



Universidade Federal
de São João del-Rei

Maria Luiza de Lima Costa

O Teorema de Hahn-Banach

São João del-Rei - MG

Fevereiro de 2025



Universidade Federal
de São João del-Rei

Maria Luiza de Lima Costa

O Teorema de Hahn-Banach

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática, da Universidade Federal de São João del-Rei, como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Orientadora: Prof^ª. Dra. Rafaela Neves Bonfim

São João del-Rei, 4 de fevereiro de 2025.

Banca Examinadora

Documento assinado digitalmente
gov.br RAFAELA NEVES BONFIM
Data: 28/02/2025 15:54:22-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Orientadora: Prof^ª. Dra. Rafaela Neves Bonfim

Documento assinado digitalmente
gov.br GHEYZA FERREIRA DA SILVA
Data: 28/02/2025 17:58:11-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof^ª. Dra. Gheyza Ferreira da Silva

Documento assinado digitalmente
gov.br CARLOS ALBERTO DA SILVA JUNIOR
Data: 28/02/2025 16:03:06-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Me. Carlos Alberto da Silva Junior

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha sincera gratidão a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho. Primeiramente, agradeço à minha orientadora, Dra. Rafaela Neves Bonfim, pela paciência, orientação e pelos valiosos conselhos ao longo de todo o desenvolvimento deste estudo. Suas orientações foram essenciais para o crescimento acadêmico e pessoal que obtive durante o curso.

Agradeço também aos meus familiares, especialmente Maria de Perpétuo Socorro de Lima Costa, Haroldo Guilherme Anício Costa e José Victor de Lima Costa, pelo apoio incondicional, compreensão e incentivo, que me deram forças para superar os momentos de dificuldade e alcançar este objetivo.

Não poderia deixar de agradecer aos meus amigos, que estiveram ao meu lado durante toda a jornada, seja com palavras de apoio ou com momentos de descontração que tornaram a caminhada mais leve e prazerosa.

Aos professores e colegas de curso, agradeço pela troca de experiências e pelo aprendizado compartilhado. Cada um de vocês contribuiu para a minha formação de maneira única e significativa.

Por fim, agradeço a todos que, direta ou indiretamente, participaram deste processo, tornando este trabalho possível. Sem o apoio de todos, não teria sido possível concluir esta etapa tão importante da minha vida acadêmica.

"Hope is a dangerous thing for a woman like me to have, but i have"

— LANA DEL REY

RESUMO

Este trabalho tem como objetivos centrais estudar algumas versões do Teorema de Hahn-Banach, bem como estudar algumas aplicações desse Teorema em espaços separáveis. Na primeira parte do texto estudaremos os pré-requisitos necessários para compreender as várias versões do Teorema de Hahn Banach, tais como: definição de espaços métricos; sequências de Cauchy; espaço métrico completo; espaços normados; espaço de Banach; operador linear e contínuo; espaço dual; Lema de Zorn. Em seguida estudaremos o Teorema de Hahn-Banach e sua demonstração. Iremos considerar três versões deste teorema: a forma analítica, o Teorema de Hahn-Banach em espaços normados e em espaços de dimensão finita. Finalizamos o trabalho estudando resultados importantes em espaços separáveis, que são consequências do Teorema de Hahn-Banach.

Palavras-chave: Teorema de Hahn-Banach, espaços de Banach, espaço normado, espaços separáveis.

SUMÁRIO

Agradecimentos	3
Introdução	7
1 Preliminares	8
1.1 Espaços Métricos	8
1.2 Noções Topológicas	12
1.3 Espaços de Banach	17
1.4 Operador Linear Contínuo	22
2 Teorema de Hahn-Banach	28
2.1 Caso real do Teorema de Hahn-Banach	28
2.2 O Teorema de Hahn-Banach e suas consequências	32
3 Aplicações do Teorema de Hahn-Banach em espaços separáveis	39
3.1 Espaços Separáveis	39
3.2 Aplicações em Espaços Separáveis	42
Conclusão	47
Referências Bibliográficas	48

INTRODUÇÃO

Dentro da Análise Funcional existem teoremas clássicos bastante importantes, dentre eles, destacamos o Teorema de Hahn-Banach. O nome deste teorema é em homenagem aos matemáticos Hans Hahn (austriaco) e Stefan Banach (polonês), que mesmo sem terem feito algum estudo juntos, seus conhecimentos avançados para a época fizeram com que seus estudos na área da matemática aplicada fossem reconhecidos dentro de um mesmo teorema. O primeiro resultado para o caso real foi obtido, em 1927, por Hahn, e de forma mais geral por Banach em 1929.

O Teorema de Hahn-Banach é fundamental na análise funcional devido à sua versatilidade e aplicação em diversas áreas da matemática, especialmente na teoria dos espaços vetoriais normados. Esse teorema estabelece uma poderosa ferramenta para estender funcionais lineares e contínuos definidos em subespaços de um espaço normado para todo o espaço, sem perder a sua continuidade e mantendo as propriedades desejadas.

Para cumprir o objetivo do estudo proposto para o Trabalho de Conclusão de Curso, no Capítulo 1, estudaremos alguns resultados e conceitos básicos dentro da teoria de Espaços Métricos e da Análise Funcional. Tais conceitos são pré-requisitos necessários para estudar o resultado principal.

Iniciamos o Capítulo 2 com algumas definições necessárias dentro da Teoria de Conjuntos para então compreendermos o Lema de Zorn. Em seguida, estudaremos quatro versões do Teorema de Hahn-Banach: o Teorema de Hahn-Banach em sua forma analítica para o caso em que o espaço vetorial é real e o caso em que este é complexo, o Teorema de Hahn-Banach em espaços vetoriais normados e em espaços de dimensão finita. Para demonstrar o caso analítico real, usamos o famoso Lema de Zorn e a prova da versão deste Teorema em espaços normados segue diretamente do caso analítico.

Finalizamos no Capítulo 3, onde veremos importantes resultados dentro da teoria de espaços separáveis, que são demonstrados com o auxílio do Teorema de Hahn-Banach. Tais espaços são fundamentais na topologia porque permitem que conceitos intuitivos de separação entre pontos e subconjuntos sejam aplicados de maneira formal. Além disso, os espaços separáveis são úteis na construção de teorias mais complexas, como as que envolvem espaços métricos, além de serem recorrentes em várias áreas da matemática, como análise funcional e teoria da medida.

Preliminares

Neste capítulo apresentamos todos os conceitos e definições que são pré-requisitos fundamentais para compreendermos a prova do Teorema de Hahn-Banach. Dentre eles, veremos um pouco sobre Espaços Métricos, algumas noções topológicas, Espaços de Banach e Operadores Lineares Contínuos. Ao longo de todo o trabalho, iremos utilizar a notação $\mathbb{K}$ para denotar o conjunto dos números reais ou dos números complexos.

1.1 Espaços Métricos

No início desta seção iremos introduzir um pouco sobre os Espaços Métricos. Vamos apresentar uma série de definições e vamos estudar alguns resultados que nos serão necessários nos próximos capítulos.

Definição 1.1.1. Uma *métrica* num conjunto M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a *distância* de x a y , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:

1. $d(x, x) = 0$;
2. Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;
3. $d(x, y) = d(y, x)$;
4. (*Desigualdade triangular*) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definição 1.1.2. Seja M um conjunto não vazio e d uma métrica em M . Um *espaço métrico* é o par (M, d) , onde a distância entre quaisquer de seus elementos é definida.

Vejamos abaixo alguns exemplos de espaços métricos.

Exemplo 1.1.1. *Seja M um espaço métrico, defina $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ por $d(x, x) = 0$ e $d(x, y) = 1$, se $x \neq y$. A função d define uma métrica que chamamos de **métrica "zero-um"**.*

Exemplo 1.1.2. *Se (M, d) é um espaço métrico, todo subconjunto $S \subset M$ pode ser considerado como um espaço métrico. Basta tomar a restrição de d a $S \times S$, ou seja, usar entre os elementos de S a mesma distância que eles possuíam como elementos de M . Neste caso, dizemos que a métrica de S é **induzida** pela métrica M .*

Exemplo 1.1.3. *A reta, ou seja, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é o exemplo mais importante de espaço métrico. A distância entre dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) = |x - y|$ é de fato, uma métrica em $\mathbb{R}$. Note que $d(x, x) = |x - x| = 0$. Além do mais, se $x \neq y$, então $d(x, y) = |x - y| > 0$. temos também que*

$$d(x, y) = |x - y| = |(-1)y - x| = |-1||y - x| = |y - x| = d(y, x),$$

*e por último vale que $d(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z|$, ou seja, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Esta é a chamada **métrica usual** da reta.*

O exemplo a seguir generaliza o exemplo anterior.

Exemplo 1.1.4. *(Espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$) Considere os pontos de $\mathbb{R}^n$, ou seja, as n -uplas $x = (x_1, \dots, x_n)$ em que cada uma das n coordenadas $x_i \in \mathbb{R}$. Existem três maneiras de definir a distância entre dois pontos em $\mathbb{R}^n$. Dados $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, temos:*

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}};$$

$$d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|;$$

$$d''(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

As funções $d, d', d'' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ cumprem todas as quatro condições para ser métrica. A métrica d é chamada de **métrica euclidiana** ou **métrica usual**. Ela é usada para medir a distância entre dois pontos em um espaço Euclidiano. Por outro lado, as métricas d' e d''

são mais simples e de fácil manipulação, assim, vale a pena considerá-las. Além disso, as métricas d' e d'' se relacionam com d , conforme mostra a proposição abaixo.

Proposição 1.1.1. *Sejam d, d', d'' as métricas definidas no exemplo 1.1.4. Quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, temos:*

$$d''(x, y) \leq d(x, y) \leq d'(x, y) \leq nd''(x, y).$$

Demonstração: Primeiro iremos provar que $d''(x, y) \leq d(x, y)$. Note que,

$$d(x, y)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2.$$

Pela definição de $d''(x, y)$, existe $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $d''(x, y) = |x_{i_0} - y_{i_0}|$. Assim,

$$d''(x, y)^2 = |x_{i_0} - y_{i_0}|^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 = d(x, y)^2$$

e logo,

$$|d''(x, y)| \leq |d(x, y)|.$$

Como estamos tratando de distâncias, que são números não negativos, temos então que

$$d''(x, y) \leq d(x, y).$$

Agora provaremos que $d(x, y) \leq d'(x, y)$. Observe que,

$$d'(x, y)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |x_i - y_i| \cdot |x_j - y_j|.$$

Como $d(x, y)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2$ temos então que $d(x, y)^2 \leq [d'(x, y)]^2$. Logo,

$$d(x, y) \leq d'(x, y).$$

Por fim, mostraremos que $d'(x, y) \leq nd''(x, y)$. Como $d''(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$, temos que

$|x_i - y_i| \leq d''(x, y)$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Logo,

$$d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| \leq d''(x, y) + \dots + d''(x, y) = n \cdot d''(x, y).$$

Portanto, $d'(x, y) \leq n d''(x, y)$. $\square$

Em espaços métricos, o conceito de norma, que veremos a seguir, é utilizado em contextos onde a ideia de distância é relevante, e permite medir o tamanho de elementos dentro do espaço em questão. Vejamos a definição formal de norma.

