



Universidade Federal de São João del-Rei
Coordenadoria do Curso de Matemática

Ana Cristina Porto Silveira

T-ideal da álgebra de matrizes triangulares superiores de ordem 2×2

São João del-Rei - MG
06 de Setembro de 2024

Universidade Federal de São João del-Rei
Coordenadoria do Curso de Matemática

T -ideal da álgebra de matrizes triangulares superiores de ordem 2×2

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenadoria do Curso de Matemática como parte necessária da Instrução Normativa COMAT N07 de 14 de Dezembro de 2021.

Orientadora: Dra. Lorena Mara Costa Oliveira UFSJ - DEMAT

Banca Examinadora:

Orientadora: Profa. Lorena Mara Costa Oliveira

Prof. Rafael Bezerra dos Santos

Prof. Gustavo Terra Bastos

São João del-Rei - MG
06 de Setembro de 2024

Sumário

Introdução	7
1 Conceitos Básicos	9
1.1 Grupos	9
1.2 Anéis	13
1.3 Álgebra	17
2 Álgebras com identidades polinomiais	19
2.1 Polinômios	19
2.2 PI-álgebras	24
3 T-Ideal da $UT_2(\mathbf{F})$	29
3.1 T-Ideal	29
3.1.1 Processo de Multilinearização	31
3.2 $\text{Id}(UT_2(\mathbf{F})) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$	34

Agradecimentos

Estou chegando ao fim de mais uma graduação e agora posso dizer que me encontrei profissionalmente. Desde criança gostei de matemática, embora não a conhecesse como hoje e sei que ainda há muito o que aprender. Mas não cheguei até aqui sozinha, estive ao lado de pessoas que me formaram como pessoa e como bacharel em matemática.

Agradeço primeiramente a Deus, pois sem Ele não estaria aqui e em segundo lugar, agradeço ao meu filho, por estar presente mesmo nos momentos em que eu fui ausente.

Agradeço aos meus pais e minha irmã pelo suporte que sempre me deram e os esforços incessantes que tiveram. Agradeço ainda ao Jean por ser ouvidos quando precisei falar e por participar comigo desta etapa.

Agradeço à professora Lorena pela amizade, paciência comigo e por transmitir seu conhecimento e assim fazer aflorar o gosto pela álgebra. Você, assim como as meninas do grupo de estudos, fizeram esta caminhada ser mais leve.

Agradeço aos professores da matemática, em especial aos professores Rafael Bezerra dos Santos e Gustavo Terra Bastos por aceitarem o convite para comporem a banca examinadora e pelas valiosas correções que foram tão importantes para a melhoria deste trabalho, e aos demais colegas por todo ensinamento e pela formação além da profissional.

Nunca será um verdadeiro matemático aquele que não for um pouco de poeta.
(Karl Weierstrass)

Resumo

Este trabalho consiste no estudo das PI-álgebras, ou seja, álgebras que satisfazem identidades polinomiais não nulas. Denotamos por $\text{Id}(A)$ o conjunto das identidades polinomiais de uma PI-álgebra A . Seja $\text{UT}_2(\mathbb{F})$ a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem 2×2 sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica zero. O objetivo principal é mostrar que o conjunto das identidades polinomiais da $\text{UT}_2(\mathbb{F})$ é gerado, como T -ideal, por $[x_1, x_2][x_3, x_4]$, ou seja, $\text{Id}(\text{UT}_2(\mathbb{F})) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$.

Palavras-chave: Identidade polinomial, PI-álgebra, T -ideal.

Introdução

O estudo da PI-Teoria, se comparado a outras investigações da matemática, é relativamente novo. Embora polinômios não comutativos se anulando em álgebras já tivessem sido citados por Dehn[3] e Wagner[11] nas décadas de 1920 e 1930, respectivamente, a PI-Teoria teve, de fato, o seu início na década de 1940, mais especificamente em 1948, com um artigo de Kaplansky[6], dedicado ao estudo de uma PI-álgebra primitivas, no qual se observou que as identidades dessa álgebra influenciam de maneira direta em sua estrutura. Apenas dois anos depois, no ano de 1950, Amitsur e Levitzki[1] utilizaram métodos combinatórios para mostrar que o polinômio $St_{2n}(x_1, \dots, x_n) := \sum_{\sigma \in S_{2n}} \text{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(2n)}$, chamado de polinômio Standard de grau $2n$, é uma identidade polinomial de $M_n(F)$ para qualquer corpo F .

Existem ainda alguns exemplos clássicos de PI-álgebras. Um deles é a álgebra comutativa A cujo comutador de Lie de peso 2, isto é, $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$, é uma identidade polinomial de A , e portanto, A é uma PI-álgebra. Um importante exemplo é a $UT_2(F)$: álgebra das matrizes triangulares superiores 2×2 sobre um corpo (F) , que possui uma identidade polinomial dada por $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2][x_3, x_4]$, ou seja, a $UT_2(F)$ é uma PI-álgebra. Além disso, de uma maneira mais geral, podemos dizer que toda álgebra de dimensão finita é uma PI-álgebra, uma vez que, toda álgebra de dimensão n satisfaz o polinômio St_{n+1} .

Dados esses exemplos, é válido definir também o conjunto das identidades polinomiais satisfeitas por uma dada álgebra A , denotado por $\text{Id}(A)$, sendo um ideal invariante por endomorfismos de $F\langle X \rangle$. Um ideal com esta propriedade é chamado de T -ideal e, neste caso, $\text{Id}(A)$ é dito T -ideal de uma álgebra A . Também, em 1950, Specht [10] conjecturou que, sobre um corpo de característica zero, o T -ideal de uma álgebra associativa é finitamente gerado, como T -ideal; porém, somente em 1987, Kemer [7] conseguiu provar tal conjectura.

Poucas álgebras possuem o T -ideal conhecido. Em particular, o nosso interesse consiste em estudar o T -ideal da álgebra $UT_2(F)$ com o intuito de mostrar que $\text{Id}(UT_2(F)) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$, como demonstrado em 1971 por Malcev [8].

Os resultados citados anteriormente serão apresentados no decorrer deste trabalho, que será dividido em três partes. Assim, no decorrer dos capítulos, faremos uma construção dos conceitos a partir da concepção de grupos até o T -ideal de uma álgebra A para facilitar o entendimento do leitor.

No Capítulo 1, faremos uma breve revisão de alguns conceitos fundamentais para o estudo das PI-álgebras, como os grupos, os anéis e as álgebras. A partir desta apresentação, iniciaremos o Capítulo 2 explorando as álgebras com identidades polinomiais, trazendo primeiramente a definição e alguns exemplos de polinômios.

Os dois capítulos iniciais culminam no Capítulo 3, no qual mostraremos os conceitos de T -ideal e o Processo de Multilinearização. Tal processo é uma importante ferramenta para que os polinômios sejam escritos de maneira multilinear. Dessa forma, para finalizarmos o capítulo, será demonstrado o T -ideal da $UT_2(F)$, uma vez que este é o objetivo central deste trabalho.

Por fim, concluímos este estudo fazendo alguns comentários a respeito do T -ideal das matrizes triangulares superiores com ordens maiores do que 2×2 , em que é possível estender os resultados obtidos da $UT_2(F)$ para a $UT_n(F)$.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

A matemática é a partir dos conceitos. Desse modo, neste capítulo traremos algumas definições que serão de grande importância para o entendimento deste estudo. São os grupos, anéis e álgebras.

1.1 Grupos

Nesta seção apresentaremos a definição e os exemplos de grupos e subgrupos. Além disso, mostraremos alguns tipos de grupos, como o abeliano e os de permutações.

Definição 1. Dado um conjunto não vazio G munido com uma operação $\star$, definimos $(G, \star)$ como um *grupo* se satisfaz as condições:

- **Associatividade:** $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$, para todos $a, b, c \in G$;
- **Elemento neutro:** existe um elemento $e \in G$ tal que $a \star e = e \star a = a$, para todo $a \in G$;
- **Elemento simétrico, ou inverso:** para cada $a \in G$, existe um $a^{-1} \in G$ tal que $a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e$.

Note que o elemento neutro e o elemento inverso são únicos para cada grupo.

Definição 2. Um grupo $(G, \star)$ é chamado de *grupo abeliano* se $a \star b = b \star a$, para todos $a, b \in G$.

Exemplo 1. Os conjuntos $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ munidos com a operação adição usual têm estrutura de grupo. Neste caso, denotamos por $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{C}, +)$. Além disso, observe que tais grupos são grupos abelianos.

Exemplo 2. Seja $\mathbb{Z}_4^* = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ o conjunto da classe de restos inteiros módulo 4. Note que $\mathbb{Z}_4^*$, munido com o produto usual, não é um grupo, pois $\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{0} \notin \mathbb{Z}_4^*$.

Proposição 1. *Seja $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ o conjunto da classe de restos módulo $m > 1$ munido com a operação produto usual. Então, $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ é um grupo se, e somente se, m é primo.*

Demonstração. Considere que $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ é um grupo. Suponhamos que m não é um número primo. Como, por hipótese $m > 1$, então existem $1 < a, b < m \in \mathbb{Z}$ tais que $ab = m$. Observe que, módulo m , temos $\overline{ab} = \overline{m} = \overline{0} \notin \mathbb{Z}_m^*$. Uma contradição. Portanto, m é um número primo. Agora, queremos mostrar que, para m primo, $\mathbb{Z}_m^*$ é um grupo munido com o produto usual. Para isso, seja $\overline{a} \in \mathbb{Z}_m^*$, então mostraremos que existe $\overline{b} \in \mathbb{Z}_m^*$ de modo que $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{1}$. Se $\overline{a}$ pertence ao conjunto $\mathbb{Z}_m^*$, então a não é múltiplo de m . Como, por hipótese, m é primo, então $\text{mdc}(m, a) = 1$. Temos que, pela identidade de Bezout, $mx_0 + ay_0 = 1$, para certos $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$. Assim, módulo m , $\overline{mx_0 + ay_0} = \overline{m} \cdot \overline{x_0} + \overline{a} \cdot \overline{y_0} = \overline{a} \cdot \overline{y_0} = \overline{1}$. Isto nos mostra que $\overline{y_0} \in \mathbb{Z}_m^*$ é o inverso de $\overline{a}$. Portanto, temos que $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ é um grupo desde que m seja primo. ■

Como o foco deste trabalho está nas matrizes, precisamos identificar se as mesmas são um grupo munidas das operações adição e produto usuais.

