_A^s(p)$ e, conseqüentemente, $X \subset W_A^s(p)$.

Agora, seja $x \in W_A^s(p)$. Suponha que $x \notin X$, ou seja, que o vetor $x - p \notin \mathbb{E}^s$. Como $\mathbb{R}^2 = \mathbb{E}^s \oplus \mathbb{E}^u$, existem $u \in \mathbb{E}^u$ e $v \in \mathbb{E}^s$, com $\|u\| \neq 0$, tais que $x - p = u + v$. Assim,

$$\|A^n p - A^n x\| = \|A^n(p - x)\| = \|A^n(u + v)\| = \|A^n u + A^n v\|.$$

Pela desigualdade triangular, obtemos a seguinte desigualdade, quaisquer que sejam $u, v \in \mathbb{R}^2$,

$$\|u\| = \|u + v - v\| \leq \|u + v\| + \|-v\| \Rightarrow \|u\| - \|v\| \leq \|u + v\|. \quad (4.1.4)$$

Daí, segue do item *iv* da Proposição 4.1.2 que,

$$\|A^n p - A^n x\| = \|A^n u + A^n v\| \geq \|A^n u\| - \|A^n v\| \geq \lambda^{-n} \|u\| - \lambda^n \|v\|.$$

Logo, como $\lambda \in (0, 1)$, $\|u\| \neq 0$, $\lambda^{-n} \|u\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ e $\lambda^n \|v\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Assim $\|A^n p - A^n x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, contradizendo a hipótese que $x \in W_A^s(p)$. Portanto, $x \in X$, e conseqüentemente $W_A^s(p) \subset X$.

Pelas duas inclusões, segue que $W_A^s(p) = X$.

ii) Considere $Y = \{x \in \mathbb{R}^2; x = p + u \text{ para algum } u \in \mathbb{E}^u\}$. Mostremos primeiro que $Y \subset W_A^u(p)$. Seja $x \in Y$, ou seja, $x = p + u$, onde $u \in \mathbb{E}^u$. Escrevendo u como $u = p - x$, segue pelo item *iv*) da Proposição 4.1.2, que

$$\|A^{-n} p - A^{-n} x\| = \|A^{-n}(p - x)\| = \|A^{-n} u\| < \lambda^n \cdot \|u\|.$$

onde $\lambda \in (0, 1)$. Daí, como $\lambda^n \|u\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, segue que $\|A^{-n} p - A^{-n} x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Logo, $x \in W_A^u(p)$ e, conseqüentemente, $Y \subset W_A^u(p)$.

Agora, seja $x \in W_A^u(p)$. Suponha que $x \notin Y$, isto é, o vetor $x - p \notin \mathbb{E}^u$. Logo, como $\mathbb{R}^2 = \mathbb{E}^s \oplus \mathbb{E}^u$, existem $u \in \mathbb{E}^u$ e $v \in \mathbb{E}^s$, com $\|v\| \neq 0$, tais que $x - p = v + u$. Daí,

$$\|A^{-n} p - A^{-n} x\| = \|A^{-n}(p - x)\| = \|A^{-n}(u + v)\| = \|A^{-n} u + A^{-n} v\|.$$

Pela desigualdade (4.1.4), e novamente pelo item *iv*) da Proposição 4.1.2, segue que

$$\|A^{-n}p - A^{-n}x\| = \|A^{-n}v + A^{-n}u\| \geq \|A^{-n}v\| - \|A^{-n}u\| \geq \lambda^{-n}\|v\| - \lambda^n\|u\|.$$

Logo, como $\lambda \in (0, 1)$ e $\|v\| \neq 0$, segue que $\lambda^{-n}\|v\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ e $\lambda^n\|u\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Assim, $\|A^{-n}p - A^{-n}x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, contradizendo a hipótese que $x \in W_A^u(p)$. Portanto, $x \in Y$, e consequentemente $W_A^u(p) \subset Y$, concluindo que $W_A^u(p) = Y$. $\square$

A Figura 4.1 ilustra para o leitor que os conjuntos $W_A^s(p)$ e $W_A^u(p)$ são as retas $p + \mathbb{E}^s$ e $p + \mathbb{E}^u$, respectivamente.

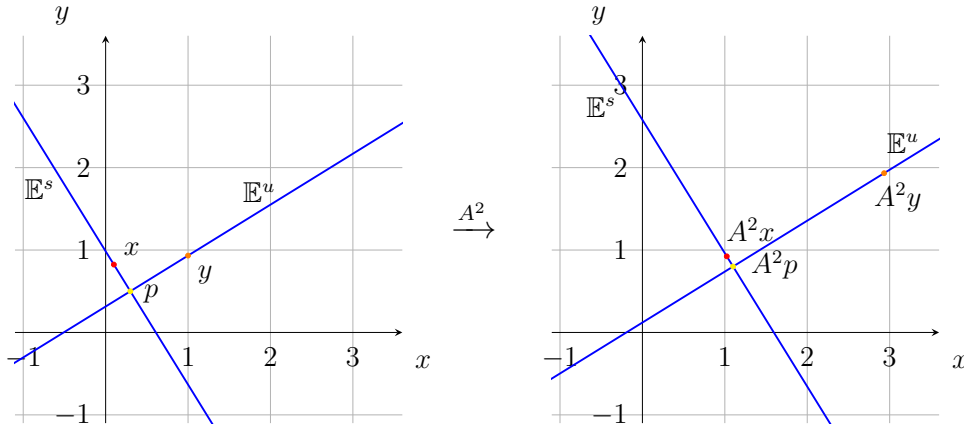


Figura 4.1: Representação dos conjuntos $W_A^s(p)$ e $W_A^u(p)$. Fonte: Autor.

Observação 4.1.5. Segue dos resultados anteriores que $x \in W_A^s(p)$, então $\|A^n p - A^n x\| \leq \lambda^n \|p - x\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Analogamente, se $x \in W_A^u(p)$, então $\|A^{-n} p - A^{-n} x\| \geq \lambda^{-n} \|p - x\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

4.2 O toro $\mathbb{T}^2$

Nesta seção, apresentamos o espaço métrico onde será definida a principal aplicação deste capítulo, o toro bidimensional $\mathbb{T}^2$ e algumas propriedades sobre sua métrica. Esse espaço é constantemente definido como $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$, ou o quadrado unitário $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ com os lados opostos identificados, isto é, $(x, 0) \sim (x, 1)$ e $(0, y) \sim (1, y)$. Intuitivamente, esta identificação significa “colar” os lados identificados obter o toro, conforme a Figura 4.2.

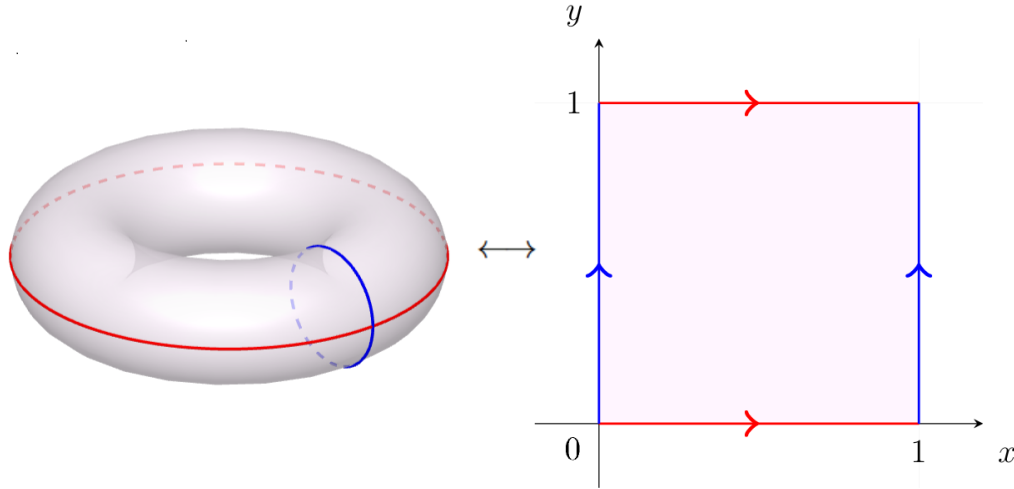


Figura 4.2: Toro $\mathbb{T}^2$. Fonte: Autor.

A partir de agora utilizaremos $\mathbb{T}^2$ apenas como $[0, 1] \times [0, 1]$ com lados identificados. O primeiro passo visando provar as propriedades dinâmicas definidas no Capítulo 1 é definir uma métrica para o toro. Inicialmente, definiremos uma aplicação no intervalo $[0, 1]$ com os pontos 0 e 1 identificados (que é homeomorfo à S^1) que nos auxiliará.

Seja $d_{\equiv} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $d_{\equiv}(x, y) = \min\{|x - y|, 1 - |x - y|\}$. Como os 0 e 1 são identificados, $1 - |x - y|$ mede uma distância que passa pela “fronteira” do intervalo, enquanto $|x - y|$ é a medida usual de $\mathbb{R}$, como ilustrado na Figura 4.3.



Figura 4.3: Representações de $d_{\equiv}(x, y) = 1 - |x - y|$ e $d_{\equiv}(x, y) = |x - y|$, respectivamente. Fonte: Autor.

Observação 4.2.1. A aplicação $d_{\equiv}$ é definida no intervalo $[0, 1]$ com 0 e 1 identificados, ou seja, dados quaisquer $x, y \in [0, 1]$ temos $0 \leq |x - y| < 1$. Assim,

- $|x - y| \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - |x - y| \leq \frac{1}{2}$, ou seja, $d_{\equiv}(x, y) = \min\{|x - y|, 1 - |x - y|\} = 1 - |x - y| \leq \frac{1}{2}$.
- Analogamente, $|x - y| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - |x - y| \geq \frac{1}{2}$, ou seja, $d_{\equiv}(x, y) = \min\{|x - y|, 1 - |x - y|\} = |x - y| \leq \frac{1}{2}$.

Portanto, $d_{\equiv} \leq \frac{1}{2}$ para todos $x, y \in [0, 1]$.

Agora, seja $d_T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por,

$$d_T((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{d_{\equiv}(x_1, y_1)^2 + d_{\equiv}(x_2, y_2)^2}.$$

Essa é a aplicação que usaremos para medir a distância entre dois pontos no toro. A Figura 4.4 nos mostra um exemplo de diferença (geométrica) entre d_T e métrica usual de $\mathbb{R}^2$.

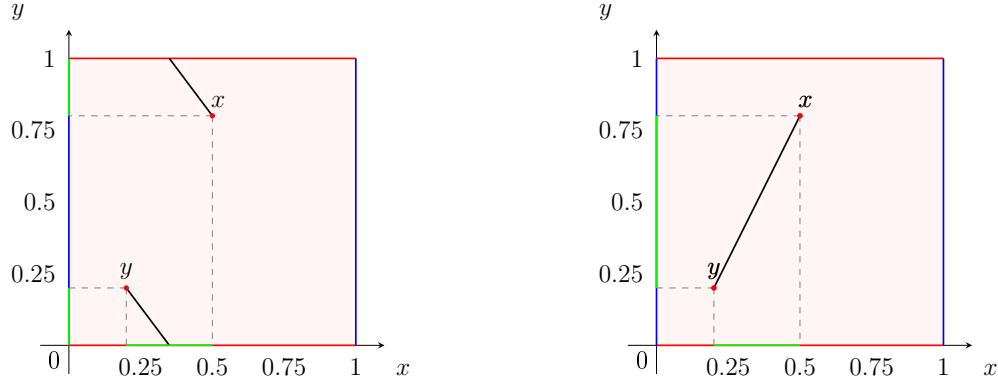


Figura 4.4: Comparação entre d_T e métrica usual de $\mathbb{R}^2$. Fonte: Autor.

Proposição 4.2.2. d_T é uma métrica para $\mathbb{T}^2$.

Demonstração: Vamos provar que d_T cumpre as propriedades de uma métrica. Sejam (x_1, x_2) , (y_1, y_2) e $(z_1, z_2) \in \mathbb{T}^2$ quaisquer.

i) Primeiramente, note que $d_T((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{d_{\equiv}(x_1, y_1)^2 + d_{\equiv}(x_2, y_2)^2} \geq 0 \Leftrightarrow d_{\equiv}(x_1, y_1)^2 + d_{\equiv}(x_2, y_2)^2 \geq 0$, o que é sempre verdade.

ii) Note que, para todos $x, y \in [0, 1]$, $d_{\equiv}(x, y) = \min\{|x - y|, 1 - |x - y|\} = \{\min |y - x|, 1 - |y - x|\} = d_{\equiv}(y, x)$. Assim, temos que $d_T((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{d_{\equiv}(x_1, y_1)^2 + d_{\equiv}(x_2, y_2)^2} = \sqrt{d_{\equiv}(y_1, x_1)^2 + d_{\equiv}(y_2, x_2)^2} = d_T((y_1, y_2), (x_1, x_2))$.

iii) Note que $d_T((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{d_{\equiv}(x_1, y_1)^2 + d_{\equiv}(x_2, y_2)^2} = 0 \Leftrightarrow d_{\equiv}(x_1, y_1) = 0$ e $d_{\equiv}(x_2, y_2) = 0$. Para quaisquer $x, y \in [0, 1]$, temos que $d_{\equiv}(x, y) = 0 \Leftrightarrow \{\min |x - y|, 1 - |x - y|\} = 0$. Daí:

- Se $d_{\equiv}(x, y) = |x - y| = 0$ então $x = y$.
- Se $d_{\equiv}(x, y) = 1 - |x - y| = 0$, então $|x - y| = 1$, ou seja, $x = 0$ e $y = 1$ ou $x = 1$ e $y = 0$, como $0 \sim 1$, então $x = y$.

