UFSJ
UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SÃO JOÃO DEL-REI

Paloma Elisa de Souza

Um Estudo do Conjunto de Cantor e Aplicações

São João del-Rei
Dezembro de 2018

Paloma Elisa de Souza

Um Estudo do Conjunto de Cantor e Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenadoria do Curso de Matemática, da Universidade Federal de São João del-Rei, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Carlos Alberto da Silva Junior

São João del-Rei, _____ de __________ de ________

Banca Examinadora

____

Orientador: Prof. Carlos Alberto da Silva Junior

____

Prof. Andréia Malacarne

____

Prof. Gustavo Terra Bastos

São João del-Rei
Dezembro de 2018

Agradecimentos

"Mas, na verdade, Deus me ouviu; atendeu à voz da minha oração. Bendito seja Deus, que não rejeitou a minha oração, nem desviou de mim a sua misericórdia".
Salmos 66:19,20.

Deus esteve ao meu lado e me deu força, ânimo e fé para não desistir e continuar lutando por este meu sonho e objetivo de vida. A Ele eu devo minha gratidão. A Universidade Federal de São João del Rei eu agradeço pelo ambiente propício à evolução e crescimento, bem como a todas as pessoas que a tornam assim tão especial para quem a conhece. A meus pais, alicerce na minha vida, que entenderam a minha ausência, acompanharam a minha dedicação e torceram por mim.

Ao longo de todo meu percurso eu tive o privilégio de trabalhar de perto com os melhores professores, educadores, orientadores. Sem eles não seria possível estar aqui hoje de coração repleto de orgulho. Em particular, agradeço ao meu orientador Carlos Alberto por toda paciência, compaheirismo e amizade, sem seu apoio não seria possível a conclusão dessa etapa tão importante.

Agradeço a banca examinadora, professora Andreia Malacarne e professor Gustavo Terra Bastos, que prontamente aceitaram o convite para fazer parte desse momento. Aos meus colegas de classe a quem aprendi a amar e construir laços eternos. Obrigada pela paciência, pelo sorriso, pelo abraço, pela mão que sempre se estendia quando eu precisava. Esta caminhada não seria a mesma sem vocês.

Obrigada a todos que, mesmo não estando citados aqui, tanto contribuíram para a conclusão desta etapa e para a Paloma que sou hoje.

“ Ninguém nos expulsaria do paraíso que Georg Cantor abriu para nós. ”

— David Hilbert

Resumo

Este trabalho tem como objetivo estudar as propriedades do Conjunto de Cantor e algumas de suas aplicações, tais como a construção do mesmo a partir das Frações Contínuas e das Equações Diofantinas. Para tanto, será apresentada uma análise de alguns dos mais importantes resultados da teoria de conjuntos para estudo das propriedades do Conjunto de Cantor, particularmente sua medida, cardinalidade e categoria. Além disso, serão apontadas algumas aplicações, como os Objetos Auto-Similares, resultantes da estruturação do Conjunto de Cantor. Em VALLIN (2013) é apresentado alguns dos resultados relacionados com o Conjunto de Cantor. Partindo dessa referência, foi feito um levantamento e detalhamento das noções básicas envolvendo a teoria de conjuntos (LIPSCHUTZ, 1970) e análise matemática (LIMA, 2017), tais como: o estudo da teoria da medida (FERNANDEZ 1976), cardinalidade e categoria de conjuntos, entre outros. Tendo em vista as características específicas do Conjunto de Cantor, partindo de um breve resumo da vida de Georg Cantor, foram analisados conceitos para a construção de tal conjunto. Além disso, algumas das aplicações desses conjuntos foram apresentadas, de forma a se entender a relação do mesmo com outros tópicos da matemática. Os resultados estão ligados à construção do Conjunto de Cantor e de algumas aplicações.

Palavras-chave: Conjunto de Cantor, Cantor, Curva de Koch, Triângulo de Sierpinski, Fractal.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A proposta feita pelo trabalho veio pela relevância do tema na matemática, onde a estruturação do Conjunto de Cantor se faz presente sutilmente no nosso dia a dia sem que percebamos. Suas aplicações são diversas, entre elas nas áreas de sistemas dinâmicos e em álgebra abstrata. Além disso, como o conjunto é um objeto auto similar, ele aparece no estudo dos fractais, nas várias noções de dimensões e na construção das curvas apresentadas neste estudo,a curva de Koch e no triângulo de Sierpinski.

O trabalho apresenta inicialmente um capítulo introdutório, onde é descrito alguns conceitos preliminares para a construção das ideias no decorrer do estudo, sendo os mais importantes conceitos sobre conjuntos, funções, cardinalidade e métrica. Logo após, Vallin (2013) nos dá uma breve biografia de Cantor. Georg Cantor nasceu em S. Petesburgo na Rússia e viveu entre os anos de 1845 a 1918. Ficou mundialmente conhecido pela Teoria Moderna de Conjuntos, a noção de diferentes infinitos e a Hipótese do Continuum, onde a última foi apresentada por David Hilbert no Segundo Congresso Internacional realizado na Paris World Exposition em 1900.

Construímos o conjunto de Cantor no segundo capítulo com o seguinte processo: Tomamos o intervalo unitário $I = [0, 1]$, retiramos dele o terço médio, então obtemos a união disjunta dos intervalos $[0, 1/3]$ e $[2/3, 1]$ de comprimento $1/3$ cada um. Repetimos o processo para os dois últimos intervalos e obteremos quatro intervalos com comprimento $1/9$. Assim, repetindo indefinidamente o processo, temos que o Conjunto de Cantor é formado por todos os pontos restantes dadas repetidas retiradas.

A partir da construção, fizemos algumas constatações acerca das propriedades do Conjunto de Cantor. O conjunto é compacto, tem medida nula, tem cardinalidade igual a cardinalidade dos números reais, é não enumerável, denso e chamado de primeira categoria. Além disso, podemos identificar um número real no intervalo $[0, 1]$ como sendo um número que pertence ao conjunto de Cantor somente se soubermos sua representação na base numérica 3. Se ele for representado somente por algarismos 0 e 2, então ele pertence ao conjunto, caso contrário, não pertence.