Exemplo 3. *Seja $M_n(F)$ o conjunto das matrizes de ordem $n \times n$ sobre F , onde F é igual $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, temos que $(M_n(F), +)$ é um grupo.*

Para o próximo exemplo, é necessário destacar o conceito de matriz elementar. A *matriz elementar* em $M_n(F)$, denotada por e_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$ é o elemento da linha i e coluna j é igual a 1 e os outros elementos são iguais a zero. Por exemplo, a matriz elementar e_{12} de $M_2(F)$ é dada por $e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exemplo 4. *Verificaremos que o conjunto $(M_n(F), \cdot)$ não é um grupo. Para isto, recordaremos que uma matriz $A = M_n(F)$ possui uma matriz inversa se, e somente se, $\det(A) \neq 0$. Observe que o determinante das matrizes elementares são iguais a zero, e assim, elas não possuem inversa em $M_n(F)$. Portanto, $(M_n(F), \cdot)$ não é um grupo.*

Entretanto, restringindo as matrizes àquelas que possuem matriz inversa, podemos ter um grupo.

Exemplo 5. *Denotamos por $GL_n(F) = \{A \in M_n(F) \mid \det(A) \neq 0\}$ o conjunto das matrizes cujo determinante é diferente de 0. Deste modo, $(GL_n(F), \cdot)$ é um grupo.*

Definição 3. O conjunto simétrico, ou *conjunto de permutações*, denotado por S_n , é formado pelas bijeções de um conjunto finito $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ sobre ele mesmo. Dizemos ainda que um elemento de S_n é uma *permutação de n elementos*.

Podemos representar os elementos de S_n de forma matricial dada por

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n-1) & f(n) \end{pmatrix}.$$

Exemplo 6. Em S_3 denotamos a função $f : I_3 \rightarrow I_3$ dada por $f(1) = 3$, $f(2) = 1$ e $f(3) = 2$ como $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Proposição 2. O conjunto S_n munido com a composição de funções tem estrutura de grupo.

Demonstração. Considere f, g, h três permutações em S_n . Verificaremos que $(S_n, \circ)$ é um grupo.

- Associatividade: pela propriedade de composição, temos que $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Assim, $f \circ (g \circ h)(x) = f \circ (g(h(x))) = f(g(h(x))) = (f \circ g)(h(x)) = (f \circ g) \circ h(x)$;
- Elemento neutro: observe que a função identidade $e \in S_n$ dada por $e(x) = x$, para todo $x \in I_n$, é o elemento neutro de S_n . De fato, para $f \in S_n$, $(e \circ f)(x) = e(f(x)) = f(x)$ e, por outro lado, $(f \circ e)(x) = f(e(x)) = f(x)$. Logo, $(f \circ e)(x) = (e \circ f)(x) = f(x)$, para todo $x \in I_n$;
- Elemento simétrico: para cada $f \in S_n$ temos que, por hipótese, F é bijetiva, então F admite inversa $f^{-1} \in S_n$ e, por definição de função inversa, sabemos que $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = e(x)$, para todo $x \in I_n$. ■

Podemos reescrever as matrizes de permutação de uma outra maneira que definiremos a seguir.

Definição 4. Seja $f \in S_n$ uma permutação. Dizemos que F é um r -ciclo de S_n se, para um $n \geq 2$, existem $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementos distintos de I_n de modo que $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_3$, $\dots$, $f(x_{r-1}) = f(x_r)$, $f(x_r) = x_1$ e $f(j) = j$, para todo $j \in I_n - \{x_1, \dots, x_r\}$ e denotaremos a notação cíclica de F por $f = (x_1 x_2 \dots x_r)$.

Definição 5. Dizemos que $f \in S_n$ é uma *transposição* se F é um 2-ciclo.

Observação 1. Uma permutação pode ser expressa como um produto de transposições.

Definição 6. Dizemos que uma permutação é *par* se pode ser expressa como produto de uma quantidade par de transposições. De maneira análoga, definimos uma permutação *ímpar*.

À uma permutação par $f \in S_n$ associa-se um sinal positivo, que será denotado por $\text{sgn}(f) = +1$. De modo análogo, uma permutação ímpar possui $\text{sgn}(f) = -1$.

Exemplo 7. Dada a permutação $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ em S_3 , temos que sua notação cíclica é $f = (13)$. Observe que F é dada por uma transposição e, portanto, F é uma permutação ímpar.

Exemplo 8. A permutação $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \in S_6$ tem a representação cíclica $g = (13564)$. Esta permutação pode ser escrita como $g = (14)(16)(15)(13)$. Assim, g é uma permutação par.

Exemplo 9. A representação cíclica da permutação $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_6$ é $h = (135)(246)$. Podemos escrever $h = (15)(13)(26)(24)$, ou seja, h é uma permutação par.

Proposição 3. O grupo das permutações $(S_n, \circ)$ não é abeliano para $n \geq 3$.

Demonstração. Sejam $f, g \in S_n$, de modo que $f \circ g = (12) \circ (13) = (132)$. Entretanto, $g \circ f = (13) \circ (12) = (123)$ não é igual a $f \circ g$. Logo, $(S_n, \circ)$ não é um grupo abeliano, para $n \geq 3$. ■

Uma vez que está compreendido o conceito de grupo, definiremos subgrupos.

Definição 7. Sejam $(G, \star)$ um grupo e $H \subseteq G$ um conjunto não vazio. Dizemos que H é um subgrupo de G se $(H, \star)$ tem estrutura de grupo.

Definição 8. Chamamos por *centro de um grupo* G , e denotamos por $\mathcal{Z}(G)$, o conjunto dos elementos de G que comutam com todos os outros elementos deste grupo, ou seja,

$$\mathcal{Z}(G) = \{g \in G \mid gx = xg, \text{ para todo } x \in G\}.$$

Exemplo 10. O centro de um grupo G é um subgrupo de G .

Exemplo 11. Seja $A = M_2(F)$, onde F é um corpo de característica zero e H dado por

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, a + d = 0 \right\}.$$

Mostraremos que H é um subgrupo de A munido da adição usual.

Os elementos da diagonal principal das matrizes que compõem H são opostos entre si, devido à restrição $a + d = 0$. Considere as matrizes $B, C, D \in H$, dadas por:

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} r & s \\ t & -r \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} u & v \\ w & -u \end{pmatrix}.$$

Verificaremos que H satisfaz as condições da Definição 1 com a adição usual:

- *Associatividade:* segue de forma imediata que $B + (C + D) = (B + C) + D$;

- *Elemento neutro:* seja $e = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & -e_1 \end{pmatrix} \in H$ tal que $B+e = B$. Então, $\begin{pmatrix} a+e_1 & b+e_2 \\ c+e_3 & -a-e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$. Assim, $a+e_1 = a$, $b+e_2 = b$, $c+e_3 = c$ e $-a-e_1 = -a$ e, consequentemente, $e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

- *Elemento simétrico:* seja $S \in H$, onde $S = \begin{pmatrix} f & g \\ h & -f \end{pmatrix}$, de modo que $B+S = e$. Assim, $B+S = \begin{pmatrix} a+f & b+g \\ c+h & -a-f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Portanto, $f = -a$, $g = -b$, $h = -c$ e $-f = a$, ou seja, $S = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = -B$.

Logo, $(H, +)$ é um subgrupo de A munido com a soma usual.

Observação 2. Todo grupo possui pelo menos dois subgrupos. De fato, os subconjuntos $H_1 = \{e\}$ e $H_2 = G$ munidos com a mesma operação de G são subgrupos de G , chamados de subgrupos triviais.

Agora, apresentaremos uma proposição importante que nos fornece uma condição necessária e suficiente para verificar se um subconjunto de um grupo G é um subgrupo de G .

Proposição 4. Sejam $(G, \star)$ um grupo e $H \subseteq G$ um conjunto não vazio. Então, $(H, \star)$ é um subgrupo de G se, e somente se, $a \star b^{-1} \in H$, para todos $a, b \in H$.

Demonstração. Suponha que $(H, \star)$ é um subgrupo de G . Tomando $a, b \in H$, então, pela condição de H ser um grupo, $b^{-1} \in H$ e $a \star b^{-1} \in H$.

Agora suponha que $a \star b^{-1} \in H$, para todos $a, b \in H$. Precisamos mostrar que H possui estrutura de grupo com a operação $\star$. Para isto, seja $h_1 \in H$, por hipótese, temos que $h_1 \star h_1^{-1} = e \in H$, onde e é o elemento neutro de H . Além disso, como $e, h_1 \in H$, então $e \star h_1^{-1} = h_1^{-1} \in H$. Portanto, $(H, \star)$ é um subgrupo de G . ■

Exemplo 12. Seja o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$. Queremos mostrar que A é um subgrupo de $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$. Observe que dado um elemento $a \in A$, temos que $a^{-1} > 0$, portanto, A é um subgrupo de $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$.

1.2 Anéis

Nesta seção, apresentaremos o conceito de anel e, de acordo com a sua estrutura, definiremos anel comutativo, com unidade e anel de integridade. Além disso, no decorrer do texto, serão apresentados alguns resultados e exemplos importantes.

Definição 9. Sejam R um conjunto não vazio munido de uma operação adição $+$ e um produto $\cdot$. O sistema $(R, +, \cdot)$ é chamado *anel* se satisfaz as condições:

- $(R, +)$ é um grupo abeliano;
- **Associatividade da multiplicação:** $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, para todos $a, b, c \in R$;
- **Distributividade:** o produto é distributivo em relação à adição, ou seja, dados $a, b, c \in R$, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

Exemplo 13. Os conjuntos $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ são anéis munidos com a soma e a multiplicação usuais.

Exemplo 14. O conjunto $M_n(F)$, onde F é um anel, tem estrutura de anel.

Definição 10. Seja R um anel. Então R é um:

- *anel comutativo* se o produto em R for comutativo, ou seja, $ab = ba$, para todos $a, b \in R$;
- *anel com unidade* se possui um elemento neutro para a multiplicação definida sobre ele, ou seja, se existe um elemento $1_R \in R$, tal que $1_R \cdot a = a \cdot 1_R = a$, para todo $a \in R$. Dizemos que 1_R é a *unidade do anel* R ;
- *anel comutativo com unidade* se possui multiplicação comutativa e também unidade.

Exemplo 15. Os anéis $(\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ são anéis comutativos com unidade.

Note que o anel das matrizes, apesar de possuir unidade, não é um anel comutativo para o produto usual. Assim, $M_n(F)$ é somente um anel com unidade.

Definição 11. Definimos por *lei do cancelamento do produto* se, para $a, b, c \in A$ e $ab = ac$, então $b = c$.

Definição 12. Seja R um anel comutativo com unidade. Dizemos que R é um *anel de integridade* ou domínio de integridade quando vale a lei do cancelamento do produto para este anel.

Exemplo 16. Os anéis $(\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ são anéis de integridade.

Definição 13. Sejam $(R, +, \cdot)$ um anel de integridade e $U(R)$ o conjunto de todos os elementos invertíveis de R em relação ao produto. Se $U(R) = R - \{0_R\}$, então dizemos que R é um *corpo*.

Exemplo 17. Os anéis $(\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ são exemplos de corpos.