Portanto, $x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2$, ou seja, $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$.

iv) Mostraremos primeiro que para todos x, y e $z \in [0, 1]$, $d_{\equiv}(x, y) \leq d_{\equiv}(x, z) + d_{\equiv}(z, y)$. Se $x = y$, $d_{\equiv}(x, y) = 0$ e assim a desigualdade é direta. Suponhamos então que $x \neq y$ e, sem perda de generalidade, $x < y$. Dividiremos a análise em 8 possíveis casos de distância entre esses pontos.

Caso 1: $d_{\equiv}(x, y) = |x - y|$; $d_{\equiv}(x, z) = |x - z|$ e $d_{\equiv}(z, y) = |z - y|$.

Segue da desigualdade triangular usual que $d_{\equiv}(x, z) \leq d_{\equiv}(x, y) + d_{\equiv}(y, z)$.

Caso 2: $d_{\equiv}(x, y) = |x - y|$; $d_{\equiv}(x, z) = 1 - |x - z|$ e $d_{\equiv}(z, y) = |z - y|$.

Como $d_{\equiv}(x, y) = \min\{|x - y|, 1 - |x - y|\} \Rightarrow |x - y| \leq 1 - |x - y| = 1 - |x - z + z - y| =$

$1 - |(x - z) + (z - y)|$, pela desigualdade (4.1.4), segue que,

$$1 - |(x - z) + (z - y)| \leq 1 - (|x - z| - |z - y|) = (1 - |x - z|) + |z - y| = d_{\equiv}(x, z) + d_{\equiv}(z, y).$$

Portanto, $d_{\equiv}(x, y) \leq d_{\equiv}(x, z) + d_{\equiv}(z, y)$.

Caso 3: $d_{\equiv}(x, y) = |x - y|$; $d_{\equiv}(x, z) = |x - z|$ e $d_{\equiv}(z, y) = 1 - |z - y|$.

Analogamente ao caso anterior, $d_{\equiv}(x, y) = |x - y| \leq 1 - |x - y| = 1 - |x - z + z - y| = 1 - |(x - z) + (z - y)|$ e, pela desigualdade (4.1.4), segue que

$$1 - |(x - z) + (z - y)| \leq 1 - (|z - y| - |x - z|) = (1 - |z - y|) + |x - z| = d_{\equiv}(z, y) + d_{\equiv}(x, z).$$

Portanto, $d_{\equiv}(x, y) \leq d_{\equiv}(z, y) + d_{\equiv}(x, z)$.

Caso 4: $d_{\equiv}(x, y) = |x - y|$; $d_{\equiv}(x, z) = 1 - |x - z|$ e $d_{\equiv}(z, y) = 1 - |z - y|$.

Neste caso existem duas possibilidades: $z < x < y$ ou $x < y < z$. Note que é impossível $z \in (x, y)$ pois, caso contrário, como $d(x, y) = |x - y| \leq \frac{1}{2}$, obteríamos que $|x - z| < \frac{1}{2}$ e $|z - y| < \frac{1}{2}$, contradizendo a hipótese.

- Se $z < x < y \Rightarrow |z - y| = |z - x| + |x - y| \Rightarrow |z - x| = |z - y| - |x - y|$. Assim, por hipótese, $d_{\equiv}(x, z) = 1 - |z - x| = 1 - |z - y| + |x - y| = d_{\equiv}(z, y) + d_{\equiv}(x, y)$, ou seja, $d_{\equiv}(x, y) \leq d_{\equiv}(x, z)$. Portanto, $d_{\equiv}(x, y) \leq d_{\equiv}(x, z) + d_{\equiv}(z, y)$.
- Se $x < y < z \Rightarrow |x - z| = |x - y| + |y - z| \Rightarrow |y - z| = |x - z| - |x - y|$. Assim, $d_{\equiv}(y, z) = 1 - |y - z| = 1 - |x - z| + |x - y| = d_{\equiv}(x, z) + d_{\equiv}(x, y)$, ou seja, $d_{\equiv}(x, y) \leq d_{\equiv}(y, z)$. Portanto, $d_{\equiv}(x, y) \leq d_{\equiv}(y, z) + d_{\equiv}(x, z)$.

Caso 5: $d_{\equiv}(x, y) = 1 - |x - y|$; $d_{\equiv}(x, z) = |x - z|$ e $d_{\equiv}(z, y) = |z - y|$. Neste caso, $z \in d(x, y)$ pois, caso contrário, teríamos $z < x$ ou $y < z$, isso implicaria que $d(z, y) = 1 - |z - y|$ ou $d(x, z) = 1 - |x - z|$, contradizendo a hipótese. Segue pela desigualdade triangular que $d_{\equiv}(x, y) \leq |x - y| \leq |x - z| + |z - y| = d_{\equiv}(x, z) + d_{\equiv}(z, y)$. Portanto, $d_{\equiv}(x, y) \leq d_{\equiv}(x, z) + d_{\equiv}(z, y)$.

Caso 6: $d_{\equiv}(x, y) = 1 - |x - y|$; $d_{\equiv}(x, z) = 1 - |x - z|$ e $d_{\equiv}(z, y) = |z - y|$. Pela desigualdade 4.1.4,

$$d_{\equiv}(x, y) = 1 - |x - y| = 1 - |x - z + z - y| \leq 1 - (|x - z| - |z - y|) = d_{\equiv}(x, z) + d_{\equiv}(z, y).$$

Portanto, $d_{\equiv}(x, y) \leq d_{\equiv}(z, y) + d_{\equiv}(x, z)$.

Caso 7: $d_{\equiv}(x, y) = 1 - |x - y|$; $d_{\equiv}(x, z) = |x - z|$ e $d_{\equiv}(z, y) = 1 - |z - y|$

Análogo ao caso anterior,

$$d_{\equiv}(x, y) = 1 - |x - y| = 1 - |y - x| \leq 1 - (|y - z| - |z - x|) = d_{\equiv}(z, y) + d_{\equiv}(x, z).$$

Portanto, $d_{\equiv}(x, y) \leq d_{\equiv}(x, z) + d_{\equiv}(z, y)$.

Caso 8: $d_{\equiv}(x, y) = 1 - |x - y|$; $d_{\equiv}(x, z) = 1 - |x - z|$ e $d_{\equiv}(z, y) = 1 - |z - y|$.

Note que esse caso é impossível pois supondo sem perda de generalidade que $x < z < y$, segue pela Observação 4.2.1 que, $|x - y| = |x - z| + |z - y| \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, ou seja, $|x - y| = 1$, assim, segue que $d(x, y) = 1 - 1 = 0$, logo, $x = y$. Um absurdo pois, $x \neq y$ por hipótese.

Agora, demonstraremos a desigualdade para d_T . Primeiramente note que como $d_{\equiv}(x, y) \leq d_{\equiv}(x, z) + d_{\equiv}(z, y)$, temos $d_{\equiv}(x, y)^2 \leq (d_{\equiv}(x, z) + d_{\equiv}(z, y))^2$. Assim,

$$\begin{aligned} d_T((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= \sqrt{d_{\equiv}(x_1, y_1)^2 + d_{\equiv}(x_2, y_2)^2} \\ &\leq \sqrt{(d_{\equiv}(x_1, z_1) + d_{\equiv}(z_1, y_1))^2 + (d_{\equiv}(x_2, z_2) + d_{\equiv}(z_2, y_2))^2}. \end{aligned}$$

Para facilitar a escrita, nessa parte da demonstração, vamos denotar,

$$a = (d_{\equiv}(x_1, z_1), d_{\equiv}(x_2, z_2)) \quad \text{e} \quad b = (d_{\equiv}(y_1, z_1), d_{\equiv}(y_2, z_2))$$

Note que a raiz acima é exatamente $\|a + b\|$, ou seja,

$$d_T((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \leq \sqrt{(d_{\equiv}(x_1, z_1) + d_{\equiv}(z_1, y_1))^2 + (d_{\equiv}(x_2, z_2) + d_{\equiv}(z_2, y_2))^2} = \|a + b\|$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} d_T((x_1, x_2), (z_1, z_2)) + d_T((z_1, z_2), (y_1, y_2)) &= \\ \sqrt{d_{\equiv}(x_1, z_1)^2 + d_{\equiv}(x_2, z_2)^2} + \sqrt{d_{\equiv}(z_1, y_1)^2 + d_{\equiv}(z_2, y_2)^2}. \end{aligned}$$

Note que a soma das raízes acima é exatamente a soma das normas de a e b . Assim, segue que,

$$d_T((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \leq \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| = d_T((x_1, x_2), (z_1, z_2)) + d_T((z_1, z_2), (y_1, y_2))$$

concluindo a desigualdade.

Portanto, d_T é um métrica para $\mathbb{T}^2$ e $(\mathbb{T}^2, d_T)$ é um espaço métrico. $\square$

Considere $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, dada por,

$$\pi(x_1, x_2) = (x_1 \bmod 1, x_2 \bmod 1),$$

essa aplicação é chamada de **projeção** pois projeta pontos de $\mathbb{R}^2$ no toro $\mathbb{T}^2$. Lembremos que, caso $x > 0$, o número “ $x \bmod 1$ ” é obtido a partir do número x , subtraindo sua parte inteira deixando apenas a parte decimal. Como por exemplo, $326,789 \bmod 1$ é igual a $0,789$. Já

quando $x < 0$, temos que “ $x \bmod 1$ ” é obtido fazendo “1 menos a parte decimal de $|x|$ ”. Por exemplo, $-141,34 \bmod 1 = 1 - 0,34 = 0,66$. A Figura 4.5 ilustra a projeção dos pontos $p = (-1.7, 0.3)$ e $q = (1.8, 1.6)$ no toro, onde $\pi(p) = (0.3, 0.3)$ e $\pi(q) = (0.8, 0.6)$.

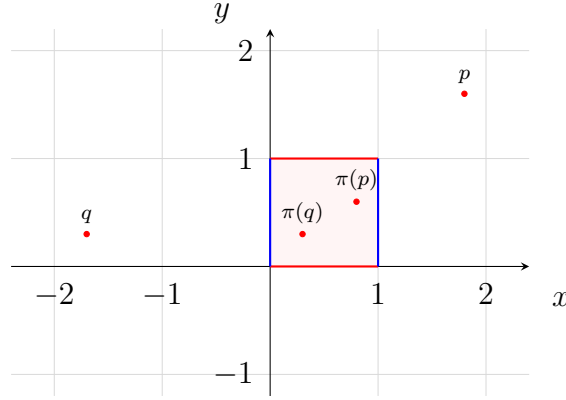


Figura 4.5: Representação da projeção dos pontos p e q . Fonte: Autor.

Observação 4.2.3. *i)* Pela definição de π , temos que $\pi(x_1, x_2) = \pi(y_1, y_2)$ se, e somente se, $x_1 \bmod 1 = y_1 \bmod 1$ e $x_2 \bmod 1 = y_2 \bmod 1$. Ou seja, suas partes decimais são iguais, assim, (x_1, x_2) e (y_1, y_2) se diferenciam por números inteiros.

ii) A projeção possui propriedade da linearidade em relação à soma, pois:

$$\begin{aligned} \pi(x_1 + y_1, x_2 + y_2) &= (x_1 + y_1 \bmod 1, x_2 + y_2 \bmod 1) \\ &= (x_1 \bmod 1 + y_1 \bmod 1, x_2 \bmod 1 + y_2 \bmod 1) \\ &= (x_1 \bmod 1, x_2 \bmod 1) + (y_1 \bmod 1, y_2 \bmod 1) \\ &= \pi(x_1, x_2) + \pi(y_1, y_2) \end{aligned}$$

Lema 4.2.4. *Dados $x, y \in \mathbb{R}^2$ vale que:*

$$i) \quad d_T(\pi(x), \pi(y)) \leq \|x - y\|.$$

$$ii) \quad \text{Se } \|x - y\| < \frac{1}{2} \text{ então } d_T(\pi(x), \pi(y)) = \|x - y\|$$

Demonstração: *i)* Suponha $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$. Primeiramente, vamos analisar para x_1 e y_1 . Para x_2 e y_2 a demonstração é análoga.