No capítulo Aplicações, é discutido que o conjunto de Cantor pode ser construído também a partir das Frações Contínuas, tomando um intervalo $[x, x+a]$, sendo x e a números reais. É retirado um intervalo médio, não necessariamente central e conseguimos construir adequadamente o conjunto com suas propriedades conservadas. As Frações Contínuas, dentre suas aplicações, são ferramentas práticas para a resolução de Equações Diofantinas, que é mostrado no decorrer do trabalho.

Além disso, são definidos os Objetos Auto Similares. Podemos observar no Conjunto de Cantor a partir de sua construção que, para qualquer I, uma cópia escalonada do I-ésimo nível da imagem aparece nos níveis subsequentes. Por exemplo, quando $k = 1$, o conjunto I_1, é a união dos intervalos $[0, 1/3]$ e $[2/3, 1]$ duas cópias reduzidas do intervalo inicial $[0, 1]$. I_2 formado pelos intervalos $[0, 1/9]$, $[2/9, 1/3]$, $[2/3, 7/9]$ e $[8/9, 1]$ onde pode ser interpretada como quatro cópias encolhidas de I_1 e nos levam as ideias do que se trata os objetos Auto Similares, que por sua vez, nos levam para os fractais e para várias noções de dimensões. Um conjunto que é auto similar tem a propriedade de que, em qualquer ampliação, há partes do conjunto que tem a mesma forma que o todo. Temos que um segmento de linha é um exemplo trivial de um objeto auto similar, mas para um exemplo não trivial temos um galho de samambaia.

Estes objetos são particularmente gerados pela relação repetida de uma imagem em um sistema de funções similares e deixando a sequência aproximar uma forma que seja invariante. Com o avanço tecnológico, o estudo desses conjuntos teve um grande avanço pelo uso de computadores para aproximar imagens e o estudo dos fractais ganhou destaque.

Logo após o estudo dos Objetos Auto Similares é definida uma métrica chamada métrica de Hausdorff, dada por uma coleção de subconjuntos S dos reais na dimensão n. Mostramos que $(H(S), d)$ é um espaço completo e então podemos definir as Transformações Afim. Então, desejamos aplicar um certo tipo de função aos subconjuntos compactos de S. Essa função é capaz de fazer três coisas (separadamente ou em conjunto) para um conjunto limitado. Pode encolher o objeto, girar o objeto e transladar o objeto.

A definição generalizada das transformações afim é dada por uma função $T : X \to Y$, onde para algum x, y em X e algum c em $[0, 1]$ temos que $T(cx + (1-c)y) = cT(x) + (1-c)T(y)$. E dada uma transformação em um espaço métrico, temos que um ponto x_0 é um atrator ou um invariante se $T(x_0) = x_0$. Para criar os objetos auto similares para os quais estamos nos dirigindo, precisamos de um tipo de transformação, chamado de Contração, o que nos garante que, quando aplicamos as transformações, os pontos estão se aproximando. Essa contração é definida em uma transformação afim se existe r em $[0, 1]$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq rd(x, y)$ para todo x, y em S. Chamamos r de fator de contração ou relação de contração. E tomamos uma composição de contrações $T^{(n)}(s)$, para qualquer ponto s em S onde a sequência das composições converge para um ponto $\hat{s}$ e esse $\hat{s}$ é o invariante para T. Com esses resultados conseguimos provar que H é uma métrica completa e podemos aplicar nos exemplos: Curva de Koch e Triângulo de Sierpinski.

Capítulo 2

Conceitos básicos

2.1 Conjuntos e Funções

O *Conjunto* é um conceito fundamental em todos as áreas da matemática. Intuitivamente, um conjunto é uma lista, coleção ou classe de objetos bem definidos. Os objetos de um conjunto podem ser qualquer coisa: números, pessoas, letras, músicas, etc. Esses objetos são chamados de *Elementos* ou *Membros* do conjunto.
Abaixo segue alguns exemplos de casos particulares de conjuntos.

i Os números 1, 3, 7 e 10;

ii As soluções da equação $x^2 - 5x + 2 = 0$;

iii Os estudantes Raquel, Valquíria e Lázaro;

iv Os países Inglaterra, França e Dinamarca;

v Os rios do Brasil.

Observe que nos itens i, iii e iv temos a enumeração dos elementos, isto é, os conjuntos apresentados por uma listagem de seus elementos. Já nos itens ii e v, os conjuntos são definidos por suas propriedades, isto é, regras que estabelecem todos os elementos de um conjunto.
Definimos o conjunto *Universo* como o conjunto formado por todos os objetos em estudo. Nesse trabalho, consideramos o conjunto universo U como o conjunto dos números reais, ou seja, $U = \mathbb{R}$.

Notação

Os conjuntos serão, em geral, designados por letras maiúsculas do alfabeto arábico:

$$A, B, X, Y...$$

Os elementos do conjunto, em geral, serão representados por letras minúsculas do alfabeto arábico:

$$a, b, x, y...$$

Particularmente, quando representamos os pontos de uma reta ou pontos do plano usamos letras maiúsculas.
Assim, enumerando os elementos de um conjunto A, como o descrito no item i, temos que:

$$A = \{1, 3, 7, 10\}.$$

Por outro lado, um conjunto descrito por sua lei de formação, como o apresentado no item v, fica representado por:

$$B = \{x; x \text{ é um rio do Brasil}\}.$$

Se um objeto x é um elemento de um conjunto A, isto é, se A contém x como um de seus elementos, escrevemos:

$$x \in A \text{ ou } A \ni x,$$

que deve ser lido "*x pertence a A*" ou "*A contém x*" respectivamente. Se por outro lado, um objeto x não é um elemento do conjunto A, então escrevemos:

$$x \notin A \text{ ou } A \not\ni x.$$

O conjunto *vazio* é um conjunto sem elementos, denotado por $\varnothing$. Qualquer propriedade contraditória pode ser usada para representar o conjunto vazio. Por exemplo,

$$\varnothing = \{a; a \neq a\}.$$

Dizemos que um conjunto A é subconjunto do conjunto B se cada elemento de A for também elemento de B. Denotaremos assim:

$$A \subset B \text{ ou } B \supset A, \text{ se para todo } x, x \in A, \text{ então } x \in B.$$

Usando esse argumento, podemos concluir que para todo conjunto B, $\varnothing \subset B$. A inclusão é usada, dentre outras coisas, para provar a igualdade de conjuntos. $A \subset B$ e $B \subset A$ se, e somente se, $A = B$. Se $A \subset B$ e $A \neq B$, então dizemos que A é um *Subconjunto Próprio* de B.