Definição 14. Sejam R um anel e $a \in R$. Se para algum menor inteiro $n > 0$ temos que $n \cdot a = 0_R$, para todo $a \in R$, chamamos n de *característica do anel* e denotamos por $n = \text{char}(R)$.

Se, ao contrário da definição acima, o anel R possui pelo menos um elemento $a \in R$ tal que $n \cdot a \neq 0_R$, para qualquer inteiro $n > 0$, então dizemos que a característica do anel é zero.

Exemplo 18. Os anéis $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ têm característica zero. De fato, dado m um inteiro positivo, temos que $m \cdot 1 = m \neq 0$.

Observação 3. Seja F um corpo. Então $\text{char}(F) = 0$ ou $\text{char}(F) = p$, onde p é um número primo. De fato, suponha que $\text{char}(F) = n$, onde n não é um número primo. Então, $n = xy$, para certos $x, y \in \mathbb{Z}$. Assim, para cada $a \in F$, $na = xya = yxa = 0$, e portanto, $\text{char}(F) = x$ ou $\text{char}(F) = y$. Uma contradição, pois n é o menor inteiro possível.

Definição 15. Sejam $(R, +, \cdot)$ um anel e L um subconjunto não vazio de R . Dizemos que L é um *subanel* de R se $(L, +, \cdot)$ é um anel.

Exemplo 19. O conjunto $\mathbb{Z}$ munido com a soma e produto usuais é um subanel de $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

O próximo exemplo é muito importante, pois se trata do nosso objeto de estudo neste trabalho.

Exemplo 20. Seja $UT_n(F)$ o conjunto das matrizes triangulares superiores $n \times n$ definido por $UT_n(F) = \{a_{ij} \mid a_{ij} = 0 \text{ se } i < j\}$. O anel $(UT_n(F), +, \cdot)$ é um subanel de $(M_n(F), +, \cdot)$.

Proposição 5. Sejam R um anel e L um subconjunto não vazio de R . Então L é um subanel de R se, e somente se, $a - b, a \cdot b \in L$, para todos $a, b \in L$.

Demonstração. Considere L um subanel de A . Mostraremos que $a - b, a \cdot b \in L$, para todos $a, b \in L$. Por definição, L é um subgrupo abeliano de A , então $a - b \in L$, para todos $a, b \in L$. Além disso, L é fechado para o produto, ou seja, $a \cdot b \in L$, para todos $a, b \in L$.

Agora, suponha que $a - b, ab \in L$, para todos $a, b \in L$. Por hipótese, se $a, b \in L$, então $a - b \in L$. Deste fato, pela Proposição 4, concluímos que L é um subgrupo de $(A, +)$. Além disso, como $ab \in L$, para todos $a, b \in L$, então L é fechado pela multiplicação. Se $a, b, c \in L$, então $a, b, c \in A$. Desta forma, $a(bc) = (ab)c$, $a(b+c) = ab+ac$ e $(b+c)a = ba+ca$, para todos $a, b, c \in L$.

Exemplo 21. Seja L o subconjunto de $\mathbb{R}$ dado por $L = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Mostraremos que L é um subanel de $\mathbb{R}$. Sejam $x, y \in L$ tais que $x = a + b\sqrt{2}$ e $y = c + d\sqrt{2}$, para $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Então:

- $x - y = (a + b\sqrt{2}) - (c + d\sqrt{2}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{2} \in L$, pois $(a - c), (b - d) \in \mathbb{Z}$;
- $x \cdot y = (a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac) + (ad\sqrt{2}) + (bc\sqrt{2}) + 2bd = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$.
Como $(ac + 2bd), (ad + bc) \in \mathbb{Z}$, então $(ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \in L$.

Pela Proposição 5, concluímos que L é um subanel de $\mathbb{R}$.

Definição 16. Sejam R um anel e I um subanel de R . Dizemos que I é:

- um *ideal à direita* de R se $xa \in I$;
- um *ideal à esquerda* de R se $ax \in I$;
- um *ideal bilateral* de R , ou simplesmente *ideal*, se $xa, ax \in I$,

para todos $x, y \in I$ e para todo $a \in R$.

Note que, se R é um anel, então $\{0_R\}$ e o próprio R são ideais em R , chamados de *ideais triviais*.

Exemplo 22. Sejam $R = \mathbb{Z}$ e $I = n\mathbb{Z} = \{0, \pm 1n, \pm 2n, \dots\}$. Mostraremos que $n\mathbb{Z}$ é um ideal de $\mathbb{Z}$.

Sejam $a \in \mathbb{Z}$ e $x, y \in n\mathbb{Z}$, onde $x = nr$ e $y = ns$, para certos $r, s \in \mathbb{Z}$. Assim,

- $x - y = nr - ns = n(r - s)$. Como $(r - s) \in \mathbb{Z}$, então $n(r - s) \in I$;
- $ax = anr = nar$. Assim, $n(ar) \in I$.

Observe que $ax = xa$. Portanto, I é um ideal de R .

Exemplo 23. Seja $I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ um subanel de $M_2(\mathbb{Z})$ tal que para $x = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$ e $m = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$, temos

$$xm = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ logo } I \text{ é um ideal à direita de } R, \text{ mas}$$

$$mx = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & xb \\ za & zb \end{pmatrix} \notin I. \text{ Assim, } I \text{ não é um ideal à esquerda de } R$$

A seguir, definiremos anel quociente, já que o usaremos no decorrer do trabalho. Para tal, precisamos, primeiramente, do conceito de classes de equivalência.

Definição 17. Sejam R um anel e I um ideal de R . Definimos uma relação $\sim$ em R como

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in I,$$

para todo $x, y \in R$. Esta relação é uma equivalência em R e, portanto, é simétrica, transitiva e reflexiva. Definimos ainda que, para todo $a \in R$, temos $\bar{a} = \{x \in R \mid x - a \in I\} = a + I$ chamada *classe de equivalência*.

Observação 4. Seja R/I o conjunto das classes de equivalência $\sim$ dado por $R/I = \{a + I \mid a \in R\}$. Temos que $a + I = b + I$ se, e somente se, $a - b \in I$.

Definição 18. Definimos as operações soma e produto em R/I por:

- $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$,
- $(a + I) \cdot (b + I) = (a \cdot b) + I$,

para todos $a, b \in R$.

Observação 5. Seja o conjunto R/I . Mostraremos que este conjunto é um anel, chamado de anel quociente. Sejam $a + I, b + I \in R/I$. Então, $(a + I) - (b + I) = (a - b) + I \in R/I$ e $(a + I) \cdot (b + I) = (a \cdot b) + I \in R/I$.

Observação 6. Note que em um anel quociente, $O_{R/I} = I$ e $-(a + I) = (-a) + I$, para todo $a \in R$.

1.3 Álgebra

Ao longo desta seção definiremos a principal estrutura deste trabalho: a estrutura de álgebra. Contudo, antes de definirmos álgebras, precisaremos de alguns conceitos prévios.

Definição 19. Dizemos que um conjunto não vazio V é um *espaço vetorial* sobre um corpo F se as seguintes condições são satisfeitas, para todos $u, v \in V$ e $\alpha, \beta \in F$:

- $(V, +)$ é um grupo abeliano;
- para cada $\alpha \in F, u \in V$, está associado um único elemento $\alpha u \in V$ que satisfaz:

$$(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u);$$

$$(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u;$$

$$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v;$$

$$1u = u1 = u.$$

Definição 20. Uma *combinação linear* de um conjunto de vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ de um espaço vetorial V sobre um corpo F é dada por:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

onde $c_1, c_2, \dots, c_n$ são escalares do corpo F .

De forma geral, um vetor $v \in V$ é dito ser uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ se existem escalares $c_1, c_2, \dots, c_n \in F$ tais que:

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n$$

Se esse conjunto de vetores gera todo o espaço vetorial V , então qualquer vetor em V pode ser escrito como uma combinação linear desses vetores.

Definição 21. Vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ são ditos *linearmente independentes* se a única combinação linear desses vetores resulta no vetor nulo quando todos os coeficientes são zero. Ou seja, os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ são linearmente independentes se:

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n = 0$$

implica que $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

Definição 22. Seja V um espaço vetorial. Chamamos de *base* o conjunto finito $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V tal que qualquer elemento de V pode ser escrito como uma combinação linear dos elementos de B .

Definição 23. Seja V um espaço vetorial. Dizemos que a *dimensão* de V é o número de elementos de uma base para V e denotamos por $\dim(V)$.

Dados estes conceitos básicos, partiremos para a definição de uma importante estrutura para este trabalho.

Definição 24. Dizemos que um espaço vetorial A sobre um corpo F é uma F -álgebra associativa, ou simplesmente *álgebra*, se A é também um anel e, para todos $a, b \in A$ e $\alpha \in F$, temos que

$$\alpha(a \cdot b) = (\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b).$$

Seja A uma F -álgebra. Se existe um elemento $1 = 1_A \in A$ de modo que $1a = a1 = a$, para todo $a \in A$, então A é uma *álgebra unitária*. Se A é um anel comutativo, consequentemente, A é uma *álgebra comutativa*. Dizemos que A é uma *álgebra nilpotente* se existe um número natural n para o qual $A^n = 0$, ou seja, $a_1 \cdot \dots \cdot a_n = 0$, para todos os $a_1, \dots, a_n \in A$. Neste caso, n é chamado de *índice de nilpotência* de A .

Observação 7. A *dimensão* de uma álgebra A é a *dimensão* do espaço vetorial A sobre F .

Exemplo 24. $\mathbb{C}$ é uma álgebra de dimensão 2 sobre $\mathbb{R}$ com base igual a $\{1, i\}$.

Exemplo 25. Para $n \geq 2$, $M_n(F)$ é uma álgebra não comutativa de dimensão n^2 com base $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^n$.

Definição 25. Dizemos que B é uma *subálgebra* de A se B é um subespaço vetorial de A e é fechado pela multiplicação.

Exemplo 26. $UT_n(F)$ é uma subálgebra de $M_n(F)$ de dimensão $\frac{(n+1)n}{2}$.

Capítulo 2

Álgebras com identidades polinomiais

Neste capítulo exploraremos o conceito de álgebras com identidades polinomiais, ou simplesmente PI-álgebras, e apresentaremos as principais PI-álgebras que usaremos no decorrer desta investigação.

2.1 Polinômios

Após a definição de álgebra, é preciso entender o que são polinômios, suas atribuições e alguns exemplos importantes de polinômios. Além disso, conceituaremos as identidades polinomiais de uma álgebra. Para definirmos o que é um polinômio, precisamos dos conceitos de variáveis e palavras.

Definição 26. Seja $X = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots\}$ um conjunto enumerável. Chamamos o elemento x_{i_j} de *variável* e de *palavra* a sequência $x_{i_1}x_{i_2} \cdots x_{i_n}$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $x_{i_j} \in X$.