Se $\frac{1}{2} \leq |x_1 - y_1|$, então, pela Observação 4.2.1, segue que $d_{\equiv}(x_1 \bmod 1, y_1 \bmod 1) \leq \frac{1}{2} \leq |x_1 - y_1|$.

Agora, analisemos quando $|x_1 - y_1| < \frac{1}{2}$. Note que com essa condição existem dois casos:

Caso 1: Quando x_1 e y_1 tem a mesma coordenada inteira, ou seja, $a \leq x_1 \leq y_1 \leq a + 1$, onde $a \in \mathbb{Z}$.

Sejam $r_1 = x_1 \bmod 1$ e $r_2 = y_1 \bmod 1$ suas projeções em $[0, 1]$, temos que $x_1 = a + r_1$ e $y_1 = a + r_2$, se x_1 e y_1 são positivos, assim,

$$|x_1 - y_1| = |a + r_1 - (a + r_2)| = |r_1 - r_2|$$

Logo, como $|x_1 - y_1| < \frac{1}{2}$ segue que, $|r_1 - r_2| < \frac{1}{2}$ e

$$|x_1 - y_1| = |r_1 - r_2| = d_{\equiv}(x_1 \bmod 1, y_1 \bmod 1).$$

(Note que se x_1 e y_1 são negativos, temos que $x_1 = a - (1 - r_1)$ e $y_1 = a - (1 - r_2)$ e $|x_1 - y_1| = |a - (1 - r_1) - (a - (1 - r_2))| = |r_1 - r_2|$ e demonstração segue análoga ao caso positivo.)

A Figura 4.6 nos mostra uma comparação das distancias de $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$ onde $\pi(\tilde{x}) = x$ e $\pi(\tilde{y}) = y$ quando $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ estão na mesma coordenada inteira.

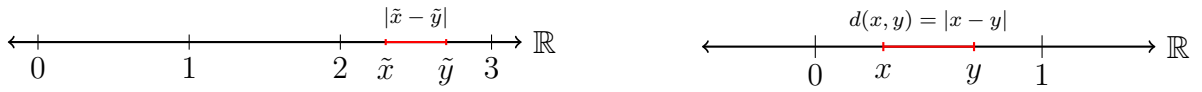


Figura 4.6: Representação do caso 1 do Lema 4.2.4 onde $\pi(\tilde{x}) = x$ e $\pi(\tilde{y}) = y$. Fonte: Autor.

Caso 2: Quando a coordenada inteira de x_1 e y_1 diferem por 1, ou seja, $a \leq x_1 \leq a + 1 \leq y_1$, onde $a \in \mathbb{Z}$.

Sejam $r_1 = x_1 \bmod 1$ e $r_2 = y_1 \bmod 1$ suas projeções, temos que $x_1 = a + r_1$ e $y_1 = a + 1 + r_2$, percebe-se que como $x_1 \leq y_1 < (x_1 + 1)$, podemos dividir o intervalo $(x_1, (x_1 + 1))$ em y_1 , ou seja,

$$|x_1 - (x_1 + 1)| = |x_1 - y_1| + |y_1 - (x_1 + 1)|.$$

Note que $1 = |x_1 - (x_1 + 1)|$. Daí, pela igualdade acima, segue que

$$|x_1 - y_1| = 1 - |y_1 - (x_1 + 1)| = 1 - |a + 1 + r_2 - (a + r_1 + 1)| = 1 - |r_2 - r_1|,$$

e mais uma vez, como $|x_1 - y_1| < \frac{1}{2}$, segue que

$$|x_1 - y_1| = |r_1 - r_2| = d_{\equiv}(x_1 \bmod 1, y_1 \bmod 1).$$

(Note que se x_1 e y_1 são negativos, temos que $x_1 = a - (1 - r_1)$ e $y_1 = a + 1 - (1 - r_2)$ e $|x_1 - y_1| = 1 - |y_1 - (x_1 + 1)| = |a + 1 - (1 - r_2) - (a - (1 - r_1) + 1)| = 1 - |r_2 - r_1|$ e demonstração segue análoga ao caso positivo.)

A Figura 4.7 nos mostra uma comparação das distancias de $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$ onde $\pi(\tilde{x}) = x$ e $\pi(\tilde{y}) = y$ quando $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ diferem por uma coordenada inteira.

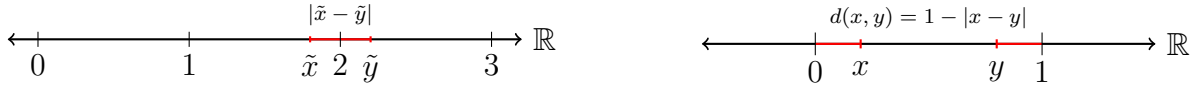


Figura 4.7: Representação do caso 2 do Lema 4.2.4 onde $\pi(\tilde{x}) = x$ e $\pi(\tilde{y}) = y$. Fonte: Autor.

Assim, $\frac{1}{2} \leq |x_1 - y_1| \Rightarrow d_{\equiv}(x_1 \bmod 1, y_1 \bmod 1) = |x_1 - y_1|$. Logo, pela junção dos dois casos, para x_1 e y_1 , segue que $d_{\equiv}(x_1 \bmod 1, y_1 \bmod 1) \leq |x_1 - y_1|$ sempre.

Analogamente, também obtemos que $d_{\equiv}(x_2 \bmod 1, y_2 \bmod 1) \leq |x_2 - y_2|$ quando $\frac{1}{2} \leq |x_2 - y_2|$ e $d_{\equiv}(x_2 \bmod 1, y_2 \bmod 1) = |x_2 - y_2|$ caso contrário, ou seja, para x_2 e y_2 , segue que $d_{\equiv}(x_2 \bmod 1, y_2 \bmod 1) \leq |x_2 - y_2|$ sempre.

Portanto,

$$\begin{aligned} d_T(\pi(x), \pi(y)) &= \sqrt{d_{\equiv}(x_1 \bmod 1, y_1 \bmod 1)^2 + d_{\equiv}(x_2 \bmod 1, y_2 \bmod 1)^2} \\ &\leq \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \|x - y\|. \end{aligned}$$

ii) Se $\|x - y\| < \frac{1}{2}$ então $\sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2} < \frac{1}{2} \Rightarrow |x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 < \frac{1}{4}$ e assim, $|x_1 - y_1| < \frac{1}{2}$ e $|x_2 - y_2| < \frac{1}{2}$. Logo, segue diretamente o item i) que,

$$d_{\equiv}(x_1 \bmod 1, y_1 \bmod 1) = |x_1 - y_1| \text{ e } d_{\equiv}(x_2 \bmod 1, y_2 \bmod 1) = |x_2 - y_2|.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d_T(\pi(x), \pi(y)) &= \sqrt{d_{\equiv}(x_1 \bmod 1, y_1 \bmod 1)^2 + d_{\equiv}(x_2 \bmod 1, y_2 \bmod 1)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \|x - y\|. \end{aligned}$$

□

Observação 4.2.5. A aplicação $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ não é injetiva. Por exemplo, se $x_1 = 3, 1$ e $x_2 = 4, 1$, temos, $\pi(x_1, 4) = \pi(x_2, 5)$. No entanto, restringindo seu domínio, o lema seguinte nos diz que π se torna injetiva.

Lema 4.2.6. *Sejam $c \in \mathbb{R}^2$ e $B = B(c, \frac{1}{2}) \subset \mathbb{R}^2$. Então $\pi : B \rightarrow \mathbb{T}^2$ é injetiva.*

Demonstração: Dados $x, y \in B$, onde $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$, temos que $|x - y| < 1$. Daí, $|x_1 - y_1| < 1$ e $|x_2 - y_2| < 1$. Agora, vamos mostrar que $\pi(x) = \pi(y) \Rightarrow x = y$.

$$\pi(x) = \pi(y) \Rightarrow (x_1 \bmod 1, x_2 \bmod 1) = (y_1 \bmod 1, y_2 \bmod 1).$$

Seja $r = x_1 \bmod 1 = y_1 \bmod 1$. Assim, $x_1 = a + r$ e $y_1 = b + r$, onde $a, b \in \mathbb{Z}$, $|x_1 - y_1| = |a + r - b - r| = |a - b|$

Como a e b são inteiros e $|a - b| - |x_1 - y_1| < 1$ segue que $a = b$ e, assim, $|x_1 - y_1| = |a - b| = 0$. Logo, $x_1 = y_1$. Analogamente, tomando $s = x_2 \bmod 1 = y_2 \bmod 1$, podemos provar que $x_2 = y_2$. Consequentemente, $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$, ou seja, $x = y$. Portanto, π restrita a uma bola de raio $\frac{1}{2}$ é injetiva. $\square$

A Figura 4.8 ilustra a injetividade provada no lema acima.

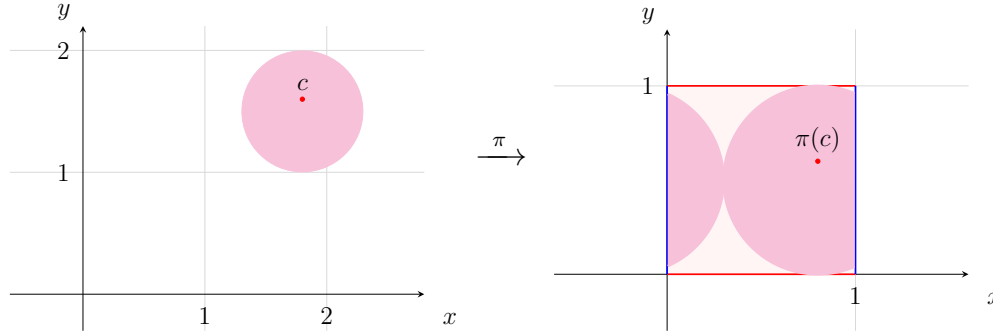


Figura 4.8: Representação da injetividade demonstrada no Lema 4.2.6. Fonte: Autor.

Lema 4.2.7. *Dados $x, y \in \mathbb{T}^2$, existem $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^2$, tais que $\pi(\tilde{x}) = x$ e $\pi(\tilde{y}) = y$, $d_T(x, y) = \|\tilde{x} - \tilde{y}\|$.*

Demonstração: Sejam $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{T}^2$ e $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2$.

- Se $|x_1 - y_1| < \frac{1}{2}$, pela Observação 4.2.1, $d(x_1, y_1) = |x_1 - y_1|$. Tome $\tilde{x}_1 = a_1 + x_1$ e $\tilde{y}_1 = a_1 + y_1$. Logo, $\pi(\tilde{x}_1) = x_1$, $\pi(\tilde{y}_1) = y_1$ e $|\tilde{x}_1 - \tilde{y}_1| = |a_1 + x_1 - (a_1 + y_1)| = |x_1 - y_1|$. Logo, $d_{\equiv}(x_1, y_1) = |\tilde{x}_1 - \tilde{y}_1|$.
- Se $|x_2 - y_2| < \frac{1}{2}$, pela Observação 4.2.1, $d(x_2, y_2) = |x_2 - y_2|$. Tome $\tilde{x}_2 = a_2 + x_2$ e $\tilde{y}_2 = a_2 + y_2$. Logo, $\pi(\tilde{x}_2) = x_2$, $\pi(\tilde{y}_2) = y_2$ e $|\tilde{x}_2 - \tilde{y}_2| = |a_2 + x_2 - (a_2 + y_2)| = |x_2 - y_2|$. Logo, $d_{\equiv}(x_2, y_2) = |\tilde{x}_2 - \tilde{y}_2|$.
- Se $|x_1 - y_1| \geq \frac{1}{2}$, pela Observação 4.2.1, $d(x_1, y_1) = 1 - |x_1 - y_1|$. Suponha sem perda de generalidade que $x_1 < y_1$. Tome $\tilde{x}_1 = a_1 + 1 + x_1$ e $\tilde{y}_1 = a_1 + y_1$. Logo, $\pi(\tilde{x}_1) = x_1$, $\tilde{y}_1 = y_1$. Note que $y_1 \in (x_1, (x_1 + 1))$. Daí,

$$|x_1 - (x_1 + 1)| = |x_1 - y_1| + |y_1 - (x_1 + 1)|,$$

como $|x_1 - (x_1 + 1)| = 1$, segue que $|y_1 - (x_1 + 1)| = 1 - |x_1 - y_1|$. Logo, $|\tilde{x}_1 - \tilde{y}_1| = |a_1 + 1 + x_1 - a_1 - y_1| = |(x_1 + 1) - y_1| = 1 - |x_1 - y_1|$. Logo, $d_{\equiv}(x_1, y_1) = |x_1 - y_1|$.

