Universidade Federal de São João del-Rei

Tainara Mariane de Carvalho

Um estudo sobre os polinômios ortogonais na reta real

São João del-Rei - MG

Agosto de 2021

Tainara Mariane de Carvalho

Um estudo sobre os polinômios ortogonais na reta real

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenadoria do Curso de Matemática, da Universidade Federal de São João del-Rei, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof^a Dra. Rafaela Neves Bonfim

São João del-Rei, 18 de agosto de 2021.

Banca Examinadora

Orientadora: Prof^a. Dra. Rafaela Neves Bonfim

Prof^o. Me. Carlos Alberto da Silva Junior

Prof^a. Ma. Marianna Resende Oliveira

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela oportunidade e força recebida. Aos meus pais Marilane e Afonso, aos meus irmãos Gustavo e Gilmar e aos meus ex-sogros Calazans e Lídice pelo apoio durante o estudo. Inclusive queria agradecer a razão da minha vida, minha filha Helena.
Agradeço também as minhas amigas Anerrize, Simone e Maíra que me apoiaram em todos os momentos difíceis, incentivando-me e dando força.

Queria também agradecer, de modo especial a professora Rafaela Neves Bonfim pelo incentivo, paciência, compreensão e dedicação prestados durante todo o estudo. Por fim, agradeço a todos os professores que de forma direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, em especial aos professores Carlos, Marianna, Romélia, Flávia e Viviane.

“ Nunca deixe que lhe digam que não vale a pena acreditar no sonho que se tem! ”

— Renato Russo

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo sobre os polinômios ortogonais na reta real. O assunto foi abordado em duas partes distintas. Na primeira delas estudamos os polinômios ortogonais, num caso geral, apresentando definições e teoremas que nos fornecem condições necessárias e suficientes para que uma sequência de polinômios seja ortogonal. Em seguida, vimos importantes resultados evolvendo o comportamento dos zeros desses polinômios. Já a segunda parte é direcionada a apresentar os resultados dos estudos sobre os polinômios ortogonais clássicos. São eles: polinômios de Jacobi, de Legendre, de Chebyshev de 1° e 2° espécie, de Gegenbauer, de Laguerre e de Hermite. Vimos que tais polinômios são aqueles cuja função peso associada satisfaz uma equação diferencial de primeira ordem.

Palavras-chave: polinômios ortogonais, polinômios de Jacobi, polinômios de Chebyshev, polinômios de Legendre, polinômios de Gegenbauer, polinômios de Laguerre, polinômios de Hermite.

Sumário

Introdução

Os polinômios ortogonais surgiram através do estudo sobre um tipo de frações contínuas chamada de Stieltjes e, a partir do século XIX, vem se intensificando as pesquisas envolvendo o tema. Seu estudo contribui de maneira significativa na resolução de inúmeros problemas envolvendo diversos ramos da matemática pura e aplicada. São utilizados, por exemplo, para solucionar problemas envolvendo interpolação, aproximação numérica, além de contribuir nos estudos relacionados a equações diferenciais e frações contínuas.

Atualmente o interesse pelo estudo desses polinômios pode estar relacionado com a revolução dos computadores e ao aumento da atividade na teoria da aproximação e análise numérica, conforme destaca Perlin (2016). Desta forma, o presente trabalho tem como objetivo fazer um estudo detalhado sobre a teoria básica dos polinômios ortogonais na reta real.

O assunto será abordado da seguinte maneira No capítulo 1 trataremos de conceitos necessários para o desenvolvimento do trabalho como: definições e algumas propriedades envolvendo polinômios, a definição do produto interno no espaço vetorial dos polinômios de grau no máximo n e, por fim, definições e propriedades da função Gama e Beta;

No capítulo 2 iniciaremos de fato o estudo pretendido. Primeiramente apresentaremos a definição de uma sequência de polinômios ortogonais e em seguida veremos diversas propriedades interessantes que esses polinômios satisfazem. Para finalizar o capítulo faremos um estudo das propriedades fundamentais relacionadas ao comportamento dos zeros desses polinômios;

Finalmente, iniciamos o capítulo 3 com o estudo sobre polinômios ortogonais especiais chamados de polinômios ortogonais clássicos. São eles: polinômios de Jacobi e seus casos particulares, polinômios de Legendre, de Chebyshev de 1° e 2° espécie; os polinômios de Gegenbauer, de Laguerre e Hermite. Para cada classe desses polinômios exibiremos o coeficiente do termo de maior grau, a relação de ortogonalidade que satisfazem e a relação de recorrência.

Capítulo 1

Pré-requisitos

Neste primeiro capítulo vamos tratar de alguns pré-requisitos que serão necessários para desenvolver a teoria dos polinômios ortogonais. Inicialmente exibiremos definições e propriedades básicas envolvendo os polinômios. Na sequência, definiremos um produto interno no espaço dos polinômios e apresentaremos definição e propriedades das funções Gama e Beta.

1.1 Polinômios

Fixemos algumas notações. Um polinômio de grau n é denotado por

$$P_n(x) = a_{n,n}x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{n,1}x + a_{n,0} \tag{1.1.1}$$

onde $a_{n,n}, a_{n,n-1}, \cdots a_{n,0} \in \mathbb{R}$, $a_{n,n} \neq 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Indicamos por $\mathbb{P}_n$ o espaço vetorial dos polinômios de grau no máximo n, e por $\mathbb{P}$, o espaço vetorial de todos os polinômios, ou seja, $\mathbb{P} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \pi_n$.

A seguir vamos apresentar algumas definições e propriedades envolvendo as raízes reais dos polinômios.

Definição 1.1.1. Seja $p(x)$ um polinômio. O número real α, tal que $p(\alpha) = 0$ é chamado de *raiz (ou zero) do polinômio* $p(x)$.

Portanto, α é uma raiz de $p(x)$ se, e somente se, $p(\alpha) = 0$. Neste caso, o polinômio $p(x)$ é divisível por $(x - \alpha)$, e pode ser escrito como

$$p(x) = (x - \alpha)q(x),$$

onde $q(x)$ é um polinômio de grau menor do que o grau de $p(x)$.

Podemos generalizar o resultado acima para um polinômio de grau n.

Proposição 1.1.2. *Se $x_1, x_2, \cdots, x_k$ são k raízes reais de um polinômio $p(x)$ de grau n, então temos que*

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_k)q(x)$$

onde $q(x)$ é um polinômio sem raízes reais de grau $n - k$.

Demonstração: Vide em [7].

Agora se $p(x)$ for fatorado, e o fator $(x - x_0)$ se repetir, podemos afirmar que x_0 é uma raiz múltipla conforme definimos a seguir.

Definição 1.1.3. Seja $p(x)$ um polinômio de grau n. O número real x_0 é uma *raiz de multiplicidade k* de $p(x)$ se $p(x) = (x - x_0)^k q(x)$ para algum polinômio $q(x)$, com $q(x_0) \neq 0$.

Aqui, $q(x_0) \neq 0$ para garantir que $q(x)$ não tenha mais nenhum fator $(x - x_0)$.

O próximo resultado, relaciona a multiplicidade da raiz x_0 de um polinômio $p(x)$ com o sinal do polinômio em uma vizinhança x_0.

Proposição 1.1.4. *Seja $p(x)$ um polinômio e x_0 uma raiz de $p(x)$. Então:*

(a) x_0 é uma raiz de multiplicidade par de $p(x)$ se, e somente se, existe $r > 0$ tal que $p(x)$ não muda de sinal para todo $x \in (x_0 - r, x_0 + r) - \{x_0\} = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - r < x < x_0 + r, x \neq x_0\}$

(b) x_0 é uma raiz de multiplicidade ímpar de $p(x)$ se, e somente se, existe $r > 0$ tal que o sinal de $p(x)$ para $x \in (x_0 - r, x_0)$ é oposto do sinal de $p(x)$ para $x \in (x_0, x_0 + r)$.

Demonstração: Seja $k \in \mathbb{N}$ a multiplicidade de x_0. Então, existe um polinômio $q(x)$ de grau $n - k$, com $q(x_0) \neq 0$, tal que

$$p(x) = (x - x_0)^k q(x).$$

Se $q(x_0) > 0$, existe $r > 0$ tal que $q(x) > 0$ para todo $x \in I = (x_0 - r, x_0 + r) - \{x_0\}$. Sabendo que, $p(x) = (x - x_0)^k q(x)$ e como por hipótese $q(x) > 0$ para todo $x \in I$. Então, quando $p(x) > 0$, o fator $(x - x_0)^k$ também será maior que zero. Assim, quando $p(x) < 0$ o fator $(x - x_0)^k$ também será menor que zero. Ou seja, quando $q(x) > 0$, $p(x)$ e $(x - x_0)^k$ terão o mesmo sinal no intervalo I. Por outro lado, se $q(x_0) < 0$, existe $r > 0$ tal que $q(x) < 0$ para todo $x \in I$. Então, quando $p(x) < 0$, o fator $(x - x_0)^k$ será maior que zero. E quando $p(x) > 0$, o fator $(x - x_0)^k$ será menor que zero. Portanto, quando $q(x) < 0$, $p(x)$ e $(x - x_0)^k$ terão sinais opostos no intervalo $I = (x_0 - r, x_0 + r) - \{x_0\}$.

(a) Seja $I = (x_0 - r, x_0 + r) - \{x_0\}$ como considerado acima. Se $q(x) > 0$, para todo $x \in I$, temos que $p(x)$ e $(x - x_0)^k$ têm o mesmo sinal em I. Como k é par, o fator $(x - x_0)^k > 0$, para todo $x \in I$. Logo, $p(x)$ também é positivo neste intervalo. Se $q(x) < 0$ em I, $p(x)$ e $(x - x_0)^k$ tem sinais opostos em I. Logo, neste caso, temos que $p(x) < 0$ para todo $x \in I$. Portanto, provamos que k é par se, e somente se, $p(x)$ não muda de sinal no intervalo $I = (x_0 - r, x_0 + r) - \{x_0\}$.

(b) Seja $I_1 = (x_0 - r, x_0 + r)$. Se $q(x) > 0$, para todo $x \in I_1$, temos que $p(x)$ e $(x - x_0)^k$ possuem o mesmo sinal em I_1. Como k é ímpar, então o fator $(x - x_0)^k < 0$, para todo $x \in (x_0 - r, x_0)$ e $(x - x_0)^k > 0$, para todo $x \in (x_0, x_0 + r)$. Logo, $p(x) < 0$ para todo $x \in (x_0 - r, x_0)$ e $p(x) > 0$ para todo $x \in (x_0, x_0 + r)$. Por outro lado, se $q(x) < 0$ para todo $x \in I_1$, temos que $p(x)$ e $(x - x_0)^k$ possuem sinais opostos em I_1. Como sabemos que o fator $(x - x_0)^k < 0$, para todo $x \in (x_0 - r, x_0)$ e $(x - x_0)^k > 0$, para todo $x \in (x_0, x_0 + r)$, concluímos que, $p(x) > 0$ para todo $x \in (x_0 - r, x_0)$ e $p(x) < 0$ para todo $x \in (x_0, x_0 + r)$. Portanto, provamos que k é ímpar se, e somente se $p(x)$ muda se sinal no intervalo $I_1 = (x_0 - r, x_0 + r)$. $\square$

O produto interno nos permite obter noções de comprimento e ângulo nos espaços vetoriais. Assim, podemos definir um produto interno no espaço vetorial de todos polinômios $\mathbb{P}$, para os polinômios ortogonais precisamos inicialmente da definição de função peso.

Definição 1.1.5. Dizemos que $w(x)$ é uma *função peso* no intervalo $[a, b]$ quando é uma função contínua, não negativa e não identicamente nula no intervalo (a, b).

Assim, dados $f, g \in \mathbb{P}$, definimos o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx \tag{1.1.2}$$

onde $f, g \in \mathbb{P}$ e $w(x)$ é uma função peso.

Na página 3 da referência [2] o leitor poderá verificar que a fórmula (1.1.2) define de fato um produto interno.

1.2 Função Gama e Função Beta

Veremos agora a definição de função Gama. Essa função foi introduzida por Euler em 1730 e é uma extensão da função fatorial para o conjunto dos números reais e complexos.

Definição 1.2.1. A *função Gama* é definida pela integral imprópria

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \tag{1.2.1}$$

para todo $x \in \mathbb{C}$ e $Re(x) > 0$.

A função Gama satisfaz as seguintes propriedades:

Proposição 1.2.2. *Seja $x \in \mathbb{C}$ tal que a parte real de x é positiva. Então $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.*

Demonstração: Vamos demonstrar apenas o caso em que x é um inteiro não negativo. Pela definição (1.2.1) da função Gama, temos que

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^{(x+1)-1}e^{-t}dt = \\ &= \int_0^\infty t^x e^{-t}dt.\end{aligned}$$

Integrando por partes, seja $u = t^x$ e $dv = e^{-t}dt$. Assim $du = xt^{x-1}dt$ e $v = -e^{-t}$. Logo,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^x e^{-t}dt &= \lim_{b\to\infty}\left((-t^x e^{-t})\Big|_0^b - \int_0^b -e^{-t}xt^{x-1}dt \right) = \\ &= -\lim_{b\to\infty} t^x e^{-t}\Big|_0^b + x\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-t}t^{x-1}dt = \\ &= -\lim_{b\to\infty} b^x e^{-b} + x\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-t}t^{x-1}dt = \\ &= -\lim_{b\to\infty}\frac{b^x}{e^b} + x\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-t}t^{x-1}dt.\end{aligned}$$

Observe que,

$$\frac{d^x}{db^x}(b^x) = x!.$$

Assim, aplicando x vezes a regra de L'Hospital em $\dfrac{b^x}{e^b}$, obtemos

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}dt = -\lim_{b\to\infty}\frac{x!}{e^b} + x\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-t}t^{x-1}dt =$$

$$= -x! \lim_{b\to\infty} \frac{1}{e^b} + x \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-t} t^{x-1} dt =$$

$$= 0 + x \cdot \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt =$$

$$= x\Gamma(x).$$

Portanto, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. $\square$

Proposição 1.2.3. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Demonstração: Pela definição (1.2.1) da função Gama, temos que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt$$

Agora trocando a variável t por u^2, obtemos

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty (u^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-u^2} 2u du =$$

$$= \int_0^\infty 2u^{-1} u e^{-u^2} du =$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-u^2} du.$$

Então,

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 4\int_0^\infty e^{-u^2} du \cdot \int_0^\infty e^{-v^2} dv =$$

$$= 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u^2} e^{-v^2} dudv =$$

$$= 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)} dvdu.$$

Trocando as coordenadas $u = r\sin\phi$ e $v = r\cos\phi$, obtemos

$$u^2 + v^2 = r^2\sin^2\phi + r^2 cos^2\phi = r^2(\sin^2\phi + cos^2\phi) = r^2$$

ou seja, $r = \sqrt{u^2+v^2}$. Logo, como u e v variam de 0 a ∞, então $0 \le r \le \infty$. Além disso, o primeiro quadrante é a região onde u e v variam de 0 a ∞. Portanto, $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$. Assim,

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty r e^{-r^2} dr d\phi =$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^{\infty} d\phi = \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} d\phi = \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi = \\
&= 2\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. $\square$

Definiremos agora a função Beta, e veremos que tal função está intimamente relacionada com a função Gama.

Definição 1.2.4. A *função Beta* é definida, para $x, y \in \mathbb{C}$, $Re(x) > 0, Re(y) > 0$, dada por

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,$$

conhecida como integral de Euler de primeira espécie.

A função Beta pode ser escrita, em termos da função Gama, da seguinte forma

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{1.2.2}$$

A demonstração dessa igualdade pode ser encontrada na bibliografia [7].

Capítulo 2

Polinômios Ortogonais

Neste capítulo faremos o estudo dos polinômios ortogonais, apresentando sua definição e propriedades gerais. Destacaremos ainda propriedades fundamentais sobre o comportamento do seus zeros. Veremos também que esses polinômios são gerados a partir de uma relação de recorrência de três termos, facilitando assim obter uma sequência de polinômios desse tipo.

2.1 Teoria Elementar dos Polinômios Ortogonais

Para motivar a definição de uma sequência de polinômios ortogonais considere os polinômios $T_n(x)$, definidos por

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1,1], \quad n = 0,1,2,... \tag{2.1.1}$$

e a função peso $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Considere as identidades trigonométricas: $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$, $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ e $2\sin^2 a = 1 - \cos 2a$. Observe que, fazendo $x = \cos\theta$ temos $\arccos x = \theta$. Então temos:

$T_0(x) = \cos(0 \arccos x) = \cos 0 = 1$

$T_1(x) = \cos(\arccos x) = \cos\theta = x$

$T_2(x) = \cos(2\arccos x) = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2x^2 - 1$

$$\begin{aligned} T_3(x) = \ & \cos(3\arccos x) = \cos 3\theta = \cos(2\theta+\theta) = \\ & = \cos 2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta = (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta = \\ & = \cos\theta(2\cos^2\theta - 1 - 2\sin^2\theta) = \cos\theta(2\cos^2\theta - 1 + \cos 2\theta - 1) \\ & = \cos\theta(2\cos^2\theta - 2 + 2\cos^2\theta - 1) = \cos\theta(4\cos^2\theta - 3) = \\ & = x(4x^2-3) = 4x^3 - 3x = 2^2x^3 - 3x \end{aligned}$$

Continuando com esse raciocínio obtemos

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + q_r(x),$$

onde $q_r(x)$ é um polinômio de grau $r < n$, mostrando assim que $T_n(x)$ é de grau exatamente n, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Tomando o produto interno de T_n por T_m, com $m \neq n$, temos

$$\langle T_n, T_m \rangle = \int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)w(x)\,dx \tag{2.1.2}$$

$$= \int_{-1}^{1} \cos(n \arccos x)\cos(m \arccos x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Fazendo uma mudança de variável $x = \cos\theta$, temos

$$\langle T_n, T_m \rangle = -\int_{\pi}^{0} \frac{\cos(n\theta)\cos(m\theta)\sin\theta d\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} = \int_{0}^{\pi} \frac{\cos(n\theta)\cos(m\theta)\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta}}\,d\theta$$

$$= \int_{0}^{\pi} \frac{\cos(n\theta)\cos(m\theta)\sin\theta}{\sin\theta}\,d\theta = \int_{0}^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,d\theta.$$

Considerando agora a identidade trigonométrica

$$2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$$

obtemos

$$\langle T_n, T_m \rangle = \int_{0}^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} [\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta]\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+m)\theta}{n+m}\Big|_0^\pi + \frac{sin(n-m)\theta}{n-m}\Big|_0^\pi\right] = 0$$

Considere agora $m = n$ não nulos. Fazendo novamente $x = \cos\theta$ temos

$$\langle T_n, T_n \rangle = \int_{-1}^{1} T_n^2(x)w(x)\,dx = \int_{\pi}^{0} \frac{\cos^2(n\theta)(-\sin\theta)}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}\,d\theta =$$

$$= \int_{0}^{\pi} \cos^2(n\theta)d\theta = \int_{0}^{\pi} \frac{1+\cos(2n\theta)}{2}d\theta = \int_{0}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2n\theta)}{2}\right)d\theta$$

$$\frac{\theta}{2}\Big|_0^\pi + \frac{\sin(2n\theta)}{4n}\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Procedendo de maneira análoga é fácil ver que $\langle T_0, T_0 \rangle = \pi$.

Portanto, considerando a sequencia de polinômios $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ concluímos que $T_n(x)$ tem grau exatamente n e

$$\langle T_n, T_m \rangle = \begin{cases} \pi, \text{ se } m = n = 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, \text{ se } m = n > 0 \\ 0, \text{ se } m \neq n. \end{cases}$$

Nesse caso dizemos que $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ com relação a função peso $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Esses polinômios são chamados de *polinômios de Chebyshev de primeira espécie* e é um exemplo de polinômios ortogonal clássicos, que trataremos mais adiante.

A definição geral é dada abaixo.

Definição 2.1.1. Dizemos que uma sequência de polinômios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma *sequência de polinômios ortogonais* no intervalo (a, b), com relação a função peso $w(x)$, se cada $P_n(x)$ é de grau exatamente n e

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_a^b P_n(x) P_m(x) w(x)\, dx = \begin{cases} 0, \text{ se } m \neq n \\ k_n, \text{ se } m = n \end{cases}$$

onde $k_n \in \mathbb{R}$.

Observe que se $n = m$ temos

$$k_n = \int_a^b P_n(x)^2 w(x)\, dx > 0,$$

pois $P_n(x)^2 w(x) > 0$. Se $k_n = 1$, então a sequência é chamada de *sequência de polinômios ortonormais*. Note que, para simplificar, o produto interno da definição acima pode ser escrito como

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_a^b P_n(x) P_m(x) w(x)\, dx = k_n \delta_{m,n}$$

onde $\delta_{m,n}$ denota a função Delta de Kronecker definido por

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 0, & se \quad m \neq n \\ 1, & se \quad m = n \end{cases} .$$

2.2 Propriedades Gerais

Os polinômios ortogonais satisfazem propriedades interessantes, e aqui destacaremos algumas delas.