Definição 27. O produto entre duas palavras é dado por:

$$x_{i_1}x_{i_2} \cdots x_{i_n} \cdot x_{j_1}x_{j_2} \cdots x_{j_m} = x_{i_1}x_{i_2} \cdots x_{i_n}x_{j_1}x_{j_2} \cdots x_{j_m},$$

onde as variáveis pertencem a X . A este produto damos o nome de *produto por justaposição*.

Definição 28. Seja $F\langle X \rangle$ o espaço vetorial cuja base é formada pelas palavras de X . A este espaço vetorial munido do produto por justaposição chamamos de *álgebra livre associativa* gerada por X sobre o corpo F .

Definição 29. Um elemento $f \in F\langle X \rangle$ é chamado de *polinômio* e denotamos por $f = \sum \alpha_h h$, onde α_h é um coeficiente de h , com $\alpha_h \in F$ e h é uma palavra em X . Se F possui como variáveis $x_1, \dots, x_n$ então escrevemos $f = f(x_1, \dots, x_n)$.

Chamamos de *posto de $F\langle X \rangle$* a cardinalidade de X , ou seja, a quantidade de elementos de X . Se $\alpha_h \neq 0$, dizemos que $\alpha_h h$ é um *monômio de F* .

Exemplo 27. Seja $f = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 x_3 - x_3^2 x_1 + 2x_2^2$. Seus monômios são $m_1 = x_1^2 x_2 x_3$, $M_2 = -x_3^2 x_1$ e $m_3 = 2x_2^2$.

É importante ressaltar algumas características referentes aos polinômios em $F\langle X \rangle$.

Definição 30. Sejam $m = m(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle$ um monômio e $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^r m_i$ um polinômio. Definimos:

- *grau de x_i em m* , e escrevemos $\deg_{x_i}(m)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, como o número de vezes que x_i aparece em m ;
- *grau do monômio m* como o comprimento da palavra m , contando todas as multiplicidades das variáveis e denotamos por $\deg(m)$;
- *grau em f da variável x_j* , escrito como $\deg_{x_j}(f)$, sendo o maior grau obtido entre todos os monômios de F em relação a x_j ;
- *grau de f* sendo o maior grau entre todos os monômios e denotamos por $\deg(f)$;
- *f homogêneo na variável x_i* se x_i aparece com o mesmo grau em todos os monômios de f ;
- *polinômio multihomogêneo* se f é homogêneo para todo x_i , $i = 1, \dots, n$.

Exemplo 28. Seja $f = f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_4 x_2^2 x_3 - 5x_3^2 x_1 x_4 x_2^2 + 2x_4 x_2^2$, então os monômios de f são $m_1 = x_1 x_4 x_2^2 x_3$, $M_2 = -5x_3^2 x_1 x_4 x_2^2$ e $m_3 = 2x_4 x_2^2$.

Assim, $\deg_{x_1}(m_1) = \deg_{x_1}(m_2) = 1$, $\deg_{x_1}(m_3) = 0$ e $\deg_{x_1}(f) = 1$; $\deg_{x_2}(m_1) = \deg_{x_2}(m_2) = \deg_{x_2}(m_3) = 2$ e $\deg_{x_2}(f) = 2$; $\deg_{x_3}(m_1) = 1$, $\deg_{x_3}(m_2) = 2$, $\deg_{x_3}(m_3) = 0$ e $\deg_{x_3}(f) = 2$ e $\deg_{x_4}(m_1) = \deg_{x_4}(m_2) = \deg_{x_4}(m_3) = 1$ e $\deg_{x_4}(f) = 1$.

Portanto, $\deg(m_1) = 5$, $\deg(m_2) = 6$ e $\deg(m_3) = 3$ e $\deg(f) = 6$. Observe que f é homogêneo somente nas variáveis x_2 e x_4 , e assim, não é multihomogêneo.

Observação 8. Se $\deg_{x_i}(f) = 1$, então dizemos que f é um polinômio linear em x_i .

Exemplo 29. O polinômio $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 - x_3^2 x_1 + 2x_2^2 x_1$ é linear na variável x_1 .

Definição 31. Se $f \in F\langle X \rangle$ é um polinômio linear em todas as suas variáveis então dizemos que f é um polinômio multilinear.

Exemplo 30. Seja o polinômio $f = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_3 x_2 + 4x_3 x_1 x_2 x_1 - 3x_1 x_2 x_3 x_1$ e considere seus monômios $m_1 = x_1^2 x_3 x_2$, $m_2 = 4x_3 x_1 x_2 x_1$ e $m_3 = -3x_1 x_2 x_3 x_1$. Como $\deg_{x_1}(m_1) = \deg_{x_1}(m_2) = \deg_{x_1}(m_3) = 2$, $\deg_{x_2}(m_1) = \deg_{x_2}(m_2) = \deg_{x_2}(m_3) = 1$ e $\deg_{x_3}(m_1) = \deg_{x_3}(m_2) = \deg_{x_3}(m_3) = 1$, temos que f é homogêneo em x_1, x_2 e x_3 . Já em relação à linearidade, temos que f não é linear em x_1 . Portanto, f é multihomogêneo, mas não é multilinear.

A seguir definiremos alguns polinômios que serão importantes para este trabalho.

Definição 32. Definimos o *comutador de Lie* de peso 2 como

$$[x_1, x_2] := x_1x_2 - x_2x_1.$$

O comutador de peso 3 é definido como $[x_1, x_2, x_3] = [[x_1, x_2], x_3]$. Assim, sucessivamente, para todo $n \geq 3$,

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] = [[x_1, \dots, x_{n-1}], x_n].$$

Ainda podemos observar que o comutador de peso n é multilinear.

Observação 9. *Dois propriedades importantes do comutador devem ser destacadas:*

- **Anticomutatividade:** $[x_1, x_2] = -[x_2, x_1]$;
- **Identidade de Jacobi:** $[x_1, x_2, x_3] + [x_2, x_3, x_1] + [x_3, x_1, x_2] = 0$.

De fato, $-[x_2, x_1] = -(x_2x_1 - x_1x_2) = x_1x_2 - x_2x_1 = [x_1, x_2]$ e portanto, vale a anticomutatividade.

Para a Identidade de Jacobi, temos:

$$\begin{aligned} [x_1, x_2, x_3] &= [[x_1, x_2], x_3] = [(x_1x_2 - x_2x_1), x_3] = (x_1x_2 - x_2x_1)x_3 - x_3(x_1x_2 - x_2x_1) = x_1x_2x_3 - \\ & x_2x_1x_3 - x_3x_1x_2 + x_3x_2x_1; \\ [x_2, x_3, x_1] &= [[x_2, x_3], x_1] = [(x_2x_3 - x_3x_2), x_1] = (x_2x_3 - x_3x_2)x_1 - x_1(x_2x_3 - x_3x_2) = x_2x_3x_1 - \\ & x_3x_2x_1 - x_1x_2x_3 + x_1x_3x_2; \\ [x_3, x_1, x_2] &= [[x_3, x_1], x_2] = [(x_3x_1 - x_1x_3), x_2] = (x_3x_1 - x_1x_3)x_2 - x_2(x_3x_1 - x_1x_3) = x_3x_1x_2 - \\ & x_1x_3x_2 - x_2x_3x_1 + x_2x_1x_3. \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } [x_1, x_2, x_3] + [x_2, x_3, x_1] + [x_3, x_1, x_2] = x_1x_2x_3 - x_2x_1x_3 - x_3x_1x_2 + x_3x_2x_1 + x_2x_3x_1 - x_3x_2x_1 - x_1x_2x_3 + x_1x_3x_2 + x_3x_1x_2 - x_1x_3x_2 - x_2x_3x_1 + x_2x_1x_3 = 0.$$

De modo geral, dados $f, g \in F\langle X \rangle$, podemos definir $[f, g] := fg - gf$. Sejam $f_1, \dots, f_n \in F\langle X \rangle$, definimos $[f_1, \dots, f_n] := [[f_1, \dots, f_{n-1}], f_n]$.

Definição 33. O *produto de Jordan* de duas variáveis é definido como

$$x_1 \circ x_2 = x_1x_2 + x_2x_1.$$

É possível perceber que o produto de Jordan é um polinômio multilinear. Podemos generalizar o produto de Jordan para $f, g \in F\langle X \rangle$, definindo como $f \circ g = fg + gf$.

Definição 34. O polinômio

$$St_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)},$$

onde S_n é o grupo simétrico de grau n e $\text{sgn}(\sigma)$ denota o sinal da permutação $\sigma \in S_n$, é chamado de *polinômio Standard de grau n* .

Exemplo 31. O polinômio Standard de grau 3 é dado por

$$St_3(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\sigma \in S_3} \text{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} = x_1 x_2 x_3 - x_2 x_1 x_3 - x_3 x_2 x_1 - x_1 x_3 x_2 + x_2 x_3 x_1 + x_3 x_1 x_2.$$

Note que podemos reescrever o polinômio Standard de grau 3 como combinação de comutadores de peso 2.

De fato,

$$\begin{aligned} St_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_2 x_3 - x_1 x_3 x_2 - x_2 x_1 x_3 + x_2 x_3 x_1 + x_3 x_1 x_2 - x_3 x_2 x_1 \\ &= x_1(x_2 x_3 - x_3 x_2) - x_2(x_1 x_3 - x_3 x_1) + x_3(x_1 x_2 - x_2 x_1) \\ &= x_1[x_2, x_3] - x_2[x_1, x_3] + x_3[x_1, x_2] \\ &= x_1 St_2(x_2, x_3) - x_2 St_2(x_1, x_3) + x_3 St_2(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Exemplo 32. O polinômio Standard de grau 4 pode ser escrito como combinações entre comutadores e produto de Jordan de modo que

$$St_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2] \circ [x_3, x_4] + [x_1, x_3] \circ [x_4, x_2] + [x_1, x_4] \circ [x_2, x_3].$$

De fato, separando a equação em grupos, temos que

$$\begin{aligned} [x_1, x_2] \circ [x_3, x_4] &= (x_1 x_2 - x_2 x_1) \circ (x_3 x_4 - x_4 x_3) = \\ &= x_1 x_2 x_3 x_4 - x_1 x_2 x_4 x_3 - x_2 x_1 x_3 x_4 + x_2 x_1 x_4 x_3 + x_3 x_4 x_1 x_2 - x_3 x_4 x_2 x_1 - x_4 x_3 x_1 x_2 + x_4 x_3 x_2 x_1, \\ [x_1, x_3] \circ [x_4, x_2] &= (x_1 x_3 - x_3 x_1) \circ (x_4 x_2 - x_2 x_4) = \\ &= x_1 x_3 x_4 x_2 - x_1 x_3 x_2 x_4 - x_3 x_1 x_4 x_2 + x_3 x_1 x_2 x_4 + x_4 x_2 x_1 x_3 - x_4 x_2 x_3 x_1 - x_2 x_4 x_1 x_3 + x_2 x_4 x_3 x_1, \\ [x_1, x_4] \circ [x_2, x_3] &= (x_1 x_4 - x_4 x_1) \circ (x_2 x_3 - x_3 x_2) = \\ &= x_1 x_4 x_2 x_3 - x_1 x_4 x_3 x_2 - x_4 x_1 x_2 x_3 + x_4 x_1 x_3 x_2 + x_2 x_3 x_1 x_4 - x_2 x_3 x_4 x_1 - x_3 x_2 x_1 x_4 + x_3 x_2 x_4 x_1. \end{aligned}$$

Assim, observe que $St_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2] \circ [x_3, x_4] + [x_1, x_3] \circ [x_4, x_2] + [x_1, x_4] \circ [x_2, x_3]$.