- Se $|x_2 - y_2| \geq \frac{1}{2}$, pela Observação 4.2.1, $d(x_2, y_2) = 1 - |x_2 - y_2|$. Suponha sem perda de generalidade que $x_2 < y_2$. Tome $\tilde{x}_2 = a_2 + 1 + x_2$ e $\tilde{y}_2 = a_2 + y_2$. Logo, $\pi(\tilde{x}_2) = x_2$, $\tilde{y}_2 = y_2$. Note que $y_2 \in (x_2, (x_2 + 1))$. Daí,

$$|x_2 - (x_2 + 1)| = |x_2 - y_2| + |y_2 - (x_2 + 1)|,$$

como $|x_2 - (x_2 + 1)| = 1$, segue que $|y_2 - (x_2 + 1)| = 1 - |x_2 - y_2|$. Logo, $|\tilde{x}_2 - \tilde{y}_2| = |a_2 + 1 + x_2 - a_2 - y_2| = |(x_2 + 1) - y_2| = 1 - |x_2 - y_2|$. Logo, $d_{\equiv}(x_2, y_2) = |x_2 - y_2|$.

Ou seja, é sempre possível determinar $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ e $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ tais que $\pi(\tilde{x}) = x$ e $\pi(\tilde{y}) = y$ e

$$\begin{aligned} d_T(\pi(x), \pi(y)) &= \sqrt{d_{\equiv}(x_1 \bmod 1, y_1 \bmod 1)^2 + d_{\equiv}(x_2 \bmod 1, y_2 \bmod 1)^2} \\ &= \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2} = \sqrt{(\tilde{x}_1 - \tilde{y}_1)^2 + (\tilde{x}_2 - \tilde{y}_2)^2} = \|\tilde{x} - \tilde{y}\|. \end{aligned}$$

□

A Figura 4.9, ilustra o Lema acima onde os pontos p_i e q_i , para $i \in \{1, 2\}$ são exemplos de pontos de $\mathbb{R}^2$ tais que $\|p_i - q_i\| = d_T(p, q)$, onde $p, q \in \mathbb{T}^2$.

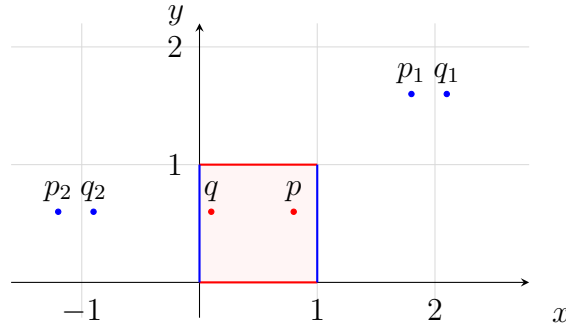


Figura 4.9: Representação da projeção dos pontos p e q . Fonte: Autor.

4.3 A aplicação f_A

Nesta seção, introduziremos a principal aplicação deste capítulo, que será dada pela composição de aplicações apresentadas nas Seções 4.1 e 4.2. Começemos inicialmente definindo o que é um automorfismo hiperbólico.

Definição 4.3.1. Dizemos que $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ é um **automorfismo hiperbólico** no toro se f é induzida por uma matriz hiperbólica.

A matriz A , definida no início deste capítulo, induz uma transformação linear em $\mathbb{R}^2$, a qual denotaremos também por $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Com essa matriz vamos induzir uma aplicação em $\mathbb{T}^2$,

$f_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ dada por, $f_A = \pi \circ A$, ou seja,

$$\begin{aligned} f_A(x_1, x_2) &= \pi(A(x_1, x_2)) = \pi \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \pi \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \pi(x_1 + x_2, x_1) \\ &= ((x_1 + x_2) \bmod 1, x_1 \bmod 1). \end{aligned}$$

Essa aplicação é o foco principal desse capítulo. Uma outra maneira de defini-la é como a aplicação que satisfaça,

$$f_A(\pi(x_1, x_2)) = \pi(A(x_1, x_2)) \text{ para todo } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Observação 4.3.2. *i)* Como os coeficientes de A são inteiros, vetores com coordenadas inteiras são levados em vetores com coordenadas inteiras, isto é, $A(\mathbb{Z}^2) \subset \mathbb{Z}^2$. Além disso, note que,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

ou seja, A é invertível e $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, também tem coordenadas inteiras. Logo, a transformação inversa A^{-1} também satisfaz $A^{-1}(\mathbb{Z}^2) \subset \mathbb{Z}^2$. Combinando esses dois fatos, concluímos que $\mathbb{Z}^2$ é invariante pela ação de A , ou seja, $A(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$.

ii) A aplicação f_A está bem definida. De fato, sejam $(x_1, x_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ são tais que $\pi(x_1, x_2) = \pi(z_1, z_2)$, assim x_1 e z_1 se diferenciam por um inteiro (análogo para x_2 e z_2), então podemos escrever $(x_1, x_2) = (z_1 + m_1, z_2 + m_2) = (z_1, z_2) + (m_1, m_2)$, com $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$. Logo

$$\begin{aligned} f_A(\pi(x_1, x_2)) &= \pi(A(x_1, x_2)) \\ &= \pi(A((z_1, z_2) + (m_1, m_2))) \\ &= \pi(A(z_1, z_2) + A(m_1, m_2)). \end{aligned}$$

uma vez que $A(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$, segue que $\pi(A(m_1, m_2)) = (0, 0)$, e assim

$$\begin{aligned} f_A(\pi(x_1, x_2)) &= \pi(A(z_1, z_2) + A(m_1, m_2)) \\ &= \pi(A(z_1, z_2)) = f_A(\pi(z_1, z_2)). \end{aligned}$$

Portanto, f_A está bem definida.

Fornecemos agora uma interpretação geométrica do comportamento de f_A . Primeiramente,

note que A transforma o quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ no paralelogramo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$, como representado na Figura 4.10, pois para $x \in [0, 1]$ temos,

$$A(x, 0) = (x, x); \quad A(0, x) = (x, 0); \quad A(1, x) = (x + 1, 1); \quad A(x, 1) = (x + 1, x).$$

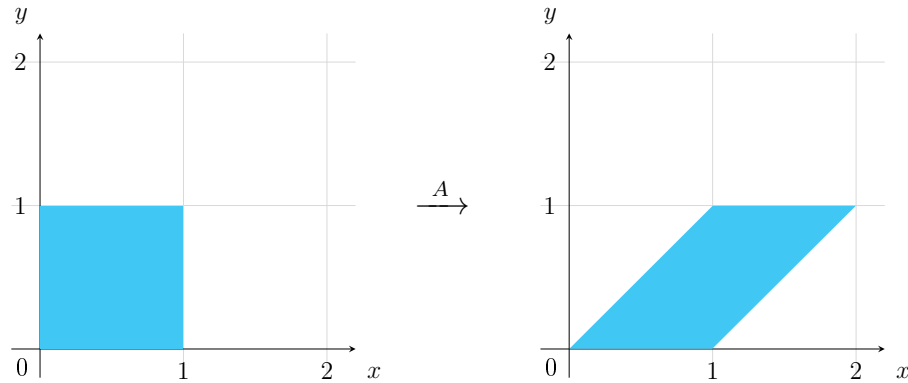


Figura 4.10: Representação da ação da matriz A em $\mathbb{T}^2$. Fonte: Autor.

Como representado na Figura 4.11, quando aplicamos a projeção π no paralelogramo obtido, os pontos representados pela região verde são novamente encaixados no quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

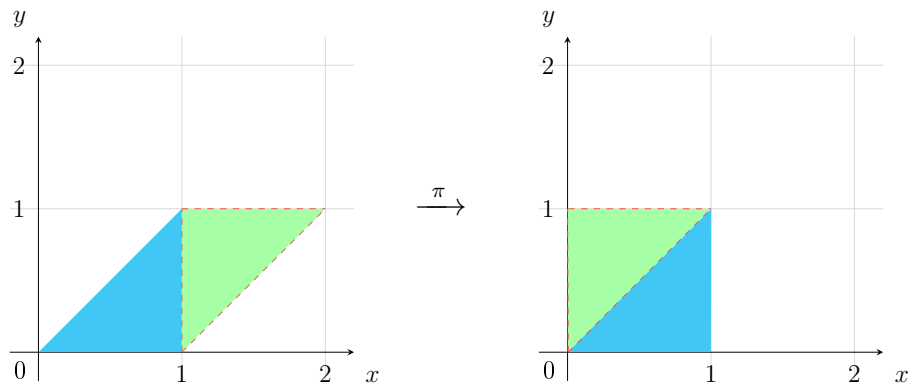


Figura 4.11: Representação de f_A em $\mathbb{T}^2$. Fonte: Autor.

Aplicando A novamente no quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ obtida anteriormente, note que o triângulo azul de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$ é levado no triângulo azul de vértices $(0, 1)$, $(1, 1)$ e $(2, 1)$, como representado na Figura 4.12, pois para $x \in [0, 1]$ temos que,

$$A(x, 0) = (x, x); \quad A(x, x) = (2x, x); \quad A(1, x) = (x + 1, 1).$$

Note também que o triângulo verde de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$ é levado no triângulo verde

de vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(0, 1)$, como representado na Figura 4.12, pois para $x \in [0, 1]$ temos que,

$$A(x, x) = (2x, x); \quad A(x, 1) = (x + 1, x); \quad A(1, x) = (x + 1, 1).$$

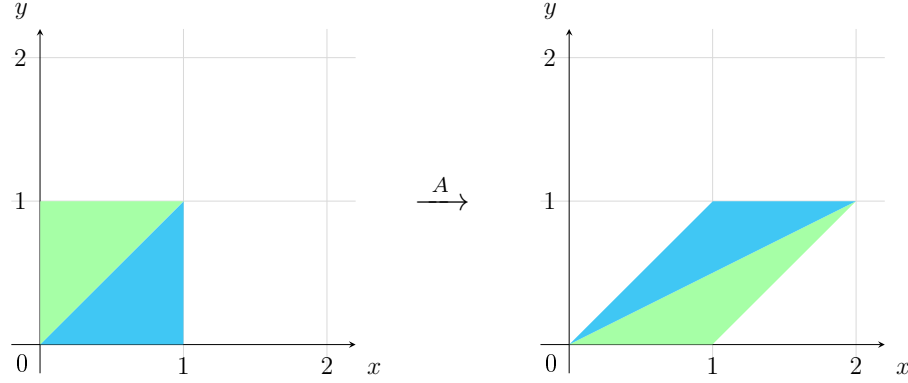


Figura 4.12: Representação da da ação de A em $f_A(\mathbb{T}^2)$. Fonte: Autor.

Aplicando novamente a projeção π , como representado pela Figura 4.13, a região destacada pela linha pontilhada, é novamente encaixada no retângulo $[0, 1] \times [0, 1]$. Ela representa o comportamento da segunda iterada de f_A no toro $\mathbb{T}^2$ e mostra como ele é “embaralhado” por sua iteração. O que acontece quando continuamos iterando f_A , é um “embaralhamento” cada vez maior dos pontos de $\mathbb{T}^2$.

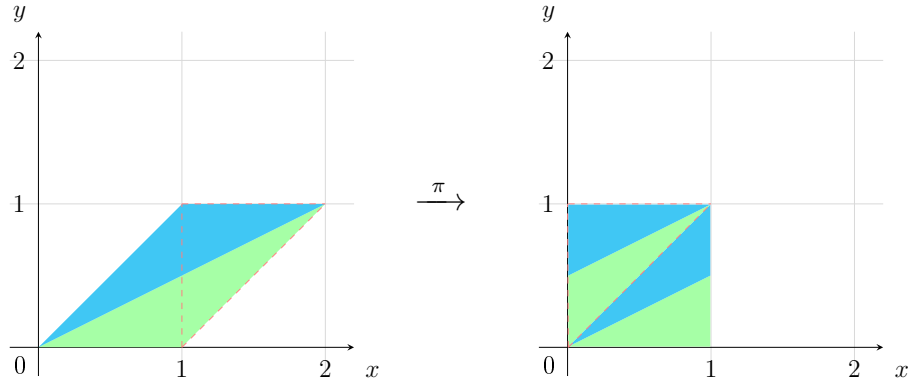


Figura 4.13: Representação da ação de f_A^2 em $\mathbb{T}^2$. Fonte: Autor.