2.1.1 Operações com Conjuntos

União

Dados dois conjuntos A e B, existem várias operações relacionadas a esses conjuntos. A *União* entre dois conjuntos A e B, denotado por $A \cup B$, é o novo conjunto formado por todos os elementos que pertencem ao conjunto A ou ao conjunto B, ou seja,

$$A \cup B = \{x; x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Por exemplo, consideremos U como sendo o conjunto formado pelas letras do alfabeto arábico. Sejam $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{x; x \text{ é uma vogal}\} = \{a, e, i, o, u\}$. Então,

$$A \cup B = \{a, b, c, e, i, o, u\}.$$

Interseção

A *Interseção* entre dois conjuntos A e B, denotado por $A \cap B$, é o novo conjunto formado por todos os elementos que pertencem ao conjunto A e ao conjunto B ao mesmo tempo, ou seja,

$$A \cap B = \{x; x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Se os $A \cap B = \varnothing$, então dizemos que A e B são *Disjuntos*. Seja $\{A_n\}$ uma coleção de conjuntos tais que $A_i \cap A_j = \varnothing$, $\forall i \neq j$. Dizemos que essa família é composta por conjuntos disjuntos dois a dois.
Por exemplo, seja $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{x; x \text{ é uma vogal}\} = \{a, e, i, o, u\}$, então

$$A \cap B = \{a\}.$$

Diferença

A *Diferença* entre dois conjuntos A e B, denotado por $A \setminus B$, é o novo conjunto formado por todos os elementos que pertence ao conjunto A e não pertencem ao conjunto B, ou seja,

$$A \setminus B = \{x; x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Um caso particular de diferença entre dois conjuntos ocorre quando $B \subset A$. Nesse caso, temos o *Complementar* de B em relação a A, denotado por $C_A^B = A \setminus B$. Caso $A = U$, onde U representa o conjunto universo, então podemos escrever B^C, em vez de C_U^B. Por exemplo, seja U o conjunto formado pelas letras do alfabeto arábico, então, sendo $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x; x \text{ é uma vogal}\}$ e U o conjuntos do alfabeto arábico, segue que:

$$A \setminus B = \{b, c\},\ A^C = \{d, e, f, g, ..., y, z\} \text{ e } B^C = \{x; x \text{ é uma consoante}\}.$$

Leis de De Morgan

As *Leis de De Morgan* relacionam as operações de união e a interseção entre conjuntos, e são dadas por:

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C \text{ e}$$

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C.$$

De uma maneira geral, a união e interseção podem ser generalizadas da seguinte forma:

$$\bigcup_{i \in L} A_i = \{x : \text{ existe um } i \text{ tal que } x \in A_i\} \text{ e}$$

$$\bigcap_{i \in L} A_i = \{x : \text{para todo } i \ , x \in A_i\},$$

onde L é um conjunto de índices.
Daí, as Leis de De Morgan generalizadas ficam dadas por:

$$\left(\bigcup_{i \in L} A_i\right)^C = \bigcap_{i \in L} \left(A_i^C\right) \text{ e } \left(\bigcap_{i \in L} A_i\right)^C = \bigcup_{i \in L} \left(A_i^C\right).$$

Produto Cartesiano

O *Produto Cartesiano* de dois conjuntos não vazios A e B é o conjunto formado por todos os pares ordenados de $(x, y) \in A \times B$, tal que $x \in A$ e $y \in B$, isto é:

$$A \times B = \{(a, b); a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Se A ou B é um conjunto vazio, então $A \times B = \varnothing$. Para exemplificar, se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{x; x \text{ é uma vogal}\}$, então

$$A \times B = \{(a, a), (a, e), (a, i), (a, o), (a, u), (b, a), (b, e), (b, i), (b, o), (b, u), (c, a), (c, e),$$
$$(c, i), (c, o), (c, u)\}.$$

2.1.2 Conjuntos de Números

Embora a teoria de conjuntos seja muito geral, na matemática elementar encontramos os conjuntos numéricos, que são muito importantes. Em particular, especialmente em análise, destacamos o *Conjunto dos Números Reais*, denotado por $\mathbb{R}$.

Números Naturais ($\mathbb{N}$)

O conjunto dos *Números Naturais*, denotado por $\mathbb{N}$, é caracterizado pelos três axiomas de *Peano* enumerados a seguir:

1 Existe um função injetiva $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. A imagem $s(n)$ de cada número natural $n \in \mathbb{N}$ chama-se o *Sucessor* de n;

2 Existe um único número natural $1 \in \mathbb{N}$ tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

3 Se um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in X$ e $s(X) \subset X$ (isto é, $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$), então $X = \mathbb{N}$.

Portanto, temos que

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}.$$

No conjunto dos números naturais são definidos duas operações fundamentais: a *adição*, que associa a cada par de números (m, n) sua *soma* $m + n$, e a *multiplicação*, que faz corresponder ao par (m, n) seu *produto* $m \times n$. Essas operações são caracterizadas pelas seguintes igualdades, que lhes servem de definição:

i $m + 1 = s(m)$;

ii $m + s(n) = s(m + n)$, isto é, $m + (n + 1) = (m + n) + 1$;

iii $m \times 1 = m$;

iv $m \times (n + 1) = m \times n + m$.

Onde tais definições de adição e multiplicação estão sujeitas às seguintes propriedades:

i *Associatividade*: $(m + n) + p = m + (n + p)$ e $m \times (n \times p) = (m \times n) \times p$;

ii *Distributividade*: $m \times (n + p) = m \times n + m \times p$;

iii *Comutatividade*: $m + n = n + m$ e $m \times n = n \times m$;

iv *Lei do corte*: $n + m = p + m \Rightarrow n = p$ e $n \times m = p \times m \Rightarrow n = p$.