Definição 1.1.3. Seja E um espaço vetorial real. Uma *norma* em E é uma função real $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$, que associa cada vetor $x \in E$ o número real $\|x\|$, chamado de norma de x , de modo a serem cumpridas as condições abaixo para quaisquer $x, y \in E$ e λ escalar:

1. $\|x\| \geq 0$;
2. Se $x \neq 0$, então $\|x\| \neq 0$;
3. $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Definição 1.1.4. Seja E um espaço vetorial real. Um *espaço vetorial normado* é um par $(E, \|\cdot\|)$ onde $\|\cdot\|$ é uma norma em E .

Vejamos alguns exemplos de espaços normados.

Exemplo 1.1.5. Considere os conjuntos dos $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$, como espaços vetoriais, com a norma

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Nessas condições, temos que $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ são espaços normados. Chamamos esses espaços, respectivamente, de **espaço real euclidiano** e **espaço complexo euclidiano**.

Exemplo 1.1.6. Denotamos por c_0 o conjunto de todas as sequências de escalares convergentes para zero, ou seja,

$$c_0 = \{(a_k)_{k=1}^{\infty} : a_k \in \mathbb{K}, k \in \mathbb{N} \text{ e } \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0\}.$$

É possível mostrar que c_0 é um espaço vetorial com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar de sequências. Além disso, c_0 é um espaço vetorial normado com a seguinte norma:

$$\|(a_k)_{k=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup \{|a_k| : k \in \mathbb{N}\}.$$

De fato, vejamos que $\|\cdot\|_{\infty}$ satisfaz as condições para ser norma:

- $\|(a_k)_{k=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup \{|a_k| : k \in \mathbb{N}\} \geq 0$ e $\|(a_k)_{k=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup \{|a_k| : k \in \mathbb{N}\} = 0$ se, e somente se, $|a_k| = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto $a_k = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$;
- $\|\lambda(a_k)_{k=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup \{|\lambda a_k| : k \in \mathbb{N}\} = \sup \{|\lambda| |a_k| : k \in \mathbb{N}\} = |\lambda| \sup \{|a_k| : k \in \mathbb{N}\} = |\lambda| \|(a_k)_{k=1}^{\infty}\|_{\infty}$;
- $\|(a_k + b_k)_{k=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup \{|a_k + b_k| : k \in \mathbb{N}\} \leq \sup \{|a_k| : k \in \mathbb{N}\} + \sup \{|b_k| : k \in \mathbb{N}\} = \|(a_k)_{k=1}^{\infty}\|_{\infty} + \|(b_k)_{k=1}^{\infty}\|_{\infty}$.

Todo espaço vetorial normado $(E, \|\cdot\|)$ torna-se um espaço métrico por meio da definição $d(x, y) = \|x - y\|$. Chamamos essa métrica d de **métrica induzida pela norma** $\|\cdot\|$.

1.2 Noções Topológicas

Nessa seção trataremos sobre as definições de bola aberta, bola fechada e esfera. Tais conceitos são fundamentais no estudo de espaços métricos. Em seguida, apresentaremos uma breve noção sobre conjuntos abertos e fechados.

Definição 1.2.1. Seja a um ponto no espaço métrico M . Dado um número real $r > 0$, definimos:

- *Bola aberta* de centro a e raio r é o conjunto $B(a; r)$ dos pontos de M cuja a distância de um ponto $x \in M$ a a é menor que r . Ou seja,

$$B(a; r) = \{x \in M; d(x, a) < r\}.$$

- *Bola fechada* de centro a e raio r é o conjunto $B[a; r]$ dos pontos de M cuja a distância de um ponto $x \in M$ a a é menor ou igual a r . Ou seja,

$$B[a; r] = \{x \in M; d(x, a) \leq r\}.$$

- *Esfera* de centro a e raio r é o conjunto $S(a; r)$ dos pontos de M cuja a distância de um ponto $x \in M$ a a é igual a r . Ou seja,

$$S(a; r) = \{x \in M; d(x, a) = r\}.$$

Definição 1.2.2. O *diâmetro* de um conjunto limitado X é o menor número $k > 0$ que satisfaz, para quaisquer $x, y \in X$, $d(x, y) \leq k$.

Exemplo 1.2.1. Se M está munido da métrica zero-um então, para todo $a \in M$, temos $B(a; r) = B[a; r] = M$, se $r > 1$ e $B(a; r) = B[a; r] = \{a\}$, se $r < 1$. Por outro lado, $B(a; 1) = \{a\}$ e $B[a; 1] = M$. Consequentemente, $S(a; r) = \emptyset$ se $r \neq 1$, enquanto $S(a; 1) = M - \{a\}$.

Agora, usando o conceito de bola aberta, vamos definir o interior de um espaço métrico. Tal conceito é a base da definição de conjunto aberto.

Definição 1.2.3. Seja X um subconjunto de um espaço métrico M . Dizemos que $a \in X$ é um *ponto interior* a X quando existe $r > 0$ tal que $d(x, a) < r$. O conjunto $\text{int}X$, formado por todos os pontos interiores a X , é chamado de *interior* de X em M .

Note que, em outras palavras, a definição acima nos diz que $a \in X$ é um ponto interior a X se a é centro de uma bola aberta contida em X .

Com essas definições em mente podemos agora definir o que é um conjunto *aberto*.

Definição 1.2.4. Seja M um espaço métrico. Um conjunto $X \subset M$ chama-se *aberto* quando $X = \text{int}X$, isto é, se todos os pontos de X são interiores a X .

Agora vejamos alguns exemplos de conjunto aberto.

Exemplo 1.2.2. Em qualquer espaço métrico M , uma bola aberta $B(a; r)$ é um conjunto aberto. De fato, dado $x \in B(a; r)$ tome $s = r - d(x, a) > 0$. Assim, se $y \in B(x; s)$, então

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < s + d(x, a) = r,$$

ou seja, $y \in B(a; r)$. Concluimos então que x é ponto interior de $B(a; r)$. Logo, $B(a; r)$ é um conjunto aberto.

Exemplo 1.2.3. Em todo espaço métrico M , o complementar de uma bola fechada $B[a; r]$ é um conjunto aberto. De fato, para todo $x \in M - B[a; r]$, temos $d(x, a) > r$. Tome $s = d(x, a) - r > 0$. Queremos mostrar que $B(x; s) \subset M - B[a; r]$. Seja $y \in B(x; s)$, então $d(x, y) < s$. Note que,

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) < s + d(y, a),$$

ou seja, $d(x, a) - s < d(y, a)$. Assim, $d(x, a) - (d(x, a) - r) < d(y, a)$ e daí segue que $d(y, a) > r$. Portanto, $B(x; s) \subset M - B[a; r]$ e, conseqüentemente, $M - B[a; r]$ é aberto.

Antes de prosseguir, vejamos o que é uma vizinhança de um ponto.

Definição 1.2.5. Em um espaço métrico, diz-se que o conjunto V é uma *vizinhança* do ponto a quando $a \in \text{int } V$.

A seguir, veremos o conceito de fronteira de um conjunto, que está relacionado a pontos que "limitem" esse conjunto em relação ao espaço como um todo. Em outras palavras, a fronteira de um conjunto A em um espaço métrico é o conjunto de pontos que podem ser aproximados tanto por pontos dentro de A quanto por pontos fora de A .

Definição 1.2.6. Seja X um subconjunto de um espaço métrico M . A *fronteira* de X em M é o conjunto ∂X , formado pelos pontos $b \in M$ tais que toda bola aberta de centro b contém pelo menos um ponto de X e um ponto do complementar $M - X$.

O objetivo agora é definir conjunto fechado. Mesmo sem conhecer essa definição é intuitivo afirmar que uma bola fechada é um conjunto fechado. Note que, no exemplo 1.2.3, o

complementar de uma bola fechada é um conjunto aberto. Será que isto vale sempre, ou seja, será que um conjunto é fechado quando o seu complementar é aberto? Veremos que sim.

Definição 1.2.7. Seja M um espaço métrico. Um conjunto $X \subset M$ diz-se *fechado* no espaço quando o seu complementar $M - X$ for aberto.

Observação: Cuidado! O contrário de fechado não é aberto. Pode ocorrer de um conjunto não ser fechado e também não ser aberto, como por exemplo, o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$.

Uma outra forma equivalente de definir um conjunto fechado é usando o conceito de fecho de um conjunto. Para definir o fecho precisamos primeiro saber o que é um ponto aderente.

Definição 1.2.8. Sejam X um subconjunto de um espaço métrico M e d a distância do ponto ao conjunto. Um ponto a se diz *aderente* a X quando $d(a; X) = 0$. Isto significa que existem pontos de X arbitrariamente próximos de a , ou seja, para cada $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $x \in X$ tal que $d(a, x) < \varepsilon$.

Outras maneiras equivalentes de dizer que a é aderente a X são:

1. Para todo $\varepsilon > 0$, temos $B(a; \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$;
2. Para todo aberto A contendo a , temos $A \cap X \neq \emptyset$;
3. Toda vizinhança de a tem pontos em comum com X .

Exemplo 1.2.4. *Todo ponto $a \in X$ é aderente a X . Além disso, os pontos da fronteira ∂X também são aderentes a X . Por exemplo, se $X = [0, 1)$ na reta $\mathbb{R}$, então 1 é aderente a X .*

A seguir, iremos introduzir a definição de fecho, que está intimamente relacionado à ideia de limites e pontos de aderência. Esse conceito é crucial tanto em análise real quanto em outras áreas da matemática, pois ele permite estudar o comportamento dos conjuntos em relação a limites e continuidade.

Definição 1.2.9. O *fecho* (ou *aderência*) de um conjunto X num espaço métrico M é o conjunto $\overline{X}$ dos pontos de M que são aderentes a X .

Exemplo 1.2.5. *Seja X um subconjunto de um espaço métrico M . Então $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{M} = M$ e $X \subset \overline{X}$ para todo $X \subset M$. Vale também que se $X \subset Y$, então $\overline{X} \subset \overline{Y}$. De fato, note que, se $a \in \overline{X}$, então para todo $\varepsilon > 0$, temos $B(a; \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. Como $X \subset Y$, então $B(a; \varepsilon) \cap Y \neq \emptyset$, para todo $\varepsilon > 0$. Ou seja, $a \in \overline{Y}$ e portanto, $\overline{X} \subset \overline{Y}$.*

Se X é um subconjunto de um espaço métrico M , vimos pelo exemplo 1.2.5 que X está contido em $\overline{X}$. Será que a inclusão contrária também é válida, ou seja, $\overline{X}$ está contido em X ? O próximo resultado nos mostra quando essa inclusão é válida.