Observação 4.3.3. A f_A^2 induzida pela matriz $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ é uma aplicação bem famosa da teoria de sistemas dinâmicos. Na literatura, essa aplicação é conhecida como *Arnold's Cat Cap*, nome dado em reconhecimento ao matemático russo Vladimir Igorevich Arnold (1937 - 2010) que utilizou o esboço da imagem de seu gato para descrever tal aplicação, em seu livro (ARNOLD; AVEZ, 1968). Essa aplicação é definida em uma imagem, onde cada pixel é considerado um ponto, assim é possível bagunçar a figurar por meio dessa aplicação. Essa ferramenta

é muito utilizada em modelos físicos, criptografia e computação gráfica. Na criptografia, por exemplo, é usada para criptografar e descriptografar imagens. O trabalho (NASCIMENTO, 2020) traz mais algumas informações sobre o *cat map*.

Vimos que $f_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ está em bem definida. Agora, veremos porque f_A possui a nomenclatura de automorfismo hiperbólico. Note que f_A possui o mesmo conjunto como domínio e contradomínio, logo é um endomorfismo, como em (MATOS, 2016). O que veremos a seguir é que f_A também é um isomorfismo, ou seja, bijetiva e, além disso, é um homeomorfismo.

Lema 4.3.4. *A aplicação $f_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ dada acima é um homeomorfismo e sua inversa é dada por $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$.*

Demonstração: Primeiramente, vamos mostrar que f_A é uniformemente contínua, e portanto, contínua.

Dado $\varepsilon > 0$. Tome $\delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|}$. Sejam $x, y \in \mathbb{T}^2$ tais que $d_T(x, y) < \delta$. Segue do Lema 4.2.7 que existem pontos $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^2$ tais que $\pi(\tilde{x}) = x$ e $\pi(\tilde{y}) = y$ e $\|\tilde{x} - \tilde{y}\| = d_T(x, y) < \delta$. Como $f_A(x), f_A(y) \in \mathbb{T}^2$, do Lema 4.2.4 segue que,

$$\begin{aligned} d_T(f_A(x), f_A(y)) &= d_T(f_A(\pi(\tilde{x})), f_A(\pi(\tilde{y}))) = d_T(\pi(A\tilde{x}), \pi(A\tilde{y})) \\ &\leq \|A\tilde{x} - A\tilde{y}\| = \|A(\tilde{x} - \tilde{y})\| \\ &\leq \|A\| \cdot \|\tilde{x} - \tilde{y}\| = \|A\| \cdot d_T(x, y) \\ &< \|A\| \cdot \delta = \|A\| \frac{\varepsilon}{\|A\|} = \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja, f_A é uniformemente contínua e, portanto, contínua.

Agora, vamos definir a aplicação $f_{A^{-1}} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, dada por $f_{A^{-1}}(x_1, x_2) = \pi(A^{-1}(x_1, x_2))$. Note que, por um argumento análogo ao anterior, substituindo A por A^{-1} obtemos que $f_{A^{-1}}$ também é contínua.

Resta verificar que $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$, ou seja, que $f_{A^{-1}}$ é a inversa de f_A . Dados $x \in \mathbb{T}^2$ e $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$ tais que $\pi(\tilde{x}) = x$, temos que,

$$f_{A^{-1}}(f_A(x)) = f_{A^{-1}}(f_A(\pi(\tilde{x}))) = f_{A^{-1}}(\pi(A\tilde{x})) = \pi(A^{-1} \cdot (A\tilde{x})) = \pi(\tilde{x}) = x.$$

e,

$$f_A(f_{A^{-1}}(x)) = f_A(f_{A^{-1}}(\pi(\tilde{x}))) = f_A(\pi(A^{-1}\tilde{x})) = \pi(A \cdot (A^{-1}\tilde{x})) = \pi(\tilde{x}) = x.$$

Assim, $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$. Logo, f_A é contínua, e possui inversa contínua e, portanto, é um homeomorfismo. $\square$

Deste modo, f_A é um homeomorfismo de $\mathbb{T}^2$ em $\mathbb{T}^2$, particularmente, um automorfismo.

O nome hiperbólico vem pois f_A é induzida por A , uma matriz hiperbólica, assim f_A é um exemplo de automorfismo hiperbólico no toro $\mathbb{T}^2$.

4.4 A dinâmica de f_A

Como nos capítulos anteriores, vamos mostrar que f_A define um sistema dinâmico caótico em $\mathbb{T}^2$, ou seja, é f_A transitiva, tem o conjunto dos pontos periódicos densos e tem sensibilidade às condições iniciais.

Teorema 4.4.1. Os pontos periódicos de f_A são densos em $\mathbb{T}^2$.

Demonstração: Dado um numero natural $k \in \mathbb{N}$, consideremos os pontos de $\mathbb{T}^2$ da forma

$$\left(\frac{i_1}{k}, \frac{i_2}{k}\right) \in \mathbb{T}^2,$$

com $i_1, i_2 \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$. Vamos denotar esses pontos por $Rac(k)$.

Afirmção 1: $Rac(k)$ é finito com k^2 elementos.

De fato, para todo $k \in \mathbb{N}$, os valores de i_1 e i_2 podem assumir valores de 0 ate $k-1$ (k valores), ou seja, um total de $k \cdot k = k^2$ pares ordenados.

Afirmção 2: $f_A(Rac(k)) \subset Rac(k)$.

De fato,

$$f_A\left(\frac{i_1}{k}, \frac{i_2}{k}\right) = \pi\left(A\left(\frac{i_1}{k}, \frac{i_2}{k}\right)\right) = \pi\left(\frac{i_1+i_2}{k}, \frac{i_1}{k}\right) = \left(\frac{i_1+i_2}{k} \mod 1, \frac{i_1}{k} \mod 1\right)$$

Note que como $i_1, i_2 < k$, então ou $i_1 + i_2 \leq k$ ou $k \leq i_1 + i_2 < 2k$.

- Se $i_1 + i_2 \leq k$, tome $j = i_1 + i_2$ e então $\frac{i_1+i_2}{k} \mod 1 = \frac{j}{k} \mod 1 = \frac{j}{k}$.
- Se $k \leq i_1 + i_2 < 2k$, então $\exists j < k$ tal que $j + k = i_1 + i_2$. Assim $\frac{i_1+i_2}{k} \mod 1 = \frac{j+k}{k} \mod 1 = \left(\frac{j}{k} + 1\right) \mod 1 = \frac{j}{k}$.

Em ambos os casos temos que $0 \leq j < k$, assim,

$$f_A\left(\frac{i_1}{k}, \frac{i_2}{k}\right) = \left(\frac{i_1+i_2}{k} \mod 1, \frac{i_1}{k} \mod 1\right) = \left(\frac{j}{k}, \frac{i_1}{k}\right) \in Rac(k).$$

Logo, $f_A(Rac(k)) \subset Rac(k)$.

Assim, como $Rac(k)$ é finito e $f_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ uma bijeção, a restrição $f_A|_{Rac(k)}$ é uma permutação dos elementos $Rac(k)$. Como existem infinitas iteradas de f_A e um número finito de elementos em $Rac(k)$, pelo Princípio da Casa dos Pombos, dado um ponto $p \in Rac(k)$ qualquer, existe

$n \in \mathbb{N}$ tal que $f_A^n(p) = p$, ou seja, todos os pontos de $Rac(k)$ são periódicos. Logo, $Rac(k) \subset Per(f_A)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Deste modo, como $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} Rac(k)$ é o conjunto de todos os pontos com coordenadas racionais em $[0, 1] \times [0, 1]$ e $\mathbb{Q}^2$ é denso em $\mathbb{R}^2$, dado $\varepsilon > 0$, para qualquer ponto $p \in \mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^2$ existe um $q \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Rac(k)$ tal que $q \in B(p, \varepsilon)$. Portanto, $Per(f_A)$ é denso em $\mathbb{T}^2$. $\square$

A Figura 4.14 nos mostra que dado um aberto $U \in \mathbb{T}^2$, por menor que seja, é sempre possível tomar $k \in \mathbb{N}$ de modo que exista $p \in Rac(k)$ tal que $p \in U$, ou seja, dado $U \subset \mathbb{T}^2$, existe um ponto $p \in U$ que seja periódica.

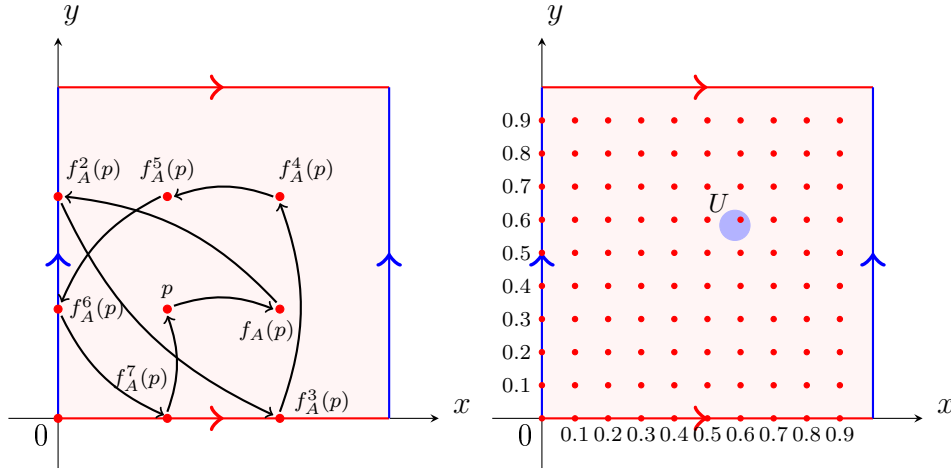


Figura 4.14: Representação de uma órbita periódica para $p = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \in Rac(3)$ por f_A , e dos pontos $p \in Rac(10)$. Fonte: Autor.

Observação 4.4.2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_A^n(x) = \pi(A^n(x))$, pois como $f_A(x) = \pi(Ax)$, temos $f_A^2(x) = f_A(f_Ax) = f_A(\pi(Ax)) = \pi(AAx) = \pi(A^2x)$ e, sucessivamente, obtemos que $f_A^n(x) = \pi(A^n(x))$.

Proposição 4.4.3. Para todo $p \in \mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^2$, $W_{f_A}^s(p) = \pi(W_A^s(p))$ e $W_{f_A}^u(p) = \pi(W_A^u(p))$.

Demonstração: Primeiramente, mostremos que $\pi(W_A^s(p)) \subset W_{f_A}^s(p)$. Seja $x \in \pi(W_A^s(p))$. Assim existe $y \in W_A^s(p)$ tal que $\pi(y) = x$. Como $p \in \mathbb{T}^2$, então $\pi(p) = p$, logo, pela definição de f_A e pelo Lema 4.2.4, temos

$$d_T(f_A^n(p), f_A^n(x)) = d_T(f_A^n(\pi(p)), f_A^n(\pi(y))) = d_T(\pi(A^n p), \pi(A^n y)) \leq \|A^n p - A^n y\|.$$

Agora, como $y \in W_A^s(p)$, temos que $\|A^n p - A^n y\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Portanto, $d_T(f_A^n(p), f_A^n(x)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ou seja, $x \in W_{f_A}^s(p)$. Logo, $\pi(W_A^s(p)) \subset W_{f_A}^s(p)$.

Agora, mostremos que $W_{f_A}^s(p) \subset \pi(W_A^s(p))$. Seja $x \in W_{f_A}^s(p)$, como $d_T(f_A^n(p), f_A^n(x)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d_T(f_A^n(p), f_A^n(x)) < \varepsilon, \forall n \geq n_0$.

Tomemos $\varepsilon = \frac{1}{4\|A\|}$, daí existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d_T(f_A^n(p), f_A^n(x)) \leq \frac{1}{4\|A\|}$, $\forall n \geq n_0$. Agora, note que $f_A^{n_0}(p) = \pi(A^{n_0}(p))$ e $f_A^{n_0}(x) = \pi(A^{n_0}(x))$. Assim, pelo Lema 4.2.7, existem $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$, tais que $d_T(\pi(A^{n_0}p), \pi(A^{n_0}x)) = \|(A^{n_0}p + a_0) - (A^{n_0}x + b_0)\| < \frac{1}{4\|A\|} < \frac{1}{4}$, e assim $\|A^{n_0}p - (A^{n_0}x + b_0 - a_0)\| < \frac{1}{4}$.

Tome $z = A^{n_0}x + b_0 - a_0$. Note que $z \in B(A^{n_0}(p), \frac{1}{4})$, que é uma bola aberta de raio menor que $\frac{1}{2}$. Segue do Lema 4.2.6, que π é injetora nessa bola. Assim, z é o único ponto de $B(A^{n_0}(p), \frac{1}{4})$ tal que $\pi(z) = \pi(A^{n_0}x + n_0 - m_0) = \pi(A^{n_0}x) = f_A^{n_0}(x)$.