Teorema 2.2.1. *Se $P_0(x), P_1(x), ..., P_m(x)$ pertencem a uma sequência de polinômios ortogonais $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, então $\{P_j(x)\}_{j=0}^{m}$ são linearmente independentes.*

Demonstração: Seja $\{P_j(x)\}_{j=0}^{m}$ uma subsequência finita de polinômios ortogonais e considere a combinação linear nula

$$\sum_{j=0}^{m} c_j P_j(x) = 0,$$

onde $c_j \in \mathbb{R}$, para $j = 0, 1, 2, .., m$. Assim, fazendo o produto interno dessa soma nula por $P_k(x)$, para cada k, tal que $0 \leq k \leq m$, temos

$$\left\langle \sum_{j=0}^{m} c_j P_j(x), P_k(x) \right\rangle = \langle 0, P_k \rangle = 0$$

Então, aplicando as propriedades do produto interno, obtemos

$$\langle c_0 P_0(x), P_k(x) \rangle + \cdots + \langle c_k P_k(x), P_k(x) \rangle + \cdots + \langle c_m P_m(x), P_k(x) \rangle = 0 \tag{2.2.1}$$

Utilizando a definição (2.1.1), uma vez que por hipótese $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequencia de polinômios ortogonais, temos que $\langle c_n P_n(x), P_k(x) \rangle = c_n \langle P_n(x), P_k(x) \rangle = 0$, sempre que $n \neq k$. Logo, da igualdade (2.2.1), obtemos

$$0 = \langle c_k P_k, P_k \rangle = c_k \langle P_k, P_k \rangle$$

Como $\langle P_k, P_k \rangle \neq 0$ concluímos que $c_k = 0$, para $k = 0, 1, \cdots, m$. Portanto, o conjunto

$$\{P_0(x), P_1(x), \cdots, P_m(x)\}$$

é linearmente independente. □

O teorema acima garante que os polinômios ortogonais $P_0, P_1, \cdots, P_m$ formam uma base para o espaço vetorial π_m, ou seja, qualquer polinômio de grau menor do que ou igual a m pode ser escrito como combinação linear de polinômios ortogonais.

O próximo resultado fornece uma maneira alternativa de verificarmos quando uma sequência de polinômios é ortogonal.

Teorema 2.2.2. *Seja* $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *uma sequência de polinômios e* $w(x)$ *uma função peso no intervalo* (a,b)*. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *é uma sequência de polinômios ortogonais com relação a função peso* $w(x)$ *no intervalo* (a,b)*, ou seja,* $\langle P_m, P_n\rangle = \delta_{m,n}k_n$*, onde* $k_n \neq 0$*.*

(b) $\langle \pi, P_n\rangle = 0$*, para todo polinômio* $\pi(x)$ *de grau* $m < n$*.*

(c) $\langle x^m, P_n\rangle = \displaystyle\int_a^b x^m P_n(x)w(x)dx = \begin{cases} 0, \ \textit{se } 0 \leq m < n \\ \rho_n \neq 0, \ \textit{se } m = n \end{cases}$,

Demostração: Sejam $\{P_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais e $\pi(x)$ um polinômio de grau $m < n$. Pela definição (2.1.1), temos que

$$\langle P_m, P_n\rangle = \begin{cases} 0, \ \text{se } m \neq n \\ k_n > 0, \ \text{se } m = n \end{cases}.$$

Fixe n um número inteiro não negativo. Como $P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}$ formam uma base para π_{n-1} e existem números reais $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ tais que

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k(x).$$

Então,

$$\langle \pi, P_n\rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k(x), P_n \right\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \langle P_n, P_k\rangle.$$

Note que, como k é menor que n, temos que k é diferente de n, para todo $k = 0, 1, \cdots, n-1$. Logo $\langle P_n, P_k\rangle = 0$, para todo $k = 0, 1, \cdots, n-1$. Portanto

$$\langle \pi, P_n\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \langle P_n, P_k\rangle = 0$$

Isso prova que (a) implica (b)

Provemos agora que (b) implica (c). Para $0 \leq m < n$ segue diretamente de (b) que $\langle x^m, P_n \rangle = 0$. Considere então $m = n$. Usando o fato de que $P_0, P_1, \cdots, P_n$ formam uma base para π_n, podemos escrever

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k(x), \text{ onde } \alpha_i \in \mathbb{R}, \text{ para } i = 0, 1, \cdots, n,$$

e $\alpha_n \neq 0$. Assim

$$\langle x^n, P_n \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k(x), P_n \right\rangle = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \langle P_n, P_k \rangle = \alpha_n \langle P_n, P_n \rangle = \alpha_n k_n \neq 0.$$

Tomando $\rho_n = \alpha_n k_n$ concluímos a prova desse caso.

Por fim, falta que provar que (c) implica (a). Já sabemos pelo enunciado do Teorema que cada P_n é um polinômio de grau n. Resta portanto, apenas provar que

$$\langle P_n, P_m \rangle = \begin{cases} 0, \text{ se } m \neq n \\ k_n, \text{ se } m = n \end{cases}$$

Por hipótese temos que

$$\langle x^m, P_n \rangle = \begin{cases} 0, \text{ se } 0 \leq m < n \\ \rho_n \neq 0, \text{ se } m = n \end{cases} . \tag{2.2.2}$$

Sejam m e n inteiros não negativos. Como P_m é de grau m, a expressão genérica que o define é da forma $P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_{m,k} x^k$. Se $m < n$, obtemos

$$\langle P_m, P_n \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{m} a_{m,k} x^k, P_n \right\rangle = \sum_{k=0}^{m} a_{m,k} \langle x^k, P_n \rangle. \tag{2.2.3}$$

Assim, como $k \leq m < n$, temos que $k \neq n$, e logo $\langle x^k, P_n \rangle = 0$, para todo $k \leq m$. Portanto, concluímos da equação (2.2.3) que $\langle P_m, P_n \rangle = 0$, para $m < n$.

De modo análogo prova-se que $\langle P_m, P_n \rangle = 0$ para $m > n$. Agora, se $m = n$, usando a igualdade (2.2.2), temos

$$\langle P_n, P_n \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} x^k, P_n \right\rangle = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \langle x^k, P_n \rangle = a_{n,n} \langle x^n, P_n \rangle = a_{n,n} \rho_n \neq 0.$$

Isso conclui a prova de que (c) implica em (a). $\square$

O próximo resultado nos diz que quaisquer duas sequências de polinômios ortogonais, com a mesma função peso, diferem apenas por uma constante multiplicativa.

Corolário 2.2.3. *Sejam* $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *e* $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *duas sequência de polinômios ortogonais no intervalo* (a,b) *com relação à função peso* $w(x)$*. Então,*

$$Q_j(x) = c_j P_j(x),\ j = 0, 1, \cdots,$$

onde c_j *é uma constante que depende apenas de* j*.*

Demostração: Seja $Q_j(x) \in \{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Como a subsequência finita de polinômios ortogonais $\{P_i(x)\}_{i=0}^{j}$ formam uma base para π_j, existem constantes reais $c_1, \cdots, c_j$, tais que

$$Q_j(x) = \sum_{i=0}^{j} c_i P_i(x),\ (c_j \neq 0).$$

Pelo item (b) do teorema (2.2.2), temos que $\langle Q_j, \pi \rangle = 0$, para todo $\pi(x)$ de grau menor do que ou igual a $j-1$. Então, concluímos que,

$$\langle Q_j, P_0 \rangle = \langle Q_j, P_1 \rangle = \cdots = \langle Q_j, P_{j-1} \rangle = 0$$

Assim, para $k = 0, 1, .., j-1$, temos que

$$0 = \langle Q_j, P_k \rangle = \left\langle \sum_{i=0}^{j} c_i P_i, P_k \right\rangle$$

Então, aplicando as propriedades do produto interno, obtemos

$$\langle c_0 P_0(x), P_k(x) \rangle + \cdots + \langle c_k P_k(x), P_k(x) \rangle + \cdots + \langle c_j P_j(x), P_k(x) \rangle = 0 \tag{2.2.4}$$

Como por hipótese $\{P_i(x)\}_{i=0}^{j}$ é uma subsequência de polinômios ortogonais, pela definição (2.1.1) temos que $\langle c_i P_i(x), P_k(x) \rangle = c_i \langle P_i(x), P_k(x) \rangle = 0$, sempre que $i \neq k$. Logo, da igualdade (2.2.4), temos

$$\langle c_k P_k, P_k \rangle = c_k \langle P_k, P_k \rangle = 0$$

Como $\langle P_k, P_k \rangle \neq 0$, segue que $c_k = 0$, para $k = 0, 1, \cdots, j-1$. Portanto,

$$Q_j = c_j P_j(x).$$

□

Facilmente podemos encontrar a constante c_j do teorema acima. De fato, considerando o produto interno $\langle Q_j, P_j\rangle$, temos:

$$\langle Q_j, P_j\rangle = \left\langle \sum_{i=0}^{j} c_i P_i, P_j \right\rangle = \sum_{i=0}^{j} c_i \langle P_i, P_j\rangle = c_j \langle P_j, P_j\rangle$$

Logo,

$$c_j = \frac{\langle Q_j, P_j\rangle}{\langle P_j, P_j\rangle}.$$

2.2.1 Relação de Recorrência de Três Termos

Uma vez conhecidas as propriedades gerais dos polinômios ortogonais, uma pergunta que surge naturalmente é como podemos obter tais polinômios. É possível construir uma sequência de polinômios ortogonais através do conhecido método de ortogonalização de Gram-Schimt. Contudo, o método é trabalhoso pois exige o cálculo de diversos produtos internos. Destacaremos aqui, então, uma outra maneira de obter tais polinômios.

Teorema 2.2.4. *(Relação de recorrência de três termos) Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais em (a, b) relativamente a função peso $w(x)$. Então,*

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1} x - \beta_{n+1}) P_n(x) - \alpha_{n+1} P_{n-1}(x), \ n \geq 0 \tag{2.2.5}$$

com $P_0(x) = 1,\ P_{-1}(x) = 0,\ \alpha_{n+1}, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R},\ \ n \geq 1,\ e$

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0 \quad \beta_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_n\rangle}{\langle P_n, P_n\rangle} \quad \alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle P_n, P_n\rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle} \neq 0.$$

Demostração: Seja $P_n(x) = a_{n,n} x^n + a_{n,n-1} x^{n-1} + \cdots + a_{n,1} x + a_{n,0} \in \{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Observe que $xP_n(x)$ é um polinômio de grau $n + 1$. Como os polinômios ortogonais $P_1, P_2 \cdots, P_{n+1}$ formam uma base para o espaço vetorial π_{n+1}, existem constantes reais $b_0, \cdots, b_{n+1}$, tais que $xP_n(x)$ pode ser unicamente representado por:

$$xP_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} b_i P_i(x) \tag{2.2.6}$$

ou seja,

$$xP_n(x) = b_0 P_0(x) + b_1 P_1(x) + ... + b_n P_n(x) + b_{n+1} P_{n+1}(x).$$

Assim, a igualdade acima pode ser escrita como:

$x(a_{n,n}x^n+\cdots+a_{n,1}x+a_{n,0}) = b_0(a_{0,0})+b_1(a_{1,1}x+a_{1,0})+\cdots+b_{n+1}(a_{n+1,n+1}x^{n+1}+a_{n+1,n}x^n+\cdots+$

$+a_{n+1,1}x + a_{n+1,0})$.

Logo,

$a_{n,n}x^{n+1}+\cdots+a_{n,1}x^2+a_{n,0}x = b_{n+1}a_{n+1,n+1}x^{n+1}+b_{n+1}a_{n+1,n}x^n+\cdots+b_{n+1}a_{n+1,1}x+b_{n+1}a_{n+1,0}+\cdots+$

$+b_1a_{1,1}x + b_1a_{1,0} + b_0a_{0,0}$.

Como temos polinômios idênticos, os coeficientes dos termos correspondentes são iguais, e logo

$$a_{n,n} = b_{n+1}a_{n+1,n+1}.$$

Então,

$$b_{n+1} = \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}}.$$

Agora, considerando $\pi(x) = xP_j(x)$, para $j \leq n-2$, observe que

$$\langle xP_n(x), P_j(x)\rangle = \int_a^b xP_n(x)P_j(x)w(x)dx = \int_a^b P_n(x)xP_j(x)w(x)dx$$
$$= \langle P_n(x), xP_j(x)\rangle = \langle P_n(x), \pi(x)\rangle$$

Note que o grau de $\pi(x)$ é $j+1$ e logo, para $j \leq n-2$, $\pi(x)$ terá grau no máximo $n-1$. Portanto, pelo item (b) do teorema (2.2.2), obtemos $\langle P_n, \pi\rangle = 0$, ou seja, $\langle xP_n, P_j\rangle = 0$ para $j \leq n-2$. Assim, usando a igualdade (2.2.6),obtemos

$$0 = \langle xP_n, P_j\rangle = \left\langle \sum_{i=0}^{n+1} b_iP_i, P_j \right\rangle = \sum_{i=0}^{n+1} b_i\langle P_i, P_j\rangle.$$

ou seja,

$$b_0\langle P_0(x), P_j(x)\rangle + \cdots + b_j\langle P_j(x), P_j(x)\rangle + \cdots + b_{n+1}\langle P_{n+1}(x), P_{n+1}(x)\rangle = 0 \qquad (2.2.7)$$

Como, por hipótese, $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais, pela definição (2.1.1) temos que $b_i\langle P_i(x), P_j(x)\rangle = 0$, sempre que $i \neq j$. Logo, da igualdade (2.2.7), temos

$$b_j\langle P_j, P_j\rangle = 0$$

Portanto, como $\langle P_j, P_j\rangle \neq 0$, temos que $b_j = 0$ para $j \leq n-2$. Assim, como

$$xP_n(x) = b_0P_0 + b_1P_1 + ... + b_nP_n + b_{n+1}P_{n+1}$$

e sabendo que $b_j = 0$, se $j \leq n-2$, concluímos que

$$xP_n(x) = b_{n+1}P_{n+1}(x) + b_nP_n(x) + b_{n-1}P_{n-1}(x). \tag{2.2.8}$$

ou seja,

$$b_{n+1}P_{n+1}(x) = xP_n(x) - b_{n-1}P_{n-1}(x) - b_nP_n(x).$$

Dividindo os dois lados da igualdade acima por b_{n+1} obtemos

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{b_{n+1}}xP_n(x) - \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}P_{n-1}(x) - \frac{b_n}{b_{n+1}}P_n(x).$$

Colocando $P_n(x)$ em evidência, temos

$$P_{n+1}(x) = \left(\frac{1}{b_{n+1}}x - \frac{b_n}{b_{n+1}}\right)P_n(x) - \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}P_{n-1}(x). \tag{2.2.9}$$

Assim, se

$$\gamma_{n+1} = \frac{1}{b_{n+1}}, \quad \beta_{n+1} = \frac{b_n}{b_{n+1}} \quad e \quad \alpha_{n+1} = \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}$$

temos

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x).$$

Para concluir a demonstração só resta provar que

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}}, \quad \beta_{n+1} = \gamma_{n+1}\frac{\langle xP_n, P_n\rangle}{\langle P_n, P_n\rangle} \quad e \quad \alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}\frac{\langle P_n, P_n\rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle}.$$

De fato, como $b_{n+1} = \dfrac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}}$, obtemos que

$$\gamma_{n+1} = \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{\dfrac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}}}$$

Logo,

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}}.$$

Agora por (2.2.8) temos que $xP_n(x) = b_{n+1}P_{n+1}(x) + b_nP_n(x) + b_{n-1}P_{n-1}(x)$. Assim

$$\langle xP_n, P_n\rangle = \langle b_{n+1}P_{n+1}(x) + b_nP_n(x) + b_{n-1}P_{n-1}(x), P_n(x)\rangle.$$

Aplicando as propriedades do produto interno, obtemos

$$\langle xP_n, P_n\rangle = b_{n+1}\langle P_{n+1}(x), P_n(x)\rangle + b_n\langle P_n(x), P_n(x)\rangle + b_{n-1}\langle P_{n-1}(x), P_n(x)\rangle$$

Pela definição (2.1.1),temos que $\langle P_{n+1}, P_n\rangle = 0$ e $\langle P_{n-1}(x), P_n(x)\rangle = 0$. Então,

$$\langle xP_n, P_n\rangle = b_n\langle P_n, P_n\rangle.$$

Substituindo essa informação na fórmula do β_{n+1}, obtemos:

$$\beta_{n+1} = \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{1}{b_{n+1}} \cdot b_n = \frac{1}{b_{n+1}}\frac{b_n\langle P_n, P_n\rangle}{\langle P_n, P_n\rangle} = \frac{1}{b_{n+1}}\frac{\langle xP_n, P_n\rangle}{\langle P_n, P_n\rangle}.$$

Portanto,

$$\beta_{n+1} = \gamma_{n+1}\frac{\langle xP_n, P_n\rangle}{\langle P_n, P_n\rangle}$$

Utilizando a fórmula de recorrência, obtemos que

$$\langle P_{n+1}, P_{n-1}\rangle = \langle(\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n - \alpha_{n+1}P_{n-1}, P_{n-1}\rangle$$

$$= \langle\gamma_{n+1}xP_n - \beta_{n+1}P_n - \alpha_{n+1}P_{n-1}, P_{n-1}\rangle$$

Aplicando novamente as propriedades do produto interno, obtemos

$$\langle P_{n+1}, P_{n-1}\rangle = \langle\gamma_{n+1}xP_n, P_{n-1}\rangle - \langle\beta_{n+1}P_n, P_{n-1}\rangle - \langle\alpha_{n+1}P_{n-1}, P_{n-1}\rangle$$

$$= \gamma_{n+1}\langle xP_n, P_{n-1}\rangle - \beta_{n+1}\langle P_n, P_{n-1}\rangle - \alpha_{n+1}\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle$$

Pela definição (2.1.1), temos que,$\langle P_n, P_{n-1}\rangle = 0$ e $\langle P_{n+1}, P_{n-1}\rangle = 0$. Logo,

$$\gamma_{n+1}\langle xP_n, P_{n-1}\rangle - \alpha_{n+1}\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle = 0$$

ou seja,

$$\alpha_{n+1}\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle = \gamma_{n+1}\langle xP_n, P_{n-1}\rangle$$

Portanto,

$$\alpha_{n+1} = \gamma_{n+1}\frac{\langle xP_n, P_{n-1}\rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle} \tag{2.2.10}$$

Porém, da fórmula de recorrência, temos que

$$P_n(x) = (\gamma_n x - \beta_n)P_{n-1}(x) - \alpha_n P_{n-2}(x),$$

ou seja,

$$\gamma_n x P_{n-1}(x) = P_n(x) + \beta_n P_{n-1}(x) + \alpha_n P_{n-2}(x).$$

Dividindo os dois lados da igualdade acima por γ_n, obtemos

$$xP_{n-1} = \frac{1}{\gamma_n} P_n(x) + \frac{\beta_n}{\gamma_n} P_{n-1}(x) + \frac{\alpha_n}{\gamma_n} P_{n-2}(x). \tag{2.2.11}$$

Note que

$$\langle xP_n, P_{n-1} \rangle = \int_a^b xP_n(x)P_{n-1}(x)w(x)dx = \int_a^b P_n(x)xP_{n-1}(x)w(x)dx = \langle P_n, xP_{n-1} \rangle.$$

Assim, usando (2.2.11) temos

$$\begin{aligned}\langle P_n, xP_{n-1} \rangle &= \left\langle P_n, \frac{1}{\gamma_n} P_n + \frac{\beta_n}{\gamma_n} P_{n-1} + \frac{\alpha_n}{\gamma_n} P_{n-2} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\gamma_n} \langle P_n, P_n \rangle + \frac{\beta_n}{\gamma_n} \langle P_n, P_{n-1} \rangle + \frac{\alpha_n}{\gamma_n} \langle P_n, P_{n-2} \rangle\end{aligned}$$

Como $\langle P_n, P_{n-2} \rangle = 0 \quad e \quad \langle P_n, P_{n-1} \rangle = 0.$ Segue que,

$$\langle P_n, xP_{n-1} \rangle = \frac{1}{\gamma_n} \langle P_n, P_n \rangle.$$

Substituindo essa informação em (2.2.10), obtemos

$$\alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}.$$

□

2.3 Zeros dos Polinômios Ortogonais

Faremos agora um estudo sobre o comportamento dos zeros dos polinômios ortogonais. Veremos que seus zeros se comportam de forma peculiar: são reais, distintos, pertencem ao intervalo de ortogonalidade e são entrelaçados de modo que, entre duas raízes do polinômio de grau $n-1$, existe uma raiz do polinômio de grau n.