Proposição 1.2.1. *Sejam M um espaço métrico e $F \subset M$. temos $\overline{F} = F$ se, e somente se, seu complementar $M - F$ é aberto.*

Demonstração: Seja $F \subset M$ tal que $F = \overline{F}$. Vamos mostrar que $M - F$ é aberto. Dado $x \in M - F$, temos que $x \notin F = \overline{F}$, ou seja, x não é aderente a F . Assim, existe $r > 0$ tal que $B(x; r) \cap F = \emptyset$. Daí, concluímos que $B(x; r) \subset M - F$ e logo $x \in \text{int}(M - F)$. Portanto, $M - F = \text{int}(M - F)$, isto é, $M - F$ é aberto.

Suponha agora que $M - F$ é aberto. Note que,

$$\text{se } x \in M - F, \text{ então } x \notin \overline{F}. \quad (1.2.1)$$

De fato, dado $x \in M - F$, existe $r > 0$ tal que $B(x; r) \subset M - F$, ou seja, $B(x; r) \cap F = \emptyset$. Isso significa que x não é aderente a F , provando que $x \notin \overline{F}$. Assim, pela contrapositiva da afirmação (1.2.1), conclui-se que se $y \in \overline{F}$, então $y \in F$. Logo $F = \overline{F}$, como queríamos demonstrar. $\square$

Usando a proposição acima e a definição 1.2.5 temos a seguinte definição equivalente para conjunto fechado.

Definição 1.2.10. *Seja M um espaço métrico. Um conjunto $X \subset M$ é *fechado* quando coincide com o seu fecho, ou seja, quando $X = \overline{X}$.*

Antes de ir para o próximo capítulo, vejamos alguns exemplos de conjuntos fechados.

Exemplo 1.2.6. *Como $\overline{\emptyset} = \emptyset$ e $\overline{M} = M$, onde M é um espaço métrico, concluímos que o vazio e o espaço todo é um conjunto fechado.*

Exemplo 1.2.7. Num espaço métrico M , toda bola fechada de centro a e raio r , $B[a; r]$, é um subconjunto fechado de M , pois seu complementar é aberto.

A seguir, apresentamos uma definição que será bastante utilizada no capítulo 3.

Definição 1.2.11. Seja M um espaço métrico e $E \subset M$. Dizemos que E é *denso* em M , se $\overline{E} = M$.

1.3 Espaços de Banach

Nessa seção, iremos estudar sobre os espaços de Banach, conceito bem importante dentro da Análise Funcional. Tais espaços é uma generalização dos espaços euclidianos finitos, que são familiares no estudo de Geometria e Álgebra Linear. Em espaços de Banach, estamos lidando com espaços vetoriais de dimensão potencialmente infinita, mas que possuem uma norma que induz uma métrica. Isso permite estudar comportamentos geométricos e topológicos em contextos mais gerais. Para entendermos o que é um Espaço de Banach, precisamos de duas definições: sequência de Cauchy e espaço métrico completo.

Definição 1.3.1. Uma sequência (x_n) num espaço métrico M é chamada de *sequência de Cauchy* quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

A definição acima nos diz que, uma sequência é de Cauchy quando, a partir de um certo índice, os termos dessa sequência ficam próximos uns dos outros. Pode-se mostrar que toda sequência convergente é de Cauchy e que toda sequência de Cauchy é limitada, como veremos nas proposições a seguir.

Proposição 1.3.1. *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração Seja (x_n) uma sequência convergente no espaço métrico M e suponha que $\lim x_n = a$. Então dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ temos $d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Assim, para $m, n > n_0$, temos

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, a) + d(x_n, a) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, (x_n) é de Cauchy. $\square$

Antes de enunciarmos o próximo resultado, relembre que o diâmetro de um conjunto E é dado por

$$\text{diam}(E) = \sup\{d(x, y); x \in E \text{ e } y \in E\}.$$

Proposição 1.3.2. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração Seja (x_n) uma sequência de Cauchy no espaço métrico M . Dado $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m, n > n_0$ temos $d(x_n, x_m) \leq 1$. Logo o conjunto $\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}$ é limitado e tem diâmetro menor ou igual a 1. Segue então que

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} = \{x_1, \dots, x_{n_0}\} \cup \{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}$$

é limitado. $\square$

Não se engane! Nem toda sequência de Cauchy é convergente e nem toda sequência limitada é de Cauchy, como veremos nos exemplos a seguir.

Exemplo 1.3.1. *Tome uma sequência $(x_n) \in \mathbb{Q}$ convergindo para um número irracional, como por exemplo $x_1 = 1$, $x_2 = 1,4$, $x_3 = 1,41$, com $\lim x_n = \sqrt{2}$. Temos que (x_n) é convergente em $\mathbb{R}$, logo segue da proposição (1.3.1) que é de Cauchy em $\mathbb{Q}$, mas note que (x_n) não é convergente em $\mathbb{Q}$ pois $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.*

Exemplo 1.3.2. *Considere a sequência $(1, 0, 1, 0, \dots)$ na reta. Veja que essa sequência é limitada, mas para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $d(x_n, x_{n+1}) = 1$. Logo não é de Cauchy.*

O próximo resultado nos conta que em sequências de Cauchy, a convergência de uma subsequência implica na convergência da sequência toda.

Proposição 1.3.3. *Uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente é convergente.*

Demonstração Sejam (x_n) uma sequência de Cauchy no espaço métrico M e (x_{n_k}) uma subsequência que converge para o ponto $a \in M$. Queremos mostrar que $\lim x_n = a$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_k > n_1$ implica em $d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Existe também $n_2 \in \mathbb{N}$

tal que se $m, n > n_2$ então $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tome $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Logo, para todo $n > n_0$ temos

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_n) + d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, $\lim x_n = a$. $\square$

Estamos quase prontos para definir espaços de Banach. Para isso, precisamos ainda da definição de espaço métrico completo.

Definição 1.3.2. Um espaço métrico M é *completo* se, e somente se, toda sequência de Cauchy em M é convergente.

Vejamos alguns exemplos de espaços métricos completos.

Exemplo 1.3.3. *Todo espaço M com a métrica zero-um é completo, pois qualquer sequência de Cauchy em M é constante a partir de um certo índice, e portanto convergente em M .*

Exemplo 1.3.4. *O espaço $\mathbb{Q}$ dos números racionais não é completo. Vimos no exemplo 1.3.1 que existe uma sequência de Cauchy $(x_n) \in \mathbb{Q}$ que não converge em $\mathbb{Q}$.*

Exemplo 1.3.5. *A reta é um espaço métrico completo. De fato, seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Tomando, para cada $n \in \mathbb{N}$, os conjuntos $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$, temos que $X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \supset \dots$ e além disso são limitados pois (x_n) é de Cauchy. Seja $a_n = \inf X_n$. Então $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b = \sup X_1$. temos que toda sequência monótona de números reais é convergente, assim existe o número $a = \lim a_n$. Provemos que $a = \lim x_n$. Para isso, de acordo com a proposição (1.3.3), basta mostrar que a é limite de uma subsequência de (x_n) . Como $a = \lim x_n$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m > n_0$ então $|a_m - a| < \varepsilon$, em outras palavras, $a - \varepsilon < a_m < a + \varepsilon$, sempre que $m > n_0$. Como $a_m = \inf X_m$, segue da definição de ínfimo que, para cada m , existe $k_m \geq m$ tal que $a_m < x_{k_m} < a + \varepsilon$, ou seja, $|x_{k_m} - a| < \varepsilon$. Isso prova que a subsequência (x_{k_m}) converge para a . Logo, (x_n) converge em $\mathbb{R}$ e portanto $\mathbb{R}$ é completo.*

Agora estamos aptos para introduzir os espaços de Banach. Esses espaços são um dos conceitos fundamentais na Análise Funcional, desempenhando um papel central em várias áreas da matemática, incluindo análise, álgebra, teoria das aproximações, equações diferenciais e teoria da probabilidade. Eles são uma generalização dos espaços vetoriais normados

que possuem a propriedade adicional de serem completos em relação à norma, o que significa que qualquer sequência de Cauchy converge para um ponto dentro do próprio espaço.

Definição 1.3.3. Um espaço vetorial M é chamado de *espaço de Banach* quando M é um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma.

Exemplo 1.3.6. Seja $p \in \mathbb{R}$ tal que $p \geq 1$. Definimos

$$\ell_p = \{(a_j)_{j=1}^\infty : a_j \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}), \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{j=1}^\infty |a_j|^p < \infty\}.$$

O conjunto ℓ_p é chamado de **espaço das sequências p -somáveis**. Em ℓ_p definimos a seguinte norma:

$$\| (a_j)_{j=1}^\infty \| = \left(\sum_{j=1}^\infty |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Vejamos que ℓ_p é um espaço de Banach. De fato, seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em ℓ_p . Note que aqui, cada x_n é uma sequência $x_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots) \in \ell_p$. Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, para todo $\varepsilon > 0$, existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\|x_n - x_m\|_p = \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \text{ sempre que } n, m > n_0. \quad (1.3.1)$$

Isso mostra que, para cada $i \in \mathbb{N}$, a sequência $(x_i^{(n)})_{n=1}^\infty$ é de Cauchy em $\mathbb{K}$, e portanto converge.

Defina $a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} x_i^{(n)}$ e seja $x = (a_i)_{i=1}^\infty$. Vamos mostrar que $x \in \ell_p$ e que $\lim x_n = x$. Segue de (1.3.1) que

$$\left(\sum_{i=1}^k |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \text{ para todo } m, n \geq n_0 \text{ e } k \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$, temos

$$\left(\sum_{i=1}^k |x_i^{(n)} - a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon,$$

para todo $n \geq n_0$ e $k \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Assim, $x_n - x \in \ell_p$ e $\|x_n - x\|_p < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$. Daí, $x = (x - x_n) + x_n \in \ell_p$ e $\|x_n - x\|_p \rightarrow 0$. Portanto, ℓ_p é espaço de Banach.