Dados dois números naturais m e n, escrevemos $m < n$ quando existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. Dizemos então, que m é *menor* que n. A notação $m \leq n$ significa que $m < n$ ou $m = n$.
Transitividade: Se $m < n$ e $n < p$ então $m < p$.
Princípio da Tricotomia: Dados m e n números naturais quaisquer, vale uma, e somente uma das três alternativas: $m = n$, $m < n$ ou $m > n$.

Teorema 2.1.1. *Princípio da Boa Ordenação: Todo subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento $n_0 \in A$ tal que $n_0 \leq n$ para todo $n \in A$.*

Demonstração: *Usando a notação $I_n = \{p \in \mathbb{N};\ 1 \leq p \leq n\}$, consideremos o conjunto $X \subset \mathbb{N}$, formado pelos números $n \in \mathbb{N}$ tais que $I_n \subset \mathbb{N} - A$. Assim, dizer que $n \in \mathbb{N}$ significa afirmar que $n \notin A$ e que todos os números naturais menores que n também não pertencem a A. Se tivermos $1 \in A$, o teorema estará demonstrado pois 1 será o menor elemento de A. Se porém, $1 \notin A$, então $1 \in X$. Por outro lado, $X \neq \mathbb{N}$, pois $X \subset \mathbb{N} - A$ e $A \neq \emptyset$. Assim, X cumpre a primeira parte da hipótese do terceiro Axioma de Peano, contém 1, mas não cumpre a conclusão, não é igual a $\mathbb{N}$. Logo, não pode cumprir a segunda parte da hipótese. Ou seja, deve existir algum $n \in X$ tal que $n + 1 \notin X$. Seja $a = n + 1$, então todos os inteiros desde 1 até n pertencem ao complementar de A, mas $a = n + 1$ pertence a A. Desta maneira, a é o menor elemento do conjunto A, o que demonstra o teorema.*

$\blacksquare$

Números Inteiros ($\mathbb{Z}$)

O conjunto dos Números Naturais é caracterizado pela existência de um sucessor, isto é, todos os elementos do conjunto com exceção do número 1, é sucessor de algum número natural. No conjunto dos *Números Inteiros*, podemos dizer que todo elemento, possui *sucessor* e *antecessor*, isto é, dado $n \in \mathbb{Z}$, sempre existem $n+1$ e $n-1$ em $\mathbb{Z}$. Observe que o conjunto dos números inteiros é formado pelos números naturais, o zero e os opostos aditivos dos números naturais. Dessa forma, temos que

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Números Racionais ($\mathbb{Q}$)

Os *Números Racionais* são os números dados como a razão entre dois números inteiros, desde que o denominador seja diferente de zero. Dessa forma, definimos o conjunto dos *Números Racionais* por

$$\mathbb{Q} = \{x; x = \frac{p}{q} \text{ onde } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}.$$

Nesse caso, a soma, diferença, produto e quociente também é um racional.

Números Reais ($\mathbb{R}$)

O conjunto dos *Números Reais*, indicado por $\mathbb{R}$, pode ser visto como um *Corpo Ordenado Completo*. Um *Corpo* é um conjunto K onde estão definidas duas operações, a *Adição* e a *Mulltiplicação*, que cumpre certas propriedades. A adição $+ : K \times K$ transforma cada par ordenado $(x, y) \in K^2$ no número $x + y \in K$ e a multiplicação $. : K \times K$ transforma cada par ordenado $(x, y) \in K^2$ no número $x.y \in K$ o seu produto. As propriedades que essas operações obedecem, para todo $x, y, z \in K$:

i *Associatividade*: $(x + y) + z = x + (y + z)$ e $(x.y).z = x.(y.z)$;

ii *Comutatividade*: $x + y = y + x$ e $x.y = y.x$;

iii *Elementos neutros*: Existem dois *Elementos Neutros*, um para a soma, $0 \in K$, e outro para o produto, $1 \in K$, tais que $x + 0 = x$ e $x.1 = x$;

iv *Elementos Inversos*: Existe o *Inverso Aditivo* $-x \in K$ tal que $x + (-x) = 0$ e, para todo $x \neq 0$, existe também o *Inverso Multiplicativo* $x^{-1} \in K \backslash \{0\}$ tal que $x.x^{-1} = 1$;

v *Distributividade*: $x.(y + z) = x.y + x.z$.

Assim, o conjunto dos números reais com as operações usuais de soma e produto é um corpo.

Definição 2.1.1. *Um Corpo Ordenado é um corpo K onde existe um subconjunto $K_+ \subset K$, chamado de o conjunto dos Números Positivos, que cumpre as seguintes condições:*

i A soma e o produto de números positivos é também um número positivo;

ii Dado $x \in K$, exatamente uma, e somente uma, das três alternativas seguintes ocorre: $x = 0$ ou $x \in K_+$ ou $-x \in K_+$.

Escrevemos que $x < y$ e dizemos que x é *menor* que y quando $y - x \in \mathbb{R}^+$, isto é, $y = x + z$, onde z é positivo. Nesse caso, escrevemos também $y > x$ e dizemos y é *maior* que x. Em particular, $x > 0$ significa que $x \in \mathbb{R}^+$, isto é, x é positivo, enquanto que se $x < 0$, $-x \in \mathbb{R}^+$, ou seja, x é negativo.
Além disso, para $x, y, z \in K$, as propriedades a seguir também são satisfeitas:

i *Transitividade*: Se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$;

ii *Tricotomia*: Ocorre somente uma das três alternativas $x = y$, $x < y$ ou $y < x$;

iii *Monotonicidade da adição*: Se $x < y$, então $x + z < y + z$;

iv *Monotonicidade da multiplicação*: Se $x < y$ e $z > 0$, então $xz < yz$. Porém, se $z < 0$, então $yz < xz$.

Dessa forma, tomando $K_+ = \mathbb{R}_+$ como sendo o conjunto dos números reais positivos, temos que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado.

Nada que foi dito até agora permite distinguir $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$, pois os números racionais também constituem um corpo ordenado. Caracterizaremos, portanto, $\mathbb{R}$ como sendo um *Corpo Ordenado Completo*, propriedade que $\mathbb{Q}$ não possui. Para isso, enunciemos algumas definições.