Teorema 2.3.1. *Seja $\{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais no intervalo (a,b) com relação à função peso $w(x)$. Então as raízes de $P_n(x)$ são reais, distintas e pertencem ao intervalo (a,b).*

Demostração: Suponhamos que $P_n(x)$ não muda de sinal em (a, b). Então ou $P_n(x) \geq 0$ ou $P_n(x) \leq 0$, para todo $x \in (a, b)$. Observe que em nenhum dos casos $P_n(x)$ é identicamente nulo, pois possui grau $n \geq 1$. Mais ainda, como $w(x)$ é não negativa, então $P_n(x)w(x) \geq 0$ ou $P_n(x)w(x) \leq 0$, para todo $x \in (a, b)$ e $n = 1, 2, \cdots$ e $P_n(x)w(x)$ não é identicamente nula. Logo

$$\int_a^b P_n(x)w(x)dx > 0 \quad \text{ou} \quad \int_a^b P_n(x)w(x)dx < 0. \tag{2.3.1}$$

Por outro lado temos que

$$\int_a^b P_n(x)w(x)dx = \int_a^b 1 \cdot P_n(x)w(x)dx = \langle P_n, P_0 \rangle$$

e então,

$$\langle P_n, P_0 \rangle > 0 \quad \text{ou} \quad \langle P_n, P_0 \rangle < 0, \quad \text{onde} \quad P_0(x) = 1. \tag{2.3.2}$$

Pelo item (b) do teorema (2.2.2), sabemos que $\langle P_n, P_0 \rangle = 0$, mas isso é um absurdo, pois contradiz (2.3.2). Portanto, $P_n(x)$ deve mudar de sinal em (a, b) pelo menos uma vez. Assim, como $P_n(x)$ é contínuo, segue do teorema do Valor Intermediário e da proposição (1.1.4) que existe ao menos uma raíz real de multiplicidade ímpar em (a, b).

Suponhamos que $x_{n,1}, x_{n,2}, \cdots, x_{n,r}$ onde $r < n$, são as raízes distintas de multiplicidade ímpar de $P_n(x)$ em (a, b). Então,

$$P_n(x) = (x - x_{n,1})(x - x_{n,2})...(x - x_{n,r})Q(x),$$

em que $Q(x)$ é um polinômio de grau $(n - r)$ que tem apenas raízes de multiplicidade par, complexas ou fora de (a, b). Como as possíveis raízes reais de $Q(x)$ que estão no intervalo (a, b) são de multiplicidade par, segue da proposição (1.1.4) que $Q(x)$ não muda de sinal neste intervalo. Considere

$$\pi(x) = (x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \cdots (x - x_{n,r}).$$

Note que o grau de $\pi(x)$ é menor que o de $P_n(x)$ e logo

$$\langle P_n, \pi \rangle = 0 \tag{2.3.3}$$

Porém,

$$\langle P_n, \pi \rangle = \int_a^b \pi(x)P_n(x)w(x)dx = \int_a^b (x - x_{n,1})(x - x_{n,2})...(x - x_{n,r})P_n(x)w(x)dx$$

$$= \int_a^b (x - x_{n,1})^2 (x - x_{n,2})^2 ... (x - x_{n,r})^2 Q(x) w(x) dx \quad (2.3.4)$$

Como $(x - x_{n,1})^2 (x - x_{n,2})^2 ... (x - x_{n,r})^2$ é maior que zero, $w(x)$ por definição é uma função não negativa e não identicamente nula e $Q(x)$ não muda de sinal no intervalo (a, b), concluímos que $\langle P_n, \pi \rangle \neq 0$. Por (2.3.3) e (2.3.4) temos um absurdo. Logo, $P_n(x)$ tem $r \geq n$ raízes de multiplicidade ímpar em (a, b). Mas como $P_n(x)$ é um polinômio de grau n, temos que o número de raízes não pode exceder o grau do polinômio e logo, $r = n$. Sendo assim, $P_n(x)$ tem n raízes de multiplicidade ímpar em (a, b). Portanto, podemos escrever:

$$P_n(x) = (x - x_{n,1})^{a_1} (x - x_{n,2})^{a_2} .... (x - x_{n,n})^{a_n}.$$

Como $x_{n,1}, \cdots, x_{n,n}$ são as n raízes de multiplicidade ímpar de $P_n(x)$ e os índices $a_1, a_2, \cdots, a_n$ são todos positivos e ímpares, podemos concluir que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$. Portanto as raízes de $P_n(x)$ são reais, distintas e pertencem ao intervalo (a, b) $\square$

Os polinômios ortogonais satisfazem a identidade de Christoffel Darboux apresentada a seguir. Tal identidade é útil para demonstrar outras propriedades interessante relacionada aos zeros dos polinômios ortogonais.

Teorema 2.3.2. *(Identidade de Christoffel-Darboux) Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortonormais. Então, eles satisfazem a seguinte identidade*

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(x) P_k(y) = \frac{1}{\gamma_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x) P_n(y) - P_n(x) P_{n+1}(y)}{x - y} \quad (2.3.5)$$

onde γ_{n+1} é uma constante definida no Teorema (2.2.4).

Demostração: Utilizando a relação de recorrência de três termos (2.2.4) em P_{n+1}, obtemos

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y) &= [(\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x)]P_n(y) \\ &\quad - P_n(x)[(\gamma_{n+1}y - \beta_{n+1})P_n(y) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(y)] \\ &= \gamma_{n+1}xP_n(x)P_n(y) - \beta_{n+1}P_n(x)P_n(y) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x)P_n(y) \\ &\quad - \gamma_{n+1}yP_n(x)P_n(y) + \beta_{n+1}P_n(x)P_n(y) + \alpha_{n+1}P_n(x)P_{n-1}(y) \\ &= \gamma_{n+1}xP_n(x)P_n(y) - \gamma_{n+1}yP_n(x)P_n(y) + \alpha_{n+1}P_n(x)P_{n-1}(y) \\ &\quad - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x)P_n(y) \end{aligned}$$

Logo,

$$P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y) =$$

$$\alpha_{n+1}[P_n(x)P_{n-1}(y) - P_{n-1}(x)P_n(y)] + (x-y)\gamma_{n+1}P_n(x)P_n(y) \quad (2.3.6)$$

Como $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortonormais, temos que $\langle P_n, P_n\rangle = 1$ e $\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle = 1$. Logo,

$$\alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}\frac{\langle P_n, P_n\rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}.$$

Substituindo a informação acima em (2.3.6), obtemos

$$P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y) = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}[P_n(x)P_{n-1}(y) - P_{n-1}(x)P_n(y)] + (x-y)\gamma_{n+1}P_n(x)P_n(y). \quad (2.3.7)$$

De forma análoga, obtemos

$$P_n(x)P_{n-1}(y) - P_{n-1}(x)P_n(y) = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}[P_{n-1}(x)P_{n-2}(y) - P_{n-2}(x)P_{n-1}(y)] + (x-y)\gamma_n P_{n-1}(x)P_{n-1}(y). \quad (2.3.8)$$

Substituindo (2.3.8) em (2.3.7), obtemos

$$\begin{aligned}
P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y) &= \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}\left\{\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}[P_{n-1}(x)P_{n-2}(y) - P_{n-2}(x)P_{n-1}(y)]\right.\\
&\left. + (x-y)\gamma_n P_{n-1}(x)P_{n-1}(y)\right\} + (x-y)\gamma_{n+1}P_n(x)P_n(y).\\
&= \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_{n-1}}[P_{n-1}(x)P_{n-2}(y) - P_{n-2}(x)P_{n-1}(y)] + (x-y)\gamma_{n+1}P_{n-1}(x)P_{n-1}(y)\\
&+ (x-y)\gamma_{n+1}P_n(x)P_n(y)]\\
&= \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_{n-1}}[P_{n-1}(x)P_{n-2}(y) - P_{n-2}(x)P_{n-1}(y)]\\
&+ (x-y)\gamma_{n+1}[P_{n-1}(x)P_{n-1}(y) + P_n(x)P_n(y)]
\end{aligned}$$

Usando este raciocínio n vezes, temos

$$\begin{aligned}
P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y) &= \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_1}[P_1(x)P_0(y) - P_0(x)P_1(y)] + \gamma_{n+1}[(x-y)\sum_{k=1}^{n} P_k(x)P_k(y)] \quad (2.3.9)\\
&= \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_1}[P_1(x)P_0(y) - P_0(x)P_1(y) + \gamma_1(x-y)\sum_{k=1}^{n} P_k(x)P_k(y)].
\end{aligned}$$

Mas $P_1(x) = a_{1,1}x + a_{1,0}$ e $P_0(x) = a_{0,0}$ e logo

$$P_1(x)P_0(y) - P_0(x)P_1(y) = a_{0,0}(a_{1,1}x + a_{1,0}) - a_{0,0}(a_{1,1}y + a_{1,0})$$

$$= a_{1,1}a_{0,0}x + a_{1,0}a_{0,0} - a_{0,0}a_{1,1}y - a_{0,0}a_{1,0} = a_{0,0}a_{1,1}(x-y)$$

Substituindo a informação acima em (2.3.9), obtemos

$$P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y) = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_1}\left[a_{0,0}a_{1,1}(x-y) + \gamma_1(x-y)\sum_{k=1}^{n} P_k(x)P_k(y)\right]$$

$$= \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_1}\left[a_{0,0}a_{1,1} + \gamma_1\sum_{k=1}^{n} P_k(x)P_k(y)\right](x-y).$$

Sabendo que $\gamma_1 = \dfrac{a_{1,1}}{a_{0,0}}$, temos

$$P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y) = \gamma_{n+1}\frac{a_{0,0}}{a_{1,1}}[a_{0,0}a_{1,1} + \frac{a_{1,1}}{a_{0,0}}\sum_{k=1}^{n} P_k(x)P_k(y)](x-y)$$

$$= \gamma_{n+1}(x-y)\left[(a_{0,0})^2 + \sum_{k=1}^{n} P_k(x)P_k(y)\right]$$

Somando e subtraindo $P_0(x)P_0(y)$ no lado direito da igualdade acima, obtemos

$$P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y) = \gamma_{n+1}(x-y)[(a_{0,0})^2 + P_0(x)P_0(y) - P_0(x)P_0(y) + \sum_{k=1}^{n} P_k(x)P_k(y)]$$

$$= \gamma_{n+1}(x-y)\left[(a_{0,0})^2 - P_0(x)P_0(y) + \sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_k(y)\right]$$

Como $P_0(x) = P_0(y) = a_{0,0}$, segue que

$$P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y) = \gamma_{n+1}(x-y)\left[(a_{0,0})^2 - (a_{0,0})^2 + \sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_k(y)\right]$$

$$= \gamma_{n+1}(x-y)\left[\sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_k(y)\right]$$

Então,

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_k(y) = \frac{1}{\gamma_{n+1}}\frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{(x-y)}$$

□

Somando e subtraindo $P_{n+1}(x)P_n(x)$ na identidade de Christoffel-Darboux podemos reescreve-la em função das derivadas desses polinômios da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_k(y) &= \frac{1}{\gamma_{n+1}}\frac{P_{n+1}(x)P_n(y)+P_{n+1}(x)P_n(x)-P_{n+1}(x)P_n(x)-P_n(x)P_{n+1}(y)}{(x-y)}\\ &= \frac{1}{\gamma_{n+1}}\frac{P_n(x)(P_{n+1}(x)-P_{n+1}(y))-P_{n+1}(x)(P_n(x)-P_n(y))}{(x-y)}\\ &= \frac{1}{\gamma_{n+1}}\left[P_n(x)\frac{P_{n+1}(x)-P_{n+1}(y)}{x-y}-P_{n+1}(x)\frac{P_n(x)-P_n(y)}{x-y}\right].\end{aligned}$$

Observe que

$$P'_{n+1}(x)=\lim_{x\to y}\frac{P_{n+1}(x)-P_{n+1}(y)}{x-y} \quad \text{e} \quad P'_n(x)=\lim_{x\to y}\frac{P_n(x)-P_n(y)}{x-y}$$

Assim, fazendo $y \longrightarrow x$ nos dois membros da igualdade, obtemos

$$\sum_{k=0}^{n}(P_k(x))^2=\frac{1}{\gamma_{n+1}}[P_n(x)P'_{n+1}(x)-P_{n+1}(x)P'_n(x)], \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2.3.10}$$

Note que, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $\sum_{k=0}^{n}(P_k(x))^2 > 0$ e $\gamma_{n+1} > 0$ e então concluímos que

$$\frac{1}{\gamma_{n+1}}[P_n(x)P'_{n+1}(x)-P_{n+1}(x)P'_n(x)]>0$$

O resultado abaixo nos mostra que os zeros dos polinômios ortogonais são entrelaçados, de modo que entre dois zeros do polinômio de grau $n-1$ existe apenas um zero do polinômio de grau n.

Teorema 2.3.3. *Seja $\{P_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais. Então, entre dois zeros consecutivos do polinômio $P_{n-1}(x)$, de grau $n-1$, existe somente um zero de $P_n(x)$.*

Demonstração: Suponhamos que os polinômios $P_j(x)$ sejam ortonormais e o coeficiente do termo de maior grau $a_{j,j}$ seja positivo, ou seja, $a_{j,j} > 0$ para $j = 0, 1, 2, \cdots$. Consideremos $x_{n-1,k}$ e $x_{n-1,k+1}$, dois zeros consecutivos de $P_{n-1}(x)$ em que $k = 1, 2, .., n-2$. Aplicando esses zeros na identidade de Christoffes-Darboux (2.3.10), obtemos

$$P_{n-1}(x_{n-1,k})P'_n(x_{n-1,k})-P_n(x_{n-1,k})P'_{n-1}(x_{n-1,k})>0 \quad \text{e}$$

$$P_{n-1}(x_{n-1,k+1})P'_n(x_{n-1,k+1})-P_n(x_{n-1,k+1})P'_{n-1}(x_{n-1,k+1})>0$$

Como $x_{n-1,k}$ e $x_{n-1,k+1}$ são os zero de $P_{n-1}(x)$, segue que $P_{n-1}(x_{n-1,k}) = 0$ e $P_{n-1}(x_{n-1,k+1}) = 0$. Logo temos,

$$-P_n(x_{n-1,k})P'_{n-1}(x_{n-1,k}) > 0 \quad \text{e} \quad -P_n(x_{n-1,k+1})P'_{n-1}(x_{n-1,k+1}) > 0$$

ou seja,

$$P_n(x_{n-1,k})P'_{n-1}(x_{n-1,k}) < 0 \quad \text{e} \quad P_n(x_{n-1,k+1})P'_{n-1}(x_{n-1,k+1}) < 0 \tag{2.3.11}$$

Como $x_{n-1,k}$ e $x_{n-1,k+1}$ são duas raízes consecutivas de $P_{n-1}(x)$ e $P_{n-1}(x)$ é contínuo, temos que a derivada de $P_{n-1}(x)$ em $x_{n-1,k}$ e em $x_{n-1,k+1}$ tem sinais opostos, ou seja $P'_{n-1}(x_{n-1,k}) < 0$ e $P'_{n-1}(x_{n-1,k+1}) > 0$ ou $P'_{n-1}(x_{n-1,k}) > 0$ e $P'_{n-1}(x_{n-1,k+1}) < 0$. Portanto, pela desigualdade (2.3.11), concluímos que $P_n(x_{n-1,k})$ e $P_n(x_{n-1,k+1})$ também tem sinais opostos e além disso $P_n(x_{n-1,k}) \neq 0$ e $P_n(x_{n-1,k+1}) \neq 0$. Logo, como $P_n(x)$ é contínua segue do Teorema do Valor Intermediário que existe pelo menos um zero de $P_n(x)$ no intervalo $(x_{n-1,k}, x_{n-1,k+1})$.

Veja que, quando o coeficiente do termo de maior grau $a_{n,n}$ é positivo, temos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} P_n(x) &= \lim_{x\to+\infty} a_{n,n}x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{n,1}x + a_{n,0} \\ &= \lim_{x\to+\infty} x^n\left(a_{n,n} + \frac{a_{n,n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_{n,1}}{x^{n-1}} + \frac{a_{n,0}}{x^n}\right) = +\infty\end{aligned}$$

Logo como todas raízes de $P_n(x)$ estão dentro do intervalo (a, b) e $\lim\limits_{x\to+\infty} P_n(x) = +\infty$ concluímos que $P_n(b) > 0$.

Da mesma forma, como $a_{n-1,n-1}$ também é maior que zero, temos que $\lim\limits_{x\to+\infty} P_{n-1}(x) = +\infty$. Além disso sabendo que $x_{n-1,n-1}$ é o último zero de $P_{n-1}(x)$, segue que a partir deste ponto o gráfico de $P_{n-1}(x)$ é crescente. Logo podemos concluir que $P'_{n-1}(x_{n-1,n-1}) > 0$. Assim, como $P'_{n-1}(x_{n-1,n-1}) > 0$, usando a desigualdade (2.3.11), obtemos que $P_n(x_{n-1,n-1}) < 0$.

Portanto, sabendo que $P_n(x_{n-1,n-1}) < 0$ e $P_n(b) > 0$, segue novamente do Teorema do Valor Intermediário que existe pelo menos um zero de $P_n(x)$ entre $x_{n-1,n-1}$ e b. Da mesma forma podemos mostrar que existe um zero de $P_n(x)$ entre a e $x_{n-1,1}$.Provamos então que existe pelo menos um zero de $P_n(x)$ entre as raízes consecutivas de $P_{n-1}(x)$ e existe um zero de $P_n(x)$ no intervalo $(x_{n-1,n-1}, b)$ e $(a, x_{n-1,1})$. Logo, como $P_n(x)$ tem n zeros concluímos que entre dois zeros consecutivos de $P_{n-1}(x)$ existe somente um zero de $P_n(x)$. $\square$

Abaixo temos o gráfico dos polinômios de Chebyshev de 1° espécie citados no inicio da seção 2.1.

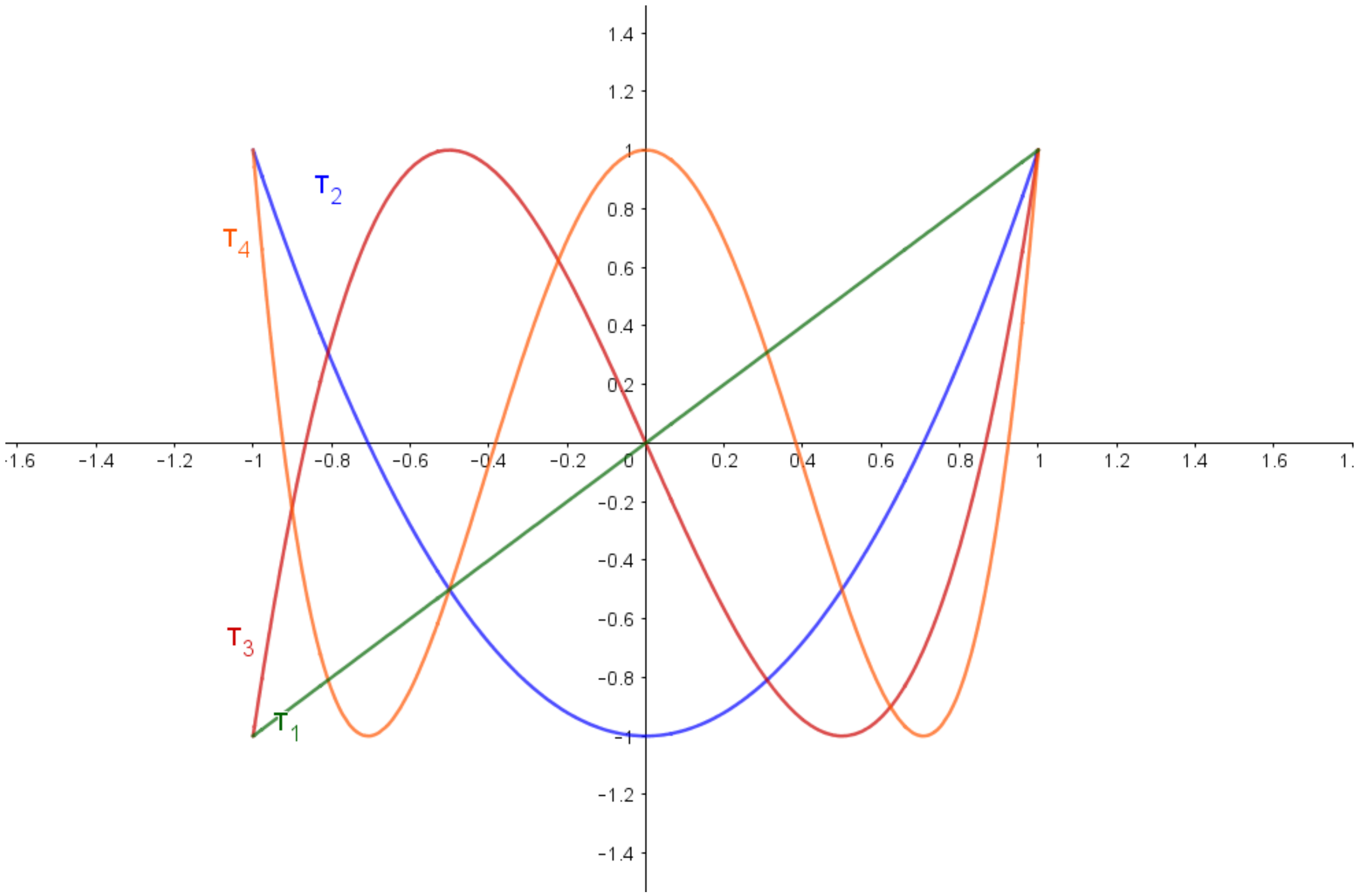

Figura 2.1: Polinômios de Chebyshev de 1° espécie $T_n(x)$, $n = 1, 2, 3, 4$.