Exemplo 1.3.7. Para $p = \infty$, definimos ℓ_∞ como os **espaços das sequências de escalares que são limitadas**, ou seja,

$$\ell_\infty = \{(a_j)_{j=1}^\infty : a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sup |a_j| < \infty\}.$$

Em ℓ_∞ , definimos a norma $\|(a_j)_{j=1}^\infty\|_\infty = \sup\{|a_j| : j \in \mathbb{N}\}$. Vejamos que ℓ_∞ é espaço de Banach. Seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em ℓ_∞ . Defina $(x_n) = (a_j^{(n)})_{j=1}^\infty$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x_m\|_\infty = \|(a_j^{(n)})_{j=1}^\infty - (a_j^{(m)})_{j=1}^\infty\|_\infty = \sup \{|a_j^{(n)} - a_j^{(m)}| : j \in \mathbb{N}\} < \varepsilon,$$

para todo $m, n \geq n_0$. Observe que $|a_j^{(n)} - a_j^{(m)}| \leq \sup \{|a_j^{(n)} - a_j^{(m)}| : j \in \mathbb{N}\} < \varepsilon$, para todo $m, n \geq n_0$. Daí, $(a_j^{(n)})_{n=1}^\infty$ é sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$. Como $\mathbb{K}$ é completo, segue que $(a_j^{(n)})_{n=1}^\infty$ converge em $\mathbb{K}$. Digamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_j^{(n)} = a_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$, e seja $x = (a_j)_{j=1}^\infty$. Provemos que $x \in \ell_\infty$ e que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Sabemos que

$$\sup \{|a_j^{(n)} - a_j^{(m)}| : j \in \mathbb{N}\} < \varepsilon, \text{ para todo } m, n \geq n_0.$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$, temos

$$\sup \{|a_j^{(n)} - a_j| : j \in \mathbb{N}\} < \varepsilon, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Logo, $x_n - x = (a_j^{(n)} - a_j) \in \ell_\infty$ e $\|x_n - x\|_\infty \leq \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$. Segue que $x = (a_j) = (a_j^{(n)}) - (a_j^{(n)} - a_j) \in \ell_\infty$. Assim, $x = (a_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty$ e $\|x_n - x\|_\infty \rightarrow 0$. Daí, concluímos que ℓ_∞ é espaço de Banach.

1.4 Operador Linear Contínuo

Nesta seção veremos sobre os operadores lineares contínuos, que são fundamentais para o estudo da Análise Funcional.

Definição 1.4.1. Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$. Uma função T é um *operador linear contínuo* se é linear, ou seja, para todo $x, y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ satisfaz:

1. $T(x + y) = T(x) + T(y)$;
2. $T(\alpha x) = \alpha T(x)$,

e é contínuo, isto é, para todo $x_o \in E$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x) - T(x_o)\| < \varepsilon$ sempre que $x \in E$ e $\|x - x_o\| < \delta$.

Denotaremos o conjunto de todos os operadores lineares contínuos de E em F por $\mathcal{L}(E, F)$. Quando $F = \mathbb{K}$, o espaço $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ é chamado de *dual topológico* de E ou apenas *dual* de E , e seus elementos são *funcionais lineares contínuos*. Nesse caso, podemos escrever E' .

A seguir, veremos a definição de um operador linear uniformemente contínuo, que ao contrário da simples continuidade, que é um fenômeno local, a continuidade uniforme relaciona com o comportamento da aplicação em todo o espaço simultaneamente.

Definição 1.4.2. Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que o operador linear T é *uniformemente contínuo* se, sejam quais forem $x, y \in E$ e para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x) - T(y)\| < \varepsilon$ e $\|x - y\| < \delta$.

O teorema a seguir nos fornece maneiras equivalentes para demonstrar quando um operador linear é contínuo.

Teorema 1.4.1. Sejam E, F espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $T : E \rightarrow F$ linear. As seguintes condições são equivalentes:

1. T é Lipschitziano, ou seja, existe um número real $c > 0$ tal que para todo $x, y \in E$,
 $d(T(x), T(y)) \leq c \cdot d(x, y)$;
2. T é uniformemente contínuo;

3. T é contínuo;
4. T é contínuo em algum ponto de E ;
5. T é contínuo na origem;
6. $\sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} < \infty$;
7. Existe uma constante $C \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$.

Demonstração: As implicações $(2 \Rightarrow 3)$ e $(3 \Rightarrow 4)$ são imediatas! Provemos então as demais implicações.

$(1 \Rightarrow 2)$ Seja T lipschitziano. Então existe $c > 0$ tal que, para todo $x, y \in E$, temos

$$\|T(x) - T(y)\| \leq c\|x - y\|.$$

Dado um $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \frac{\varepsilon}{c} > 0$. Daí, se $\|x - y\| < \delta$ temos

$$\|T(x) - T(y)\| \leq c\|x - y\| \leq c\delta = \varepsilon.$$

Portanto, T é uniformemente contínuo.

$(4 \Rightarrow 5)$ Suponha T contínuo no ponto $x_0 \in E$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon, \text{ sempre que } \|x - x_0\| < \delta. \quad (1.4.1)$$

Tome $x \in E$ de forma que $\|x - 0\| = \|x\| < \delta$. Então

$$\|(x + x_0) - x_0\| = \|x - x_0 + x_0\| = \|x\| < \delta.$$

Daí, se $\|x\| < \delta$ temos que $\|(x + x_0) - x_0\| < \delta$ e, pela desigualdade (1.4.1), temos:

$$\begin{aligned} \|T(x) - T(0)\| &= \|T(x) - 0\| = \|T(x)\| \\ &= \|T(x) + T(x_0) - T(x_0)\| \\ &= \|T(x + x_0) - T(x_0)\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, T é contínuo na origem.

(5 $\Rightarrow$ 6) Como T é contínuo na origem, tomando $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x)\| < 1$, sempre que $\|x\| < \delta$. Considere $x \in E$ com $\|x\| \leq 1$. Assim:

$$\left\| \frac{\delta x}{2} \right\| = \frac{\delta}{2} \|x\| \leq \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Além disso, note que

$$\left\| T \left(\frac{\delta x}{2} \right) \right\| = \left\| \frac{\delta}{2} T(x) \right\| = \frac{\delta}{2} \|T(x)\|.$$

Daí, como $\left\| \frac{\delta x}{2} \right\| < \delta$, temos

$$\left\| \frac{\delta}{2} T(x) \right\| < 1, \text{ ou seja, } \frac{\delta}{2} \|T(x)\| < 1.$$

Dessa última desigualdade, segue que $\|T(x)\| < \frac{2}{\delta}$, para todo $x \in E$ com $\|x\| \leq 1$. Provamos então que $\frac{2}{\delta}$ é uma cota superior do conjunto $\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$.

Assim, pela definição de supremo, segue que $\sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \leq \frac{2}{\delta} < \infty$ como queríamos provar.

(6 $\Rightarrow$ 7) Para todo $x \in E$, $x \neq 0$, temos que $\frac{x}{\|x\|} \leq 1$, logo

$$\left\| T \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq \sup\{\|T(y)\| : y \in E \text{ e } \|y\| \leq 1\},$$

ou seja,

$$\|T(x)\| \leq \sup\{\|T(y)\| : y \in E \text{ e } \|y\| \leq 1\} \|x\|.$$

Assim, considerando $C = \sup\{\|T(y)\| : y \in E \text{ e } \|y\| \leq 1\}$, temos $\|T(x)\| \leq C\|x\|$. Para $x = 0$, a desigualdade é obviamente válida.

(7 $\Rightarrow$ 1) Seja $C \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$. Dados $x_1, x_2 \in E$, temos:

$$\|T(x_1) - T(x_2)\| = \|T(x_1 - x_2)\| \leq C\|x_1 - x_2\|.$$

Portanto, T é lipschitziano com constante C . $\square$

O próximo resultado nos conta que o espaço $\mathcal{L}(E, F)$ dos operadores lineares contínuos de E em F é um espaço normado, ou seja, conseguimos definir a norma de um operador linear T .

Proposição 1.4.1. *Sejam E e F espaços normados.*

1. A expressão $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$ define uma norma no espaço $\mathcal{L}(E, F)$;
2. $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ para todo $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $x \in E$;
3. Se F é de Banach, então $\mathcal{L}(E, F)$ também é de Banach.

Demonstração:

1. Mostremos que $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$ é uma norma. Sabemos que $\sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \geq 0$, portanto $\|T\| \geq 0$. Quando $\sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} = 0$, temos $\|T(x)\| = 0$, para todo $x \in E$ com $\|x\| \leq 1$, que implica em $T(x) = 0$, para todo $x \in E$. Além do mais,

$$\begin{aligned}
 \|\alpha T\| &= \sup\{\|\alpha T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\
 &= \sup\{|\alpha| \|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\
 &= |\alpha| \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\
 &= |\alpha| \|T\|.
 \end{aligned}$$

Note também que

$$\begin{aligned}
 \|T + S\| &= \sup\{\|(T + S)(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\
 &\leq \sup\{\|T(x)\| + \|S(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\
 &\leq \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} + \sup\{\|S(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\
 &\leq \|T\| + \|S\|.
 \end{aligned}$$

Logo, concluímos que a expressão $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$ define uma norma em $\mathcal{L}(E, F)$.

2. Como

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \left\| T \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq \sup\{\|T(y)\| : y \in E \text{ e } \|y\| \leq 1\},$$

temos então que:

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &\leq \sup\{\|T(y)\| : y \in E \text{ e } \|y\| \leq 1\} \|x\| \\ &\leq \|T\| \|x\|. \end{aligned}$$

3. Seja $(T_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E, F)$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_m - T_n\| < \varepsilon$ sempre que $m, n \geq n_0$. Logo,

$$\|T_m(x) - T_n(x)\| = \|(T_m - T_n)(x)\| \leq \|T_m - T_n\| \|x\| < \varepsilon \|x\|, \quad (1.4.2)$$

para todo $x \in E$ e $m, n \geq n_0$. Daí, segue de (1.4.2) que para cada $x \in E$, a sequência $(T_n(x))_{n=1}^\infty$ é de Cauchy em F , e logo, como F é de Banach, a sequência $(T_n(x))_{n=1}^\infty$ é convergente. Defina então

$$T : E \rightarrow F, \quad T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x).$$

A linearidade de T segue das propriedades dos limites. Fazendo $m \rightarrow \infty$ em (1.4.2) obtemos

$$\|(T_n - T)(x)\| = \|T_n(x) - T(x)\| < \varepsilon \|x\|, \quad (1.4.3)$$

para todo $x \in E$ e $n \geq n_0$.

Em particular, $\|T_{n_0}(x) - T(x)\| < \varepsilon \|x\|$, ou seja, $\|(T_{n_0} - T)(x)\| < \varepsilon \|x\|$. Daí, segue do item 7 do Teorema 1.4.1, que $(T - T_{n_0})$ é contínuo e logo pertence a $\mathcal{L}(E, F)$. Portanto, $T = (T - T_{n_0}) + T_{n_0} \in \mathcal{L}(E, F)$. Como

$$\begin{aligned} \|T_n - T\| &= \sup\{\|(T_n - T)(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|T_n(x) - T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}, \end{aligned}$$

de (1.4.3) segue que

$$\|T_n(x) - T(x)\| \leq \|T_n - T\| \|x\| < \varepsilon \|x\|,$$

e assim, $\|T_n - T\| < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$, que implica em $T_n \rightarrow T$ em $\mathcal{L}(E, F)$, ou seja, $\mathcal{L}(E, F)$ é de Banach. $\square$

Teorema de Hahn-Banach

Neste capítulo estudaremos, de fato, o tema central do nosso trabalho: o Teorema de Hahn-Banach. A beleza do Teorema de Hahn-Banach reside em sua simplicidade e elegância, pois através de uma construção que respeita as condições originais de um funcional, ele permite a generalização e o estudo de propriedades mais complexas de espaços externos, com implicações diretas em várias teorias. Trataremos de algumas de suas versões, sendo elas: a forma analítica, o Teorema de Hahn-Banach em espaços normados e em espaços de dimensão finita.