Consideremos agora $y = A^{-n_0}z$. Assim, $\pi(y) = \pi(A^{-n_0}z) = f_A^{-n_0}(\pi(z)) = f_A^{-n_0}(f_A^{n_0}(x)) = x$ como $\|z - A^{n_0}p\| \leq \frac{1}{4}$, segue do Lema 4.2.4 que,

$$\|z - A^{n_0}p\| = d_T(\pi(z), \pi(A^{n_0}p)) = d_T(f_A^{n_0}(x), f_A^{n_0}(p)) \leq \frac{1}{4\|A\|}.$$

Daí, obtemos que

$$\|Az - A(A^{n_0}p)\| \leq \|A\|\|z - A^{n_0}p\| < \|A\| \cdot \frac{1}{4\|A\|} = \frac{1}{4} \Rightarrow \|Az - A^{n_0+1}p\| < \frac{1}{4}.$$

Novamente, utilizando o Lema 4.2.4, obtemos que

$$\begin{aligned} \|Az - A(A^{n_0}p)\| &= d_T(\pi(Az), \pi(A(A^{n_0}p))) = d_T(f_A(\pi(z)), f_A(\pi(A^{n_0}p))) \\ &= d_T(f_A(f_A^{n_0}(x)), f_A(f_A^{n_0}(p))) = d_T(f_A^{n_0+1}(x), f_A^{n_0+1}(p)) \leq \frac{1}{4\|A\|}. \end{aligned}$$

Seguindo esse processo, obtemos que,

$$\|A^n z - A^n(A^{n_0}p)\| = d_T(f_A^{n_0+n}(x), f_A^{n_0+n}(p)) \leq \frac{1}{4\|A\|}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como por hipótese, $d_T(f_A^{n_0+n}(x), f_A^{n_0+n}(p)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, segue que $\|A^n z - A^n(A^{n_0}p)\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ou seja, $z \in W_A^s(A^{n_0}p)$. Consequentemente, pelo Lema 1.1.20, segue que, $y = A^{-n_0}z \in A^{-n_0}(W_A^s(A^{n_0}p)) = W_A^s(p)$. Logo, $x = \pi(y) \in \pi(W_A^s(p))$ e assim, $W_{f_A}^s(p) \subset \pi(W_A^s(p))$. Combinando com a primeira parte, concluímos que $W_{f_A}^s(p) = W_A^s(p)$.

A demonstração para conjuntos instáveis pode ser feita de maneira análoga trocando “ n ” por “ $-n$ ” e usando que $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$ e a prova da proposição está completa. $\square$

A Figura 4.15 representa a projeção do conjunto $W_A^s(p)$ no toro. Note que projeção da reta $p + \mathbb{E}^s$ é feita com o auxílio de cada quadrado definido pelas coordenadas inteiras do plano localizado à esquerda de onde a reta passa.

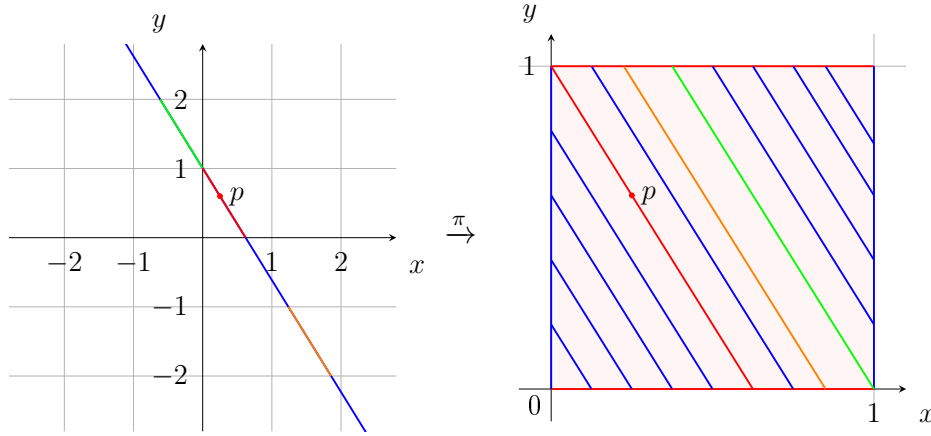


Figura 4.15: Representação dos conjuntos $W_A^s(p)$ e $\pi(W_A^s(p)) = W_{f_A}^s(p)$. Fonte: Autor.

Lema 4.4.4. *Dados $p \in \mathbb{T}^2$ e $x \in W_{f_A}^s(p)$, existe um único ponto $\tilde{x} \in W_A^s(p)$ tal que $x = \pi(\tilde{x})$. Ou seja, $\pi|_{W_A^s(p)} : W_A^s(p) \rightarrow W_{f_A}^s(p)$ uma bijeção. Analogamente, $\pi|_{W_A^u(p)} : W_A^u(p) \rightarrow W_{f_A}^u(p)$.*

Demonstração: Seja $p = (p_1, p_2)$. Pela Proposição 4.4.3, para todo $x \in W_{f_A}^s(p) = \pi(W_A^s(p))$ existe $\tilde{x} \in W_A^s(p)$ tal que $\pi(\tilde{x}) = x$, logo π é sobrejetiva. Agora, resta mostrar que tal ponto $\tilde{x}$ é único, provando assim sua injetividade. Vamos supor que exista $\tilde{z} \in W_A^s(p)$ tal que $\pi(\tilde{x}) = \pi(\tilde{z})$. Provemos que $\tilde{x} = \tilde{z}$.

Pelo Lema 4.1.4 item i), como $\tilde{x}, \tilde{z} \in W_A^s(p)$ podemos escrevê-los como $\tilde{x} = p + v_1$ e $\tilde{z} = p + v_2$, onde $v_1, v_2 \in \mathbb{E}^s$. Além disso, note que $v_1 = \lambda_1 \tilde{v}^s$ e $v_2 = \lambda_2 \tilde{v}^s$, onde $\tilde{v}^s = (2, -1 - \sqrt{5})$ é um autovetor estável de A dado em (4.1.1), e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Deste modo, temos que,

$$\pi(\tilde{x}) = \pi(p + v_1) = \pi(p + \lambda_1 v^s) = \pi(p_1 + 2\lambda_1, p_2 + \lambda_1(-1 - \sqrt{5})), \text{ e}$$

$$\pi(\tilde{z}) = \pi(p + v_2) = \pi(p + \lambda_2 v^s) = \pi(p_1 + 2\lambda_2, p_2 + \lambda_2(-1 - \sqrt{5})).$$

Como $\pi(\tilde{z}) = \pi(\tilde{x})$ segue que: $p_1 + 2\lambda_1 \equiv p_1 + 2\lambda_2 \pmod{1}$, logo $(p_1 + 2\lambda_1 - p_1 - 2\lambda_2) = 2(\lambda_1 - \lambda_2) \in \mathbb{Z}$, e $p_2 + \lambda_1(-1 - \sqrt{5}) \equiv p_2 + \lambda_2(-1 - \sqrt{5}) \pmod{1}$, logo $(p_2 + \lambda_1(-1 - \sqrt{5}) - p_2 - \lambda_2(-1 - \sqrt{5})) = (\lambda_1 - \lambda_2)(-1 - \sqrt{5}) \in \mathbb{Z}$. Como $(-1 - \sqrt{5})$ é um número irracional, para que $(\lambda_1 - \lambda_2)(-1 - \sqrt{5})$ seja um número inteiro, $(\lambda_1 - \lambda_2)$ deve ser igual a zero, assim $\lambda_1 = \lambda_2$ logo,

$$\tilde{x} = p + \lambda_1 v = p + \lambda_2 v = \tilde{z}.$$

Portanto $\pi|_{W_A^s(p)}$ é injetiva e assim é bijetiva. □

A demonstração para $W_A^u(p)$ e $W_{f_A}^u$ é análoga, por isso será omitida.

O lema a seguir é um resultado auxiliar que nos ajudará a provar que os conjuntos estáveis e instáveis em relação a f_A são densos em $\mathbb{T}^2$.

Lema 4.4.5. *Seja $r \in \mathbb{R}$ um número irracional. Então o conjunto $S = \{nr \bmod 1; n \in \mathbb{Z}\}$ é denso no intervalo $[0, 1]$.*

Demonstração: Consideremos a sequência bilateral $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset [0, 1]$ dada por $x_n = nr \bmod 1$. Dado $k \in \mathbb{N}$ podemos dividir o intervalo $[0, 1]$ em k intervalos da forma $[\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}]$ onde $i \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$. Deste modo, como (x_n) possui infinitos pontos e os intervalos da forma $[\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}]$ são finitos, pelo Princípio da Casa dos Pombos, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, distintos, tais que $x_{n_1}, x_{n_2} \in [\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}]$ para algum $i \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$. Supondo sem perda de generalidade que $x_{n_1} \leq x_{n_2}$, temos que,

$$x_{n_1} \leq x_{n_2} \leq \frac{i+1}{k} \Rightarrow 0 \leq x_{n_2} - x_{n_1} < \frac{i}{k} + \frac{1}{k} - x_{n_1}.$$

Como $\frac{i}{k} \leq x_{n_1} \Rightarrow \frac{i}{k} - x_{n_1} \leq 0$, obtemos que, $0 \leq x_{n_2} - x_{n_1} < \frac{1}{k} + (\frac{i}{k} - x_{n_1}) \leq \frac{1}{k}$.

Pela definição da sequência, temos que $0 \leq (rn_2 \bmod 1) - (rn_1 \bmod 1) = (n_2 - n_1)r \bmod 1 \leq \frac{1}{k}$, ou seja, $0 \leq x_{n_2 - n_1} \leq \frac{1}{k}$.

Tome $n_k = n_2 - n_1$. Deste modo, $\forall k \in \mathbb{N}$, existe $n_k \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq x_{n_k} < \frac{1}{k}$, como r é irracional, $n_k r$ também é irracional, logo $x_{n_k} = n_k r \pmod{1}$ é irracional, e portanto diferente de 0 e de $\frac{1}{k}$, assim ,

$$0 < x_{n_k} < \frac{1}{k}.$$

Agora, dados $\varepsilon > 0$ e $a \in [0, 1]$ quaisquer, vamos mostrar que existe um ponto da forma $x_n = nr \bmod 1$ no intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Tome $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < \varepsilon$ e fixemos $0 \leq i_a < k$ tal que $a \in [\frac{i_a}{k}, \frac{i_a+1}{k}]$. Como observado existe x_{n_k} que satisfaz $0 < x_{n_k} < \frac{1}{k}$. Seja $m = \left\lceil \frac{i_a}{kx_{n_k}} \right\rceil$ onde $\lceil \cdot \rceil$ representa a função teto. Pela definição de função teto, por um lado,

$$\frac{i_a}{kx_{n_k}} \leq m \Rightarrow \frac{i_a}{k} \leq mx_{n_k}.$$

Por outro lado,

$$m \leq \frac{i_a}{kx_{n_k}} + 1 \Rightarrow mx_{n_k} \leq \frac{i_a}{k} + x_{n_k},$$

e como $x_{n_k} < \frac{1}{k}$, $mx_{n_k} \leq \frac{i_a}{k} + \frac{1}{k} = \frac{i_a+1}{k}$, ou seja, $mx_{n_k} \in [\frac{i_a}{k}, \frac{i_a+1}{k}]$. Particularmente, $|a - mx_{n_k}| \leq |\frac{i_a}{k} - \frac{i_a+1}{k}| = \frac{1}{k} < \varepsilon$. Como $mx_{n_k} = mn_k r \bmod 1$, onde $mn_k \in \mathbb{Z}$, então $mx_{n_k} \in \{nr \bmod 1 : n \in \mathbb{Z}\}$. Portanto existe um ponto da forma $nr \pmod{1}$ em qualquer intervalo contendo a , ou seja, que $\{nr \bmod 1; n \in \mathbb{Z}\}$ é denso em $[0, 1]$. $\square$

Proposição 4.4.6. *Sejam $p, q \in \mathbb{T}^2$. Então:*

i) *Os conjuntos $W_{f_A}^s(p)$ e $W_{f_A}^u(q)$ são densos em $\mathbb{T}^2$.*

ii) *O conjunto $W_{f_A}^s(p) \cap W_{f_A}^u(q)$ é denso em $\mathbb{T}^2$.*

Demonstração: *i)* Vamos fazer a prova para $W_{f_A}^s(p)$, para $W_{f_A}^u(q)$ é análoga.

Começaremos mostrando para $p = 0$. Pelos Lema 4.4.3 e 4.1.4, $W_{f_A}^s(0) = \pi(W_A^s(0)) = \pi(0 + \mathbb{E}^s) = \pi(\mathbb{E}^s)$. Como $\mathbb{E}^s = \{\lambda \tilde{v}^s; \lambda \in \mathbb{R}\}$, e o vetor $v_0 = (1, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}) = \frac{\tilde{v}}{2}$, segue que $\mathbb{E}^s = \{\lambda v_0; \lambda \in \mathbb{R}\}$. Tomando $r = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, podemos escrever $\mathbb{E}^s = \{\lambda v_0; \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda(1, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}); \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda, \lambda r); \lambda \in \mathbb{R}\}$, que é uma reta de direção r .