Podemos verificar as propriedades dos zeros para tais polinômios. Note que, olhando individualmente para cada gráfico é possível perceber que os zeros são reais, distintos e pertencem ao intervalo de ortogonalidade $[-1, 1]$. Por exemplo, se observo o gráfico do polinômio $T_2(x)$ consigo perceber que seus zeros são distintos e estão dentro do intervalo $[-1, 1]$ e o mesmo acontece para $T_3(x)$. Assim, os zeros de qualquer $T_n(x)$ cruzam o eixo x n vezes dentro do intervalo $[-1, 1]$. Além disso, entre duas raízes consecutivas do polinômio de grau 2 $T_2(x)$ existe apenas uma raiz de $T_3(x)$. O mesmo acontece quando pego $T_4(x)$ e $T_3(x)$.

Capítulo 3

Polinômios ortogonais clássicos

Neste capítulo estudaremos os polinômios ortogonais clássicos: os polinômios de Jacobi e os casos especiais desses polinômios (Polinômios de Legendre, de Chebyshev de primeira e segunda espécie e de Gegenbauer), polinômios de Laguerre e de Hermite. Tais polinômios são aqueles em que a função peso associada satisfaz uma certa equação diferencial, conforme a definição abaixo.

Definição 3.0.1. Os polinômios ortogonais são chamados de *polinômios ortogonais clássicos* se a função peso $w(x)$ satisfaz a seguinte equação diferencial

$$\frac{d}{dx}(M(x)w(x)) = N(x)w(x)$$

onde

$$M(x) = \begin{cases} 1 - x^2, \; se \; (a,b) = (-1,1) \\ x, \; se \; (a,b) = (0,\infty) \\ 1, \; se \; (a,b) = (-\infty,\infty) \end{cases}$$

e $N(x)$ é um polinômio de grau 1.

Para cada classe desses polinômios exibiremos o coeficiente do termo de maior grau, a relação de ortogonalidade que satisfazem e a relação de recorrência que permite obtê-los. Trataremos ainda de algumas propriedades particulares relacionadas a algumas das classes dos polinômios ortogonais.

3.1 Polinômios de Jacobi

Definição 3.1.1. Os *polinômios de Jacobi*, denotados por $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, são definidos pela fórmula de Rodrigues

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}], \tag{3.1.1}$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ com $\alpha, \beta > -1$.

Tais polinômios são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ com relação à função peso

$$w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta.$$

Vamos agora obter a relação de ortogonalidade que esses polinômios satisfazem. Para isso será necessário obter o coeficiente líder dos polinômios de Jacobi. Pela regra de Leibnitz sabemos que

$$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x). \tag{3.1.2}$$

Considere então $f(x) = (1-x)^{\alpha+n}$ e $g(x) = (1+x)^{\beta+n}$. Assim,

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = (-1)(\alpha+n)(1-x)^{\alpha+n-1}$$

e

$$\frac{d^2}{dx^2}(f(x)) = (-1)^2(\alpha+n)(\alpha+n-1)(1-x)^{\alpha+n-2}$$

Seguindo esse raciocínio obtemos

$$\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(f(x)) = (-1)^{n-k}(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+k+1)(1-x)^{\alpha+k}$$

para $k \in \mathbb{N}$ com $k \leq n$. Agora

$$\frac{d}{dx}(g(x)) = (\beta+n)(1+x)^{\beta+n-1}$$

e

$$\frac{d^2}{dx^2}(g(x)) = (\beta+n)(\beta+n-1)(1+x)^{\beta+n-2}$$

Logo,

$$\frac{d^k}{dx^k}(g(x)) = (\beta+n)(\beta+n-1)\cdots(\beta+n-k+1)(1+x)^{\beta+n-k},$$

para $k \in \mathbb{N}$ com $k \leq n$.

Substituindo o valor dessas derivadas na regra de Leibnitz obtemos

$$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^{n-k}(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+k+1)(1-x)^{\alpha+k}$$
$$\times(\beta+n)(\beta+n-1)\cdots(\beta+n-k+1)(1+x)^{\beta+n-k}$$
$$= (-1)^n n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!}(-1)^{-k}(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+k+1)(1-x)^{\alpha+k} \tag{3.1.3}$$
$$\times(\beta+n)(\beta+n-1)\cdots(\beta+n-k+1)(1+x)^{\beta+n-k}$$

Assim, usando a definição dos polinômios de Jacobi e a igualdade (3.1.3), vem que

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}(-1)^n n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{-k}}{k!(n-k)!}(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+k+1)(1-x)^{\alpha+k}$$
$$\times(\beta+n)(\beta+n-1)\cdots(\beta+n-k+1)(1+x)^{\beta+n-k}$$

Simplificando a equação acima e considerando que

$$(-1)^{-k} = (-1)^k, \quad (1-x)^{-\alpha}(1-x)^{\alpha+k} = (1-x)^k \quad \text{e} \quad (1+x)^{-\beta}(1+x)^{\beta+n-k} = (1+x)^{n-k}$$

obtemos,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}(\alpha+n)\cdots(\alpha+k+1)(\beta+n)\cdots(\beta+n-k+1)(1-x)^k(1+x)^{n-k}. \tag{3.1.4}$$

Agora para $x \in [-1, 1]$ temos que

$$(1-x)^k = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j \binom{k}{j} x^j \quad \text{e} \quad (1+x)^{n-k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} x^i.$$

Logo

$$(1-x)^k \cdot (1+x)^{n-k} = \left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \binom{k}{j} x^j\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} x^i\right)$$

$$= \left((-1)^k \binom{k}{k} x^k + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} x^{k-1} + \cdots\right) \cdot \left(\binom{n-k}{n-k} x^{n-k} + \binom{n-k}{n-k-1} x^{n-k-1} + \cdots\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \big((-1)^k x^k + (-1)^{k-1} k x^{k-1} + \cdots\big) \cdot \big(x^{n-k} + (n-k)x^{n-k-1} + \cdots\big)\\
&= (-1)^k x^n + (-1)^k (n-k) x^{n-1} + (-1)^{k-1} k x^{n-1} + \cdots\\
&= (-1)^k x^n + [(-1)^{k-1}(k-1) + (-1)^k (n-k-1)] x^{n-1} + \cdots
\end{aligned}
$$

Substituindo o valor do produto acima em (3.1.4), obtemos

$$
\begin{aligned}
P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}(\alpha+n)\cdots(\alpha+k+1)(\beta+n)\cdots(\beta+n-k+1)\\
&\qquad \times\{(-1)^k x^n + [(-1)^{k-1}k + (-1)^k(n-k)]x^{n-1} + \cdots\}\\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!}(\alpha+n)\cdots(\alpha+k+1)\cdot(\beta+n)\cdots(\beta+n-k+1)x^n + \cdots
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
a_{n,n} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!}(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+k+1)(\beta+n)(\beta+n-1)\cdots(\beta+n-k+1). \quad (3.1.5)
$$

Agora, dado $k \leq n$ e usando a propriedade $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ da função Gama, veja que

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\alpha+n+1) &= (\alpha+n)\Gamma(\alpha+n) = (\alpha+n)\Gamma(\alpha+n-1+1)\\
&= (\alpha+n)(\alpha+n-1)\Gamma(\alpha+n-1) = (\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+k+1)\Gamma(\alpha+k+1).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+k-1) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)}
$$

Da mesma forma, se $k \leq n$, temos

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\beta+n+1) &= (\beta+n)\Gamma(\beta+n) = (\beta+n)\Gamma(\beta+n-1+1)\\
&= (\beta+n)(\beta+n-1)\Gamma(\beta+n-1) = \cdots = (\beta+n)\cdots(\beta+n-k+1)\Gamma(\beta+n-k+1)
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
(\beta+n)(\beta+n-1)\cdots(\beta+n-k+1) = \frac{\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+n-k+1)}
$$

Portanto, substituindo essas informações em (3.1.5) obtemos

$$
a_{n,n} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)}\frac{\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+n-k+1)}. \quad (3.1.6)
$$

O próximo resultado nos fornece uma maneira mais simples de representar o coeficiente do termo de maior grau para os polinômios de Jacobi.

Proposição 3.1.2. *O coeficiente do termo de maior grau do polinômio de Jacobi $a_{n,n}$ também pode ser dado por*

$$a_{n,n} = \frac{1}{2^n n!}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}.$$

Demonstração: Vide em [2]

O resultado a seguir nos fornece a relação de ortogonalidade para os polinômios de Jacobi.

Teorema 3.1.3. *Os polinômios de Jacobi satisfazem a seguinte relação de ortogonalidade*

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_m^{(\alpha,\beta)}\rangle = \begin{cases} 0, \quad se \quad m \neq n \\ \dfrac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{n!(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \neq 0, \;\; se\ m = n \end{cases},$$

onde Γ denota a função Gama definida no capítulo 1.

Demostração: Considere sem perda de generalidade que $n \leq m$. Para simplificar, as vezes vamos denotar os polinômios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ apenas por $P_n^{(\alpha,\beta)}$. Usando a definição de produto interno no espaço dos polinômios e a função peso $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ temos

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_m^{(\alpha,\beta)}\rangle = \int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)} P_m^{(\alpha,\beta)}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx.$$

Aplicando fórmula de Rodrigues (3.1.1) em $P_m^{(\alpha,\beta)}(x)$, obtemos

$$\begin{aligned}&\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_n^{(\alpha,\beta)}\rangle = \\ &= \int_{-1}^{1}\left\{P_n^{(\alpha,\beta)}\frac{(-1)^m}{2^m m!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^m}{dx^m}[(1-x)^{\alpha+m}(1+x)^{\beta+m}](1-x)^\alpha(1+x)^\beta\right\}dx \\ &= \frac{(-1)^m}{2^m m!}\int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}\frac{d^m}{dx^m}[(1-x)^{\alpha+m}(1+x)^{\beta+m}]dx.\end{aligned}$$

Considere $h_m(x) = (1-x)^{\alpha+m}(1+x)^{\beta+m}$. Assim,

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_m^{(\alpha,\beta)}\rangle = \frac{(-1)^m}{2^m m!}\int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\frac{d^m}{dx^m}(h_m(x))dx.$$

Integrando por partes, considere $u = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ e $dv = \dfrac{d^m}{dx^m}(h_m(x))dx$. Assim, $du = \dfrac{d}{dx}(P_n^{(\alpha,\beta)})dx$ e $v = \dfrac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(h_m(x))$. Logo,

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_m^{(\alpha,\beta)}\rangle = \frac{(-1)^m}{2^m m!}\left[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(h_m(x))\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}(P_n^{(\alpha,\beta)}(x))\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(h_m(x))dx\right].$$

Como $\dfrac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(h_m(x))(1) = 0$ e $\dfrac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(h_m(x))(-1) = 0$, temos

$$\begin{aligned}\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_m^{(\alpha,\beta)}\rangle &= \frac{(-1)^m}{2^m m!}\left[-\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}(P_n^{(\alpha,\beta)})\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(h_m(x))dx\right]\\ &= \frac{(-1)^{m+1}}{2^m m!}\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}(P_n^{(\alpha,\beta)})\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(h_m(x))dx.\end{aligned}$$

Integrando novamente por partes, considere $u = \dfrac{d}{dx}(P_n^{(\alpha,\beta)})$ e $dv = \dfrac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(h_m(x))(x)dx$. Assim, $du = \dfrac{d^2}{dx^2}(P_n^{(\alpha,\beta)})dx$ e $v = \dfrac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}(h_m(x))$. Logo,

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_m^{(\alpha,\beta)}\rangle = \frac{(-1)^{m+1}}{2^m m!}\left[\frac{d}{dx}(P_n^{(\alpha,\beta)})\frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}(h_m(x))\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{d^2}{dx^2}(P_n^{(\alpha,\beta)})\frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}(h_m(x))dx\right].$$

Como $\dfrac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}(h_m(x))(1) = 0$ e $\dfrac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}(h_m(x))(-1) = 0$, temos

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_m^{(\alpha,\beta)}\rangle = \frac{(-1)^{m+2}}{2^m m!}\int_{-1}^{1}\frac{d^2}{dx^2}(P_n^{(\alpha,\beta)})\frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}(h_m(x))dx.$$

Seguindo esse raciocínio e integrando m vezes obtemos

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_m^{(\alpha,\beta)}\rangle = \frac{(-1)^{2m}}{2^m m!}\int_{-1}^{1}\frac{d^m}{dx^m}(P_n^{\alpha,\beta}(x))h_m(x)dx = \frac{1}{2^m m!}\int_{-1}^{1}\frac{d^m}{dx^m}(P_n^{\alpha,\beta}(x))h_m(x)dx.$$

Como $n \leq m$ temos dois casos a considerar:

(i) se $n < m$, segue que $\dfrac{d^m}{dx^m}(P_n^{(\alpha,\beta)}(x)) = 0$ e logo

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_m^{(\alpha,\beta)}\rangle = \frac{1}{2^m m!}\int_{-1}^{1}\frac{d^m}{dx^m}(P_n^{\alpha,\beta}(x))h_m(x)dx = 0.$$

(ii) Se $n = m$ temos

$$\begin{aligned}\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_n^{(\alpha,\beta)}\rangle &= \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\frac{d^n}{dx^n}(P_n^{\alpha,\beta}(x))h_n(x)dx\\ &= \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\frac{d^n}{dx^n}(P_n^{\alpha,\beta}(x))(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}dx.\end{aligned}$$

Como $P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = a_{n,n}x^n + a_{n,n-1}x^{n-1}\cdots + a_{n,0}$ é possível verificar que $\dfrac{d^n}{dx^n}(P_n^{(\alpha,\beta)}(x)) = n!a_{n,n}$. Então,

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_n^{(\alpha,\beta)}\rangle = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} n!a_{n,n}(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}dx$$

$$= \frac{a_{n,n}}{2^n}\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}dx.$$

Tomando $x = 2t-1$ temos $1+x = 2t$. Assim quando $x=-1$ temos $t=0$ e quando $x=1$ temos $t=1$. Mais ainda, $dx = 2dt$. Logo,

$$\begin{aligned}
\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_n^{(\alpha,\beta)}\rangle &= \frac{2a_{n,n}}{2^n}\int_0^1 (1-2t+1)^{\alpha+n}(1+2t-1)^{\beta+n}dt \\
&= \frac{2a_{n,n}}{2^n}\int_0^1 (2-2t)^{\alpha+n}(2t)^{\beta+n}dt \\
&= \frac{2a_{n,n}}{2^n}\int_0^1 2^{\alpha+n}(1-t)^{\alpha+n}2^{\beta+n}t^{\beta+n}dt \\
&= 2^{\alpha+\beta+n+n+1}\frac{a_{n,n}}{2^n}\int_0^1 (1-t)^{\alpha+n}t^{\beta+n}dt \\
&= 2^{\alpha+\beta+n+1}a_{n,n}\int_0^1 (1-t)^{\alpha+n}t^{\beta+n}dt.
\end{aligned}$$

Pela definição da função Beta, apresentada no capítulo 1 temos que

$$B(x,y) = \int_0^1 (1-t)^{y-1}t^{x-1}dt.$$

Logo,

$$B(\beta+n+1, \alpha+n+1) = \int_0^1 (1-t)^{\alpha+n}t^{\beta+n}dt.$$

Assim obtemos

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_n^{(\alpha,\beta)}\rangle = 2^{\alpha+\beta+n+1}a_{n,n}B(\beta+n+1, \alpha+n+1).$$

Agora sabemos que a função Beta pode ser escrita em termos dada função Gama da seguinte forma

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Daí segue que,

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_n^{(\alpha,\beta)}\rangle = 2^{\alpha+\beta+n+1}a_{n,n}\frac{\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}.$$

Substituindo o coeficiente do termo de maior grau $a_{n,n}$ dado pela proposição (3.1.2) e usando novamente a propriedade $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ obtemos

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_n^{(\alpha,\beta)}\rangle = \frac{2^{\alpha+\beta+n+1}}{2^n n!}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}\frac{\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}$$

$$= \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{n!}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}\frac{\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}.$$

Portanto,

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_n^{(\alpha,\beta)}\rangle = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{n!}\frac{\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}.$$

Agora para o caso em que $m > n$ a demonstração é análoga. $\square$

Vamos encontrar agora a fórmula de recorrência para os polinômios de Jacobi. Para isso, precisamos de mais uma propriedade que esses polinômios satisfazem.

Proposição 3.1.4. *As seguintes igualdades são válidas*

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)} \quad e \quad P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n\frac{\Gamma(\beta+n+1)}{n!\Gamma(\beta+1)}.$$

Demostração: Provaremos inicialmente que $P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \dfrac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}$. Sabemos que os polinômios de Jacobi são dados pela fórmula de Rodrigues

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}]. \tag{3.1.7}$$

Considere $f(x) = (1-x)^{\alpha+n}$ e $g(x) = (1+x)^{\beta+n}$. Assim, como vimos no cálculo do coeficiente do termo de maior grau dos polinômios de Jacobi:

$$f^{(n-k)}(x) = (-1)^{n-k}(\alpha+n)\cdots(\alpha+1)(1+x)^{\alpha+n}$$

e

$$g^{(k)}(x) = (\beta+n)(\beta+n-1)\cdots(\beta+n-k+1)(1+x)^{\beta+n-k}$$

Usando agora a na regra de Leibnitz temos:

$$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x) = \binom{n}{0}f^{(n)}(x)g^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x).$$

$$= (-1)^n(\alpha+n)\cdots(\alpha+1)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta+n} + \sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^{n-k}(\alpha+n)$$

$$\times(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+k+1)(1-x)^{\alpha+k}(\beta+n)(\beta+n-1)\cdots(\beta+n-k+1)(1+x)^{\beta+n-k}$$

Substituindo a informação anteriormente na fórmula de Rodrigues (3.1.7) obtemos

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\Big[(-1)^n(\alpha+n)\cdots(\alpha+1)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta+n}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^{n-k}(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+k+1)(1-x)^{\alpha+k}\times$$

$$\left.\times(\beta+n)(\beta+n-1)\cdots(\beta+n-k+1)(1+x)^{\beta+n-k}\right]$$

$$=\frac{1}{2^n n!}(\alpha+n)\cdots(\alpha+1)(1+x)^n+\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+k+1)\times$$

$$\times(\beta+n)(\beta+n-1)\cdots(\beta+n-k+1)(1+x)^{n-k}(1-x)^k.$$

Assim, para $x=1$ temos

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1)=\frac{1}{2^n}\left[\frac{1}{n!}(\alpha+n)(\alpha+n-1)...(\alpha+1)(2)^n+0\right].$$

$$=\frac{1}{n!}(\alpha+n)(\alpha+n-1)...(\alpha+1)$$

Por outro lado usando a propriedade $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ da função Gama temos que

$$\Gamma(\alpha+n+1)=(\alpha+n)\Gamma(\alpha+n)=(\alpha+n)\Gamma(\alpha+n-1+1)=(\alpha+n)(\alpha+n-1)\Gamma(\alpha+n-1)$$

$$=\cdots=(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1),$$

ou seja,

$$(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+1)=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)}$$

Assim concluímos que

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1)=\left[\frac{1}{n!}(\alpha+n)(\alpha+n-1)...(\alpha+1)\right]=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}.$$

Vamos demonstrar agora a segunda igualdade. Fazendo $k=n$ na regra de Leibniz:

$$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)g(x)]=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)+\binom{n}{n}f^{(0)}(x)g^{(n)}(x).$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^{n-k}(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+k+1)(1-x)^{\alpha+k}(\beta+n)$$

$$\times(\beta+n-1)\cdots(\beta+n-k+1)(1+x)^{\beta+n-k}+(\beta+n)\cdots(\beta+1)(1+x)^{\beta}(1-x)^{\alpha+n}$$