Observação 10. O polinômio Standard de grau $n + 1$ pode ser escrito a partir do polinômio Standard de grau n , da seguinte maneira

$$St_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} x_i St_n(x_1, \dots, \underline{x_i}, \dots, x_n),$$

onde $\underline{x_i}$ é a omissão da variável x_i . Note que o polinômio Standard é um polinômio multilinear.

Definição 35. O polinômio de Capelli de posto m é definido por

$$Cap_m(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{m+1}) = \sum_{\sigma \in S_m} \text{sgn}(\sigma) y_1 x_{\sigma(1)} y_2 x_{\sigma(2)} \cdots y_m x_{\sigma(m)} y_{m+1}.$$

Exemplo 33. O polinômio de Capelli de posto 3 é dado por

$$\begin{aligned} \text{Cap}_3(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, y_4) &= \sum_{\sigma \in S_3} \text{sgn}(\sigma) y_1 x_{\sigma(1)} y_2 x_{\sigma(2)} y_3 x_{\sigma(3)} y_4 = y_1 x_1 y_2 x_2 y_3 x_3 y_4 - \\ & y_1 x_2 y_2 x_1 y_3 x_3 y_4 - y_1 x_3 y_2 x_2 y_3 x_1 y_4 - y_1 x_1 y_2 x_3 y_3 x_2 y_4 + y_1 x_2 y_2 x_3 y_3 x_1 y_4 + y_1 x_3 y_2 x_1 y_3 x_2 y_4. \end{aligned}$$

Observe que $\text{Cap}_m(x_1, \dots, x_m, 1, \dots, 1) = \text{St}_m(x_1, \dots, x_m)$. Além disso, temos que o polinômio de Capelli é um polinômio multilinear.

Definição 36. Seja $f = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ um polinômio linear nas variáveis $x_1, \dots, x_n$. Chamamos F de *polinômio alternado* nas variáveis $x_1, \dots, x_n$ se, para todo $1 \leq i, j \leq n, i \neq j$, o polinômio se anula quando trocamos x_i para o lugar de x_j .

Se F é alternado nas variáveis $x_1, \dots, x_n$ então

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) + f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0$$

ou seja,

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m).$$

Se $\text{char}(F) \neq 2$, então esta propriedade é equivalente à definição de polinômio alternado nas variáveis $x_1, \dots, x_n$. Logo, de modo geral, se $\sigma \in S_n$

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, y_1, \dots, y_m) = \text{sgn}(\sigma) f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m).$$

Um polinômio que é alternado em todas as suas variáveis é chamado *polinômio alternado*. $\tilde{f}$

Exemplo 34. O polinômio Standard é um polinômio alternado. De fato,

$$\begin{aligned} \text{St}_n(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(i)} \cdots x_{\sigma(j)} \cdots x_{\sigma(n)} \\ &= - \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(j)} \cdots x_{\sigma(i)} \cdots x_{\sigma(n)} = -\text{St}_n(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) \end{aligned}$$

De maneira análoga, o polinômio de Capelli é um polinômio alternado nas variáveis $x_{i's}$, uma vez que os elementos $y_{j's}$ estão fixos nos monômios deste polinômio.

Pela Definição 24, temos que as palavras em X nos fornecem uma base de $F\langle X \rangle$ sobre o corpo F . O teorema a seguir, o Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, nos oferece uma base mais funcional, formada por variáveis e comutadores.

Teorema 1. (Poincaré-Birkhoff-Witt) Seja B um conjunto ordenado formado pelos seguintes elementos de $F\langle X \rangle$

$$x_1, x_2, \dots, [x_{i_1}, x_{i_2}], [x_{j_1}, x_{j_2}], \dots, [x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}], \dots$$

Então, a álgebra $F\langle X \rangle$ possui uma base sobre F formada pelos elementos

$$x_{n_1} \cdots x_{n_p} c_{m_1} \cdots c_{m_k},$$

onde $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_p$, $p \geq 0$, $c_{m_1}, \dots, c_{m_k}$ são comutadores de pesos arbitrários de modo que $c_{m_1} \leq c_{M_2} \leq \cdots \leq c_{m_k}$ na ordenação induzida de B .

A proposição a seguir nos fornece um modo de reescrever os polinômios multilineares da álgebra livre $F\langle X \rangle$.

Proposição 6. *Todo polinômio multilinear de grau n pode ser dado como uma combinação linear de variáveis e comutadores, e ser escrito da forma*

$$x_{i_1} \cdots x_{i_{s_1}} [x_{j_1}, \dots, x_{j_{s_2}}] \cdots [x_{l_1}, \dots, x_{l_{s_m}}],$$

onde $i_1 < \cdots < i_{s_1}$ e $[x_{j_1}, \dots, x_{j_{s_2}}] = c_1, \dots, c_r = [x_{l_1}, \dots, x_{l_{s_m}}]$ são os comutadores de pesos arbitrários nas variáveis e $\sum_{i=1}^m s_i = n$.

Para o próximo exemplo, observe que $[[x_4, x_2], x_3] = [x_4, x_2]x_3 - x_3[x_4, x_2]$, e assim, $[x_4, x_2]x_3 = [[x_4, x_2], x_3] + x_3[x_4, x_2]$.

Exemplo 35. *O polinômio $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_4x_3x_2$ não está ordenado. Sabemos que $[x_3, x_2] = x_3x_2 - x_2x_3$, ou seja, $x_3x_2 = [x_3, x_2] + x_2x_3$. Substituindo esta expressão no polinômio, temos que*

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1x_4([x_3, x_2] + x_2x_3) \\ &= x_1x_4[x_3, x_2] + x_1x_4x_2x_3 \\ &= x_1x_4[x_3, x_2] + x_1[x_4, x_2]x_3 + x_1x_2x_4x_3 \\ &= x_1x_4[x_3, x_2] + x_1([x_4, x_2, x_3] + x_3[x_4, x_2]) + x_1x_2([x_4, x_3] + x_3x_4) \\ &= x_1x_4[x_3, x_2] + x_1[x_4, x_2, x_3] + x_1x_3[x_4, x_2] + x_1x_2[x_4, x_3] + x_1x_2x_3x_4. \end{aligned}$$

Portanto, o polinômio f está nas condições da Proposição 6.

2.2 PI-álgebras

Nesta seção iremos definir e exemplificar as identidades polinomiais de uma álgebra. Para tal, utilizaremos os conceitos de álgebras e polinômios apresentados anteriormente.

Definição 37. Sejam A uma F -álgebra e $f = f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle$. Chamamos f de *identidade polinomial* de A se

$$f(a_1, \dots, a_n) = 0, \text{ para todos os elementos } a_i \in A.$$

Esta expressão é escrita como $f \equiv 0$ em A . Observe que o polinômio nulo é sempre uma identidade de A . Se uma álgebra A admite uma identidade não nula, então podemos dizer que A é uma *PI-álgebra*.

Exemplo 36. *Seja A uma álgebra comutativa. Considere o polinômio $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$. Observe que $f(a_1, a_2) = 0$, para todos $a_1, a_2 \in A$, pois A é uma álgebra comutativa. Logo, toda álgebra comutativa é uma PI-álgebra.*

Exemplo 37. *Mostraremos que a álgebra $UT_2(F)$ é uma PI-álgebra.*

Sejam $A, B \in UT_2(F)$, tais que $A = a_1e_{11} \oplus a_2e_{12} \oplus a_3e_{22}$ e $B = b_1e_{11} \oplus b_2e_{12} \oplus b_3e_{22}$, onde $a_i, b_i \in F$, $i = 1, 2, 3$. Assim, $AB = a_1b_1e_{11} \oplus (a_1b_2 + a_2b_3)e_{12} \oplus a_3b_3e_{22}$ e $BA = b_1a_1e_{11} \oplus (b_1a_2 + b_2a_3)e_{12} \oplus b_3a_3e_{22}$. Desta forma, o comutador, $[A, B] = AB - BA = \alpha e_{12}$, $\alpha \in F$.

De maneira análoga, temos que $[C, D] = \beta e_{12}$, para certos $C, D \in UT_2(F)$ e $\beta \in F$. Logo $[A, B][C, D] = \alpha\beta(e_{12}e_{12}) = 0$. Portanto, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2][x_3, x_4]$ é uma identidade polinomial da álgebra $UT_2(F)$.

Exemplo 38. *Mostraremos que*

$$f(x_1, \dots, x_{2n}) = [x_1, x_2] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}]$$

é uma identidade polinomial da $UT_n(F)$.

No Exemplo 37 vimos que o comutador de duas matrizes $A, B \in UT_2(F)$ é da forma

$$[A, B] = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $\alpha \in F$. De um modo geral, se $A, B \in UT_n(F)$, então

$$[A, B] \in \begin{pmatrix} 0 & F & \cdots & F \\ 0 & 0 & \cdots & F \\ \vdots & \vdots & \ddots & F \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, o comutador de duas matrizes triangulares superiores é uma matriz triangular estritamente superior. Denote por $C_n(F)$ a álgebra das matrizes $n \times n$ triangulares estritamente superiores. Observamos que $C_n(F)$ é uma álgebra nilpotente com índice de nilpotência n . Assim, se $A_1, A_2, \dots, A_{2n-1}, A_{2n} \in UT_n(F)$, então

$$[A_1, A_2] \cdots [A_{2n-1}, A_{2n}] = 0.$$

Logo,

$$f(x_1, \dots, x_{2n}) = [x_1, x_2] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}] \equiv 0$$

em $UT_n(F)$.

A proposição a seguir nos auxilia na exibição de mais exemplos de PI-álgebras como também nos fornece uma vantagem em trabalhar com polinômios multilineares. A importância deste resultado é que podemos avaliar um polinômio multilinear f sobre uma base de A para, enfim, sabermos se F é uma identidade polinomial de A .