2.1 Caso real do Teorema de Hahn-Banach

Nesta seção iremos enunciar e provar o Teorema de Hahn-Banach, caso real. Para demonstrá-lo, é necessário conhecer o famoso Lema de Zorn. Considere as seguintes definições.

Definição 2.1.1. Uma *ordem parcial* no conjunto P é uma relação $\leq$ em P que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $x \leq x$ para todo $x \in P$. (reflexiva)
2. Se $x, y \in P$, $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$. (antissimétrica)
3. Se $x, y, z \in P$, $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$. (transitiva)

Neste caso, diz-se que $(P, \leq)$ é um *conjunto parcialmente ordenado*.

Definição 2.1.2. Sejam P um conjunto parcialmente ordenado e Q um subconjunto de P .

- (a) Uma *cota superior* de Q , se existir, é um elemento $p \in P$ tal que $q \leq p$, para todo $q \in Q$.

- (b) Um *elemento maximal* de P , se existir, é um elemento $m \in P$ tal que se $p \in P$ e $m \leq p$, então $m = p$.
- (c) Se, para todo $p, q \in P$, temos $p \leq q$ ou $q \leq p$, dizemos que Q é *totalmente ordenado*.

Estamos prontos agora para enunciar o *Lema de Zorn*. A demonstração pode ser vista em [3].

Lema 2.1.1. (*Lema de Zorn*) *Todo conjunto parcialmente ordenado, não vazio e no qual todo subconjunto totalmente ordenado tem cota superior, tem elemento maximal.*

Vejam agora a primeira versão do Teorema de Hahn-Banach que vamos estudar: sua forma analítica no caso real.

Teorema 2.1.1. (*Teorema de Hahn-Banach(caso real)*) *Sejam E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz:*

1. $p(ax) = ap(x)$, para todo $a > 0$ e $x \in E$;
2. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, para todo $x, y \in E$.

Considere G um subespaço vetorial de E e $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear onde $\varphi(x) \leq p(x)$, para todo $x \in G$. Então, existe um funcional linear $\varphi' : E \rightarrow \mathbb{R}$ que estende φ , ou seja, $\varphi'(x) = \varphi(x)$, e que satisfaz $\varphi'(x) \leq p(x)$, para todo $x \in E$.

Demonstração: Considere P a família de funcionais lineares nos subespaços de E que contém G :

$$P = \left\{ \begin{array}{l} \delta : D(\delta) \subseteq E \rightarrow \mathbb{R} : D(\delta) \text{ é subespaço vetorial de } E, \\ \delta \text{ é linear, } G \subseteq D(\delta), \delta(x) = \varphi(x) \text{ para todo } x \in G \\ \text{e } \delta(x) \leq p(x) \text{ para todo } x \in D(\delta) \end{array} \right\}.$$

Defina a seguinte relação de ordem sobre P , onde

$$\delta_1 \leq \delta_2 \Leftrightarrow D(\delta_1) \subseteq D(\delta_2) \text{ e } \delta_2 \text{ estende } \delta_1, \text{ isto é, } \delta_1(x) = \delta_2(x) \text{ para todo } x \in D(\delta_1).$$

Esta é uma ordem parcial sobre o conjunto P , pois para todo $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ em P satisfazem as seguintes propriedades:

1. $\delta_1 \leq \delta_1$, pois $D(\delta_1) \subseteq D(\delta_1)$ e δ_1 estende δ_1 ;
2. Se $\delta_1 \leq \delta_2$ e $\delta_2 \leq \delta_1$, então $D(\delta_1) \subseteq D(\delta_2)$, $D(\delta_2) \subseteq D(\delta_1)$, ou seja, $D(\delta_1) = D(\delta_2)$, δ_2 estende δ_1 , δ_1 estende δ_2 , logo $\delta_1 = \delta_2$;
3. Se $\delta_1 \leq \delta_2$ e $\delta_2 \leq \delta_3$, então $D(\delta_1) \subseteq D(\delta_2)$, $D(\delta_2) \subseteq D(\delta_3)$, δ_2 estende δ_1 e δ_3 estende δ_2 , o que implica que $D(\delta_1) \subseteq D(\delta_3)$ e δ_3 estende δ_1 . Logo $\delta_1 \leq \delta_3$.

Note que a família P não é vazia, pois $\varphi \in P$.

Antes de aplicar o Lema de Zorn na família P , é necessário verificar se todo subconjunto totalmente ordenado de P admite uma cota superior.

Seja $Q \subseteq P$ totalmente ordenado com a relação $\leq$ definida no conjunto P . Defina $\delta_Q : D(\delta_Q) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$D(\delta_Q) = \bigcup_{\theta \in Q} D(\theta) \text{ e } \delta_Q(x) = \theta(x), \text{ se } x \in D(\theta).$$

Observe que, dado $y \in D(\delta_Q)$, se $y \in D(\theta_i)$ e $y \in D(\theta_j)$ com $i \neq j$, como Q é totalmente ordenado, ou $\theta_i \leq \theta_j$ ou $\theta_j \leq \theta_i$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\theta_i \leq \theta_j$. Neste caso, $D(\theta_i) \subseteq D(\theta_j)$ e $\theta_i(x) = \theta_j(x)$, para todo $x \in D(\theta_i)$. Em particular, como $y \in D(\theta_i)$, temos que $\theta_i(y) = \theta_j(y)$. Assim, δ_Q está bem definida. Note que, por satisfazer as propriedades da família P , $\delta_Q \in P$.

Mostremos agora que δ_Q é cota superior para Q . Para isso, devemos mostrar que para todo $\psi \in Q$, temos $\psi \leq \delta_Q$. Observe que a função δ_Q está definida em $D(\delta_Q) = \bigcup_{\theta \in Q} D(\theta)$ e $\psi \in Q$ segue que $D(\psi) \subseteq D(\delta_Q)$. Além disso, pela definição de δ_Q , é claro que δ_Q estende ψ . Logo, $\psi \leq \delta_Q$ para todo $\psi \in Q$, concluindo que δ_Q é cota superior de Q . Aplicando o Lema de Zorn, concluímos que P admite um elemento maximal φ' .

Assim, como $\varphi' \in P$, temos que φ' é linear, $\varphi'(x) = \varphi(x)$, para todo $x \in G$ e $\varphi'(x) \leq p(x)$, para todo $x \in D(\varphi')$. Só falta mostrar então que $D(\varphi') = E$.

Suponha por absurdo que $D(\varphi') \neq E$. Então podemos escolher um $x_o \in E - D(\varphi')$ e definir $\delta' : D(\delta') \rightarrow \mathbb{R}$, por

$$D(\delta') = D(\varphi') + [x_o] \text{ e } \delta'(x + tx_o) = \varphi'(x) + t\alpha,$$

onde α é uma constante escolhida de modo que $\delta' \in P$. Queremos que α satisfaça as desigualdades abaixo:

$$\varphi'(x) + \alpha = \delta'(x + x_o) \leq p(x + x_o) \text{ e}$$

$$\varphi'(x) - \alpha = \delta'(x - x_o) \leq p(x - x_o),$$

para todo $x \in D(\varphi')$. Para isso, devemos ter

$$\alpha \leq p(x + x_o) - \varphi'(x) \text{ e } \alpha \geq \varphi'(x) - p(x - x_o),$$

para todo $x \in D(\varphi')$. Isso implica que

$$\alpha \leq \inf\{p(x + x_o) - \varphi'(x) : x \in D(\varphi'(x))\} \text{ e } \alpha \geq \sup\{\varphi'(x) - p(x - x_o) : x \in D(\varphi'(x))\},$$

ou seja, basta escolher α de modo que

$$\sup\{\varphi'(x) - p(x - x_o) : x \in D(\varphi'(x))\} \leq \alpha \leq \inf\{p(x + x_o) - \varphi'(x) : x \in D(\varphi'(x))\}.$$

Essa escolha é possível pois, para $x, y \in D(\varphi')$ temos

$$\varphi'(x) + \varphi'(y) = \varphi'(x + y) \leq p(x + y) = p(x + y + x_o - x_o)$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) + \varphi'(y) \leq p(x + x_o) + p(y - x_o)$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) - p(y - x_o) \leq p(x + x_o) - \varphi'(x).$$

Isto significa que podemos escolher α satisfazendo as duas desigualdades anteriores. Agora, observe que

1. Para $t > 0$,

$$\begin{aligned} \delta'(x + tx_o) &= \delta'\left(t\left(\frac{x}{t} + x_o\right)\right) = t\delta'\left(\frac{x}{t} + x_o\right) \leq \\ &\leq tp\left(\frac{x}{t} + x_o\right) = p(x + tx_o); \end{aligned}$$

2. Para $t < 0$,

$$\begin{aligned}\delta'(x + tx_o) &= \delta'\left(-t\left(\frac{x}{-t} - x_o\right)\right) = -t\delta'\left(\frac{x}{-t} - x_o\right) \leq \\ &\leq -tp\left(\frac{x}{-t} - x_o\right) = p(x + tx_o);\end{aligned}$$

3. Para $t = 0$,

$$\begin{aligned}\delta'(x + tx_o) &= \delta'(x) = \varphi'(x) \leq \\ &\leq p(x) = p(x + tx_o),\end{aligned}$$

para todo $x \in D(\delta')$.

Assim podemos concluir que $\delta' \in P$, $\varphi' \leq \delta'$ e $\varphi' \neq \delta'$, contradizendo a hipótese da maximalidade de φ' . Logo $D(\varphi') = E$. $\square$

2.2 O Teorema de Hahn-Banach e suas consequências

No início desta seção, iremos enunciar e demonstrar a generalização do Teorema de Hahn-Banach para o caso em que o espaço vetorial é complexo. Depois, estudaremos esse Teorema em espaços normados e em espaços de dimensão finita.

Teorema 2.2.1. (*Teorema de Hahn-Banach*) *Sejam E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaça:*

1. $p(ax) = |a|p(x)$, para todo $a \in \mathbb{K}$ e $x \in E$,
2. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, para todo $x, y \in E$.

Se $G \subseteq E$ é um subespaço vetorial de E e $\varphi : G \rightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear tal que $|\varphi(x)| \leq p(x)$, para todo $x \in G$, então existe um funcional linear $\varphi' : E \rightarrow \mathbb{K}$ que estende φ a E que satisfaz $|\varphi'(x)| \leq p(x)$, para todo $x \in E$.