Agora, dado $\varepsilon > 0$ qualquer e um ponto $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{T}^2$ qualquer, vamos encontrar um ponto em $\tilde{x} \in \mathbb{E}^s \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\pi(\tilde{x}) \in B_{d_T}(y, \varepsilon)$ (Note que $\pi(\tilde{x}) \in W_{f_A}^s(0)$). Considere $y_2 - y_1 r \mod 1 \in [0, 1]$ Pelo Lema 4.4.5, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que,

$$nr \mod 1 \in ((y_2 - y_1 r) \mod 1 - \varepsilon, (y_2 - y_1 r) \mod 1 + \varepsilon).$$

Como feito na demonstração do Lema 4.2.7, existe $k \in \mathbb{Z}$ e tal que $nr + k \in ((y_2 - y_1 r) - \varepsilon, (y_2 - y_1 r) + \varepsilon) \subset \mathbb{R}$. Assim

$$nr \in (y_2 - k - y_1 r - \varepsilon, y_2 - k - y_1 r + \varepsilon) \Rightarrow nr - y_1 r = (y_1 + n)r \in (y_2 - k - \varepsilon, y_2 - k + \varepsilon),$$

logo,

$$|(y_1 + n)r - (y_2 - k)| < \varepsilon.$$

Agora, o ponto $\tilde{x} = (y_1 + n, (y_1 + n)r) \in W_A^s(0)$, pois é da forma $(\lambda, \lambda r)$ e, além disso, $\tilde{x} \in B((y_1 + n, y_2 - k), \varepsilon)$, pois,

$$\begin{aligned} \|\tilde{x} - (y_1 + n, y_2 - k)\| &= \|(y_1 + n, (y_1 + n)r) - (y_1 + n, y_2 - k)\| \\ &= \sqrt{(y_1 + n - (y_1 + n))^2 + ((y_1 + n)r - (y_2 - k))^2} \\ &= \sqrt{((y_1 + n)r - (y_2 - k))^2} = |(y_1 + n)r - (y_2 - k)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Daí, segue, pelo item *i)* do Lema 4.2.4, que,

$$d_T(\pi(\tilde{x}), \pi(y_1 + n, y_2 - k)) \leq \|\tilde{x} - (y_1 + n, y_2 - k)\| < \varepsilon. \quad (4.4.1)$$

Como, $n, k \in \mathbb{Z}$, temos que $y_1 + n \mod 1 = y_1$ e $y_2 - k \mod 1 = y_2$, logo $\pi(y_1 + n, y_2 - k) = (y_1, y_2)$, ou seja, pela desigualdade (4.4.1), temos que

$$d_T(\pi(\tilde{x}), (y_1, y_2)) < \varepsilon.$$

Logo, o ponto $\pi(\tilde{x}) \in B_{d_T}(y, \varepsilon)$, como $\tilde{x} \in W_A^s(0)$ e tomamos $y \in \mathbb{T}^2$ qualquer, temos que $\pi(W_A^s(0)) = W_{f_A}^s(0)$ é denso em $\mathbb{T}^2$.

Para o conjunto $W_{f_A}^s(p)$ com $p \in \mathbb{T}^2$ qualquer, dado $y \in \mathbb{T}^2$, tome o ponto $y - p \in \mathbb{T}^2$. Note que como $\pi(\mathbb{E}^s)$ é denso em $\mathbb{T}^2$, então existe $a \in \pi(\mathbb{E}^s)$ tal que $a \in B_{d_T}(y - p, \varepsilon)$, qualquer

que seja $\varepsilon > 0$. Como $a \in \pi(\mathbb{E}^s)$, existe $\tilde{a} \in \mathbb{E}^s$, com $\pi(\tilde{a}) = a$. Assim, obtemos que existe $\tilde{x} = \tilde{a} + p \in \mathbb{E}^s + p$, com $\pi(\tilde{x}) = \pi(\tilde{a} + p) = \pi(\tilde{a}) + \pi(p) = a + p \in \pi(\mathbb{E}^s + p)$. Como $a \in B_{d_T}(y - p, \varepsilon)$, segue que $\pi(\tilde{x}) = a + p \in B(y, \varepsilon)$ e, pelo Lema 4.1.4, $W_{f_A}^s(p) = \pi(W_A^s(p)) = \pi(p + \mathbb{E}^s)$. Logo, dado $y \in \mathbb{T}^2$, existe $x = \pi(\tilde{x}) \in W_{f_A}^s(p)$, tal que $x \in B(y, \varepsilon)$. Portanto, $W_{f_A}^s(p)$ é denso em $\mathbb{T}^2$.

Os conjuntos $\pi(W_A^s(p)) = W_{f_A}^s(p)$ e $\pi(W_A^u(q)) = W_{f_A}^u(q)$ cobrem o toro com as projeções das retas $p + \mathbb{E}^s$ e $q + \mathbb{E}^u$, respectivamente. A Figura 4.16 representa que dado qualquer aberto em $\mathbb{T}^2$ existe algum ponto desses conjuntos no aberto.

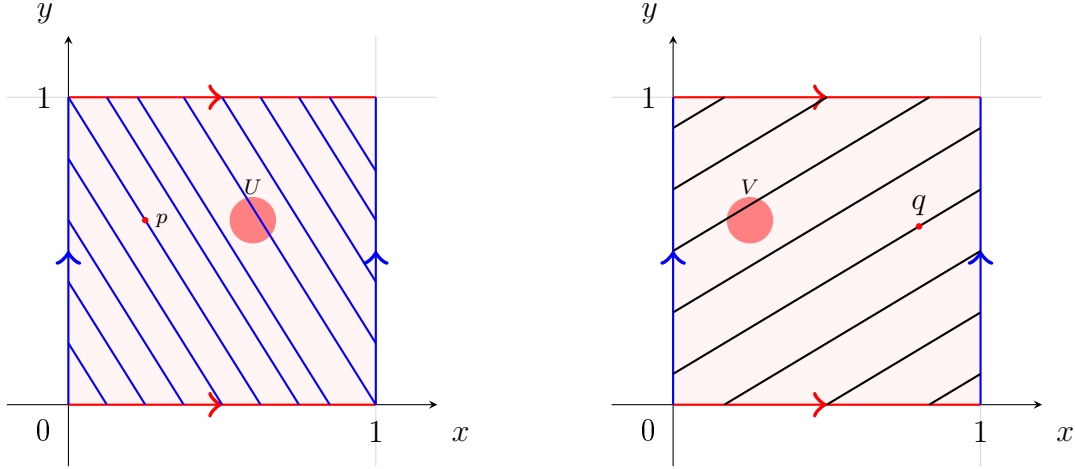


Figura 4.16: Representação dos conjuntos $W_{f_A}^s(p)$ e $W_{f_A}^u(q)$, respectivamente. Fonte: Autor.

ii) Queremos mostrar que dados $\varepsilon > 0$ e $y \in \mathbb{T}^2$, existe $x \in W_{f_A}^s(p) \cap W_{f_A}^u(q)$ tal que $x \in B_{d_T}(y, \varepsilon) \in \mathbb{T}^2$.

Primeiramente, note que $W_{f_A}^s(p) \cap W_{f_A}^u(q) \neq \emptyset$. De fato, sejam $\mathbb{E}^s + p$ e $\mathbb{E}^u + q$ os autoespaços estáveis e instáveis de p e q . Tomando os pontos $a \in \mathbb{E}^s + p$ e $b \in \mathbb{E}^u$, pelo Lema 4.1.4, escrevendo $r = -1 - \sqrt{5}$ e $s = -1 + \sqrt{5}$, temos que,

$$\begin{aligned} a &= p + \lambda_1 \tilde{v}^s = (p_1 + 2\lambda_1, p_2 + \lambda_1 r), \text{ e} \\ b &= q + \lambda_2 \tilde{v}^u = (q_1 + 2\lambda_2, q_2 + \lambda_2 s), \end{aligned}$$

onde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Ou seja, a e b pertencem às retas com os vetores diretores $(2, r)$ e $(2, s)$, respectivamente. Calculando o produto interno dos dois vetores, obtemos que

$$(2, r) \cdot (2, s) = 2 \cdot 2 + (-1 - \sqrt{5}) \cdot (-1 + \sqrt{5}) = 4 + 1 - 5 = 0.$$

Ou seja, os vetores diretores das retas são perpendiculares e assim as retas devem se intersectar em algum ponto $\tilde{x}$, isto é, $\tilde{x} \in (\mathbb{E}^s + p) \cap (\mathbb{E}^u + q)$. Assim, como $\tilde{x} \in \mathbb{E}^s + p \Rightarrow x = \pi(\tilde{x}) \in \pi(\mathbb{E}^s + p) = W_{f_A}^s(p)$, e como $\tilde{x} \in \mathbb{E}^u + q \Rightarrow x = \pi(\tilde{x}) \in \pi(\mathbb{E}^u + q) = W_{f_A}^u(q)$. Logo, $x \in W_{f_A}^s(p) \cap W_{f_A}^u(q)$,

ou seja, $W_{f_A}^s(p) \cap W_{f_A}^u(q)$ é não vazio.

Agora, seja $y \in \mathbb{T}^2$. Dado $\varepsilon > 0$, pelo item *i*) dessa proposição, existe $a \in W_{f_A}^s(p)$ tal que $a \in B_{d_T}(y, \varepsilon)$. Como $a \in \mathbb{T}^2$, pelo mesmo item, para $\delta = \frac{\varepsilon - D_T(a, y)}{2}$ existe $b \in W_{f_A}^u(q)$ tal que $b \in B_{d_T}(a, \delta) \subset B_{d_T}(y, \varepsilon)$.

Assim, em $\mathbb{R}^2$, como $b \in W_{f_A}^u(q) = \pi(\mathbb{E}^u + q)$ e $a \in W_{f_A}^s(p) = \pi(\mathbb{E}^s + p)$, pelo Lema 4.2.6, existem $\tilde{b} \in \mathbb{E}^u + q$, com $\pi(\tilde{b}) = b$ e $\tilde{a} \in \mathbb{E}^s + p$, com $\pi(\tilde{a}) = a$, tais que

$$\|\tilde{b} - \tilde{a}\| = d_T(a, b) \leq \delta,$$

ou seja, $\tilde{b} \in B(\tilde{a}, \delta)$. Como $\tilde{b} \in (q_1 + 2\lambda, q_2 + \lambda s)$ e $\tilde{a} \in (p_1 + 2\lambda, p_2 + \lambda r)$, retas ortogonais em $\mathbb{R}^2$, elas devem se intersectar em um ponto $\tilde{x}$. Note que, esse ponto $\tilde{x}$, deve ser o ponto da reta $(q_1 + 2\lambda, q_2 + \lambda s)$ mais próximo de $\tilde{a}$, ou seja, $d(\tilde{a}, \tilde{x}) = \min\{d(\tilde{a}, z); z \in (q_1 + 2\lambda, q_2 + \lambda s)\}$. Se $\tilde{b} = \tilde{x}$, segue que $\tilde{x} \in B(\tilde{a}, \delta)$ e $\tilde{b} \neq \tilde{x}$, e que $d(\tilde{a}, \tilde{x}) < d(\tilde{a}, \tilde{b}) < \delta$, ou seja, $\tilde{x} \in B(\tilde{a}, \delta)$. Deste modo, em ambos os casos, temos que $x \in B(\tilde{a}, \delta) \subset B(y, \varepsilon)$ e $\tilde{x} \in (\mathbb{E}^s + p) \cap (\mathbb{E}^u + q)$. Assim $x = \pi(\tilde{x}) \in B(a, \delta)$ e $\pi(\tilde{x}) \in W_{f_A}^s(p) \cap W_{f_A}^u(q)$. Portanto, para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in W_{f_A}^s(p) \cap W_{f_A}^u(q)$ tal que $x \in B(y, \varepsilon)$, ou seja, $W_{f_A}^s(p) \cap W_{f_A}^u(q)$ é denso em $\mathbb{T}^2$, como queríamos demonstrar. $\square$

A Figura 4.17 nos fornece uma representação de que dado um aberto $V \subset \mathbb{T}^2$ qualquer, é sempre possível encontrar um ponto na intersecção de $W_{f_A}^s(p)$ e $W_{f_A}^u(q)$.

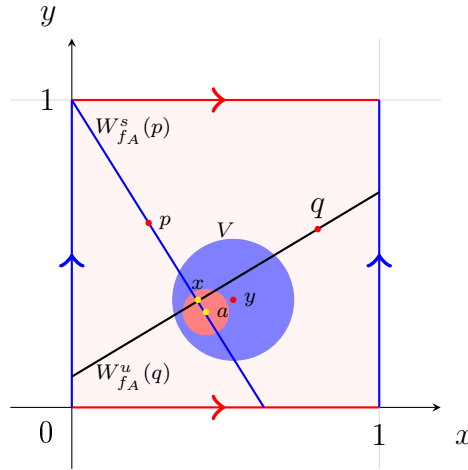


Figura 4.17: Representação dos conjuntos $W_{f_A}^s(p)$ e $W_{f_A}^u(q)$. Fonte: Autor.