Proposição 7. *Seja A uma álgebra gerada como espaço vetorial por um dado conjunto B sobre um corpo F . Se um polinômio multilinear $f = f(x_1, \dots, x_n)$ é tal que se anula perante as substituições dos elementos de B , então f é uma identidade polinomial da álgebra A .*

Demonstração. Sejam $\{b_i\}_{i \in I}$ um conjunto gerador de A sobre F e $a_1, \dots, a_n$ elementos de A . Por hipótese, podemos escrever os elementos de A na forma $a_j = \sum \alpha_{j_i} b_i$, onde $\alpha_{j_i} \in F$ e $b_i \in B$. Sabemos, também por hipótese, que f é multilinear, então $f(a_1, \dots, a_n) = \sum \alpha_{1_i} \dots \alpha_{n_i} f(b_{i_1}, \dots, b_{i_n})$. Como $f(b_{i_1}, \dots, b_{i_n}) = 0$, para todo b_{i_j} em B , então $f(a_1, \dots, a_n) = 0$, para todos $a_1, \dots, a_n \in A$. ■

Proposição 8. *Seja $f = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ um polinômio multilinear e alternado nas variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$. Se os elementos $a_1, \dots, a_n \in A$ são linearmente dependentes sobre F , então $f(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) = 0$, para $b_j \in A, j \in \{1, \dots, m\}$.*

Vimos anteriormente que, para todo $n \geq 2$, o polinômio Standard é multilinear e alternado. A partir disto e da proposição anterior, temos o seguinte resultado.

Corolário 1. *Toda álgebra de dimensão n satisfaz o polinômio St_{n+1} .*

Definição 38. *Seja A uma álgebra. Dizemos que A satisfaz o polinômio de Capelli de posto m se A satisfaz todos os polinômios da forma*

$$Cap_m(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{m+1})$$

quando substituirmos determinadas variáveis y'_i s por 1.

De um modo geral, é possível provar que se A é uma álgebra de dimensão finita m , então A satisfaz a identidade de Capelli de posto $m + 1$. Note que existem 2^{m+1} polinômios quando realizamos a substituição.

Exemplo 39. *O polinômio Capelli de posto 2 apresenta 8 formas quando realizamos as substituições nas variáveis y'_i s. De fato, são os polinômios*

$$Cap_2(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3), Cap_2(x_1, x_2, 1, y_2, y_3), Cap_2(x_1, x_2, y_1, 1, y_3), Cap_2(x_1, x_2, y_1, y_2, 1),$$

$$Cap_2(x_1, x_2, 1, 1, y_3), Cap_2(x_1, x_2, 1, y_2, 1), Cap_2(x_1, x_2, y_1, 1, 1), Cap_2(x_1, x_2, 1, 1, 1).$$

Assim como para o polinômio Standard, temos o corolário referente ao polinômio de Capelli.

Corolário 2. *Seja A uma álgebra. Se A possui dimensão n , então A satisfaz Cap_{n+1} .*

Nos exemplos a seguir, determinaremos algumas identidades polinomiais de $M_2(F)$.

Exemplo 40. *Seja $A = M_2(F)$. Sabemos que a dimensão desta álgebra é 4 então, pelo Corolário 1, temos que $St_5 \equiv 0$ em $M_2(F)$. Porém, é possível verificar que $St_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv 0$ em $M_2(F)$.*

De fato, utilizando o Exemplo 32 e as matrizes elementares como uma base de A , temos que

$$St_4(e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}) = [e_{11}, e_{12}] \circ [e_{21}, e_{22}] + [e_{11}, e_{21}] \circ [e_{22}, e_{12}] + [e_{11}, e_{22}] \circ [e_{12}, e_{21}] = (e_{11}e_{12} - e_{12}e_{11}) \circ (e_{21}e_{22} - e_{22}e_{21}) + (e_{11}e_{21} - e_{21}e_{11}) \circ (e_{22}e_{12} - e_{12}e_{22}) + (e_{11}e_{22} - e_{22}e_{11}) \circ (e_{12}e_{21} - e_{21}e_{12}) = (e_{12} \circ e_{21}) + ((-e_{21}) \circ (-e_{12})) + (0 \circ (e_{11} - e_{22})) = e_{12}(-e_{21}) + (-e_{21})e_{12} + (-e_{21})(-e_{12}) + (-e_{12})(-e_{21}) = -e_{11} - e_{22} + e_{22} + e_{11} = 0.$$

Para o próximo exemplo, denotaremos por $Tr(A)$ o traço da matriz A , dado pela soma dos elementos da diagonal principal da matriz.

Exemplo 41. *Mostraremos que o polinômio $f(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2]^2, x_3]$ é uma identidade polinomial da $M_2(F)$, chamada identidade de Hall. Seja $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(F)$. O polinômio característico desta matriz é dado por $p(x) = x^2 - Tr(A)x + det(A)$ e pelo Teorema de Cayley Hamilton, temos que*

$$p(A) = A^2 - Tr(A)A + det(A)Id(A) = 0.$$

Sejam $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \in M_2(F)$ tais que $A = [B, C]$, então

$$A = BC - CB = \begin{pmatrix} b_{12}c_{21} - c_{12}b_{21} & b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} - c_{11}b_{12} - c_{12}b_{22} \\ b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} - c_{21}b_{11} - c_{22}b_{21} & b_{21}c_{12} - c_{21}b_{12} \end{pmatrix}. \text{ Logo,}$$

$Tr(A) = 0$, e assim, $A^2 = -det(A)Id(A)$. Isso nos mostra que

$$[B, C]^2 = -det([B, C])Id([B, C]).$$

Portanto, para $D \in M_2(F)$, temos que $[[B, C]^2, D] \equiv 0$ em $M_2(F)$.

A seguir daremos um importante exemplo de PI-álgebra de dimensão infinita.

Exemplo 42. *Seja $I = \langle x_i x_j + x_j x_i \mid i, j \geq 1 \rangle$ um ideal bilateral de $F\langle X \rangle$. Considere o quociente $\mathcal{G} = F\langle X \rangle / I$ e denote por $e_i := x_i + I, i \in \mathbb{N}$. $\mathcal{G}$ é chamada de álgebra de Grassmann de dimensão infinita sobre F gerada por $\mathcal{B} = \{1, e_{i_1} \cdots e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k, k \geq 1\}$. Se $char(F) \neq 2$, então podemos representar tal álgebra como*

$$\mathcal{G} = \langle 1, e_1, e_2, \dots \mid e_i e_j = -e_j e_i, i, j \in \mathbb{N} \rangle.$$

Denote ainda os subespaços da álgebra de Grassmann por

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^{(0)} &= \text{span}_F\{e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_{2k}, k \geq 0\}, \\ \mathcal{G}^{(1)} &= \text{span}_F\{e_{i_1} \cdots e_{i_{2k+1}} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_{2k+1}, k \geq 0\}.\end{aligned}$$

Em linhas gerais, $\mathcal{G}^{(0)}$ indica o conjunto dos monômios com uma quantidade par de elementos e_i e $\mathcal{G}^{(1)}$ uma quantidade ímpar de elementos e_i . A partir da definição, verificamos que os subespaços satisfazem as relações:

- $\mathcal{G}^{(0)}\mathcal{G}^{(0)} + \mathcal{G}^{(1)}\mathcal{G}^{(1)} \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$;
- $\mathcal{G}^{(0)}\mathcal{G}^{(1)} + \mathcal{G}^{(1)}\mathcal{G}^{(0)} \subseteq \mathcal{G}^{(1)}$.

Do primeiro item, temos que $\mathcal{G}^{(0)}$ é uma subálgebra de $\mathcal{G}$. Como $\mathcal{G}^{(0)} \cap \mathcal{G}^{(1)} = \{0\}$ e todos os elementos de $\mathcal{G}$ podem ser escritos como combinações de $\mathcal{G}^{(0)}$ e $\mathcal{G}^{(1)}$, então podemos dizer que $\mathcal{G} = \mathcal{G}^{(0)} + \mathcal{G}^{(1)}$.

Agora considere $x = e_1 e_2 \cdots e_{2k}$, $x \in \mathcal{G}^{(0)}$, então

$$\begin{aligned}x \cdot e_i &= e_1 e_2 \cdots e_{2k} e_i \\ &= -e_1 e_2 \cdots e_{2k-1} e_i e_{2k} \\ &= e_1 e_2 \cdots e_{2k-2} e_i e_{2k-1} e_{2k} \\ &\vdots \\ &= e_i e_1 e_2 \cdots e_{2k}.\end{aligned}$$

Isto ocorre, pois x tem uma quantidade par de elementos e_j . Estendendo este resultado para qualquer $y \in \mathcal{G}$, temos que $yx = xy$, e assim, $\mathcal{G}^{(0)} \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{G})$. Desta forma, para todos $a = a_0 + a_1$ e $b = b_0 + b_1 \in \mathcal{G}$, onde $a_0, b_0 \in \mathcal{G}^{(0)}$ e $a_1, b_1 \in \mathcal{G}^{(1)}$, temos que

$$[a, b] = [a_0 + a_1, b_0 + b_1] = [a_0, b_0] + [a_0, b_1] + [a_1, b_0] + [a_1, b_1].$$

Como os elementos de $\mathcal{G}^{(0)}$ comutam com os elementos de $\mathcal{G}$, então $[a_0, b_0] = [a_0, b_1] = [a_1, b_0] = 0$. Portanto,

$$[a, b] = [a_0, b_0] + [a_0, b_1] + [a_1, b_0] + [a_1, b_1] = a_1 b_1 - b_1 a_1 = 2a_1 b_1 \in \mathcal{G}^{(0)}.$$

Deste modo, obtemos que $[x_1, x_2, x_3] = [[x_1, x_2], x_3] \equiv 0$ em $\mathcal{G}$, pois $[\mathcal{G}, \mathcal{G}] \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{G})$. Assim, $\mathcal{G}$ é uma PI-álgebra.

Capítulo 3

T-Ideal da $UT_2(F)$

Neste capítulo, iremos definir o que é um T-ideal, bem como algumas aplicações e exemplos. Mostraremos também o Processo de Multilinearização como uma ferramenta auxiliadora para escrevermos polinômios de uma maneira multilinear. Além disso, demonstraremos que o T-ideal da $UT_2(F)$ é dado por $\text{Id}(UT_2(F)) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$.

Ao longo deste capítulo consideraremos F um corpo de característica zero.

3.1 T-Ideal

Nesta seção, considerando o conjunto das identidades polinomiais de uma álgebra, definimos o T-ideal gerado por uma álgebra. Também serão apresentadas algumas idéias a respeito do processo de multilinearização, que nos permite um importante resultado a respeito das identidades polinomiais de uma álgebra.

Definição 39. Seja A uma álgebra. Denominamos por

$$\text{Id}(A) = \{f \in F\langle X \rangle \mid f \equiv 0 \text{ em } A\},$$

o conjunto de todas as identidades polinomiais de A .

Observação 11. A é uma PI-álgebra se, e somente se, $\text{Id}(A) \neq \{0\}$.

Exemplo 43. Seja A uma álgebra comutativa. É claro que $\text{Id}(A) \neq 0$, pois $[x_1, x_2] \in \text{Id}(A)$, para todos $x_1, x_2 \in A$.