Demonstração: Primeiramente, veremos que $p(x) > 0$, para todo $x \in E$. Pela propriedade 2 da função p , temos

$$p(0) = p(0 + 0) \leq p(0) + p(0) = 2p(0).$$

Logo $p(0) \geq 0$. Da propriedade 1, segue que $p(-x) = |-1|p(x) = p(x)$, e assim, para todo $x \in E$,

$$2p(x) = p(x) + p(-x) \geq p(x + (-x)) = p(0) \geq 0, \text{ ou seja, } p(x) \geq 0.$$

Mostraremos primeiramente o caso onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Por hipótese, temos que $\varphi(x) \leq |\varphi(x)| \leq p(x)$, para todo $x \in E$. Assim, pelo caso real do Teorema de Hahn-Banach, existe um funcional linear $\varphi' : E \rightarrow \mathbb{R}$ que estende φ a E e que satisfaz $\varphi'(x) \leq p(x)$, para todo $x \in E$. Da propriedade 1 da função p , segue que:

$$-\varphi'(x) = \varphi'(-x) \leq p(-x) = |-1|p(x) = p(x).$$

Portanto, $|\varphi'(x)| \leq p(x)$, para todo $x \in E$. Provemos agora o caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Nesse caso, E é um espaço vetorial complexo e φ assume valores em $\mathbb{C}$. Defina $\varphi_1, \varphi_2 : G \rightarrow \mathbb{R}$ por $\varphi_1(x) = \operatorname{Re}(\varphi(x))$ e $\varphi_2 = \operatorname{Im}(\varphi(x))$. temos que φ_1 e φ_2 são funcionais lineares e $\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$. Agora, considere $E_{\mathbb{R}}$ e $G_{\mathbb{R}}$ os espaços vetoriais reais subjacentes a E e G , ou seja, como conjunto o espaço respectivo é o mesmo, a adição é a mesma, mas a multiplicação por escalar é feita apenas em $\mathbb{R}$. Então φ_1 e φ_2 são funcionais lineares sobre $G_{\mathbb{R}}$. Para $x \in G_{\mathbb{R}}$, temos

$$\varphi_1(x) \leq |\varphi_1(x)| \leq |\varphi(x)| \leq p(x).$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach (caso real), existe um funcional linear $\varphi'_1 : E_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ que estende φ_1 a $E_{\mathbb{R}}$ e que satisfaz $\varphi'_1(x) \leq p(x)$, para todo $x \in E_{\mathbb{R}}$. Mostremos o caso para φ_2 . Para cada $x \in G$,

$$i(\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)) = i\varphi(x) = \varphi(ix) = \varphi_1(ix) + i\varphi_2(ix).$$

Daí, $i\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = \varphi_1(ix) + i\varphi_2(ix)$. Logo, $\varphi_2(x) = -\varphi_1(ix)$, para todo $x \in G$. Defina $\varphi' : E \rightarrow \mathbb{C}$, por $\varphi'(x) = \varphi'_1(x) - i\varphi'_1(ix)$.

Note que

$$\begin{aligned}
 \varphi'(x) &= \varphi'_1(x) - i\varphi'_1(ix) \\
 &= \varphi_1(x) - i\varphi_1(ix) \\
 &= \varphi_1(x) + i\varphi_2(ix) \\
 &= \varphi(x).
 \end{aligned}$$

Mostremos que φ' é um funcional linear em E . De fato, dados $a + ib \in \mathbb{C}$ e $x, y \in E$:

$$\begin{aligned}
 \varphi'(x + y) &= \varphi'_1(x + y) - i\varphi'_1(i(x + y)) \\
 &= \varphi'_1(x) + \varphi'_1(y) - i(\varphi'_1(ix) + \varphi'_1(iy)) \\
 &= \varphi'_1(x) - i\varphi'_1(ix) + \varphi'_1(y) - i\varphi'_1(iy) \\
 &= \varphi'(x) + \varphi'(y).
 \end{aligned}$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned}
 \varphi'((a + ib)x) &= \varphi'_1(ax + ibx) - i\varphi'_1(i(a + ib)x) \\
 &= a\varphi'_1(x) + b\varphi'_1(ix) - i(a\varphi'_1(ix) - b\varphi'_1(x)) \\
 &= a\varphi'_1(x) + b\varphi'_1(ix) - ia\varphi'_1(ix) + ib\varphi'_1(x) \\
 &= a(\varphi'_1(x) - i\varphi'_1(ix)) + b(\varphi'_1(ix) + i\varphi'_1(x)) \\
 &= a(\varphi'_1(x) - i\varphi'_1(ix)) + b((-i)i\varphi'_1(ix) + i\varphi'_1(x)) \\
 &= a(\varphi'_1(x) - i\varphi'_1(ix)) + ib((-i)\varphi'_1(ix) + \varphi'_1(x)) \\
 &= (a + ib)(\varphi'_1(x) - i\varphi'_1(ix)) \\
 &= (a + ib)\varphi'(x).
 \end{aligned}$$

Falta provar que $|\varphi'(x)| \leq p(x)$, para todo $x \in E$. Se $\varphi'(x) = 0$, a desigualdade é verdadeira pois, como provamos no início da demonstração, $p(x) \geq 0$. Tome $x \in E$ tal que $\varphi'(x) \neq 0$. Então, existe um θ tal que $\varphi'(x) = |\varphi'(x)|e^{i\theta}$. Segue que $|\varphi'(x)| = \varphi'(x)e^{-i\theta} = \varphi'(e^{-i\theta}x)$.

Como $|\varphi'(x)|$ é real, pela equação do item 1 do enunciado, obtemos

$$|\varphi'(x)| = \varphi'(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) = |e^{-i\theta}|p(x) = p(x). \quad \square$$

Veremos agora a versão do Teorema de Hahn-Banach em espaços normados. Essa versão é uma consequência direta do caso geral do Teorema de Hahn-Banach. A beleza desse resultado está no fato de que em espaços normados, conseguimos estender um funcional linear preservando a sua norma.

Teorema 2.2.2. *(Teorema de Hahn-Banach em Espaços Normados) Sejam $G \subseteq E$ um subespaço normado sobre $\mathbb{K}$ e $\varphi : G \rightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo $\varphi' : E \rightarrow \mathbb{K}$ cuja a restrição a G coincide com φ e*

$$\|\varphi'\| = \|\varphi\|.$$

Demonstração: Sabemos que $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| : x \in G \text{ e } \|x\| \leq 1\}$ e que $\|\varphi'\| = \sup\{|\varphi'(x)| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$.

Considere $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $p(x) = \|\varphi\| \cdot \|x\|$. Observe que p satisfaz as propriedades abaixo:

1. $p(ax) = \|\varphi\| \cdot \|ax\| = \|\varphi\| \cdot |a| \cdot \|x\| = |a| \cdot \|\varphi\| \cdot \|x\| = |a|p(x)$;
2. $p(x+y) = \|\varphi\| \cdot \|x+y\| \leq \|\varphi\| \cdot (\|x\| + \|y\|) = \|\varphi\| \cdot \|x\| + \|\varphi\| \cdot \|y\| = p(x) + p(y)$.

Mais ainda, dado $x \in G$ com $x \neq 0$, temos que

$$\left| \varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right| \leq \|\varphi\|, \text{ ou seja, } \frac{1}{\|x\|} \cdot |\varphi(x)| \leq \|\varphi\|.$$

Portanto $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \cdot \|x\| = p(x)$.

Assim, como p satisfaz as propriedades (1) e (2), e $|\varphi(x)| \leq p(x)$, aplicando o Teorema de Hahn-Banach, existe um funcional linear $\varphi' : E \rightarrow \mathbb{K}$ que estende φ a E e que satisfaz $|\varphi'(x)| \leq p(x)$, ou seja, $|\varphi'(x)| \leq \|\varphi\| \cdot \|x\|$, para todo $x \in E$. Daí, se $x \in E$ e $\|x\| \leq 1$, temos que $|\varphi'(x)| \leq \|\varphi\|$. Assim, $\|\varphi\|$ é cota superior para o conjunto $\{|\varphi'(x)| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$.

Daí, como $\|\varphi'\| = \sup\{|\varphi'(x)| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$, temos que $\|\varphi'\| \leq \|\varphi\|$. Por outro lado, para $x \in G$, temos

$$\|\varphi(x)\| = \|\varphi'(x)\| \leq \|\varphi'\| \cdot \|x\|.$$

Então, pela definição de $\|\varphi\|$ segue que $\|\varphi\| \leq \|\varphi'\|$. Portanto, $\|\varphi\| = \|\varphi'\|$. $\square$

Da versão do Teorema de Hahn-Banach em espaços normados, temos duas consequências importantes que apresentaremos abaixo.

Corolário 2.2.1. *Seja E um espaço normado. Para todo $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$, existe um funcional linear $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x_0) = \|x_0\|$.*

Demonstração: Tome G o espaço gerado por $x_0 \in E$, ou seja, $G = [x_0]$. Defina $\varphi(ax_0) = a\|x_0\|$. Mostremos que φ é linear. De fato, se $ax_0, bx_0 \in G$, temos

$$\begin{aligned} \varphi(ax_0 + bx_0) &= \varphi((a+b)x_0) \\ &= (a+b)\|x_0\| \\ &= a\|x_0\| + b\|x_0\| \\ &= \varphi(ax_0) + \varphi(bx_0), \end{aligned}$$

e, para qualquer $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda ax_0) &= \varphi((\lambda a)x_0) \\ &= (\lambda a)\|x_0\| \\ &= \lambda a\|x_0\| \\ &= \lambda \varphi(ax_0). \end{aligned}$$

Além do mais, φ é contínuo e, portanto, $\varphi \in E'$. Pelo Teorema 2.2.2, existe $\varphi' : E \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $\|\varphi'\| = \|\varphi\|$. Veja que

$$\begin{aligned} \|\varphi'\| &= \|\varphi\| = \sup \{|\varphi(ax_0)| : ax_0 \in G \text{ e } \|ax_0\| \leq 1\} \\ &= \sup \{|a|\|x_0\| : ax_0 \in G \text{ e } |a|\|x_0\| \leq 1\}. \end{aligned}$$

Assim $\|\varphi'\| = 1$, pois 1 é cota superior do conjunto $\{|a|\|x_0\| : ax_0 \in G \text{ e } |a|\|x_0\| \leq 1\}$ e, tomando $a = \frac{1}{\|x_0\|}$, temos $\|ax_0\| = 1$. $\square$

Corolário 2.2.2. *Sejam E um espaço normado, $E \neq \{0\}$, e $x \in E$. Então,*

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\}$$

e o supremo é atingido.