Teorema 4.4.7. A aplicação f_A é transitiva.

Demonstração: Primeiramente, vamos relembrar que como $\mathbb{T}^2$ é um espaço métrico de Hausdorff, pelo Teorema 1.2.4, f_A é transitiva se, e somente se, para todo par de abertos $U, V \subset \mathbb{T}^2$ existe algum $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Assim, sejam $U, V \subset \mathbb{T}^2$ abertos. Pela Proposição 4.4.1, existem pontos periódicos $p \in V$ e $q \in U$, ou seja, existem $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tais que $f_A^{m_1}(p) = p \in V$ e $f_A^{-m_2}(q) = q \in U$. Tome $m = \text{mmc}\{m_1, m_2\}$, assim $f_A^m(p) = p \in V$ e $f_A^{-m}(q) = q \in U$.

Agora, consideremos $x \in W_{f_A}^s(p) \cap W_{f_A}^u(q)$, cuja existência é garantida pela Proposição 4.4.6 item ii). Pelo Lema 1.1.20 $f_A^n(W_{f_A}^s(p)) = W_{f_A}^s(f_A^n(p))$ e $f_A^{-n}(W_{f_A}^u(q)) = W_{f_A}^u(f_A^{-n}(q))$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim como $x \in W_{f_A}^s(p)$ segue que $f_A^m(x) \in f_A^m(W_{f_A}^s(p)) = W_{f_A}^s(f_A^m(p)) = W_{f_A}^s(p)$ e como $x \in W_{f_A}^u(q)$ segue que $f_A^{-m}(x) \in f_A^{-m}(W_{f_A}^u(q)) = W_{f_A}^u(f_A^{-m}(q)) = W_{f_A}^u(q)$. Assim,

$$d_T(f_A^k(f_A^m(x)), p) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0, \text{ e,}$$

$$d_T(f_A^{-k}f_A^{-m}(x), q) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Como $p \in V$ e $f_A^k(f_A^m(x))$ converge para p , existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f_A^{k_1}(f_A^m(x)) = f_A^{k_0+m}(x) \in V$, $\forall k \geq k_1$. Analogamente, existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $f_A^{-k_2}(f_A^{-m}(x)) \in U$, $\forall k \geq k_2$. Tome $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$. Assim, $f_A^{-k_0-m}(x) \in U \Rightarrow f_A^{2k_0+m+m}(f_A^{-k_0-m}(x)) = f_A^{k_0+m}(x) \in f_A^{2(k_0+m)}(U)$ mas $f_A^{2k_0m}(f_A^{-k_0m}(x)) = f_A^{k_0+m}(x) \in V$. Logo, para $n = 2(k_0 + m)$ temos que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Portanto, f_A é transitiva. A Figura 4.18 ilustra a transitividade de f_A em $\mathbb{T}^2$.

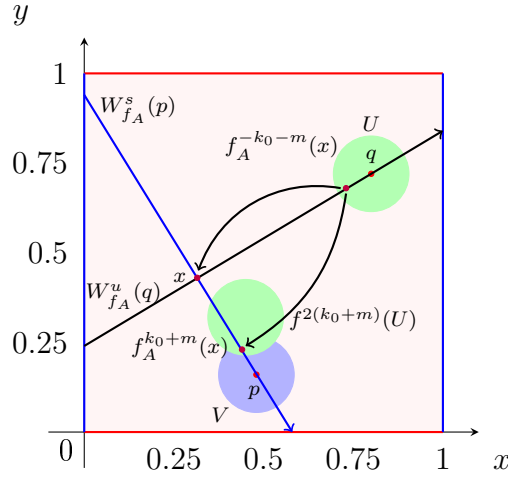


Figura 4.18: Representação da transitividade de f_A em $\mathbb{T}^2$. Fonte: Autor.

Teorema 4.4.8. A aplicação f_A tem sensibilidade às condições iniciais

Demonstração: Para essa demonstração, mostraremos que f_A é expansiva e por consequência tem sensibilidade às condições iniciais. Deste modo, mostraremos que existe $\varepsilon > 0$ tal que se $d_T(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$, então $x = y$.

Tome $\varepsilon = \frac{1}{10}$. Sejam $x, y \in \mathbb{T}^2$ tais que $d_T(f_A^n(x), f_A^n(y)) < \frac{1}{10}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Pelo Lema 4.2.7, existem $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^2$ tais que $\pi(\tilde{x}) = x$ e $\pi(\tilde{y}) = y$ e $\|\tilde{x} - \tilde{y}\| = d_T(x, y)$ e como $\mathbb{R}^2 = \mathbb{E}^s \oplus \mathbb{E}^u$, existem $u \in \mathbb{E}^u$ e $v \in \mathbb{E}^s$ tais que $\tilde{x} - \tilde{y} = u + v$. Vamos provar que os vetores u e v são nulos.

Suponha que $\|u\| \neq 0$, assim, pelo Lema 4.1.4

$$\|A^n(\tilde{x} - \tilde{y})\| = \|A^n(u + v)\| = \|A^n u + A^n v\| \geq \|A^n u\| - \|A^n v\| \geq \lambda^{-n}\|u\| - \lambda^n\|v\|,$$

onde $\lambda \in (0, 1)$. Daí, como $\lambda \in (0, 1)$ e $\|u\| \neq 0$, segue que $\lambda^{-n}\|u\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ e $\lambda^n\|v\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Logo $\|A^n(\tilde{x} - \tilde{y})\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Por hipótese $d_T(f_A^n(x), f_A^n(y)) < \frac{1}{10}, \forall n \in \mathbb{Z}$, particularmente, $d_T(x, y) = \|\tilde{x} - \tilde{y}\| < \frac{1}{10}$. Considerando que,

$$\|A\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{3} < 5,$$

segue então que

$$\|A\tilde{x} - A\tilde{y}\| \leq \|A\| \cdot \|\tilde{x} - \tilde{y}\| < 5 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{2}.$$

Daí, pelo Lema 4.2.4 item *ii*),

$$\|A\tilde{x} - A\tilde{y}\| = d_T(\pi(A(\tilde{x})), \pi(A(\tilde{y}))) = d_T(f_A(\pi(\tilde{x})), f_A(\pi(\tilde{y}))) = d_T(f_A(x), f_A(y)).$$

Novamente, como $d_T(f_A^n(x), f_A^n(y)) < \frac{1}{10}, \forall n \in \mathbb{N}$, particularmente, $d_T(f_A(x), f_A(y)) < \frac{1}{10}$, ou seja, $\|A\tilde{x} - A\tilde{y}\| < \frac{1}{10}$. Assim,

$$\|A^2\tilde{x} - A^2\tilde{y}\| \leq \|A\| \cdot \|A\tilde{x} - A\tilde{y}\| < 5 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{2},$$

e novamente pelo Lema 4.2.4 item *ii*),

$$\|A^2\tilde{x} - A^2\tilde{y}\| = d_T(\pi(A^2(\tilde{x})), \pi(A^2(\tilde{y}))) = d_T(f_A^2(\pi(\tilde{x})), f_A^2(\pi(\tilde{y}))) = d_T(f_A^2(x), f_A^2(y)) < \frac{1}{10}.$$

Seguindo esse processo indutivamente, obtemos que $\forall n \in \mathbb{N} \ \|A^n\tilde{x} - A^n\tilde{y}\| = d_T(f_A^n(x), f_A^n(y)) < \frac{1}{10}$, contradizendo $\|A^n\tilde{x} - A^n\tilde{y}\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Logo, $\|u\| = 0$.

Supondo que $\|v\| \neq 0$, podemos seguir uma construção análoga, chegando a uma contradição. Logo, $\|v\| = 0$. Portanto, $\tilde{x} - \tilde{y} = u + v = \vec{0} + \vec{0} \Rightarrow \tilde{x} = \tilde{y} \Rightarrow x = \pi(\tilde{x}) = \pi(\tilde{y}) = y$ e, conseqüentemente $x = y$, concluindo que f_A é expansiva, e assim pela Observação 1.2.9, f_A tem sensibilidade às condições iniciais.

□

Por fim, como último resultado desse trabalho.

Teorema 4.4.9. A aplicação f_A é caótica

Demonstração: Pelo Teorema 4.4.1, $Per(f_A)$ é denso em $\mathbb{T}^2$, pelo Teorema 4.4.7, f_A é uma aplicação transitiva e pelo Teorema 4.4.8 f_A possui sensibilidade às condições iniciais. Portanto, pela Definição 1.2.10, f_A define um sistema dinâmico caótico em $\mathbb{T}^2$. □

O que vimos nesta seção para $\mathbb{T}^2$, como em (BACKES et al., 2023), pode ser replicado para o espaço $\mathbb{T}^n$ com $n > 2$. De acordo (BACKES et al., 2023), o automorfismo que estudamos neste trabalho, é apenas um exemplo de aplicações mais gerais. É possível definir um automorfismo para dimensões maiores, onde $A_{n \times n}$ é uma matriz com coeficientes inteiros e possui inversa também com coeficientes inteiros. Além disso, se A é uma matriz hiperbólica, ela induz um automorfismo hiperbólico em $\mathbb{T}^n$. Para um estudo mais aprofundado deixamos como referência (HASSELBLATT; KATOK, 1995).

Considerações finais

Vimos ao longo deste trabalho uma breve introdução aos sistemas dinâmicos discretos, com foco em três aplicações clássicas da teoria de sistemas dinâmicos. Buscamos, por meio de exemplos simples, apresentar conceitos e propriedades fundamentais no estudo da dinâmica discreta. Nosso objetivo principal foi analisar a dinâmica das aplicações *shift*, tenda e de um automorfismo hiperbólico no toro, estudadas nos Capítulos 2, 3 e 4. Examinamos o comportamento dinâmico desses sistemas e demonstramos que eles são transitivos, possuem o conjunto de pontos periódicos denso e apresentam sensibilidade às condições iniciais — propriedades que, de acordo com a definição de Devaney em (DEVANEY, 2018), os classificam como sistemas dinâmicos caóticos.

Do ponto de vista pessoal, este trabalho representou uma grande realização. A maneira como a passagem do tempo é tratada na dinâmica discreta ampliou significativamente minha visão sobre resultados em Matemática. Eu já havia trabalhado com classificação de sistemas dinâmicos contínuos, porém a abordagem e as ferramentas utilizadas, são completamente diferentes. Compreender essa outra área no estudo de sistemas dinâmicos contribuiu para aprofundar ainda mais meu interesse na área. Mesmo precisando compreender novos conceitos, foi possível aplicar os resultados e conhecimento adquiridos em disciplinas que considere fundamentais na minha graduação. A elaboração deste trabalho foi, sem dúvida, essencial para minha formação como matemático.

Referências Bibliográficas

ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. **Chaos: An Introduction to Dynamical Systems: Uma abordagem prática**. 2. ed. São Paulo: Editora Acadêmica, 2022.

ARNOLD, V. I.; AVEZ, A. **Ergodic Problems of Classical Mechanics**. New York: Benjamin, 1968.

BACKES, L.; BARAVIERA, A. T.; BRANCO, F. M. **Uma introdução aos sistemas dinâmicos via exemplos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2023.

DEVANEY, R. L. **An Introduction to Chaotic Dynamical Systems**. Boca Raton: CRC Press, 2018.

ELAYDI, S. N. **Discrete Chaos: With applications in science and engineering**. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2008.

HASSELBLATT, B.; KATOK, A. **A First Course in Dynamics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

HIRSCH, M. W.; SMALE, S.; DEVANEY, R. L. **Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos**. San Diego: Academic Press, 2013.

LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. Rio de Janeiro: IMPA, 1993.

LIMA, E. L. **Análise Real: Funções de uma variável**. 10. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. v. 1.

LIMA, E. L. **Elementos de Topologia Geral**. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

MATTOS, P. G. **Dinâmica Simbólica: uma Introdução via Exemplos Hiperbólicos**. Monografia (Relatório de Iniciação Científica) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2016.

NASCIMENTO, J. P. S. **Partições de Markov para Automorfismos Lineares Hiperbólicos do Toro**. Dissertação (Dissertação (Mestrado)) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2020.

RESENDE, M. C. S. **Um estudo sobre sistemas dinâmicos discretos: a dinâmica do shift**. Dissertação (Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação)) — Universidade Federal de São João del-Rei, São João del-Rei, 2024.

STROGATZ, S. H. **Nonlinear Dynamics and Chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering.** Boulder: Westview Press, 2015.