Substituindo na fórmula de Rodrigues temos

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^{n-k}(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+k+1)\times\right.$$

$$\times(1-x)^{\alpha+k}(\beta+n)\times(\beta+n-1)\cdots(\beta+n-k+1)(1+x)^{\beta+n-k}+(\beta+n)\cdots(\beta+1)(1+x)^{\beta}(1-x)^{\alpha+n}\Big]$$

$$= \frac{1}{2^n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}(\alpha+n)\cdots(\alpha+k+1)(\beta+n)\cdots(\beta+n-k+1)(1-x)^k(1+x)^{n-k}+\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^n}{n!}(\beta+n)\cdots(\beta+1)(1-x)^n\right].$$

Fazendo agora $x=-1$ nessa última igualdade obtemos:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = \frac{1}{2^n}\left[0+\frac{(-1)^n}{n!}(\beta+n)\cdots(\beta+1)2^n\right].$$

Usando novamente a propriedade $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ da função Gama temos

$$\Gamma(\beta+n+1) = (\beta+n)\Gamma(\beta+n) = (\beta+n)\Gamma(\beta+n-1+1) = (\beta+n)(\beta+n-1)\Gamma(\beta+n+1)$$

$$= (\beta+n)(\beta+n-1)\cdots(\beta+1)\Gamma(\beta+1),$$

ou seja,

$$(\beta+n)(\beta+n-1)\cdots(\beta+1) = \frac{\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+1)}$$

Dessa forma

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = \frac{1}{2^n}\left[\frac{(-1)^n}{n!}(\beta+n)\cdots(\beta+1)2^n\right] = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+1)}.$$

□

Vamos agora determinar a relação de recorrência que esses polinômios satisfazem. Para isso basta determinar os coeficientes.

$$\alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_n^{(\alpha,\beta)}\rangle}{\gamma_n\langle P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}, P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}\rangle},\ \beta_{n+1} = \gamma_{n+1}\frac{\langle xP_n, P_n\rangle}{\langle P_n, P_n\rangle} \quad \text{e} \quad \gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}}$$

Utilizando o coeficiente do termo de maior grau $a_{n,n}$ estabelecido na proposição (3.1.2) e a propriedade $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ da função Gama, obtemos:

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} = \frac{\dfrac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+3)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+2)}}{\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+3)}{2^{n+1}(n+1)!\Gamma(\alpha+\beta+n+2)}\frac{2^n n!\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta+2n+2)(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{2(n+1)(\alpha+\beta+n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta+2n+2)(\alpha+\beta+2n+1)}{2(n+1)(\alpha+\beta+n+1)} \tag{3.1.8}$$

Para determinar o coeficiente α_{n+1} utilizaremos a relação de ortogonalidade dada pelo teorema (3.1.3) e o coeficiente γ_{n+1} estabelecido acima. Assim temos

$$\alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_n^{(\alpha,\beta)}\rangle}{\gamma_n\langle P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}, P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}\rangle} = \frac{\dfrac{(\alpha+\beta+2n+2)(\alpha+\beta+2n+1)2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{2(n+1)(\alpha+\beta+n+1)n!(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}}{\dfrac{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-1)2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{2n(\alpha+\beta+n)(n-1)!(\alpha+\beta+2n-1)\Gamma(\alpha+\beta+n)}}$$

$$= \frac{\dfrac{(\alpha+\beta+2n+2)\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{(n+1)(\alpha+\beta+n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}}{\dfrac{(\alpha+\beta+2n)\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{(\alpha+\beta+n)\Gamma(\alpha+\beta+n)}}$$

Usando novamente a propriedade $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

$$\alpha_{n+1} = \frac{\dfrac{(\alpha+\beta+2n+2)(\alpha+n)\Gamma(\alpha+n)(\beta+n)\Gamma(\beta+n)}{(n+1)(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+n)\Gamma(\alpha+\beta+n)}}{\dfrac{(\alpha+\beta+2n)\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{(\alpha+\beta+n)\Gamma(\alpha+\beta+n)}}$$

$$= \frac{\dfrac{(\alpha+\beta+2n+2)(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\alpha+\beta+n+1)}}{\dfrac{(\alpha+\beta+2n)}{1}}$$

Efetuando a divisão de fração acima obtemos:

$$\alpha_{n+1} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)(\alpha+\beta+2n+2)}{(n+1)(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n)} \tag{3.1.9}$$

Só falta encontrar o coeficiente β_{n+1}. Para isso substituiremos $x = 1$ na relação de recorrência (2.2.4). Assim obtemos

$$P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(1) = (\gamma_{n+1} - \beta_{n+1})P_n^{(\alpha,\beta)}(1) - \alpha_{n+1}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(1).$$

Como $P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \dfrac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}$, a equação acima fica dada por

$$\frac{\Gamma(\alpha+n+2)}{(n+1)!\Gamma(\alpha+1)} = (\gamma_{n+1} - \beta_{n+1})\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)} - \alpha_{n+1}\frac{\Gamma(\alpha+n)}{(n-1)!\Gamma(\alpha+1)}. \tag{3.1.10}$$

Multiplicando ambos os lados da equação (3.1.10) por $\Gamma(\alpha+1)$ obtemos

$$\frac{\Gamma(\alpha+n+2)}{(n+1)!} = (\gamma_{n+1} - \beta_{n+1})\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} - \alpha_{n+1}\frac{\Gamma(\alpha+n)}{(n-1)!}$$

Como $\Gamma(\alpha+n+2) = (\alpha+n+1)(\alpha+n)\Gamma(\alpha+n+1)$ e $\Gamma(\alpha+n+1) = (\alpha+n)\Gamma(\alpha+n)$, segue que

$$\frac{(\alpha+n+1)(\alpha+n)\Gamma(\alpha+n)}{(n+1)!} = (\gamma_{n+1} - \beta_{n+1})\frac{(\alpha+n)\Gamma(\alpha+n)}{n!} - \alpha_{n+1}\frac{\Gamma(\alpha+n)}{(n-1)!}$$

$$\frac{(\alpha+n+1)(\alpha+n)\Gamma(\alpha+n)}{(n+1)(n)(n-1)!} = (\gamma_{n+1} - \beta_{n+1})\frac{(\alpha+n)\Gamma(\alpha+n)}{n(n-1)!} - \alpha_{n+1}\frac{\Gamma(\alpha+n)}{(n-1)!}$$

$$\frac{(\alpha+n+1)(\alpha+n)\Gamma(\alpha+n)}{(n+1)(n)(n-1)!} = \left[(\gamma_{n+1} - \beta_{n+1})\frac{(\alpha+n)}{n} - \alpha_{n+1}\right]\cdot\frac{\Gamma(\alpha+n)}{(n-1)!}$$

$$\frac{(\alpha+n+1)(\alpha+n)}{(n+1)n} = (\gamma_{n+1} - \beta_{n+1})\frac{(\alpha+n)}{n} - \alpha_{n+1}$$

$$\frac{(\alpha+n+1)(\alpha+n)}{(n+1)n} = \gamma_{n+1}\frac{(\alpha+n)}{n} - \beta_{n+1}\frac{(\alpha+n)}{n} - \alpha_{n+1}$$

$$\beta_{n+1}\frac{(\alpha+n)}{n} = \gamma_{n+1}\frac{(\alpha+n)}{n} - \alpha_{n+1} - \frac{(\alpha+n+1)(\alpha+n)}{(n+1)n}. \tag{3.1.11}$$

Multiplicando ambos os lados da equação (3.1.11) por $\dfrac{n}{(\alpha+n)}$ temos

$$\beta_{n+1} = \gamma_{n+1} - \alpha_{n+1}\frac{n}{(\alpha+n)} - \frac{(\alpha+n+1)}{(n+1)} \tag{3.1.12}$$

Substituindo os valores de γ_{n+1} e α_{n+1} na equação (3.1.12) vem que:

$$\beta_{n+1} = \frac{(\beta^2-\alpha^2)(\alpha+\beta+2n+1)}{2(n+1)(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n)}. \tag{3.1.13}$$

Portanto, os polinômios de Jacobi satisfazem a relação de recorrência

$$P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)$$

onde $P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1$, $P_{-1}^{(\alpha,\beta)}(x) = 0$ e γ_{n+1}, α_{n+1}, β_{n+1} dados em (3.1.13), (3.1.8) e (3.1.9).

3.2 Polinômios de Legendre

Os *polinômios de Legendre* são um caso especial dos polinômios de Jacobi com $\alpha = \beta = 0$. Assim, a função peso associada a esses polinômios é $w(x) = 1$.

Definição 3.2.1. Os *polinômios de Legendre*, denotados por $P_n(x)$, são definidos pela fórmula de Rodrigues dada por

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^n].$$

Para encontrar o coeficiente do termo de maior grau dos polinômios de Legendre basta tomar $\alpha = \beta = 0$ no coeficiente líder dos polinômios de Jacobi, dado pela Proposição (3.1.2):

$$a_{n,n} = \frac{1}{2^n n!}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} = \frac{1}{2^n n!}\frac{\Gamma(0+0+2n+1)}{\Gamma(0+0+n+1)} = \frac{1}{2^n n!}\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1)}.$$

Como n é inteiro não negativo, temos que $\Gamma(2n+1) = 2n!$ e $\Gamma(n+1) = n!$. Logo,

$$a_{n,n} = \frac{(2n)!}{2^n n! n!} = \frac{(2n)!}{2^n [n!]^2}.$$

Para obter a relação de ortogonalidade dos polinômios de Legendre basta também fazer $\alpha = \beta = 0$ na relação de ortogonalidade dos polinômios de Jacobi:

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_m^{(\alpha,\beta)}\rangle = \begin{cases} 0, \quad \text{se} \quad m \neq n \\ \dfrac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{n!(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \neq 0, \ \text{se } m = n \end{cases}$$

Assim:

$$\langle P_n, P_m\rangle = \begin{cases} 0, \quad \text{se} \quad m \neq n \\ \dfrac{2^{0+0+1}\Gamma(0+n+1)\Gamma(0+n+1)}{n!(0+0+2n+1)\Gamma(0+0+n+1)} \neq 0, \ \text{se } m = n \end{cases}$$

Como $\Gamma(x+1) = x!$ para x inteiro não negativo obtemos

$$\langle P_n, P_m\rangle = \begin{cases} 0, \quad \text{se} \quad m \neq n \\ \dfrac{2n!n!}{(2n+1)n!n!} \neq 0, \ \text{se } m = n \end{cases}$$

Portanto, fazendo as simplificações possíveis, temos que a relação de ortogonalidade para os polinômios de Legendre é dada por:

$$\langle P_n, P_m\rangle = \begin{cases} 0, \ \text{se} \quad m \neq n \\ \dfrac{2}{(2n+1)} \ \text{se} \quad m = n. \end{cases}$$

Vamos obter agora a relação de recorrência de três termos que esses polinômios satisfazem. Para isso basta fazer $\alpha = \beta = 0$ nos coeficientes γ_{n+1}, α_{n+1} e β_{n+1} da relação de recorrência para os polinômios de Jacobi dados respectivamente pelas equações (3.1.9),(3.1.13) e (3.1.8). Assim temos

$$\gamma_{n+1} = \frac{(\alpha+\beta+2n+2)(\alpha+\beta+2n+1)}{2(n+1)(\alpha+\beta+n+1)} = \frac{(0+2n+2)(0+2n+1)}{2(n+1)(0+n+1)} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{2(n+1)(n+1)}$$

$$= \frac{(2n+1)}{(n+1)}$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)(\alpha+\beta+2n+2)}{(n+1)(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n)} = \frac{(0+n)(0+n)(0+0+2n+2)}{(n+1)(0+0+n+1)(0+0+2n)}$$

$$= \frac{n^2(2n+2)}{(n+1)(n+1)(2n)} = \frac{2n(n+1)}{(n+1)(n+1)2} = \frac{n}{(n+1)}$$

$$\beta_{n+1} = \frac{(\beta^2-\alpha^2)(\alpha+\beta+2n+1)}{2(n+1)(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n)} = \frac{(\alpha^2-\alpha^2)(\alpha+\alpha+2n+1)}{2(n+1)(2\alpha+n+1)(2\alpha+2n)}$$

$$= \frac{(0)(2\alpha+2n+1)}{2(n+1)(0+n+1)(0+2n)} = 0$$

Substituindo os valores dos coeficientes $\gamma_{n+1}, \beta_{n+1}$ e α_{n+1}, encontrados acima, na relação de recorrência dada pelo Teorema (2.2.4) obtemos a fórmula de recorrência para os polinômios de Legendre:

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x), \quad \text{para} \quad n \geq 1, \tag{3.2.1}$$

onde $P_0(x) = 1$ e $P_{-1}(x) = 0$.

Vamos encontrar agora os primeiros polinômios de Legendre. Pela fórmula de Rodrigues dada na definição (3.2.1) temos

$$P_0(x) = \frac{1}{2^0 0!}(x^2-1)^0 = 1$$

$$P_1(x) = \frac{1}{2\cdot 1!}\frac{d}{dx}(x^2-1) = x$$

Agora pela relações de recorrência

$$P_2(x) = \frac{2(1)+1}{1+1} x P_1(x) - \frac{1}{1+1} P_0(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_3(x) = \frac{2(2)+1}{2+1} x P_2(x) - \frac{2}{2+1} P_1(x) = \frac{5}{3}x\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3}x = \frac{15}{6}x^3 - \frac{5}{6}x - \frac{2}{3}x$$

$$= \frac{15}{6}x^3 - \frac{9}{6}x = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

$$P_4(x) = \frac{2(3)+1}{3+1} x P_3(x) - \frac{3}{3+1} P_2(x) = \frac{7}{4}x\left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{21}{8}x^2 - \frac{9}{8}x^2 + \frac{3}{8}$$

$$= \frac{35}{8}x^4 - \frac{30}{8}x^2 + \frac{3}{8}$$

A seguir é possível observar comportamento do gráfico dos polinômios de Legendre de $1°, 2°, 3°$ e $4°$ grau.

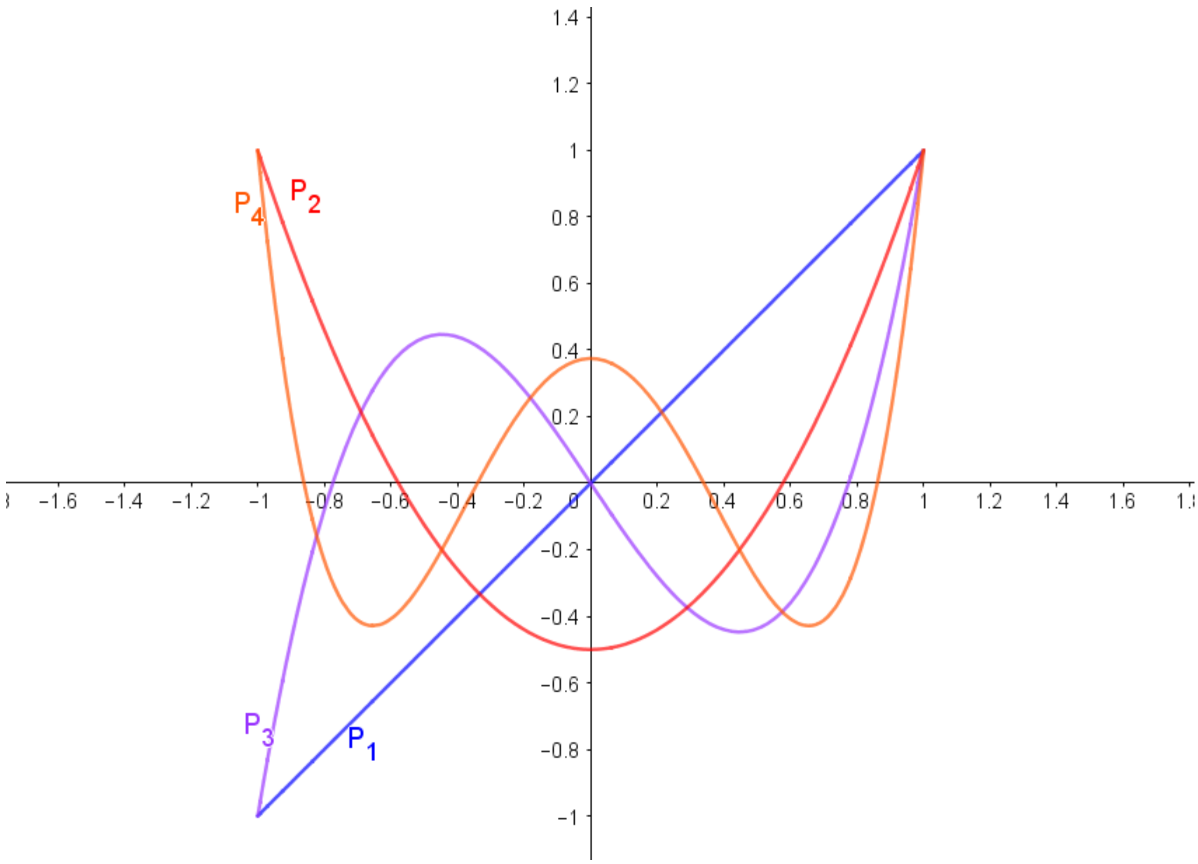

Figura 3.1: Polinômios de Legendre $P_n(x)$, $n = 1, 2, 3, 4$.

3.3 Polinômios de Chebyshev de primeira espécie

Vamos agora fazer um estudo mais detalhado sobre os polinômios de Chebyshev de 1° espécie, introduzidos no início da Seção 2.1.

Definição 3.3.1. Os *polinômios de Chebyshev de 1ª espécie* são denotados por $T_n(x)$ e definidos por

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad \text{onde} \quad x \in [-1, 1], \quad \text{e} \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

Esses polinômios são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ com relação a função peso $w(x) =$

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e, como foi provado na seção 2.1, satisfazem a relação de ortogonalidade

$$\langle T_n(x), T_m(x)\rangle = \begin{cases} \pi, \text{ se } m = n = 0 \\ \frac{\pi}{2}, \text{ se } m = n > 0 \\ 0, \text{ se } m \neq n \end{cases} .$$

Vimos também na referida seção que o termo de maior grau dos polinômios de Chebyshev de 1ª espécie é $a_{n,n} = 2^{n-1}$. Já a relação de recorrência para esses polinômios é dada por:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

De fato, utilizando a relação trigonométrica da soma e subtração de arcos temos que

$$\begin{aligned} \cos[(n+1)\theta] + \cos[(n-1)\theta] &= \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) + \cos(n\theta)\cos(\theta) + \sin(n\theta)\sin(\theta) \\ &= 2\cos(n\theta) cos\theta \end{aligned}$$

Logo,

$$\cos[(n+1)\theta] = 2\cos(n\theta) cos\theta - \cos[(n-1)\theta] \tag{3.3.1}$$

Tomando $x = \cos\theta$ na definição dos polinômios Chebyshev de 1° espécie temos que:

$$T_n(x) = \cos n\theta,\, T_{n+1}(x) = \cos(n+1)\theta \text{ e } T_{n-1}(x) = \cos(n-1)\theta.$$

Substituindo essas informações na equação (3.3.1), obtemos a relação de recorrência

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad n \geq 1,$$

onde $T_0(x) = 1$ e $T_1(x) = x$.