Demonstração: Para cada funcional $\varphi \in E'$ com $\|\varphi\| \leq 1$, temos que $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \cdot \|x\| \leq \|x\|$. Isso mostra que $\sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\} \leq \|x\|$. Agora, pelo Corolário 2.2.1, existe $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $|\varphi(x)| = \|x\|$, ou seja, o supremo é atingido em um funcional linear de norma 1. Isso conclui a demonstração. $\square$

A última versão do teorema que veremos é o Teorema de Hahn-Banach em espaços de dimensão finita. A conclusão é a mesma que nos outros casos, porém, como E é de dimensão finita, conseguimos demonstrar de forma mais simples, sem utilizar o Lema de Zorn.

Teorema 2.2.3. *(Teorema de Hahn-Banach em Espaços de Dimensão Finita). Sejam E um espaço vetorial real de dimensão finita e $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional sublinear, ou seja, uma função que satisfaz:*

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, para todo $x, y \in E$;
2. $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, para todo $x \in E$ e $\alpha \geq 0$.

Seja $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear onde G é subespaço de E satisfazendo

$$\varphi(x) \leq p(x), \text{ para todo } x \in G.$$

Então, φ tem uma extensão φ' em E tal que

$$\varphi'(x) \leq p(x), \text{ para todo } x \in E.$$

Demonstração: Seja $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear onde G é subespaço vetorial de E e p um funcional sublinear definido em E . Suponha que $G \neq E$. Considere $x_0 \in E - G$ e

$G_0 = G \oplus [x_0] = \{x + tx_0 : t \in \mathbb{R} \text{ e } x \in G\}$. Defina $\varphi'_0 : G_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi'_0(x + tx_0) = \varphi(x) + t\alpha_0$ onde $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ é escolhido de modo que $\varphi'_0(x) \leq p(x)$, para todo $x \in G_0$. Assim, $\varphi'_0(x) = \varphi(x)$ se $x \in G$, φ'_0 é linear e $\varphi'_0 \leq p(x)$, para todo $x \in G_0$. Se $G_0 = E$ a demonstração acaba. Caso contrário, considere $x_1 \in E - G_0$ e $G_1 = G_0 \oplus [x_1]$ e defina $\varphi'_1 : G_1 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi'_1(x + tx_1) = \varphi'_0(x) + t\alpha_1$, onde $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ é escolhido de modo que $\varphi'_1(x) \leq p(x)$ para todo $x \in G_1$. temos que $\varphi'_1(x) = \varphi'_0(x)$, se $x \in G_0$, φ'_1 é linear e $\varphi'_1 \leq p(x)$, para todo $x \in G_1$. Se $G_1 = E$ a demonstração acaba. Se não, tome $x_2 \in E - G_1$ e considere $G_2 = G_1 \oplus [x_2]$ e prossiga com o mesmo raciocínio anterior. Como a dimensão de E é finita, existirá um $n \in \mathbb{N}$ tal que $G_n = E$. $\square$

Aplicações do Teorema de Hahn-Banach

em espaços separáveis

Estudaremos neste capítulo uma aplicação do Teorema de Hahn-Banach em espaços separáveis. Conforme apresentado em [1], tais espaços são importantes pois gozam de uma teoria bem mais rica que a teoria em geral, devido as propriedades especiais que possuem. Inicialmente veremos a definição de espaços separáveis e alguns exemplos. Finalizaremos o capítulo com alguns resultados que são aplicações do Teorema de Hahn-Banach.

3.1 Espaços Separáveis

Nesta seção estudaremos, de maneira breve, a teoria dos espaços separáveis. Iremos apresentar a definição e alguns exemplos clássicos. Primeiro, relembre que, dizemos que um subconjunto A de um espaço E é *denso* em E , se $\bar{A} = E$.

Definição 3.1.1. Seja E um espaço normado. Se existe um subconjunto enumerável e denso em E , dizemos que E é *separável*. Mais geralmente, um espaço métrico M é separável quando contém um subconjunto denso e enumerável.

Exemplo 3.1.1. *Espaços normados de dimensão finita são separáveis. De fato, seja E um espaço normado de dimensão n . Escolha $\{x_1, \dots, x_n\}$ uma base de E e, no caso real, considere o conjunto*

$$A = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q} \right\}$$

das combinações lineares dos vetores da base com escalares racionais. Mostremos que A é denso em E e enumerável. Fixe $x = r_1 x_1 + \dots + r_n x_n \in E$ e $\varepsilon > 0$. Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$,

temos que para todo $r_i \in \mathbb{R}$, existe $a_i \in \mathbb{Q}$ tal que $|r_i - a_i| < \frac{\varepsilon}{n}$. Assim, $y = a_1x_1 + \dots + a_nx_n \in A$ é tal que

$$\begin{aligned} \|x - y\| &\leq \|(r_1x_1 + \dots + r_nx_n) - (a_1x_1 + \dots + a_nx_n)\| \\ &= \|(r_1 - a_1)x_1 + \dots + (r_n - a_n)x_n\| \\ &\leq |r_1 - a_1|\|x_1\| + \dots + |r_n - a_n|\|x_n\| \\ &< \frac{\varepsilon}{n} + \dots + \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo A é denso em E . Para mostrar que A é enumerável, considere a função

$$f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \dots \times \mathbb{Q} \rightarrow A, \text{ dada por } f(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

Como f é bijetora, segue que A é enumerável. Portanto, A é separável.

O lema a seguir será bastante útil para a demonstração de que alguns dos espaços no quais estamos trabalhando são separáveis. Para fixar notação, dado um subconjunto A de um espaço vetorial E , denotamos por $[A]$ como o subespaço de E gerado por A , ou seja, o conjunto de todas as combinações lineares finitas de elementos de A .

Lema 3.1.1. *Um espaço normado E é separável se, e somente se, existe um subconjunto enumerável $A \subseteq E$ tal que $[A]$ é denso em E .*

Demonstração: Seja E um espaço separável. Então existe um subconjunto A enumerável e denso em E . Logo, $E = \overline{A} \subseteq \overline{[A]} \subseteq E$ e portanto, $[A]$ é denso em E . Reciprocamente, suponhamos que exista um subconjunto enumerável $A \subseteq E$, tal que $\overline{[A]} = E$. Chamemos de B o conjunto formado por todas as combinações lineares finitas de elementos de A com coeficientes em $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$, onde $\mathbb{Q}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}_{\mathbb{C}} = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, ou seja,

$$B = \{a_1x_1 + \dots + a_nx_n : x_1, \dots, x_n \in A, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K}} \text{ e } n \in \mathbb{N}\}.$$

É possível ver que B é enumerável. De fato, como $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ é enumerável, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto das combinações lineares de n elementos de A com coeficientes em $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ é enumerável. Segue que B é enumerável por ser a união enumerável de conjuntos enumeráveis. Provaremos

agora que B é denso em E . Sejam $x \in E$ e $\varepsilon > 0$. Como $\overline{[A]} = E$, existe $y_0 \in [A]$ tal que $\|x - y_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Digamos $y_0 = b_1x_1 + \dots + b_kx_k$, onde $k \in \mathbb{N}$, $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{K}$ e $x_1, \dots, x_k \in A$. Como $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ é denso em $\mathbb{K}$, existem $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ tais que

$$|a_j - b_j| < \frac{\varepsilon}{2 \left(1 + \sum_{i=1}^k \|x_i\|\right)}, \text{ para todo } j = 1, \dots, k.$$

Tomando $y = a_1x_1 + \dots + a_kx_k$ temos $y \in B$ e

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \|x - y_0 + y_0 - y\| \leq \|x - y_0\| + \|y_0 - y\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \|(b_1 - a_1)x_1 + \dots + (b_k - a_k)x_k\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \max_{1 \leq j \leq k} |b_j - a_j| (\|x_1\| + \dots + \|x_k\|) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2 \left(1 + \sum_{i=1}^k \|x_i\|\right)} \cdot \sum_{i=1}^k \|x_i\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

o que prova que $\overline{B} = E$. Assim, $B \subseteq E$ é enumerável e denso, e portanto, E é separável. $\square$

Exemplo 3.1.2. O espaço c_0 , definido no exemplo 1.1.6, é separável. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$ a sequência formada por 1 na n -ésima coordenada e 0 nas demais. Os vetores $e_1, e_2, \dots$ são chamados de vetores unitários canônicos dos espaços de sequências. Dado $x = (a_j)_{j=1}^\infty \in c_0$, temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{j=1}^k a_j e_j \right\|_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \|(0, \dots, 0, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)\|_\infty = \limsup_k |a_j| = 0,$$

pois $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0$, e segue que $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k a_j e_j = x$ em c_0 . Logo $x \in \overline{[e_1, e_2, \dots]}$, e segue do Lema 3.1.1 que c_0 é separável.

Exemplo 3.1.3. O conjunto ℓ_p , definido no exemplo 1.3.6, é separável. De fato, dado $x =$

$(a_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p$, como

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{j=1}^k a_j e_j \right\|_p^p = \lim_{k \rightarrow \infty} \|(0, \dots, 0, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)\|_p^p = \lim_k \sum_{j=k+1}^\infty |a_j|^p = 0,$$

pois a série $\sum_{j=1}^\infty |a_j|^p$ é convergente. Assim, segue do Lema 3.1.1 que ℓ_p é separável.

Exemplo 3.1.4. O espaço ℓ_∞ , definido no exemplo 1.3.7, não é separável. De fato, suponha que ℓ_∞ contenha uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ densa. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escrevamos $x_n = (a_j^{(n)})_{j=1}^\infty$. Seja $y = (b_j)_{j=1}^\infty$ a sequência definida por $b_j = 0$, se $|a_j^{(j)}| \geq 1$, e $b_j = a_j^{(j)} + 1$, se $|a_j^{(j)}| < 1$. Veja que $y \in \ell_\infty$ pois $|b_j| < 2$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Da densidade da sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\|y - x_{n_o}\|_\infty < 1$. Mas

$$\|y - x_n\|_\infty = \sup \{|b_1 - a_1^{(n)}|, \dots, |b_n - a_n^{(n)}|, |b_{n+1} - a_{n+1}^{(n)}|, \dots\} \geq |b_n - a_n^{(n)}|.$$

Agora,

$$|b_n - a_n^{(n)}| = \begin{cases} |0 - a_n^{(n)}|, & \text{se } |a_n^{(n)}| \geq 1 \\ |a_n^{(n)} + 1 - a_n^{(n)}|, & \text{se } |a_n^{(n)}| < 1. \end{cases}$$

Logo, teremos que

$$\|y - x_n\|_\infty \geq |b_n - a_n^{(n)}| = \begin{cases} |a_n^{(n)}|, & \text{se } |a_n^{(n)}| \geq 1 \\ 1, & \text{se } |a_n^{(n)}| < 1. \end{cases}, \text{ ou seja, } \|y - x_n\|_\infty \geq 1,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, o que é uma contradição. Portanto, segue que ℓ_∞ não é separável.

Por fim, da teoria de espaços métricos, temos que todo subconjunto de um espaço separável é também separável. Esse resultado será utilizado na próxima seção e sua demonstração pode ser encontrada na referência [5].