Definição 2.1.2. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é chamado Limitado Superiormente, quando existe algum $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$. Nesse caso dizemos que b é uma Cota superior de X. Analogamente, dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é Limitado inferiormente, quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$. O número a Cota inferior de X. Se X é limitado superiormente e inferiormente, diz-se que X é um Conjunto Limitado.*

Definição 2.1.3. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente e não vazio. Um número $b \in \mathbb{R}$ chama-se Supremo do conjunto X quando é a menor das cotas superiores de X. Mais explicitamente, b é um supremo de X quando cumpre as duas condições:*

1. *Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$;*

2. *Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$, então $b \leq c$.*

Escrevemos $b = \sup X$ para indicar que b é o supremo do conjunto X. Analogamente, se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto não vazio e limitado inferiormente, um número real a chama-se Ínfimo do conjunto X, e escrevemos $a = \inf X$, quando é a maior das cotas inferiores de X. Isto equivale às duas afirmações:

1. *Para todo $x \in X$ tem-se $a \leq x$;*

2. *Se $c \leq x$ para todo $x \in X$, então $c \leq a$.*

Portanto, afirmar que $\mathbb{R}$ é um *Corpo Ordenado Completo* significa dizer que todo conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$, limitado superiormente, possui supremo $b = \sup X \in \mathbb{R}$.
Os números reais podem ser associados por uma correspondência biunívoca aos pontos de uma reta, chamada de *Reta Real*, sendo que os números à direita do zero são os *Números Positivos* e os à esquerda do zero são os *Números Negativos* como ilustrado na figura abaixo.

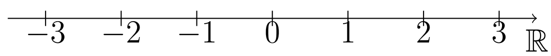


Figura 2.1: Ilustração da reta real.

Números Irracionais ($\mathbb{Q}^C$)

O conjunto dos *Números Irracionais*, indicado por $\mathbb{Q}^C$, é definido pelo complementar do conjunto dos números racionais em relação ao conjunto dos números reais, ou seja,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^C.$$

Intervalos

No corpo ordenado $\mathbb{R}$ existe a importante noção de *Intervalo*. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, usaremos as notações abaixo para cada tipo de intervalo:

- Fechado e limitado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$;

- Aberto e limitado: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$;

- Fechado à esquerda e limitado: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$;

- Fechado à direita e limitado: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$;

- Fechado e ilimitado superiormente: $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\}$;

- Aberto e ilimitado superiormente: $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a < x\}$;

- Fechado e ilimitado inferiormente: $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$;

- Aberto e ilimitado inferiormente: $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$;

- Ilimitado inferiormente e superiormente: $(\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Quando considerarmos um intervalo de extremos a e b, suporemos sempre $a < b$, com uma exceção que destacaremos agora. Ao tomarmos o intervalo fechado $[a, b]$, é conveniente admitir o caso em que $a = b$. O intervalo $[a, a]$ consiste em um único ponto a e chama-se *intervalo degenerado*. Todo intervalo não degenerado é um conjunto infinito. Basta observar o seguinte: num corpo ordenado K, se $x < y$, então $x < \dfrac{x+y}{2} < y$. Assim, se I for um intervalo contendo os elementos a e b, com $a < b$, podemos obter uma infinidade de elementos $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ em I, tomando $x_1 = \dfrac{x+y}{2}$, $x_2 = \dfrac{x_1 + a}{2}, \cdots$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n + a}{2}, \cdots$. Teremos $a < ... < x_2 < x_1 < b$.

Conjuntos Abertos

Um ponto $a \in \mathbb{R}$ é dito ser *Ponto Interior* do conjunto $X \subset \mathbb{R}$, quando existe um número $\epsilon > 0$ tal que o intervalo aberto $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ está contido em X. O conjunto formado por todos os pontos interiores de X, denotado por $\mathring{X}$, é dito ser o Interior de X. Quando $a \in \mathring{X}$, dizemos que o conjunto X é uma *Vizinhança* do ponto a. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é chamado de *Aberto* quando $A = \mathring{A}$, ou seja, quando todos os pontos de A são interiores. O conjunto vazio é aberto. Todo intervalo aberto, limitado ou não, é um conjunto aberto.

Conjuntos Fechados

Um ponto $a \in \mathbb{R}$ é *Aderente* ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando a é limite de alguma sequência de pontos $x_n \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$. O *Fecho* de um conjunto X é o conjunto $\overline{X}$ formado por todos os pontos aderentes a X. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito ser *Fechado* quando ele contém todos os seus pontos aderentes, ou seja, quando $X = \overline{X}$.
A fronteira de um conjunto F é formada pelos pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que toda vizinhança de x contém pontos de X e pontos de X^C, ou seja, a é elemento da fronteira de X se para toda vizinhança V_a de a temos que $V_a \cap (X^C \setminus \{a\}) \neq \varnothing$. A fronteira de X é denotada por $\partial X = F$.
Temos que o interior do conjunto A pode ser expresso como $A \setminus \partial A$. O fecho do conjunto A, denotado por $\overline{A}$, é o conjunto A unido com sua fronteira, $\overline{A} = (A \cup \partial A)$.
Por exemplo, seja $A = (0,1) \cup (2, \infty)$, $B = [0,1]$ e $C = \mathbb{Q} \cap (0,1)$. Então, A é um conjunto aberto. Além disso, $\partial A = \{0,1,2\}$, $\partial B = \{0,1\}$, $\partial C = [0,1]$.Também $\mathring{A} = A$, $\mathring{B} = (0,1)$, $\mathring{C} = \emptyset$, $\overline{A} = [0,1] \cup [2, \infty)$ e $\overline{B} = B = \overline{C}$.

Definição 2.1.4. *Uma coleção (A_λ) de conjuntos não vazios é chamada de σ-Álgebra do conjunto X se*

i Para todo $A_\lambda \in X$, $A_\lambda^C \in X$;

ii Se $A_i \in X$, para $i = \{1, 2, 3, ...\}$, então $\cup_i A_i \in X$.

Assim, as σ-álgebra são fechadas sob o complementar e união enumerável.