Observação 3.3.1. *Note que para* $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ *os polinômios de Jacobi e os Chebyshev de* 1° *tem a mesma função peso:*

$$w(x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}}(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Assim, o corolário (2.2.3) *nos garante que para todo* n *existe uma constante* c_n *tal que*

$$T_n(x) = c_n P_n^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(x).$$

Considerando agora $a^T_{n,i}, i = 1, 2, ..., n$ *os coeficiente do polinômio de Chebyshev e* $a^P_{n,j}, j = 1, 2, ..., n$ *os coeficientes do polinômio de Jacobi com* $\alpha = \beta = -\dfrac{1}{2}$ *temos*

$$a^T_{n,n}x^n + a^T_{n,n-1}x^{n-1} + ... + a^T_n = c_n(a^P_{n,n}x^n + a^P_{n,n-1}x^{n-1} + ... + a^P_{n,0})$$

Como os polinômios são idênticos, segue que

$$a^T_{n,n} = c_n a^P_{n,n} \quad \textit{ou seja,} \quad c_n = \frac{a^T_{n,n}}{a^P_{n,n}}. \tag{3.3.2}$$

Substituindo $\alpha = \beta = -\dfrac{1}{2}$ *no coeficiente do termo de maior grau dos polinômios de Jacobi temos:*

$$a_{n,n} = \frac{1}{2^n n!}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} = \frac{1}{2^n n!}\frac{\Gamma(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+2n+1)}{\Gamma(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+n+1)} = \frac{1}{2^n n!}\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)}$$

Substituindo em (3.3.2) *obtemos*

$$c_n = \frac{a^T_{n,n}}{\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)}} = \frac{2^{n-1}}{\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)}}.$$

Como $\Gamma(n+1) = n!$, *temos que*

$$c_n = \frac{2^{2n-1}}{\dfrac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}} = \frac{2^{2n-1}}{\binom{2n-1}{n}} = 2^{2n-1}\binom{2n-1}{n}^{-1}.$$

Dessa forma,

$$T_n(x) = 2^{2n-1}\binom{2n-1}{n}^{-1} P_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x)$$

Observação 3.3.2. *Para obter as raízes de* $T_n(x)$ *devemos considerar os valores nos quais*

$$\cos(n\theta) = 0 \quad \textit{para} \quad 0 \le \theta \le \pi.$$

ou seja, onde $(n\theta) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n$. *Dessa última igualdade vem que:*

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n.$$

Portanto, como $x = \cos\theta$ *as raízes dos polinômios de Chebyshev são dadas por*

$$x_{n,k} = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k = 0, 1, 2, \cdots, n$$

Observação 3.3.3. *Os pontos de máximo e mínimo de $T_n(x)$ são os pontos onde*

$$\cos(n\theta) = \pm 1 \quad para \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad para \quad \theta = \arccos x$$

ou seja, onde $n\theta = k\pi, \quad k = 0, 1, 2 \cdots, n.$. Logo,

$$\theta = \frac{k\pi}{n}, k = 0, 1, 2, \cdots, n.$$

Portanto, os pontos de máximo e mínimo dos polinômios de Chebyshev de 1° espécie são dados por

$$m_{n,k} = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), k = 0, 1, 2, \cdots, n$$

3.4 Polinômios de Chebyshev de segunda espécie

Vamos estudar agora os polinômios de *Chebyshev de 2° espécie*. Tais polinômios são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ em relação a função peso $w(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Definição 3.4.1. Os *polinômios de Chebyshev de 2ª espécie*, denotados por $U_n(x)$, são definidos por:

$$U_n(x) = \frac{\text{sen}((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1 - x^2}}, \text{ com } x \in [-1, 1] \text{ e } n = 0, 1, 2, \cdots$$

Se fizermos $x = \cos\theta$, na definição acima, temos que

$$U_n(x) = \frac{\text{sen}(n+1)\theta}{\text{sen}\theta}, \text{ com } \theta \in [0, \pi]$$

Esses polinômios satisfazem a relação de ortogonalidade conforme o Teorema abaixo:

Teorema 3.4.2. *A relação de ortogonalidade para os polinômios de Chebyshev de 2° espécie é:*

$$\langle U_n(x), U_m(x)\rangle = \begin{cases} 0, & se\ m \neq n \\ \frac{\pi}{2}, & se\ m = n \end{cases}.$$

Demonstração: Tomando o produto interno de U_n por U_m, com $m \neq n$, temos

$$\begin{aligned}\langle U_n, U_m\rangle &= \int_{-1}^{1} U_n(x)U_m(x)w(x)dx = \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{\text{sen}[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} \frac{\text{sen}[(m+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}dx\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $x = \cos\theta$, temos $\theta = \arccos x$ e logo

$$\langle U_n, U_m\rangle = -\int_\pi^0 \frac{\text{sen}[(n+1)\theta]}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} \frac{\text{sen}[(m+1)\theta]}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} \sqrt{1-\cos^2\theta}\text{sen}\theta d\theta$$

Como, para $\theta \in [0,\pi]$, $\text{sen}\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$, temos

$$\langle U_n, U_m\rangle = \int_0^\pi \text{sen}[(n+1)\theta]\text{sen}[(m+1)\theta]d\theta. \tag{3.4.1}$$

Integrando por partes, considere $u = \text{sen}[(n+1)\theta]$ e $dv = \text{sen}[(m+1)\theta]$. Então, $du = (n+1)\cos[(n+1)\theta]d\theta$ e $v = -\dfrac{\cos[(m+1)\theta]}{m+1}$. Logo,

$$\langle U_n, U_m\rangle = -\text{sen}[(n+1)\theta]\frac{\cos[(m+1)\theta]}{m+1}\bigg|_0^\pi + \int_0^\pi (n+1)\cos[(n+1)\theta]\frac{\cos[(m+1)\theta]}{m+1}d\theta$$

$$= \left(\frac{n+1}{m+1}\right)\int_0^\pi \cos[(n+1)\theta]\cos[(m+1)\theta]d\theta$$

Integrando novamente por partes, seja $u = \cos[(n+1)\theta]$ e $dv = \cos[(m+1)\theta]$. Então, $du = -(n+1)\text{sen}[(n+1)\theta]d\theta$ e $v = \dfrac{\text{sen}[(m+1)\theta]}{m+1}$. Temos

$$\langle U_n, U_m\rangle = \left(\frac{n+1}{m+1}\right)\left[\cos[(n+1)\theta]\frac{\text{sen}[(m+1)\theta]}{m+1}\bigg|_0^\pi + \int_0^\pi (n+1)\text{sen}[(n+1)\theta]\frac{\text{sen}[(m+1)\theta]}{m+1}d\theta\right]$$

$$= \left(\frac{n+1}{m+1}\right)^2\int_0^\pi \text{sen}[(n+1)\theta]\text{sen}[(m+1)\theta]d\theta$$

Assim,

$$\langle U_n, U_m\rangle = \left(\frac{n+1}{m+1}\right)^2\langle U_n, U_m\rangle$$

Então,

$$\langle U_n, U_m\rangle - \left(\frac{n+1}{m+1}\right)^2\langle U_n, U_m\rangle = 0$$

$$\langle U_n, U_m\rangle\left[1 - \left(\frac{n+1}{m+1}\right)^2\right] = 0$$

Como $m \neq n$ então $\left(\dfrac{n+1}{m+1}\right)^2 \neq 1$. Portanto, $\langle U_n, U_m\rangle = 0$.

Considerando agora $m = n$ na equação (3.4.1) temos

$$\langle U_n, U_n\rangle = \int_0^\pi \text{sen}[((n+1)\theta)]\text{sen}[((n+1)\theta)]d\theta = \int_0^\pi \text{sen}^2[((n+1)\theta)]d\theta.$$

Assim, tomando $u = \sin[((n+1)\theta)]$ e $dv = \sin[((n+1)\theta)]d\theta$, temos

$du = (n+1)[\cos(n+1)\theta]d\theta$ e $v = -\dfrac{\cos(n+1)\theta}{n+1}$. Logo, por partes temos

$$\begin{aligned}
\langle U_n, U_n\rangle &= -\text{sen}[((n+1)\theta)]\frac{\cos[(n+1)\theta]}{n+1}\Big|_0^\pi - \int_0^\pi -\frac{\cos[(n+1)\theta]}{n+1}(n+1)\cos[((n+1)\theta)]d\theta \\
&= \int_0^\pi \cos^2[(n+1)\theta]d\theta \\
&= \int_0^\pi \{1-\text{sen}^2[(n+1)\theta]\}d\theta \\
&= \pi - \int_0^\pi \text{sen}^2(n+1)\theta d\theta
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
&\langle U_n, U_n\rangle = \pi - \langle U_n, U_n\rangle \\
&2\langle U_n, U_n\rangle = \pi \\
&\langle U_n, U_n\rangle = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

□

A relação de recorrência dos polinômios de Chebyshev de segunda espécie é dada por

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x) \text{ para } n \geq 1, \tag{3.4.2}$$

onde $U_0(x) = 1$ e $U_1(x) = 2x$.

De fato, pela definição desses polinômios temos

$$U_n(x) = \frac{\text{sen}[(n+1)\theta]}{\text{sen}\theta}, \quad U_{n+1}(x) = \frac{[\text{sen}(n+2)\theta]}{\text{sen}\theta}, \quad U_{n-1} = \frac{\text{sen}(n\theta)}{\text{sen}\theta}.$$

Dividindo a identidade trigonométrica (3.4.3)

$$\text{sen}[(n+2)\theta] + \text{sen}(n\theta) = 2\cos\theta\text{sen}[(n+1)\theta] \tag{3.4.3}$$

por senθ obtemos

$$\frac{\text{sen}[(n+2)\theta]}{\text{sen}\theta} + \frac{\text{sen}(n\theta)}{\text{sen}\theta} = \frac{2\cos\theta\text{sen}[(n+1)\theta]}{\text{sen}\theta},$$

ou seja, $U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x) = 2xU_n(x),$ para $n \geq 1$, como queríamos demonstrar.

Vamos agora obter o coeficiente do termo de maior grau dos polinômios de Chebyshev de 2° espécie. Veja que, utilizando a definição (3.4.1), temos

$$U_0(x) = \frac{\text{sen}[(0+1)\theta]}{\text{sen}\theta} = \frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}\theta} = 1$$

$$U_1(x) = \frac{\text{sen}[(1+1)\theta]}{\text{sen}\theta} = \frac{\text{sen}2\theta}{\text{sen}\theta} = \frac{2\text{sen}\theta\cos\theta}{\text{sen}\theta} = 2\cos\theta = 2x.$$

Por recorrência, temos

$$U_2(x) = 2xU_1(x) - U_0(x) = 2x(2x) - 1 = 2^2x^2 - 1$$

$$U_3(x) = 2xU_2(x) - U_1(x) = 2x(2^2x^2 - 1) - 2x = 2^3x^3 - 4x.$$

Seguindo este raciocínio obtemos $U_n(x) = 2^nx^n + q_r(x)$ em que $q_r(x)$ é um polinômio de grau $r < n$. Logo, o coeficiente do termo de maior grau é $a_{n,n} = 2^n, n \geq 0$.

Agora vamos analisar a relação entre os polinômios de Chebyshev de 2° espécie e os polinômios de Jacobi. Em seguida, iremos encontrar as raízes de $U_n(x)$.

Observação 3.4.1. *Os polinômios de Jacobi e os de Chebyshev de 2° espécie são ortogonais no intervalo de* $[-1,1]$ *e para* $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$*, eles tem a mesma função peso:*

$$w(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1-x^2}.$$

Assim, o corolário (2.2.3) *nos garante que para todo* n *existe um* c_n *tal que*

$$U_n(x) = C_nP_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x)$$

Considerando $a^U_{n,i}, i = 1,2,...,n$ *os coeficientes dos polinômios de Chebyshev de segunda especie e* $a^P_{n,j}, j = 1,2,...,n$ *os coeficientes dos polinômios de Jacobi, com* $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$*, então*

$$a^U_{n,n}x^n + a^U_{n,n-1}x^{n-1} + ... + a^U_n = c_n(a^P_{n,n}x^n + a^P_{n,n-1}x^{n-1} + ... + a^P_{n,0})$$

e logo,

$$a^U_{n,n} = c_na^p_{n,n}, \text{ ou seja, } c_n = \frac{a^U_{n,n}}{a^p_{n,n}}. \tag{3.4.4}$$

Tomando $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$ *no coeficiente do termo de maior grau de Jacobi dado na proposição* (3.1.2)*, temos que*

$$a_{n,n} = \frac{1}{2^nn!}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} = \frac{1}{2^nn!}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2n+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+n+1)} = \frac{1}{2^nn!}\frac{\Gamma(2n+2)}{\Gamma(n+2)}.$$

Substituindo o resultado acima em (3.4.4) *obtemos*

$$c_n = \frac{a^U_{n,n}}{\dfrac{1}{2^nn!}\dfrac{\Gamma(2n+2)}{\Gamma(n+2)}} = \frac{2^n}{\dfrac{1}{2^nn!}\dfrac{\Gamma(2n+2)}{\Gamma(n+2)}}.$$

Usando a propriedade $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ *da função Gama obtemos*

$$c_n = \frac{2^{2n}}{\dfrac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}} = \frac{2^{2n}}{\binom{2n+1}{n+1}} = 2^{2n}\binom{2n+1}{n+1}^{-1}.$$

Portanto,

$$U_n(x) = 2^{2n}\binom{2n+1}{n+1}^{-1} P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x).$$

Observação 3.4.2. *Para obter as raízes de* $U_n(x)$ *devemos considerar os pontos onde*

$$\sin[(n+1)\theta] = 0, \quad \textit{para} \quad 0 < \theta < \pi$$

ou seja, onde $(n+1)\theta = k\pi \quad$ *para* $\quad 0 < \theta < \pi$.

Daí segue que,

$$\theta = \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n$$

Logo, como

$$\sin\left[(n+1)\arccos\left[\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right]\right] = \sin\left[(n+1)\frac{k\pi}{n+1}\right] = \sin(k\pi) = 0$$

concluímos que as raízes de $U_n(x)$ *são os pontos*

$$x_{n,k} = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

.

Observação 3.4.3. *Sabemos que os polinômios de Chebyshev de* 1° *espécie são definidos por*

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \ \textit{para} \ x \in [-1, 1].$$

Então

$$T_n'(x) = -\text{sen}(n\arccos x)\left(-\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\right) = n\frac{\text{sen}(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = nU_{n-1}(x).$$

Assim, concluímos que as raízes de $U_{n-1}(x)$ *são os pontos de máximo e mínimo de* $T_n(x)$.

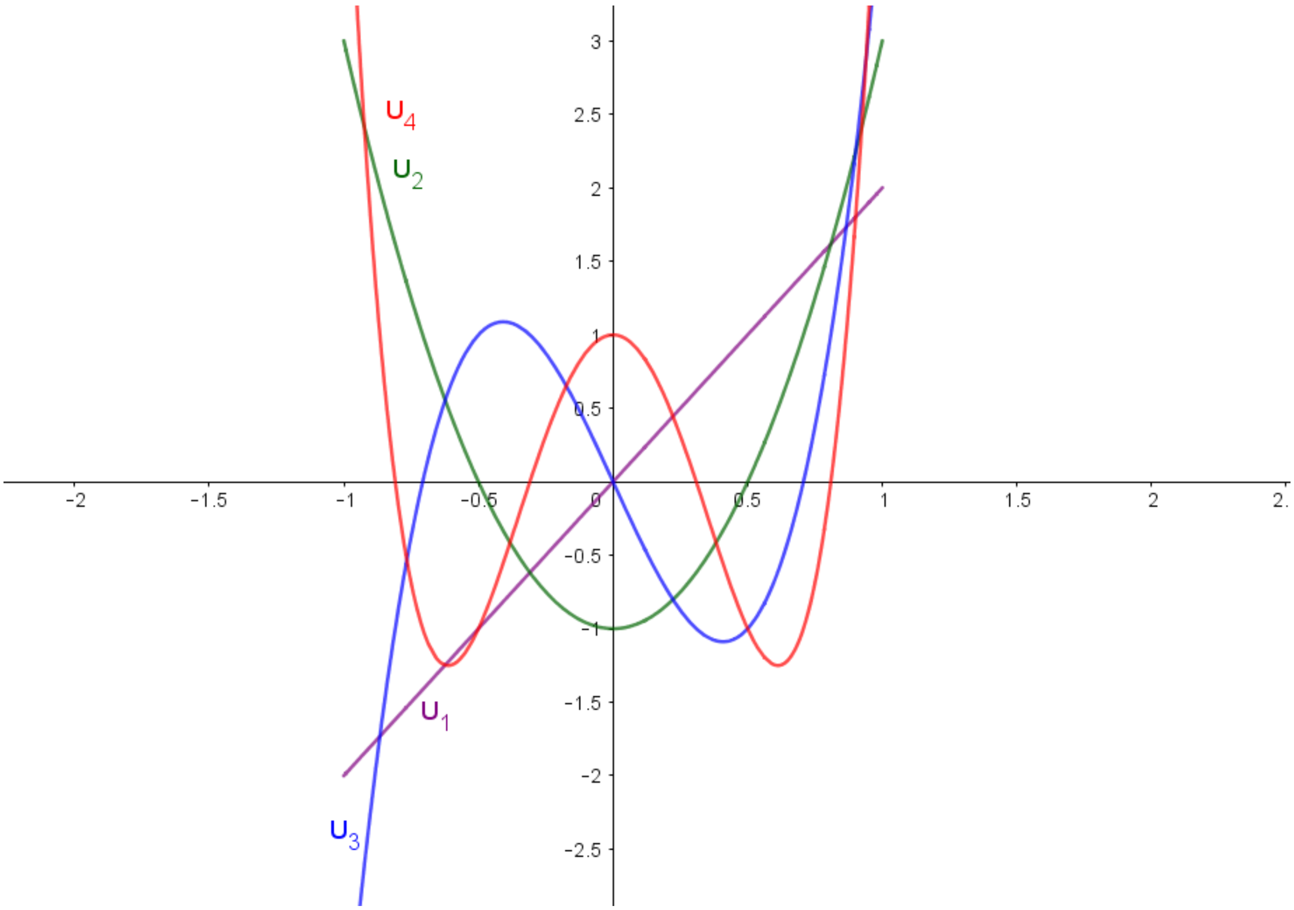

Figura 3.2: Polinômios de Chebyshev de 2° espécie $U_n(x)$, $n = 1, 2, 3, 4$.

3.5 Polinômios de Gegenbauer

Os *polinômios de Gegenbauer* também são um caso particular dos polinômios de Jacobi, com $\alpha = \beta = \lambda - \dfrac{1}{2}$, onde $\lambda > -\dfrac{1}{2}$. Esses polinômios são ortogonais no intervalo de $[-1, 1]$ com relação a função peso $w(x) = (1 - x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}$.

Definição 3.5.1. Os *polinômios de Gegenbauer*, denotados por $G_n^{(\lambda)}(x)$, são definidos por:

$$G_n^{(\lambda)}(x) = \binom{2\alpha}{\alpha}^{-1} \binom{n + 2\alpha}{\alpha} P_n^{(\alpha,\alpha)}(x),$$

onde $P_n^{(\alpha,\alpha)}$ são os polinômios de Jacobi com $\alpha = \beta = \lambda - \dfrac{1}{2}$.

Podemos reescrever os polinômios de Gegenbauer em termos da função Gama da seguinte forma

$$G_n^{(\lambda)} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)}\frac{\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}P_n^{(\alpha,\alpha)}(x), \tag{3.5.1}$$

Esse resultado pode ser encontrado na página 64 da referência [2].
Tomando $\alpha = \lambda - \frac{1}{2}$, obtemos

$$G_n^{(\lambda)} = \frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\lambda)}\frac{\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(n+\lambda+\frac{1}{2})}P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$$

Para obter a relação de recorrência de três termos faremos $\alpha = \beta$ nos coeficientes $\gamma_{n+1}, \alpha_{n+1}$ e β_{n+1} da relação de recorrência dos polinômios de Jacobi dados respectivamente pelas equações (3.1.8), (3.1.9) e (3.1.13). Assim temos

$$\gamma_{n+1} = \frac{(\alpha+\beta+2n+2)(\alpha+\beta+2n+1)}{2(n+1)(\alpha+\beta+n+1)} = \frac{(2\alpha+2n+2)(2\alpha+2n+1)}{2(n+1)(2\alpha+n+1)}$$

$$= \frac{(\alpha+n+1)(2\alpha+2n+1)}{(n+1)(2\alpha+n+1)}$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)(\alpha+\beta+2n+2)}{(n+1)(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n)} = \frac{(\alpha+n)(\alpha+n)(2\alpha+2n+2)}{(n+1)(2\alpha+n+1)(2\alpha+2n)}$$

$$= \frac{(\alpha+n)(\alpha+n)(\alpha+n+1)2}{(n+1)(2\alpha+n+1)(\alpha+n)2} = \frac{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}{(n+1)(2\alpha+n+1)}$$

$$\beta_{n+1} = \frac{(\beta^2-\alpha^2)(\alpha+\beta+2n+1)}{2(n+1)(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n)} = \frac{(\alpha^2-\alpha^2)(2\alpha+2n+1)}{2(n+1)(2\alpha+n+1)(2\alpha+2n)} = 0$$

Agora de (3.5.1) vem que

$$P_n^{(\alpha,\alpha)}(x) = G_n^{(\lambda)}\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+2\alpha+1)}. \tag{3.5.2}$$

Da relação de recorrência geral, dada pelo Teorema (2.2.4), tem-se

$$P_{n+1}^{(\alpha,\alpha)}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n^{(\alpha,\alpha)}(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}^{(\alpha,\alpha)}(x). \tag{3.5.3}$$

Substituindo então os valores dos coeficientes $\gamma_{n+1}, \alpha_{n+1}$ e β_{n+1}, encontrados acima em (3.5.3) e usando (3.5.2) obtemos:

$$G_{n+1}^{(\lambda)}(x)\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma(n+2\alpha+2)} = \delta x G_n^{(\lambda)}(x) - \phi G_{n-1}^{(\lambda)}(x) \tag{3.5.4}$$

onde

$$\delta = \frac{(\alpha+n+1)(2\alpha+2n+1)}{(n+1)(2\alpha+n+1)}\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+2\alpha+1)}$$

e

$$\phi = \frac{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}{(n+1)(2\alpha+n+1)}\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+2\alpha)}$$

Note que multiplicando a equação (3.5.4) por

$$I = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)}\frac{\Gamma(n+2\alpha+2)}{\Gamma(n+\alpha+2)}$$

obtemos,

$$G_{n+1}^{(\lambda)}(x) = \delta I x G_n^{(\lambda)}(x) - \phi I G_{n-1}^{(\lambda)}(x),$$

onde

$$\delta I = \frac{(\alpha+n+1)(2\alpha+2n+1)}{(n+1)(2\alpha+n+1)}\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+2\alpha+1)}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)}\frac{\Gamma(n+2\alpha+2)}{\Gamma(n+\alpha+2)}$$

e

$$\phi I = \frac{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}{(n+1)(2\alpha+n+1)}\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+2\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)}\frac{\Gamma(n+2\alpha+2)}{\Gamma(n+\alpha+2)}$$

Fazendo as possíveis simplificações temos

$$\delta I = \frac{(\alpha+n+1)(2\alpha+2n+1)\Gamma(n+\alpha+1)}{(n+1)(2\alpha+n+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}\frac{\Gamma(n+2\alpha+2)}{\Gamma(n+\alpha+2)}$$

e

$$\phi I = \frac{(\alpha+n)(\alpha+n+1)\Gamma(n+\alpha)}{(n+1)(2\alpha+n+1)\Gamma(n+2\alpha)}\frac{\Gamma(n+2\alpha+2)}{\Gamma(n+\alpha+2)}$$

Usando a propriedade $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ da função Gama segue que

$$\delta I = \frac{(\alpha+n+1)(2\alpha+2n+1)\Gamma(n+\alpha+1)}{(n+1)(2\alpha+n+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}\frac{(n+2\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}{(n+\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)} = \frac{2\alpha+2n+1}{n+1}$$

e

$$\phi I = \frac{(\alpha+n)(\alpha+n+1)\Gamma(n+\alpha)}{(n+1)(2\alpha+n+1)\Gamma(n+2\alpha)}\frac{(n+2\alpha+1)(n+2\alpha)\Gamma(n+2\alpha)}{(n+\alpha+1)(n+\alpha)\Gamma(n+\alpha)} = \frac{n+2\alpha}{n+1}$$

Então,

$$G_{n+1}^{(\lambda)}(x) = \frac{2\alpha+2n+1}{n+1} x G_n^{(\lambda)}(x) - \frac{n+2\alpha}{n+1} G_{n-1}^{(\lambda)}(x)$$

Logo, a relação de recorrência de três termos para os polinômios de Gengebauer é dada por

$$(n+1)G_{n+1}^{(\lambda)}(x) = (2\alpha+2n+1)xG_n^{(\lambda)}(x) - (n+2\alpha)G_{n-1}^{(\lambda)}(x)$$

Tomando $\alpha = \lambda - \frac{1}{2}$

$$(n+1)G_{n+1}^{(\lambda)}(x) = (2\lambda+2n)xG_n^{(\lambda)}(x) - (n+2\lambda-1)G_{n-1}^{(\lambda)}(x), \text{ para } n \geq 1,$$

onde $G_{-1}^{(\lambda)} = 0$ e $G_0^{(\lambda)}(x) = 1$.