3.2 Aplicações em Espaços Separáveis

Nesta seção, estudaremos resultados importantes dentro da teoria de espaços separáveis, que são demonstrados com o auxílio do Teorema de Hahn-Banach. Para a prova desse

resultado, utilizamos a proposição abaixo. Antes, lembre que se A é um subconjunto de um espaço normado E e $x \in E$, então

$$d(x, A) = \inf\{\|x - y\| : y \in A\}.$$

Proposição 3.2.1. *Sejam E um espaço normado, M um subespaço fechado de E , $y_0 \in E - M$ e $d = d(y_0, M)$. Então, existe um funcional linear $\varphi \in E'$ tal que*

1. $\|\varphi\| = 1$;
2. $\varphi(y_0) = d$;
3. $\varphi(x) = 0$, para todo $x \in M$.

Demonstração: Seja $N = M \oplus [y_0]$. Então, para qualquer $z \in N$, existem únicos $a \in \mathbb{K}$ e $x \in M$ tais que $z = x + ay_0$. Defina

$$\varphi_0 : N \rightarrow \mathbb{K}, \text{ por } \varphi_0(x + ay_0) = ad.$$

A unicidade de x e a garante que φ_0 está bem definida. Mostremos que φ_0 é linear. Sejam $z_1 = x_1 + a_1y_0$ e $z_2 = x_2 + a_2y_0$ vetores em N . Então,

$$\begin{aligned} \varphi_0(z_1 + z_2) &= \varphi_0((x_1 + a_1y_0) + (x_2 + a_2y_0)) \\ &= \varphi_0(x_1 + x_2 + (a_1 + a_2)y_0) \\ &= (a_1 + a_2)d \\ &= a_1d + a_2d \\ &= \varphi_0(z_1) + \varphi_0(z_2). \end{aligned}$$

Agora, dado $\beta \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
 \varphi_0(\beta z_1) &= \varphi_0(\beta(x_1 + a_1 y_0)) \\
 &= \varphi_0(\beta x_1 + \beta a_1 y_0) \\
 &= \beta a_1 d \\
 &= \beta(a_1 d) \\
 &= \beta \varphi_0(z_1).
 \end{aligned}$$

Portanto φ_0 é linear. Note que se $x \in M$, então $\varphi_0(x) = \varphi_0(x + 0.y_0) = 0.d = 0$, ou seja, $\varphi(M) = \{0\}$. Além disso, é claro que $\varphi_0(y_0) = d$. Vejamos agora que $\|\varphi_0\| = 1$. Seja $z = x + ay_0 \in N$. Para $a \neq 0$,

$$\begin{aligned}
 \|z\| &= \|x + ay_0\| \\
 &= \left\| (-a) \frac{x + ay_0}{-a} \right\| \\
 &= |a| \left\| y_0 - \frac{x}{-a} \right\|. \tag{3.2.1}
 \end{aligned}$$

Como $d = \inf\{\|y_0 - x\| : x \in M\}$, temos que $\|y_0 - (-\frac{x}{a})\| \geq d$. Portanto, segue de (3.2.1) que $\|z\| \geq |a|d = |ad| = |\varphi_0(z)|$. Se $a = 0$, a desigualdade $\|z\| \geq |\varphi_0(z)|$ é óbvia. Assim, dado $z \in N$ com $\|z\| \leq 1$, temos que $|\varphi_0(z)| \leq \|z\| \leq 1$, ou seja, 1 é cota superior do conjunto $\{|\varphi_0(z)| : z \in N \text{ e } \|z\| \leq 1\}$. Daí, segue que $\|\varphi_0\| \leq 1$. Agora, dado $\varepsilon > 0$, da definição de d , existe $x_\varepsilon \in M$ tal que $d \leq \|y_0 - x_\varepsilon\| \leq d + \varepsilon$. Seja $z_\varepsilon = \frac{y_0 - x_\varepsilon}{\|y_0 - x_\varepsilon\|}$. Então, $z_\varepsilon \in N$, $\|z_\varepsilon\| = 1$ e

$$\varphi_0(z_\varepsilon) = \frac{d}{\|y_0 - x_\varepsilon\|} \geq \frac{d}{d + \varepsilon}.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que $\|\varphi_0\| \geq 1$, e portanto, $\|\varphi_0\| = 1$. Pelo Corolário 2.2.1, existe $\varphi \in E'$ que estende φ_0 a E tal que $\|\varphi\| = \|\varphi_0\| = 1$. $\square$

Estamos prontos para apresentar as aplicações do Teorema de Hahn-Banach.

Teorema 3.2.1. *Se E' é separável, então E é separável.*

Demonstração: Seja $S_{E'}$ a esfera unitária de E' , ou seja, $S_{E'} = \{\varphi \in E' : \|\varphi\| = 1\}$.

Como vimos no final da seção 3.1, todo subconjunto de espaço métrico separável é também separável, logo $S_{E'}$ é separável. Seja $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto enumerável e denso de $S_{E'}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar $x_n \in S_E$ tal que $|\varphi_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}$. Chamemos $M = \overline{[x_1, x_2, \dots]}$. Vamos provar que $M = E$. Suponha que M seja diferente de E e escolha $y_0 \in E - M$. Pela Proposição 3.2.1, existe um funcional linear $\varphi \in E'$ com $\|\varphi\| = 1$ tal que $\varphi(y_0) = d = \text{dist}(y_0, M)$ e $\varphi(x) = 0$, para todo $x \in M$. Então,

$$\|\varphi - \varphi_n\| = \sup_{x \in B_E} |(\varphi - \varphi_n)(x)| \geq |(\varphi - \varphi_n)(x_n)| = |\varphi_n(x_n)| \geq \frac{1}{2},$$

uma contradição, pois $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em $S_{E'}$. Portanto $M = E$ e a separabilidade de E segue do Lema 3.1.1. $\square$

Proposição 3.2.2. *Todo espaço normado separável é isomorfo isometricamente a um subespaço de ℓ_∞ .*

Demonstração: Sejam $E \neq \{0\}$ um espaço normado separável e $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto enumerável e denso em E . Podemos supor que $0 \notin D$. Pelo Corolário 2.2.1, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um funcional linear $\varphi_n \in E'$ tal que $\|\varphi_n\| = 1$ e $\varphi_n(x_n) = \|x_n\|$. Considere o operador

$$T : E \rightarrow \ell_\infty \text{ definido por } T(x) = (\varphi_n(x))_{n=1}^\infty.$$

Como $\left| \varphi \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right| \leq \|\varphi\|$, então $|\varphi_n(x)| \leq \|\varphi_n\| \cdot \|x\| = \|x\|$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in E$. Temos que T é linear e

$$\|T(x)\| = \sup\{|\varphi_n(x)| : n \in \mathbb{N}\} \leq \|x\|, \quad (3.2.1)$$

o que prova, pelo Teorema (1.4.1), que T é contínuo. Note que

$$\|T(x_k)\| = \sup\{|\varphi_n(x_k)| : n \in \mathbb{N}\} \geq |\varphi_k(x_k)| = \|x_k\|, \quad (3.2.2)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Daí, de (3.2.1) e (3.2.2), segue que $\|T(x_k)\| = \|x_k\|$. Se $x \in E$, da densidade de D , existe uma sequência de pontos $(y_k)_{k=1}^\infty \subset D$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = x$. Da continuidade da

função $\cdot \in E \mapsto \|T(\cdot)\| \in \mathbb{R}$, segue que

$$\|x\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|y_k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|T(y_k)\| = \|T(x)\|.$$

Logo, T é uma isometria. Mostremos que T é injetiva. De fato, sejam $x_1, x_2 \in E$, tais que $T(x_1) = T(x_2)$. Assim, segue que $T(x_1) - T(x_2) = 0$. Como T é linear, temos $\|T(x_1 - x_2)\| = 0$. Logo, $\|x_1 - x_2\| = 0$, o que implica que $x_1 = x_2$.

Tomando $T : E \rightarrow T(E) \subseteq \ell_\infty$, temos que T é sobrejetiva, e portanto, bijetiva. Logo, T é inversível. Agora, dado $y \in T(E)$, existe $x \in E$ tal que $T(x) = y$. Assim,

$$\|T^{-1}(y)\| = \|T^{-1}(T(x))\| = \|x\| = \|T(x)\| = \|y\|.$$

Daí, segue que T^{-1} é contínua, pois dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon$ e considerando $y_1, y_2 \in T(E)$, tal que $\|y_1 - y_2\| < \delta$, segue que, $\|T^{-1}(y_1) - T^{-1}(y_2)\| = \|T^{-1}(y_1 - y_2)\| = \|y_1 - y_2\| < \varepsilon$. Logo, T é um isomorfismo isométrico entre E e $T(E) \subseteq \ell_\infty$. $\square$

CONCLUSÃO

Neste trabalho foi apresentado um dos principais resultados visto na análise funcional, o Teorema de Hahn-Banach e algumas de suas versões. Tal teorema é de extrema importância devido as suas inúmeras aplicações.

Na versão analítica, o Teorema de Hahn-Banach afirma que, um funcional linear $\varphi : G \rightarrow \mathbb{K}$, onde G é subespaço de um espaço vetorial E , pode ser estendido para o espaço todo, preservando a linearidade e continuidade do funcional. Se E é um espaço normado, o Teorema de Hahn-Banach nos permite estender o funcional para o espaço todo preservando ainda a sua norma. Além disso, essa versão também garante a existência de funcionais lineares contínuos e não nulos.

Por fim, com o auxílio do Teorema de Hahn-Banach, estudamos dois resultados importantes em espaços separáveis. Verificamos que se E é um espaço vetorial normado e E' é separável, então E também é separável. Além disso, provamos também que todo espaço normado separável é isomorfo isometricamente a um subespaço de ℓ_∞ .

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BOTELHO, G., PELLEGRINO, D., TEIXEIRA, E. **Fundamentos de Análise Funcional**, 2ªed., SBM, 2015.
- [2] COSTA, A. R. D. **Teorema de Hahn-Banach**, Monografia de Conclusão de Curso, Universidade Federal de Santa Catarina, 2014.
- [3] DI PRISCO, C. A. **Una Introducción a la Teoría de Conjuntos u los Fundamentos de las Matemáticas**, Coleção CLE-UNICAMP, volume 20, Campinas, 1997.
- [4] LIMA, E. L. **Análise Real volume 1. Funções de uma variável**, 8ªed., IMPA, 2006.
- [5] LIMA, E. L. **Espaços Métricos**, 3ªed., IMPA, 1993.
- [6] MOURA, E. C. **Espaços e Teoremas Clássicos de Análise Funcional**, Monografia, Universidade Federal de Uberlândia, 2018.
- [7] SOUZA, E. C. **O Teorema de Hahn-Banach e Aplicações**. Monografia de Especialização, Universidade Estadual da Paraíba, 2011.