2.1.3 Funções

Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos. Suponhamos que exista uma correspondência f de cada elemento de A com um único elemento de B. Então, esta correspondência é uma relação chamada de *Função*. Assim, uma função é representada por

$$f : A \to B,$$

onde se lê: "f é uma função de A em B". O conjunto A é chamado de *Domínio* da função f e B é chamado de *Contradomínio* de f. Além disso, se $a \in A$, o elemento $b \in B$ tal que $b = f(a)$, é chamado de *Imagem* de a por f. Por exemplo, seja

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}.$$

Então, f é a função que transforma todo número real em seu quadrado. Assim, algumas de suas imagens são:

- $f(1) = 1$
- $f(-3) = 9$
- $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Seja $f : A \rightarrow B$ uma função. Se $f(x) = f(y)$ implica em $x = y$, $\forall x, y \in A$, dizemos que f é uma função *Injetiva*. De uma maneira equivalente, podemos escrever a definição de injeção da seguinte forma: se $x \neq y$ implica em $f(x) \neq f(y)$, $\forall x, y \in A$, então f é injetiva.
Seja C um conjunto. Definimos o *Conjunto Imagem de* $f : C \subset A \rightarrow B$, denotado por $f(C)$, como sendo o conjunto

$$f(C) = \{f(x) \in B; x \in C\}.$$

Dizemos que uma função $f : A \rightarrow B$ é *Sobrejetiva* se $f(A) = B$.
Se f é uma função injetiva, então existe a *Inversa* $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$ definida por:

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y).$$

Uma função que é injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo é dita ser uma *Correspondência Biunívoca* ou uma *Bijeção*. Bijeções são muito importantes, visto que toda correspondência biunívoca $f : A \rightarrow B$ possui inversa $f^{-1} : B \rightarrow A$.
Dados $f : A \rightarrow B$ e $D \subset A$, dizemos que uma *Restrição* de f em D é uma função f com o domínio restrito apenas ao conjunto D. Isso permite, entre outras coisas, que funções que não são bijeções, possam ser transformadas em bijeções em uma dada restrição. Por exemplo, a função F dada por

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sin(x) \end{array},$$

não é injetiva, considerando o seu domínio. Por outro lado, se considerarmos f restrita ao conjunto, $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, então temos que a restrição torna-se uma função injetiva.

2.1.4 Limites

Limite de uma sequência

Uma *Sequência* de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real x_n, chamado o *n-Ésimo Termo* da sequência. Escrevemos $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente (x_n), para indicar a sequência cujo *n-ésimo* termo é x_n. Vale destacar a diferença entre uma sequência (x_n) e o conjunto $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ formado pelos elementos da sequência, em (x_n) temos que a posição do elemento é relevante enquanto que no conjunto $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ não.

Uma sequência (x_n) é chamada de *Limitada Superiormente* quando existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq k$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e é dita ser *Limitada Inferiormente*, quando existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \geq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dizmos que a sequência (x_n) é *Limitada* quando ela é limitada superiormente e inferiormente, ou seja, quando existe $k > 0$, tal que $|x_n| \leq k$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dada uma sequência $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, uma *Subsequência* de x é uma restrição da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\}$ de $\mathbb{N}$. Escrevemos $x' = (x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ ou $(x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, ...)$ ou $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ para representar uma subsequência. Temos que uma subsequência é, por si mesma, uma sequência, isto é, uma função cujo domínio é $\mathbb{N}$. Por exemplo, dado $a < -1$, formemos a sequência $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Se $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ é o conjunto dos números pares e $\mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}$ é o conjunto dos números ímpares, então a subsequência $(a^n)_{n\in\mathbb{N}'}$ é limitada apenas inferiormente enquanto a subsequência $(a^n)_{n\in\mathbb{N}''}$ é limitada apenas superiormente.

Dizer que o número real a é o *Limite* da sequência (x_n) significa afirmar que, para valores muito grandes de n, os termos x_n tornam-se e se mantém tão próximos de a quanto se queira. Em outras palavras, estipulando um "erro" por meio de um número real $\varepsilon > 0$, existe um índice n_0 tal que todos os termos x_n da sequência que tem índice n maior que n_0 são valores aproximados de a com erro inferior a ε. O índice n_0 depende de ε. Formalmente, teremos a definição a seguir.

Definição 2.1.5. *Dizemos que um número real a é Limite de uma sequência (x_n) de números reais, e escrevemos $a = \lim x_n$ quando para cada número real $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, for possível obter um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$, sempre que $n > n_0$.*

A definição de limite pode ser reescrita como a seguir:

$$a = \lim x_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N};\ n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Destacamos que $|x_n - a| < \varepsilon$ é o mesmo que $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, isto é, x_n, pertence ao intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Assim, dizer que $a = \lim x_n$ significa afirmar que qualquer intervalo aberto de centro a contém todos os termos x_n da sequência, salvo para um número finito de índices $n \in \{1, 2, 3, ..., n_0\}$, sendo que n_0 depende o ε escolhido. Podemos escrever $x_n \to a$ ao invés $\lim x_n = a$. Além disso, dizemos que x_n *Converge* para a.

Teorema 2.1.2. *(Unicidade do Limite) Seja (x_n) uma sequência de números reais. Assim, se $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$, então $a = b$.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de números reais tais que $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$ com $a \neq b$. Tomemos $\varepsilon = \dfrac{|b-a|}{2}$. Vemos que $\varepsilon > 0$ e notamos ainda que os intervalos $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ e $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ são disjuntos.
Se existisse $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ teríamos $|a-x| < \varepsilon$ e $|x-b| < \varepsilon$, donde $|a-b| \leq |a-x| + |x-b| < 2\varepsilon = |a-b|$, o que é um absurdo.
Como $\lim x_n = a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ e portanto, $x_n \notin (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ para todo $n > n_0$. Logo, $\lim x_n \neq b$. ■

Limites de Funções

Definição 2.1.6. *Um número $a \in \mathbb{R}$ é dito ser um Ponto de Acumulação de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, se toda vizinhança V_a de a contém pontos de $X \setminus \{a\}$.*

Assim, um ponto a é um ponto de acumulação de X se para todo $\varepsilon > 0$, temos que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (X \setminus \{a\}) \neq \varnothing$. Além disso, temos que X' é o conjunto de todos os pontos de acumulação de X.