Vamos agora obter o coeficiente do termo de maior grau dos polinômios de Gegenbauer. Tomando $\alpha = \beta$ no coeficiente do termo de maior grau dos polinômios de Jacobi temos que

$$a_{n,n}^J = \frac{1}{2^n n!}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} = \frac{1}{2^n n!}\frac{\Gamma(2\alpha+2n+1)}{\Gamma(2\alpha+n+1)}$$

Assim, como $G_n^{(\lambda)}(x) = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)}\dfrac{\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$, vem que

$$a_{n,n} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)}\frac{\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}a_{n,n}^J,$$

ou seja,

$$a_{n,n} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)}\frac{\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}\frac{1}{2^n n!}\frac{\Gamma(2\alpha+2n+1)}{\Gamma(2\alpha+n+1)}$$

Fazendo $\alpha = \lambda - \dfrac{1}{2}$ obtemos

$$\begin{aligned} a_{n,n} &= \frac{\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(n+\lambda+\frac{1}{2})}\frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\lambda)}\frac{1}{2^n n!}\frac{\Gamma(2\lambda+2n)}{\Gamma(2\lambda+n)} \\ &= \frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\lambda)}\frac{1}{2^n n!}\frac{\Gamma(2\lambda+2n)}{\Gamma(n+\lambda+\frac{1}{2})} \end{aligned}$$

Propriedades 3.5.2. As seguintes igualdades são válidas:

$$G_n^{(\lambda)}(1) = \frac{\Gamma(n+2\lambda)}{n!\Gamma(2\lambda)} \quad \text{e} \quad G_n^{(\lambda)}(-x) = (-1)^n G_n^{(\lambda)}$$

Demostração: Mostraremos inicialmente a primeira igualdade. Como vimos em (3.5.1)

$$G_n^{(\lambda)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)}\frac{\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$$

Então,

$$G_n^{(\lambda)}(1) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)}\frac{\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}P_n^{(\alpha,\alpha)}(1)$$

Agora pela proposição (3.1.4) temos que $P_n^{(\alpha,\alpha)}(1) = \dfrac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}$. Logo

$$\begin{aligned} G_n^{\lambda}(1) &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)}\frac{\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)} \\ &= \frac{\Gamma(n+2\alpha+1)}{n!\Gamma(2\alpha+1)} \end{aligned}$$

Fazendo $\alpha = \lambda - \frac{1}{2}$, temos $2\alpha = 2\lambda - 1$ então

$$G_n^\lambda = \frac{\Gamma(n + 2\lambda - 1 + 1)}{n!\Gamma(2\lambda - 1 + 1)} = \frac{\Gamma(n + 2\lambda)}{n!\Gamma(2\lambda)}.$$

Mostraremos agora que $G_n^{(\lambda)}(-x) = (-1)^n G_n^{(\lambda)}$.

Considere $P_n^{(\lambda)}(x) = G_n^{(\lambda)}(-x)$. Como $w(x) = (1 - x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}$ é uma função par, segue que

$$\langle P_n^{(\lambda)}(x), P_m^{(\lambda)}(x)\rangle = \int_{-1}^{1} P_n^{(\lambda)}(x) P_m^{(\lambda)}(x) w(x)dx = \int_{-1}^{1} G_n^{(\lambda)}(-x) G_m^{(\lambda)}(-x) w(-x)dx$$

Fazendo a mudança de variável $y = -x$, temos $dy = -dx$. Mais ainda, quando $x = -1$ temos $y = 1$ e quando $x = 1$ temos $y = -1$. Logo,

$$\langle P_n^{(\lambda)}(x), P_m^{(\lambda)}(x)\rangle = \int_{1}^{-1} G_n^{(\lambda)}(y) G_m^{(\lambda)}(y) w(y)(-dy) = \int_{-1}^{1} G_n^{(\lambda)}(y) G_m^{(\lambda)}(y) w(y)dy.$$

Logo, a sequência $\{P_n^{(\lambda)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é ortogonal em relação a mesma função peso $w(x) = (1-x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}$. Assim, o corolário (2.2.3) nos garante que para todo n existe um c_n tal que

$$P_n^{(\lambda)}(x) = c_n G_n^{(\lambda)}(x).$$

Dessa forma, como $P_n^{(\lambda)}(x) = G_n^{(\lambda)}(-x)$, e considerando $G_n^{(\lambda)}(x) = a_{n,n}x^n + ... + a_{n,1}x + a_{n,0}$, onde $a_{n,n} \neq 0$, temos que

$$a_{n,n}(-x)^n + ... + a_{n,1}(-x) + a_{n,0} = C_n[a_{n,n}x^n + ... + a_{n,1}x + a_{n,0}]$$

$$a_{n,n}(-1)^n(x)^n + ... + a_{n,1}(-1)x + a_{n,0} = C_n[a_{n,n}x^n + ... + a_{n,1}x + a_{n,0}]$$

Assim, $a_{n,n}(-1)^n = C_n a_{n,n}$ e logo $c_n = (-1)^n$.

Portanto, $G_n^{(\lambda)}(-x) = (-1)^n G_n^{(\lambda)}$. $\square$

3.6 Polinômios de Laguerre

Definição 3.6.1. Os *polinômios de Laguerre*, denotados por $L_n^{(\alpha)}(x)$, são definidos pela fórmula de Rodrigues dada por

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n}[x^{\alpha+n} e^{-x}]$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ com $\alpha > -1$.

Os polinômios de Laguerre são ortogonais no intervalo $[0,\infty)$, com relação a função peso $w(x) = x^{\alpha}e^{-x}$, $\alpha > -1$.

Vamos inicialmente obter o termo de maior grau dos polinômios de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$. Para isso, utilizaremos novamente a regra de Leibniz

$$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x). \tag{3.6.1}$$

Veja que, utilizando a definição (3.6.1) e tomando $f(x) = x^{\alpha+n}$ e $g(x) = e^{-x}$, obtemos

$$\begin{aligned}
L_n^{(\alpha)} &= (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^{\alpha+n}e^{-x}) = (-1)^n x^{-\alpha}e^x \frac{d^n}{dx^n}[f(x)g(x)] = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^k(x)\\
&= (-1)^n x^{-\alpha}e^x \left[\binom{n}{n} f(x)g^{(n)}(x) + \binom{n}{n-1} f'(x)g^{(n-1)}(x) + \binom{n}{n-2} f''(x)g^{(n-2)}(x) + \cdots\right]\\
&= (-1)^n x^{-\alpha}e^x \left[x^{\alpha+n}(-1)^n e^{-x} + \frac{n!}{(n-1)!}(\alpha+n)x^{\alpha+n-1}(-1)^{n-1}e^{-x} + \cdots\right]\\
&= x^n - n(\alpha+n)x^{n-1} + q_s(x),
\end{aligned}$$

onde $q_s(x)$ é um polinômio de grau $s < n$. Logo $a_{n,n} = 1$ e por isso os polinômios de Laguerre são mônicos.

O Teorema abaixo nos fornece a relação de ortogonalidade que esses polinômios satisfazem

Teorema 3.6.2. *A relação de ortogonalidade dos polinômios de Laguerre é dada por*

$$\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)} \rangle = \begin{cases} 0, & se\ m \neq n \\ n!\Gamma(n+\alpha+1), & se\ m = n \end{cases},$$

onde o produto interno é definido por $\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)} \rangle = \int_0^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x)x^{\alpha}e^{-x}dx$

Demostração: Sejam m e n inteiros não negativos e suponha, sem perda de generalidade, que $m \leq n$. Assim:

$$\begin{aligned}
\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)} \rangle &= \int_0^{\infty} L_n^{(\alpha)} L_m^{(\alpha)} x^{\alpha}e^{-x}dx = \int_0^{\infty} (-1)^n x^{-\alpha}e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^{\alpha+n}e^{-x}) L_m^{(\alpha)} x^{\alpha}e^{-x}dx\\
&= (-1)^n \int_0^{\infty} \frac{d^n}{dx^n}(x^{\alpha+n}e^{-x}) L_m^{(\alpha)}(x)dx.
\end{aligned}$$

Tomando $y_n(x) = x^{\alpha+n}e^{-x}$, temos que $y_n^{(n)}(x) = \dfrac{d^n}{dx^n}[x^{\alpha+n}e^{-x}]$. Logo

$$\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)}\rangle = (-1)^n \int_0^\infty L_m^{(\alpha)}(x) y_n^{(n)}(x)dx$$

Integrando por partes, seja $u = L_m^{(\alpha)}(x)$ e $dv = y_n^{(n)}(x)dx$. Então, $du = \dfrac{d}{dx}(L_m^{(\alpha)}(x))dx$ e $v = y_n^{(n-1)}(x)$. Logo,

$$\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)}\rangle = (-1)^n \left[L_m^{(\alpha)}(x) y_n^{(n-1)}(x)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty y_n^{(n-1)}(x)\frac{d}{dx}(L_m^{(\alpha)}(x))dx \right]. \tag{3.6.2}$$

Agora veja que

$$\begin{aligned} L_m^{(\alpha)}(x) y_n^{(n-1)}(x)\Big|_0^\infty &= \lim_{b\to\infty} L_m^{(\alpha)}(x) y_n^{(n-1)}(x)\Big|_0^b \\ &= \lim_{b\to\infty}[L_m^{(\alpha)}(b) y_n^{(n-1)}(b) - L_m^{(\alpha)}(0) y_n^{(n-1)}(0)] \end{aligned}$$

Considerando $f(x) = x^{\alpha+n}$ e $g(x) = e^{-x}$ da regra de Leibniz temos que

$$y_n^{(n-1)}(x) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^{\alpha+n}e^{-x}) = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} f^{(n-1-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

Abrindo o somatório acima obtemos:

$$y_n^{(n-1)}(x) = \binom{n-1}{n-1} f(x)g^{(n-1)}(x) + \binom{n-1}{n-2} f'(x)g^{(n-2)}(x) + \cdots + \binom{n-1}{1} f^{(n-2)}(x)g'(x)$$
$$+\binom{n-1}{0} f^{(n-1)}(x)g(x)$$
$$= x^{\alpha+n}(-1)^{n-1}e^{-x} + (n-1)(\alpha+n)x^{\alpha+n-1}(-1)^{n-2}e^{-x} + (n-1)(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+3)x^{\alpha+2}(-1)e^{-x}$$
$$+ \cdots + (\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+2)x^{\alpha+1}e^{-x}$$
$$= e^{-x}\left[(-1)^{n-1}x^{\alpha+n} + (-1)^{n-2}(n-1)(\alpha+n)x^{\alpha+n-1} + \cdots + (\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+2)x^{\alpha+1}\right]$$
$$= e^{-x}(a_n x^{\alpha+n} + a_{n-1}x^{\alpha+n-1} + \cdots + a_1 x^{\alpha+1}) = e^{-x}Q_{\alpha+n}(x)$$

onde $Q_{\alpha+n}(x)$ é um polinômio de grau $\alpha + n$. Assim,

$$L_m^{(\alpha)}(x) y_n^{(n-1)}(x) = L_m^{(\alpha)}(x) e^{-x} Q_{\alpha+n}(x) = e^{-x} Q_{m+\alpha+n}(x)$$

onde $Q_{m+\alpha+n}(x) = L_m^{(\alpha)}(x) Q_{\alpha+n}(x)$ denota um polinômio de grau $m + \alpha + n$. Logo,

$$L_m^{(\alpha)}(x) y_n^{(n-1)}(x)\Big|_0^\infty = \lim_{b\to\infty}[L_m^{(\alpha)}(b) y_n^{(n-1)}(b) - L_m^{(\alpha)}(0) y_n^{(n-1)}(0)] = \lim_{b\to\infty}[e^{-b}Q_{m+\alpha+n}(b) - e^0 Q_{m+\alpha+n}(0)]$$

Como $Q_{\alpha+n}(0) = 0$ temos que $Q_{m+\alpha+n}(0) = Q_{\alpha+n}(0)L_m^{(\alpha)}(0) = 0$. Portanto

$$L_m^{(\alpha)}(x)y_n^{(n-1)}(x)\Big|_0^\infty = \lim_{b\to\infty} e^{-b}Q_{m+\alpha+n}(b) = \lim_{b\to\infty} \frac{Q_{m+\alpha+n}(b)}{e^b}$$

Aplicando a regra de L'Hospital $m+\alpha+n$ vezes, temos

$$\lim_{b\to\infty} \frac{a_{m+\alpha+n}(m+\alpha+n)!}{e^b} = 0$$

Então de (3.6.2) segue que

$$\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)}\rangle = (-1)^{n+1}\int_0^\infty y_n^{(n-1)}(x)\frac{d}{dx}(L_m^{(\alpha)}(x))dx.$$

Integrando n vezes por partes obtemos

$$\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)}\rangle = (-1)^{2n}\int_0^\infty \frac{d^n}{dx^n}(L_m^{(\alpha)}(x))y_n(x)dx = \int_0^\infty \frac{d^n}{dx^n}(L_m^{(\alpha)}(x))y_n(x)dx$$

Assim:

(i) Para $m < n$, temos $\dfrac{d^n}{dx^n}(L_m^{(\alpha)}(x)) = 0$ e logo

$$\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)}\rangle = \int_0^\infty \frac{d^n}{dx^n}(L_m^{(\alpha)}(x))y_n(x)dx = 0.$$

(ii) Para $m = n$

$$\langle L_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)}\rangle = \int_0^\infty \frac{d^n}{dx^n}(L_n^{(\alpha)}(x))y_n(x)dx = \int_0^\infty a_{n,n}n!y_n(x)dx = n!\int_0^\infty x^{n+\alpha}e^{-x}\,dx.$$

Agora como a função Gama é definida por $\Gamma(y) = \displaystyle\int_0^\infty x^{y-1}e^{-x}\,dx, y > 0$, concluímos que

$$\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)}\rangle = n!\int_0^\infty x^{n+\alpha}e^{-x}\,dx = n!\Gamma(n+\alpha+1)$$

□

Para obter a relação de recorrência de três termos precisamos encontrar os coeficientes $\gamma_{n+1}, \alpha_{n+1}$ e β_{n+1} dados no Teorema (2.2.4). Assim, como os polinômios de Laguerre são mônicos segue que

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} = 1$$

Agora, utilizando a relação de ortogonalidade dada no Teorema (3.6.2) obtemos:

$$\alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}\frac{\langle P_n, P_n\rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle} = \frac{n!\Gamma(\alpha+n+1)}{(n-1)!\Gamma(\alpha+n)} = \frac{n(n-1)!(\alpha+n)\Gamma(\alpha+n)}{(n-1)!\Gamma(\alpha+n)} = n(\alpha+n)$$

Resta agora calcular o coeficiente $\beta_{n+1} = \gamma_{n+1} \dfrac{\langle xL_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)} \rangle}{\langle L_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)} \rangle}$.

Sabemos que,

$$L_n^{(\alpha)}(x) = x^n - n(n+\alpha)x^{n-1} + \cdots .$$

Logo $xL_n^{(\alpha)}(x) = x^{n+1} - n(n+\alpha)x^n + \cdots$. e

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = x^{n+1} - (n+1)(n+1+\alpha)x^n + \cdots .$$

Assim

$$\begin{aligned} xL_n^{(\alpha)}(x) - L_{n+1}^{(\alpha)}(x) &= x^{n+1} - n(n+\alpha)x^n + \cdots - x^{n+1} + (n+1)(n+1+\alpha)x^n + \cdots \\ &= [(n+1)(n+1+\alpha) - n(n+\alpha)]x^n + \cdots \end{aligned} \tag{3.6.3}$$

Agora note que, multiplicando $L_n^{(\alpha)}(x)$ por $(n+1)(n+1+\alpha) - n(n+\alpha)$, obtemos

$$\begin{aligned} [(n+1)(n+1+\alpha) - n(n+\alpha)]L_n^{(\alpha)}(x) &= [(n+1)(n+1+\alpha) - n(n+\alpha)]x^n \\ &\quad -[(n+1)(n+1+\alpha) - n(n+\alpha)]n(n+\alpha)x^{n-1} + \cdots \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} [(n+1)(n+1+\alpha) - n(n+\alpha)]x^n &= [(n+1)(n+1+\alpha) - n(n+\alpha)]L_n^{(\alpha)}(x) + \\ &\quad +[(n+1)(n+1+\alpha) - n(n+\alpha)]n(n+\alpha)x^{n-1} + \cdots \\ &= [(n+1)(n+1+\alpha) - n(n+\alpha)]L_n^{(\alpha)}(x) + q_{n-1}(x) \end{aligned}$$

onde q_{n-1} é um polinômio de grau $n-1$. Substituindo esse resultado na expressão (3.6.3) temos que

$$xL_n^{(\alpha)}(x) = L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + [(n+1)(n+1+\alpha) - n(n+\alpha)]L_n^{(\alpha)}(x) + q_{n-1}(x)$$

Calculando o produto interno de $xL_n^{(\alpha)}(x)$ por $L_n^{(\alpha)}(x)$,obtemos

$$\begin{aligned} \langle xL_n^{(\alpha)}(x), L_n^{(\alpha)}(x) \rangle &= \langle L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + [(n+1)(n+1+\alpha) - n(n+\alpha)]L_n^{(\alpha)}(x) + q_{n-1}(x), L_n^{(\alpha)}(x) \rangle \\ &= \langle L_{n+1}^{(\alpha)}(x), L_n^{(\alpha)}(x) \rangle + [(n+1)(n+1+\alpha) - n(n+\alpha)]\langle L_n^{(\alpha)}(x), L_n^{(\alpha)}(x) \rangle \\ &\quad +\langle q_{n-1}(x), L_n^{(\alpha)}(x) \rangle \end{aligned}$$

Pela relação de ortogonalidade temos que $\langle L_{n+1}^{(\alpha)}(x), L_n^{(\alpha)}(x)\rangle = 0$ e pelo item (b) do Teorema (2.2.2) vem que $\langle q_{n-1}(x), L_n^{(\alpha)}(x)\rangle = 0$. Assim

$$\langle xL_n^{(\alpha)}(x), L_n^{(\alpha)}(x)\rangle = [(n+1)(n+1+\alpha) - n(n+\alpha)]\langle L_n^{(\alpha)}(x), L_n^{(\alpha)}(x)\rangle$$