Definição 40. Sejam as álgebras A e B . Chamamos por *homomorfismo* a aplicação $\phi : A \rightarrow B$ se, para todos $a, b \in A$ e $\alpha \in F$, temos:

- $\phi(\alpha a) = \alpha \phi(a)$;
- $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$;

- $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$.

Se a aplicação ϕ é dada por $\phi : A \rightarrow A$, então dizemos que ϕ é um *endomorfismo*.

Note que $\text{Id}(A)$ é um ideal bilateral de $F\langle X \rangle$. Além disso, se considerarmos $f(x_1, \dots, x_n)$ uma identidade de A e um endomorfismo $\phi : F\langle X \rangle \rightarrow F\langle X \rangle$ que mapeia $x_i \rightarrow g_i$ de modo que

$$\phi(f) = f(\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)) = f(g_1, \dots, g_n) \equiv 0 \text{ em } A.$$

Assim, $\text{Id}(A)$ é um ideal invariante sob todos os endomorfismos de $F\langle X \rangle$.

Exemplo 44. *Seja A uma álgebra tal que $[x_1, x_2]x_3^2 \in \text{Id}(A)$. Então, $[x_1x_3, x_4^2, x_5x_6^3]x_7^6 \equiv 0$ em A . De fato, se considerarmos o endomorfismo*

$$\begin{aligned} \phi : F\langle X \rangle &\rightarrow F\langle X \rangle \\ x_1 &\rightarrow [x_1x_3, x_4^2] \\ x_2 &\rightarrow x_5x_6^3 \\ x_3 &\rightarrow x_7^3, \end{aligned}$$

vemos que $[x_1x_3, x_4^2, x_5x_6^3]x_7^6 \in \text{Id}(A)$.

Definição 41. Dizemos que um ideal I de $F\langle X \rangle$, é um *T-ideal* se $\phi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo em $F\langle X \rangle$.

Exemplo 45. *Em [5] Drensky exibiu as identidades geradoras para o T-ideal da álgebra $M_2(F)$ como*

$$\text{Id}(M_2(F)) = \langle [[x_1, x_2]^2, x_3], St_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \rangle_T.$$

Entretanto, o T-ideal de $M_n(F)$, para $n \geq 3$, ainda está em aberto.

Exemplo 46. *Sejam I_1 e I_2 T-ideais de $F\langle X \rangle$, então $I_1 \cap I_2$ é um T-ideal de $F\langle X \rangle$. Para vermos isso, sejam I_1 e I_2 T-ideais de $F\langle X \rangle$. Tome $a \in I_1 \cap I_2$, logo $a \in I_1$ e $a \in I_2$ e, conseqüentemente, $\phi(a) \in I_1$ e $\phi(a) \in I_2$, onde ϕ é um endomorfismo em $F\langle X \rangle$. Assim, $\phi(a) \in I_1 \cap I_2$. Mais ainda, a interseção de uma família arbitrária de T-ideais é ainda um T-ideal.*

Veremos agora como pode ser a forma de um conjunto gerador para um T-ideal da álgebra livre $F\langle X \rangle$.

Definição 42. Seja S um subconjunto de $F\langle X \rangle$. Denotamos por $\langle S \rangle_T$ o *T-ideal gerado por S* como sendo a interseção de todos os T-ideais de $F\langle X \rangle$ que contém S . Assim, $\langle S \rangle_T$ é o menor T-ideal de $F\langle X \rangle$ que contém S e é escrito como

$$\langle S \rangle_T = \text{span}_F \{ h_1 f(g_1, \dots, g_n) h_2 \mid f \in S \text{ e } h_1, g_1, \dots, g_n, h_2 \in F\langle X \rangle \}.$$

Deste modo, um ideal I é gerado, como T-ideal, por um conjunto $S \subset F\langle X \rangle$ se todo elemento de I pode ser escrito como combinação linear de elementos da forma

$$h_1 f(g_1, \dots, g_n) h_2,$$

onde $h_1, h_2, g_1, \dots, g_n \in F\langle X \rangle$ são polinômios e $f \in S$. Neste caso, denotamos $I = \langle S \rangle_T$.

Definição 43. Chamamos um polinômio f de *consequência* de um polinômio em um conjunto S de $F\langle X \rangle$ se $f \in \langle S \rangle_T$. Em particular, dados dois polinômios $f, g \in F\langle X \rangle$, dizemos que g é consequência de f se $g \in \langle f \rangle_T$.

Exemplo 47. Um comutador de peso $n \geq 3$ é consequência do comutador de peso 2 e isto pode ser verificado na Definição 32.

Proposição 9. Se I é um T-ideal de $F\langle X \rangle$, então $\text{Id}(F\langle X \rangle/I) = I$.

Demonstração. Seja $A = F\langle X \rangle/I$. Queremos mostrar que $\text{Id}(A) = I$.

Seja $f(x_1, \dots, x_n) \in I$. Dados $h_1 + I, \dots, h_n + I \in A$, existe um endomorfismo ϕ de $F\langle X \rangle$ tal que $\phi(x_i) = h_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. Assim,

$$f(h_1 + I, \dots, h_n + I) = f(\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)) + I = \phi(f(x_1, \dots, x_n)) + I.$$

Como, por hipótese, I é um T-ideal, temos que $\phi(f(x_1, \dots, x_n)) \in I$, e assim, $f(h_1 + I, \dots, h_n + I) \in I$. Portanto, $I \subset \text{Id}(A)$.

Agora, considere que $f = f(x_1, \dots, x_n) \in \text{Id}(A)$. Assim, $f(x_1, \dots, x_n) + I = f(x_1 + I, \dots, x_n + I) \in I$. Logo, $f(x_1, \dots, x_n) \in I$ e $\text{Id}(A) \subset I$. Portanto, $\text{Id}(A) = I$. ■

3.1.1 Processo de Multilinearização

Os polinômios multilineares são de grande importância quando a característica do corpo estudado é zero. No entanto, antes de mais nada, apresentaremos o Processo de Multilinearização, que nos fornece um passo a passo para que todo polinômio possa ser escrito de maneira multilinear.

Seja $f = f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle$ uma identidade polinomial da álgebra A de grau k . Inicialmente suponha que em cada monômio de f a variável x_i apareça com grau menor ou igual a 1, com $i \in \{1, \dots, n\}$. Se x_1 não aparece em algum monômio, então definimos

$$\begin{aligned} \varphi_1 : x_1 &\mapsto 0 \\ x_i &\mapsto x_i, i \neq 1. \end{aligned}$$

Observe que o polinômio $\varphi_1(f)$ ainda é uma identidade polinomial de A obtida de f , mas sem os polinômios que contém x_1 .

O processo poderá ser repetido se em algum monômio de $\varphi_1(f)$ a variável x_2 tem grau zero:

$$\begin{aligned}\varphi_2 : x_2 &\mapsto 0 \\ x_i &\mapsto x_i, i \neq 2.\end{aligned}$$

Novamente $\varphi_2\varphi_1(f)$ continua sendo uma identidade polinomial de A obtida de $\varphi_1(f)$, mas desta vez, sem os monômios que contém x_2 . Repetindo o processo para todas as variáveis que não aparecem em algum monômio, obtemos uma sequência de aplicações $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_t$ tal que $\varphi_t \cdots \varphi_2\varphi_1(f)$ é um polinômio multilinear de grau menor ou igual a k que ainda é uma identidade polinomial de A .

Agora suponha que $\deg_{x_1} f = d > 1$. Considere

$$h = h(y_1, y_2, x_2, \dots, x_n) = f(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_n) - f(y_1, x_2, \dots, x_n) - f(y_2, x_2, \dots, x_n),$$

e observe que h ainda é uma identidade polinomial de A .

Agora, queremos mostrar que h é uma identidade não trivial de A . Suponhamos, por contradição, que $h = 0$ e façamos $y_1 = y_2 = x_1$. Assim, teremos

$$\begin{aligned}0 = h(x_1, x_1, x_2, \dots, x_n) &= f(2x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= f(2x_1, x_2, \dots, x_n) - 2f(x_1, x_2, \dots, x_n).\end{aligned}$$

Podemos escrever $f = f_0 + f_1 + \dots + f_d$, para $i \in \{0, \dots, d\}$, onde f_i é a soma de todos os monômios de F em que x_1 aparece i vezes. Desta maneira,

$$f_i(2x_1, \dots, x_n) = 2^i f_i(x_1, \dots, x_n)$$

e obtemos

$$\begin{aligned}2(f_0 + f_1 + \dots + f_d) &= 2^0 f_0 + 2^1 f_1 + \dots + 2^d f_d \\ &= f_0 + 2f_1 + \dots + 2^d f_d.\end{aligned}$$

Com isso, $f_0 = (2^2 - 2)f_2 + \dots + (2^d - 2)f_d$. Entretanto, isto é uma contradição, pois do lado esquerdo da igualdade não temos a variável x_1 , enquanto do lado direito, com $d > 1$ e $\text{char}(F) = 0$, ela aparece com grau ≥ 2 . Portanto, h é uma identidade não trivial.

Logo, obtemos uma identidade h tal que $\deg_{y_1} h = \deg_{y_2} h = d - 1 < \deg_{x_1} f$. Por meio do processo indutivo e a partir da identidade f , é possível obter uma identidade g de A que é um polinômio multilinear.

Exemplo 48. O polinômio $f = f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$ não é um polinômio multilinear. Entretanto, podemos obter um polinômio multilinear h a partir de f . Primeiramente, note que $\deg_{x_1} = 2 > 1$ e pelo Processo de Multilinearização, temos que

$$h = h(y_1, y_2, x_2) = f(y_1 + y_2, x_2) - f(y_1, x_2) - f(y_2, x_2).$$

Separando h em partes, temos os seguintes polinômios que são consequências de f

$$\begin{aligned} f(y_1 + y_2, x_2) &= (y_1 + y_2)^2 x_2 \\ &= (y_1 + y_2)(y_1 + y_2)x_2 \\ &= y_1^2 x_2 + y_1 y_2 x_2 + y_2 y_1 x_2 + y_2^2 x_2, \end{aligned}$$

$$f(y_1, x_2) = y_1^2 x_2$$

e, por fim,

$$f(y_2, x_2) = y_2^2 x_2.$$

Portanto, $h = h(y_1, y_2, x_2) = y_1 y_2 x_2 + y_2 y_1 x_2$ é um polinômio multilinear.

Teorema 2. *Sejam F um corpo de característica zero e $f = f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle$. Então F é uma consequência de um conjunto de polinômios multilineares.*

A demonstração de tal teorema pode ser encontrada em [9], no Teorema 3.3.14, página 144. Como consequência do teorema anterior e dos resultados de [7], temos o seguinte corolário.