Definição 2.1.7. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função definida num subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Dizemos que o número real L é o Limite de $f(x)$ quando x tende a a, e escrevemos*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

quando, para todo $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, podemos obter $\delta > 0$ tal que temos $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x-a| < \delta$.

Nas condições dadas acima, quando a é ponto de acumulação do domínio de f, a expressão

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

é uma afirmação equivalente a:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0; x \in X, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Notemos que escrever $0 < |x-a| < \delta$ equivale a dizer que x pertence ao intervalo $(a-\delta, a+\delta)$ e é diferente de a. Assim, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ significa que para todo intervalo $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, existe um intervalo aberto $(a-\delta, a+\delta)$ tal que, considerando $V_\delta = (X - \{a\}) \cap (a-\delta, a+\delta)$, segue que $f(V_\delta) \subset (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Em resumo, é possível tornar

$f(x)$ arbitrariamente próximo de L, desde que se tome $x \in X$ suficientemente próximo mas diferente de a.

Teorema 2.1.3. *(Unicidade do Limite) Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$. Se $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.*

Demonstração: Dado qualquer $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$, tais que para $x \in X$ e $0 < |x-a| < \delta_1$, então $|f(x)-L_1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Analogamente, para $x \in X$ e $0 < |x-a| < \delta_2$, então $|f(x) - L_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Assim, tomando $x \in X$ tal que $0 < |x - a| < \delta$, segue que

$$|L_1 - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, como $|L_1 - L_2| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, segue que $L_1 = L_2$. ■

2.1.5 Funções Contínuas

Dizemos que uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *Contínua* no ponto $a \in X$ quando é possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de $f(a)$, desde que se tome x suficientemente próximo de a. Formalmente, temos:

Definição 2.1.8. *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é Contínua no ponto $a \in X$, se para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ impliquem em $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Simbolicamente,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Diremos simplesmente que $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é Contínua se f for contínua em todos os pontos de X.

Uma consequência da definição de continuidade é que se f satisfaz as três condições a seguir:

i. $f(a)$ existe;

ii. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe;

iii. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$,

então, f é contínua em a.

2.2 Cardinalidade

A *Cardinalidade* lida com a contagem do número de elementos em um conjunto. O trabalho de Cantor nessa área abriu a matemática para as ideias do que significa um conjunto infinito e a noção de diferentes tipos de infinito.

Definição 2.2.1. *Sejam A e B dois conjuntos. Dizemos que A é equivalente a B se existe uma bijeção f, entre A e B. A notação para conjuntos equivalentes é $A \cong B$.*

Definição 2.2.2. *Seja S um conjunto. A Relação $\sim$ em S é um subconjunto de $S \times S$, onde escrevemos:*

$$x \sim y,$$

e dizemos "x relacionado com y".

Definição 2.2.3. *Seja $\sim$ uma relação no conjunto S. Dizemos que a relação é:*

i Reflexiva: Se para todo $x \in S$, $x \sim x$.

ii Simétrica: Para todos $x, y \in S$, se $x \sim y$, então $y \sim x$.

iii Transitiva: Para todos $x, y, z \in S$, se temos $x \sim y$ e $y \sim z$, então $x \sim z$.

Se uma relação é reflexiva, simétrica e transitiva, então é chamada de Relação de Equivalência.

Definição 2.2.4. *Seja S um conjunto e $\sim$ uma relação de equivalência. Para algum $x \in S$ definimos uma Classe de Equivalência de x como:*

$$[x] = \{y \in S; y \sim x\}.$$

Teorema 2.2.1. *Sejam S um conjunto e $\sim$ uma relação de equivalência em S. Então é válido para as classes de equivalências $[x]$ induzidas por $\sim$:*

i Para cada $x \in S$, $[x] \neq \emptyset$.

ii Para cada $x, y \in S$, ou $[x] = [y]$ ou $[x] \cap [y] = \emptyset$.

iii $\displaystyle\bigcup_{x \in S} [x] = S$.

Demonstração:

i Escolhemos $x \in S$ e analisamos em $[x]$. Desde que $\sim$ é reflexiva, $x \sim x$ por meio da qual $x \in \{y \in S; y \sim x\} = [x]$. Portanto, $[x] \neq 0$.

ii Suponhamos que $[x] \cap [y] \neq \varnothing$, então existe w tal que $w \in [x]$ e $w \in [y]$. Assim, $w \sim x$ e $w \sim y$. Por transitividade, temos $x \sim y$, portanto $[x] = [y]$.

iii Suponhamos que $S \neq \displaystyle\bigcup_{x \in S} [x]$, então, existe $y \in S$ tal que $y \notin \displaystyle\bigcup_{x \in S} [x]$. Logo $[y] \nsubseteq \displaystyle\bigcup_{x \in S} [x]$, o que é um absurdo, desde que tomamos y em S.

■

Temos que as classes de equivalência podem ser iguais ou disjuntas, $[x] \cap [y] \neq \varnothing$ quando $[x] = [y]$. Essas duas observações nos levam a concluir que uma relação de equivalência em um conjunto X divide o conjunto X em subconjuntos disjuntos. Mais precisamente,uma partição de um conjunto S é uma coleção de subconjuntos disjuntos não vazios de S que possuem S como resultado de sua união.

Definição 2.2.5. *Seja A um conjunto. Se existe um número natural k tal que $A = \{1, 2, 3, ..., k\}$, então $A \in [\{1, 2, 3, ..., k\}]$ e dizemos que A é um conjunto finito com cardinalidade $n(A) = k$. Caso contrário, A é um conjunto infinito.*

Definição 2.2.6. *Um conjunto X é dito ser um Conjunto Finito quando ele é vazio ou existe uma bijeção $f : I_n \to X$, onde $I_n = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq n\}$.*

Escrevendo $x_1 = f(1)$, $x_2 = f(2)$,..., $x_n = f(n)$ temos então $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. A bijeção f chama-se o *número de elementos* ou *número cardinal* do conjunto finito X.

Definição 2.2.7. *Um conjunto X diz se um Conjunto Infinito quando não é finito.*

Assim, X é infinito quando não é vazio nem existe, seja qual for $n \in \mathbb{N}$, uma bijeção $f : I_n \to X$.