Logo,

$$\frac{\langle xL_n^{(\alpha)}(x), L_n^{(\alpha)}(x)\rangle}{\langle L_n^{(\alpha)}(x), L_n^{(\alpha)}(x)\rangle} = [(n+1)(n+1+\alpha) - n(n+\alpha)] = 2n+\alpha+1$$

Portanto, $\beta_{n+1} = 2n+\alpha+1$

Dessa forma, substituindo os coeficientes na relação de recorrência geral dada pelo Teorema (2.2.4) obtemos a relação de recorrência para os polinômios de Laguerre:

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (x-2n-\alpha-1)L_n^{(\alpha)}(x) - n(n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \text{ para } n \geq 1.$$

Vamos calcular agora os primeiros polinômios de Laguerre. Pela fórmula de Rodrigues dada na definição (3.6.1) temos que

$L_0^{(\alpha)} = (-1)^0 x^{-\alpha} e^x x^\alpha e^{-x} = 1$

$L_1^{(\alpha)} = (-1)x^{-\alpha}e^x \dfrac{d}{dx}(x^\alpha e^{-x}) = (-1)x^{-\alpha}e^x[(\alpha+1)x^\alpha e^{-x} + x^{\alpha+1}e^{-x}] = (-1)(\alpha+1-x) = x-\alpha-1$

Agora pela relação de recorrência

$$\begin{aligned} L_2^{(\alpha)} &= (x-(2+\alpha+1))L_n^{(\alpha)}(x) - (1+\alpha)L_0^{(\alpha)}(x) = (x-3-\alpha)(x-\alpha-1) - (\alpha-1) \\ &= x^2 - 2(\alpha+2)x + (\alpha+2)(\alpha+1) \end{aligned}$$

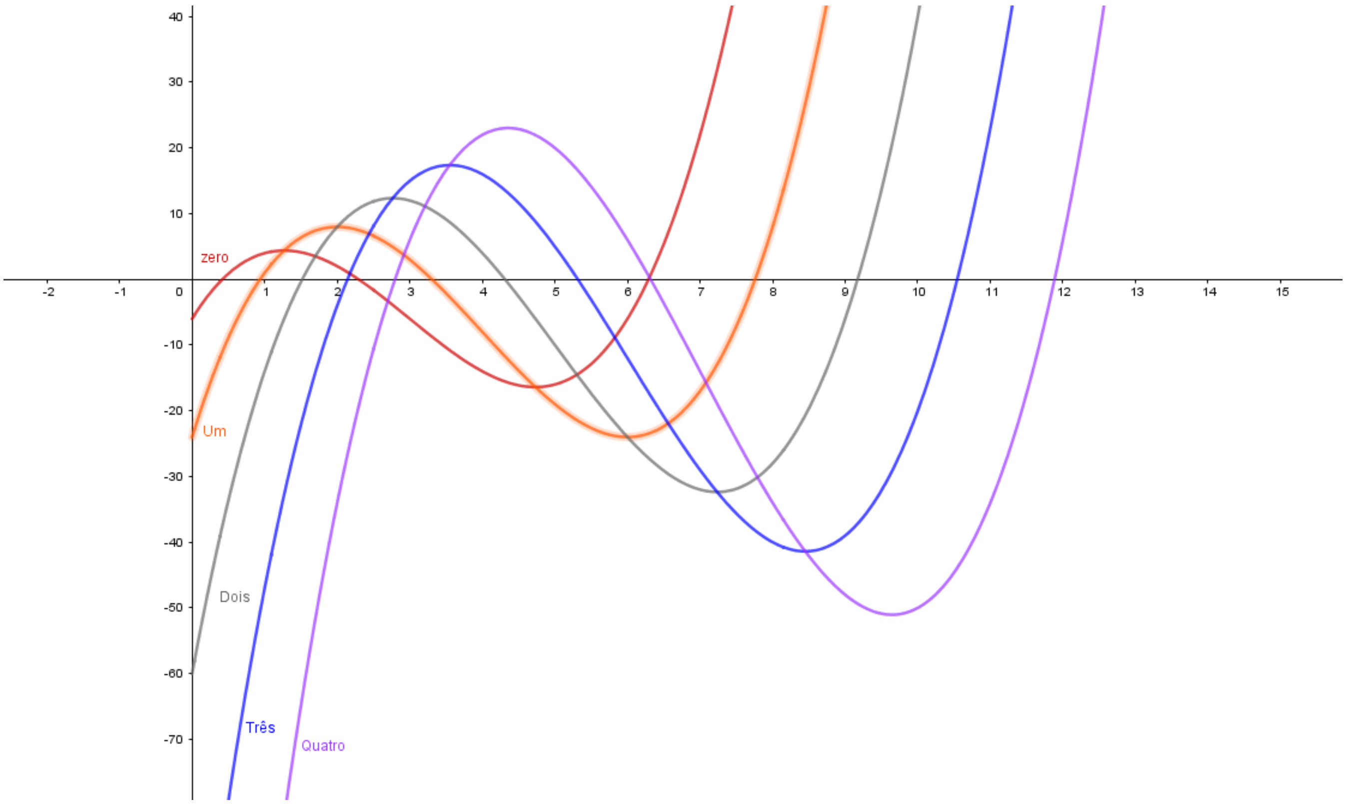

Figura 3.3: Polinômios de Laguerre $L_3^{\alpha}(x), \alpha = 0, 1, 2, 3, 4$.

3.7 Polinômios de Hermite

Definição 3.7.1. Os *polinômios de Hermite*, denotados por $H_n(x)$, são definidos pela fórmula de Rodrigues:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}[e^{-x^2}].$$

Os polinômios de Hermite são ortogonais, no intervalo $(-\infty, \infty)$ em relação a função peso $w(x) = e^{x^2}$.

Para determinar o coeficiente do termo de maior grau vamos calcular os primeiros polinômios de Hermite. Usando a definição acima obtemos:

$$H_0(x) = (-1)^0 e^{x^2}[e^{-x^2}] = e^{x^2} e^{-x^2} = 1$$

$$H_1(x) = (-1)e^{x^2} \frac{d}{dx}[e^{-x^2}] = -e^{x^2}[-2xe^{-x^2}] = 2x$$

$$H_2(x) = (-1)^2 e^{x^2} \frac{d^2}{d^2x}[e^{-x^2}] = e^{x^2}[-2e^{-x^2} + 2^2x^2e^{-x^2}] = 2^2x^2 - 2$$

Seguindo este raciocínio, obtemos $H_n(x) = 2^n x^n + q_r(x)$, em que $q_r(x)$ é um polinômio de grau $r < n$. Portanto, o coeficiente do termo de maior grau dos polinômios de Hermite é $a_{n,n} = 2^n$.

Veremos agora qual é a relação de ortogonalidade que esses polinômios satisfazem.

Teorema 3.7.2. *Os polinômios de Hermite satisfazem a seguinte condição de ortogonalidade*

$$\langle H_n, H_m\rangle \begin{cases} 0, & se\ m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & m = n \end{cases}$$

onde o produto interno é definido por $\langle H_n, H_m\rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)e^{x^2}dx$

Demostração: Sejam m e n inteiros não negativos e vamos considerar, sem perda de generalidade, que $m \leq n$. Assim, usando a definição (3.7.1), vem que

$$\begin{aligned}\langle H_n, H_m\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)e^{x^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}[e^{-x^2}]e^{-x^2}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)(-1)^n \frac{d^n}{dx^n}[e^{-x^2}]\,dx\end{aligned}$$

Tomando $\phi(x) = e^{-x^2}$, temos

$$\langle H_n, H_m\rangle = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)\phi^{(n)}(x)\,dx$$

Integrando por partes, seja $u = H_m(x)$ e $dv = \phi^{(n)}dx$. Então, $du = H'_m(x)dx$ e $v = \phi^{(n-1)}$. Logo,

$$\langle H_n, H_m\rangle = (-1)^n \left[H_m(x)\phi^{(n-1)}(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} H'_m(x)\phi^{(n-1)}(x)dx \right]$$

Agora veja que

$$\begin{aligned}H_m(x)\phi^{(n-1)}(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} &= \lim_{a\to-\infty} H_m(x)\phi^{(n-1)}(x)\Big|_a^0 + \lim_{b\to\infty} H_m(x)\phi^{(n-1)}(x)\Big|_0^b \\ &= \lim_{a\to-\infty}[H_m(0)\phi^{(n-1)}(0) - H_m(a)\phi^{(n-1)}(a)] + \lim_{b\to\infty}[H_m(b)\phi^{(n-1)}(b) - H_m(0)\phi^{(n-1)}(0)] \\ &= H_m(0)\phi^{(n-1)}(0) - \lim_{a\to-\infty} H_m(a)\phi^{(n-1)}(a) + \lim_{b\to\infty} H_m(b)\phi^{(n-1)}(b) - H_m(0)\phi^{(n-1)}(0) \\ &= -\lim_{a\to-\infty} H_m(a)\phi^{(n-1)}(a) + \lim_{b\to\infty} H_m(b)\phi^{(n-1)}(b). \qquad (3.7.1)\end{aligned}$$

Como $\phi(x) = e^{-x^2}$ observe que

$$\phi'(x) = -2xe^{-x^2}$$

$$\phi''(x) = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$$

$$\phi'''(x) = e^{-x^2}((-1)^3 8x^3 + 12x).$$

Assim, seguindo esse raciocínio, a derivada de ordem $n-1$ de ϕ é dada por

$$\phi^{(n-1)}(x) = e^{-x^2}[(-1)^{n-1} q_{n-1}(x)],$$

onde $q_{n-1}(x)$ denota um polinômio de grau $n-1$. Substituindo essa informação em (3.7.1) temos:

$$\begin{aligned}
H_m(x)\phi^{(n-1)}(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} &= -\lim_{a\to-\infty} H_m(a)e^{-a^2}(-1)^{(n-1)}q_{n-1}(a) + \lim_{b\to\infty} H_m(b)e^{-b^2}(-1)^{(n-1)}q_{n-1}(b) \\
&= -\lim_{a\to\infty}(-1)^{n-1}e^{-a^2}q_{n-1+m}(a) + \lim_{b\to\infty}(-1)^{n-1}e^{b^2}q_{n-1+m}(b) \\
&= (-1)^n \lim_{a\to\infty} \frac{q_{n-1+m}(a)}{e^{a^2}} + (-1)^{n-1} \lim_{b\to\infty} \frac{q_{n-1+m}(b)}{e^{b^2}}. \qquad (3.7.2)
\end{aligned}$$

Da mesma forma, se $\sigma(x) = e^{x^2}$ é fácil verificar que $\sigma^{(n)}(x) = e^{x^2}Q_n$, onde Q_n é um polinômio de grau n. Assim, aplicando a regra de L'Hospital $n+m-1$ vezes em (3.7.2)

$$H_m(x)\phi^{(n-1)}(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = (-1)^n \lim_{a\to-\infty} \frac{(n+m-1)!a_{n+m-1}}{e^{a^2}Q_{n+m-1}(a)} + (-1)^{n-1} \lim_{b\to\infty} \frac{(n+m-1)!a_{n+m-1}}{e^{b^2}Q_{n+m-1}(b)} = 0.$$

Portanto,

$$\langle H_n, H_m \rangle = (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} H'_m(x)\phi^{(n-1)}(x)\,dx.$$

Dessa forma, se integrarmos n vezes obtemos

$$\langle H_n, H_m \rangle = (-1)^{2n} \int_{-\infty}^{\infty} H_m^{(n)}(x)\phi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} H_m^{(n)}(x)\phi(x)dx$$

Consideremos agora dois casos:

(i) Se $m < n$, temos que $H_m^{(n)}(x) = 0$, logo

$$\langle H_n, H_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H_m^{(n)}(x)\phi(x)dx = 0$$

(ii) Se $m = n$

$$\langle H_n, H_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^{(n)}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} 2^n n! dx = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Considere $A = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} du$. Então,

$$\begin{aligned}
A^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy
\end{aligned}$$

Trocando as coordenadas $x = r\sin\phi$ e $y = r\cos\phi$, obtemos

$$x^2 + y^2 = r^2 \sin^2\phi + r^2 cos^2\phi = r^2(\sin^2\phi + cos^2\phi) = r^2$$

ou seja, $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Logo, como x e y variam de $-\infty$ a ∞, então $0 \leq r \leq \infty$. Além disso, os quatro quadrantes é a região onde x e y variam de $-\infty$ a ∞. Portanto, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Assim,

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} re^{-r^2} drd\phi \\
&= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^{\infty} d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\phi \\
&= 2\int_0^{2\pi} d\phi \\
&= 2\phi\Big|_0^{2\pi} = \pi.
\end{aligned}$$

Logo, $A = \sqrt{\pi}$. Assim concluímos que

$$\langle H_n, H_n\rangle = 2^n n!\sqrt{\pi}. \ \square$$

Já relação de recorrência para os polinômios de Hermite é dada por

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \text{ para } n \geq 1,$$

onde $H_0(x) = 1$ e $H_1(x) = 2x$.

De fato, basta encontrar os coeficientes γ_{n+1}, α_{n+1} e β_{n+1} dados pelo Teorema (2.2.4). Assim, como o coeficiente do termo de maior grau dos polinômios de Hermite é $a_{n,n} = 2^n$, temos que

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

Agora pela relação de ortogonalidade dos polinômios de Hermite

$$\alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle H_n, H_n \rangle}{\langle H_{n-1}, H_{n-1} \rangle} = \frac{2}{2} \frac{2^n n! \sqrt{\pi}}{2^{n-1}(n-1)! \sqrt{\pi}} = 2n.$$

Por fim, encontraremos o valor de β_{n+1}.

Considerando $y(x) = e^{-x^2}$, segue da definição dos polinômios de Hermite que $y^{(n)} = (-1)^n e^{-x^2} H_n(x)$.

Assim temos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(y^{(n)}) &= \frac{d}{dx}[(-1)^n e^{-x^2} H_n(x)] \\ &= (-1)^n(-2x)e^{-x^2} H_n(x) + (-1)^n e^{-x^2} H_n'(x) \\ &= (-1)^{n+1} 2x e^{-x^2} H_n(x) + (-1)^n e^{-x^2} H_n'(x)\end{aligned}$$

ou seja,

$$y^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} e^{-x^2} [2xH_n(x) - H_n'(x)]. \tag{3.7.3}$$

Mas, por outro lado,

$$y^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} e^{-x^2} H_{n+1}(x). \tag{3.7.4}$$

Comparando (3.7.3) e (3.7.4) obtemos

$$(-1)^{n+1} e^{-x^2} H_{n+1}(x) = (-1)^{n+1} e^{-x^2} [2xH_n(x) - H_n'(x)]$$

e logo concluímos que

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x).$$

Substituindo então $H_{n+1}(x)$ e os valores de γ_{n+1} e α_{n+1} na fórmula geral de recorrência

$$H_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1} x - \beta_{n+1}) H_n(x) - \alpha_{n+1} H_{n-1}(x),$$

obtemos

$$2xH_n(x) - H_n'(x) = (2x - \beta_{n+1}) H_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

Daí segue que, $2x = 2x - \beta_{n+1}$, ou seja, $\beta_{n+1} = 0$.

Portanto, a relação de recorrência para os polinômios de Hermite é dada por

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \text{ para } n \geq 1$$

onde $H_0(x) = 1$ e $H_1(x) = 2x$.

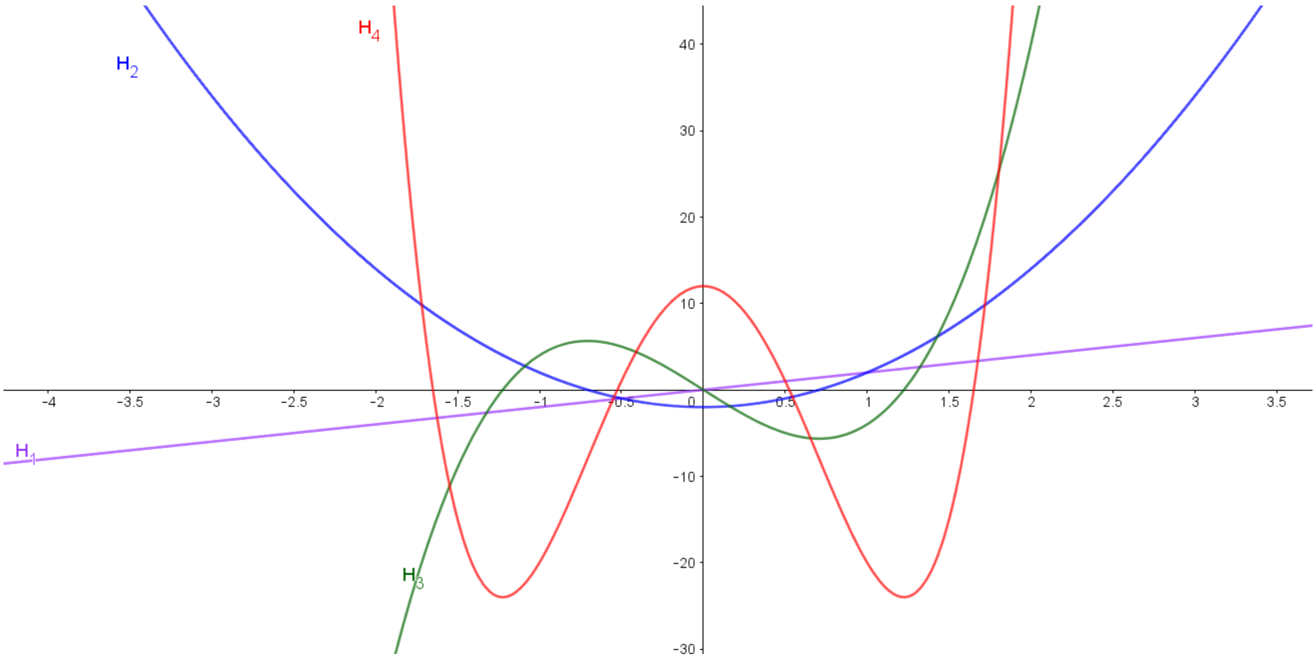

Figura 3.4: Polinômios de Hermite $H_n(x), n = 1, 2, 3, 4$.

Conclusão

Por meio deste trabalho foi possível apresentar de maneira detalhada resultados importantes da teoria dos polinômios ortogonais na reta real. Com o estudo concluímos que esses polinômios formam uma base para o espaço vetorial π_n dos polinômios de grau no máximo n. Verificamos também que os seus zeros apresentam características bastante singulares: são reais, distintos e pertencem ao intervalo de ortogonalidade (a, b). Além disso, dada uma sequência de polinômios ortogonais $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, os zeros desses polinômios são entrelaçados, ou seja, entre dois zeros consecutivos de um polinômio ortogonal de grau $n-1$ existe exatamente um zero do polinômio $P_n(x)$, de grau n. Por fim, a partir do estudo dos polinômios ortogonais clássicos foi possível visualizar, através da construção dos gráficos, que tais polinômios satisfazem as propriedades dos zeros dos polinômios ortogonais.

Referências Bibliográficas

[1] AFONSO. R. F. **Um estudo do comportamento dos zeros dos polinômios de Gegenbauer.** 79f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade federal de Uberlândia - UFU, Uberlândia 2016.

[2] ANDRADE, E. X. L. BRACCIALI, C. F. **Polinômios Ortogonais e Similares: Propriedades e Aplicações.** São José do Rio Preto, Universidade Estadual Paulista –UNESP, 2007.

[3] ASKEY.R. **Orthogonal Polynomials and Special Functions.** Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1975.

[4] CAROTHERS, N. L. **A Short Course on Approximation Theory**, Classroom Notes - Bowling Green, Bowling Green State University.

[5] CHIHARA, T.S. **An Introduction to Orthogonal Polynomial**. Mathematics and its Applications Séries. New York: Gordon and Breach, 1978.

[6] KREYSZIG, E. **Introductory functional analysis with applications.** New York: John Wiley & Sons, 1998.

[7] OLIVEIRA, E.C. **Funções especiais com Aplicações**. Ed.Livraria da Física, São Paulo, SP, 2005

[8] SANTOS, E. J. C. **Zero de Polinômios Ortogonais e de Polinômios Ortogonais Multiplos** 79f. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) - Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Campinas, SP 2016.

[9] SILVA, J. C. **Estruturas Algébricas para Licenciatura.** São Paulo: Bulcher, 2020, (vol. 3).

[10] SZEGO, G. **Orthogonal Polynomials**, 4.ed. Providence, RI: Amer. Math. Soc. Colloq. Publ, 1975, (vol. 23).

[11] TAMBARUSSI, T. **Zeros de polinômios ortogonais gerados por uma medida pertubada.** 75f. Dissertação (Mestrado em matemática aplicada e computação) - Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente - UNESP, 2013.