Corolário 3. *Seja A uma PI-álgebra sobre um corpo de característica zero. Então $\text{Id}(A)$ é gerado, como T -ideal, por um conjunto finito de polinômios multilineares.*

Exemplo 49. *Seja A uma álgebra comutativa com unidade sobre um corpo de característica zero. No Exemplo 43 vimos que $[x_1, x_2] \equiv 0$ em A . Mostraremos que $\text{Id}(A) = \langle [x_1, x_2] \rangle_T$. Se $I = \langle [x_1, x_2] \rangle_T$, então $I \subset \text{Id}(A)$.*

Seja $f \in \text{Id}(A)$, queremos mostrar que $f \equiv 0 \pmod{I}$. Primeiramente, pelo Corolário 3, podemos supor que f é um polinômio multilinear de grau n (se f não for multilinear, basta realizar o processo de multilinearização). Além disso, pela Proposição 6, podemos assumir que f seja escrito como uma combinação de variáveis e comutadores de pesos arbitrários.

Como $[x_1, x_2] \equiv 0$ em A , então, para todo $k \geq 2$, $[x_1, \dots, x_k] \equiv 0$ em A , por ser uma consequência do comutador de peso 2. Assim, módulo I , temos $f = f(x_1, \dots, x_n) = \alpha x_1 \cdots x_n$, para $\alpha \in F$ qualquer.

Agora precisamos mostrar que $\alpha = 0$ para que $f \in I$. Sabemos que $f \in \text{Id}(A)$ e fazendo $x_1 = \dots = x_n = 1$, temos que $0 = f(1, \dots, 1) = \alpha \cdot 1$, e assim, $\alpha = 0$. Logo, $\text{Id}(A) = I$.

3.2 $\text{Id}(\text{UT}_2(\mathbf{F})) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$

Iremos, agora, adentrar no objeto do nosso trabalho, o estudo do T-ideal da $\text{UT}_2(\mathbf{F})$ sobre um corpo $\mathbf{F}$, $\text{char}(\mathbf{F}) = 0$. No Exemplo 36, vimos que $[x_1, x_2][x_3, x_4] \in \text{Id}(\text{UT}_2(\mathbf{F}))$. Em 1971, Malcev [8] demonstrou que $\text{Id}(\text{UT}_2(\mathbf{F})) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$.

Antes de vermos este resultado, apresentaremos o seguinte lema.

Lema 1. *Para todo $m \geq 2$, temos que*

$$[x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}, x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_m}] \equiv [x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{r+1}}, x_{j_r}, \dots, x_{j_m}] \pmod{I},$$

onde $I = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$.

Demonstração. Como $[x_1, x_2][x_3, x_4] \in I$, então $[[x_1, x_2], [x_3, x_4]] \in I$. Observe que, módulo I , quaisquer dois comutadores comutam. Considere $c = [x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{r-1}}]$ e assim,

$$[x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}, x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_m}] = [c, x_{j_r}, x_{j_{r+1}}, x_{j_{r+2}}, \dots, x_{j_m}].$$

Pela identidade de Jacobi, temos

$$[c, x_{j_r}, x_{j_{r+1}}] = -[[x_{j_r}, x_{j_{r+1}}], c] - [[x_{j_{r+1}}, c], x_{j_r}] \equiv [c, x_{j_{r+1}}, x_{j_r}] \pmod{I}.$$

Logo,

$$[x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}, x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_m}] \equiv [x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{r+1}}, x_{j_r}, \dots, x_{j_m}] \pmod{I}.$$

■

Após este lema, temos o nosso principal resultado, o teorema que prova o T-ideal da UT_2 .

Teorema 3. $\text{Id}(\text{UT}_2(\mathbf{F})) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$.

Demonstração. Seja $I = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle$. Como vimos no Exemplo 37, temos que $I \subseteq \text{Id}(\text{UT}_2(\mathbf{F}))$. Agora mostraremos que se $f \in \text{Id}(\text{UT}_2(\mathbf{F}))$, então $f \equiv 0 \pmod{I}$. Pelo Corolário 3, podemos assumir que f é um polinômio multilinear de grau n . Além disso, pela Proposição 6, temos que f pode ser escrito como uma combinação linear de variáveis e comutadores do tipo $x_{i_1} \dots x_{i_r} c_1 \dots c_s$ onde $i_1 < \dots < i_r$ e os c_i 's são comutadores de pesos arbitrários.

Como $[x_1, x_2][x_3, x_4] \in I$, temos que $[x_{i_1}, \dots, x_{i_r}][x_{j_1}, \dots, x_{j_t}]$ também pertence a I , para quaisquer $r, t \geq 2$. Desta maneira, se $s \geq 2$, temos que $c_1 \dots c_s \in I$, onde cada c_i é um comutador de peso maior ou igual a 2.

Com isso, temos que f pode ser escrito, módulo I , como combinação linear de polinômios do tipo

$$x_{i_1} \dots x_{i_r} [x_{j_1}, \dots, x_{j_s}],$$

com $i_1 < \dots < i_r$ e $n = r + s$.

Pelo Lema 1, temos que

$$[x_{j_1}, \dots, x_{j_s}] \equiv [x_k, x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-r-1}}](\text{mod } I),$$

onde $k > j_1$ e $j_1 < \dots < j_{n-r-1}$. Isto nos mostra que em cada comutador, módulo I , podemos supor que a primeira variável possui o maior índice e as outras estão ordenadas. Assim, concluímos que, módulo I , f pode ser escrito como combinação linear de polinômios do tipo $x_{i_1} \dots x_{i_r} [x_k, x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-r-1}}]$, onde $i_1 < \dots < i_r$, $k > j_1$, $j_1 < \dots < j_{n-r-1}$ e $\{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_{n-r-1}, k\} = \{1, \dots, n\}$.

Para cada $r \in \{0, \dots, n\}$ escrevemos $M = \{i_1, \dots, i_r\}$, $N = \{j_1, \dots, j_{n-r-1}\}$, $i_1 < \dots < i_r$, $j_1 < \dots < j_{n-r-1}$ e assumimos que se $r = 0$ ou $r = n$, então ou $M = \emptyset$ ou $N = \emptyset$, respectivamente. Escrevendo

$$u_{M,N,k}^r = x_{i_1} \dots x_{i_r} [x_k, x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-r-1}}]$$

temos que f pode ser escrito, módulo I , como

$$\sum_{r=0}^n \sum_{M,N,k} \alpha_{M,N,k} u_{M,N,k}^r, \alpha_{M,N,k} \in \mathbb{F}.$$

Basta, então, mostrarmos que $\alpha_{M,N,k} = 0$ para cada escolha de M e N . Fixando $r \in \{1, \dots, n\}$, escolhemos M e N e fazemos $x_{i_1} = \dots = x_{i_r} = 1$, $x_k = e_{12}$ e $x_{j_1} = \dots = x_{j_{n-r-1}} = e_{22}$.

Assim, $\alpha_{M,N,k} u_{M,N,k}^r$ é avaliado em $\alpha_{M,N,k} e_{12}$. Além disso, para um mesmo r fixado, se M' e N' são tais que $M \neq M'$ e $N \neq N'$, então $u_{M',N',k}^r$ é avaliado em 0, já que $k > j_1$.

Com isso, $\alpha_{M,N,k} = 0$ e procedendo da mesma maneira para todos os valores de r , obtemos que $f \in I$. Portanto $\text{Id}(\text{UT}_2(\mathbb{F})) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$. ■

Considerações Finais

O objetivo deste trabalho foi apresentar o T -ideal da álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem 2×2 , denotada por $UT_2(F)$. Para isto, começamos com uma breve revisão de algumas estruturas algébricas fundamentais tais como grupos, anéis e álgebras. Posteriormente, definimos os polinômios na álgebra livre $F\langle X \rangle$. Além disso, apresentamos o comutador de peso n , os polinômios Standard e os polinômios de Capelli e fornecemos a eles algumas características e propriedades. Ademais, vimos que todo polinômio pode ser escrito como combinação linear de variáveis ordenadas e comutadores e como consequência de um número finito de polinômios multilineares.

A partir das álgebras estudadas e dos polinômios, definimos o que é uma PI-álgebra. Ao longo do texto, vimos que toda álgebra de dimensão finita é uma PI-álgebra e apresentamos um exemplo de uma PI-álgebra de dimensão infinita, a álgebra de Grassmann.

Como um dos interesses da PI-teoria é que sejam conhecidas todas as identidades satisfeitas por uma álgebra A , definimos o conjunto destas identidades como $\text{Id}(A)$, de modo que A é uma PI-álgebra se $\text{Id}(A) \neq 0$, onde $\text{Id}(A)$ é um ideal invariante pelos endomorfismos de $F\langle X \rangle$. Vimos também que $\text{Id}(A)$ é gerado como um T -ideal por um conjunto finito de polinômios multilineares por meio do processo de multilinearização.

A determinação das identidades polinomiais de uma PI-álgebra não é uma tarefa fácil e somente algumas álgebras já possuem seu T -ideal bem conhecido. Neste trabalho apresentamos o T -ideal da $UT_2(F)$, demonstrado em 1971 por Malcev [8], que é dado por

$$\text{Id}(UT_2(F)) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T.$$

É possível estender os resultados da $UT_2(F)$ para a $UT_n(F)$ e mostrar que

$$\text{Id}(UT_n(F)) = \langle [x_1, x_2] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}] \rangle_T.$$

Referências Bibliográficas

- [1] S. A. AMITSUR, J. LEVITZKI. Minimal identities for algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*1, pp. 449-463. MR:36751. Zbl:0040.01101, 1950.
- [2] W. Q. COTA. Álgebras com estruturas adicionais com crescimento polinomial. Belo Horizonte: UFMG, 2021.
- [3] M. DEHN. Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme, *Math. Ann.*85.1, pp. 184-194. MR:1512061,1922.
- [4] H. DOMINGUES, G. IEZZI, Álgebra Moderna. São Paulo, Atual, 2003.
- [5] V. DRENSKY. A minimal basis for the identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0. *Algebra i Logika* , 1981.
- [6] I. KAPLANSKY. Rings with polynomial identity, *Bull. Amer. Math. Soc.* 54, pp. 575-580. MR:25451. Zbl:0032.00701, 1948.
- [7] A. KEMER. The Spechtian nature of T -ideals whose codimensions have power growth, *Sibirsk. Mat. Z.* 19.1, pp. 54-69, 237. MR:0466190, 1978.
- [8] J. N. MALCEV. A basis for the identities of the algebra of upper triangular matrices. *Algebra i Logika* 10, 1971.
- [9] R. B. DOS SANTOS, A. C. VIEIRA. PI-álgebras: uma introdução à PI-teoria. Vol.1. Rio de Janeiro: Impa, 2021.
- [10] W. SPECHT. Gesetze in Ringen. I, *Math. Z.*52, pp. 557-589. MR:35274. Zbl:0032.38901, 1950.
- [11] W. WAGNER. Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme, *Math. Ann.*113.1, pp. 528-567. MR:1513106, 1937.