Definição 2.2.8. *Dizemos que um ponto a é aderente ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando a é limite de alguma sequência de pontos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$.*

Definição 2.2.9. *Dizemos que um conjunto X é denso em Y quando $Y \subset \overline{X}$, isto é, quando todo $b \in Y$ é ponto aderente a X.*

Por exemplo, $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Definição 2.2.10. *Dizemos que um conjunto X é Enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$. Nesse caso, f chama-se uma Enumeração dos elementos de X.*

Escrevendo $f(1) = x_1$, $f(2) = x_2$,...,$f(n) = x_n$,... tem-se então $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Se o conjunto não for enumerável, ele é chamado *não enumerável.*
Quando um conjunto em $\mathbb{R}$ é infinito não enumerável, sua cardinalidade é denotada usando a letra hebraica aleph ($\aleph$). Para enumeráveis e infinitos usamos ($\aleph_0$).
Vejamos agora exemplos de conjuntos enumeráveis e não enumeráveis e as provas de suas várias cardinalidades. Mas antes do nosso primeiro resultado, vamos enunciar um teorema.

Teorema 2.2.2. *Se X é um conjunto infinito, então existe uma aplicação injetiva $f : \mathbb{N} \to X$.*

Demonstração: Para cada subconjunto não vazio $A \subset X$, escolhemos um elemento $x_A \in A$. Em seguida, definimos $f : \mathbb{N} \to X$ indutivamente. Pomos $f(1) = x_1$ e, supondo já definidos $f(1)$, ..., $f(n-1)$, escrevemos $A_n = X \setminus \{f(1), ..., f(n)\}$ e tomemos $x_n \in A_n$. Como X é infinito, A_n não é vazio. Definimos então $f(n) = x_n$. Isto completa a definição de f. Para provar que f é injetiva, sejam m, $n \in \mathbb{N}$, digamos com $m < n$. Então $f(m) \in \{f(1), ..., f(n-1)\}$ enquanto $f(n) \in X - \{f(1), ..., f(n-1)\}$. Logo $f(m) \neq f(n)$. ■

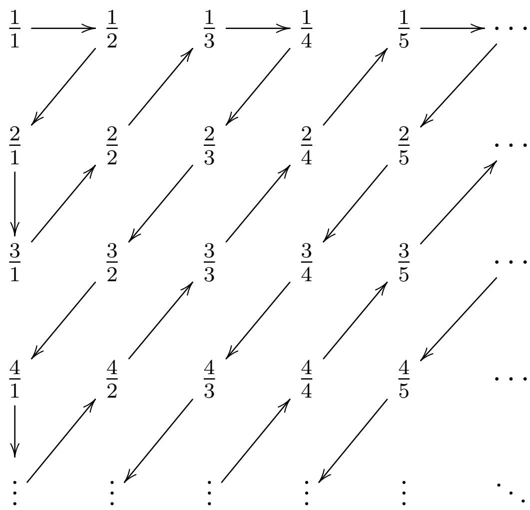
Isso significa que o enumerável é o "menor" dos infinitos. Com efeito, ele pode ser reformulado assim: *Todo conjunto infinito contém um subconjunto infinito enumerável.* Portanto, temos uma definição estrita para mostrar que $A = \{a, b, c\}$ é um conjunto finito com cardinalidade 3.

Teorema 2.2.3. *O conjunto*

$$\mathbb{Q}^+ = \{x; x \text{ é um número racional positivo}\} = \left\{\frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$$

é um conjunto enumerável.

Demonstração: De uma maneira simples, podemos enumerar o conjunto dos números racionais positivos como a seguir:



Dessa forma, podemos montar uma sequência com todas as frações, excluindo as que já apareceram na lista, ou seja,

$$\left(1, \frac{1}{2}, 2, 3, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \cdots\right).$$

De maneira análoga, é possível contar os elementos do $\mathbb{Q}_-$ e, portanto, podemos conclui que $\mathbb{Q}$ é enumerável, visto que $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\}$. ■

Teorema 2.2.4. *Se cada A_n, $n \in \mathbb{N}$, é um conjunto enumerável, então a união $U = \bigcup_{n}^{\infty} A_n$ é enumerável.*

Demonstração: Podemos escrever cada A_i como

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, ...\},$$

$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, ...\},$$

$$A_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, ...\},$$

$$\vdots$$

onde cada a_{ij} se refere ao j-ésimo elemento no i-ésimo conjunto. Vamos colocar os elementos da matriz em uma sequência (que pode ter repetições),

$$s : a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, a_{41}, a_{32}, a_{23}, a_{14}, \cdots .$$

Observe que a sequência s tem uma regra de formação. Primeiramente começamos com o termo a_{11}, depois os termos cuja soma dos índices é 3, a saber, a_{21} e a_{12}, depois termos cuja soma dos índices é 4: a_{31}, a_{22} e a_{13} e assim por diante. Como conseguimos escrever todos os elementos da matriz em forma de uma sequência, existe uma função de $\mathbb{N}$ no conjunto U, que associa os números 1, 2, 3, 4, 5, $\cdots$ aos números a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{31}, a_{22}, $\cdots$, respectivamente. Logo, $U = \bigcup_{n}^{\infty} A_n$ é um conjunto enumerável. ■

Teorema 2.2.5. *Sejam S, T, U conjuntos, $f : S \to T$ e $g : T \to U$ funções.*

i. Se f e g forem injetivas, então a composta $g \circ f$ é injetiva.

ii. Se f e g forem sobrejetivas, então a composta $g \circ f$ é sobrejetiva.

iii. Se f e g forem bijetivas, então a composta $g \circ f$ é bijetiva.

Demonstração:

i. Suponha que f e g sejam injetivas. Sejam x, $y \in S$ e $x \neq y$. Como f e g são injetivas, temos $f(x) \neq f(y)$, como g é injetiva, temos $g(f(x)) \neq g(f(y))$, o que mostra que $g \circ f$ é injetiva.

ii. Suponha que f e g sejam sobrejetivas. Dado arbitrariamente $y \in U$, mostraremos que existe x em S, tal que $f(g(x)) = y$.

   Como g é sobrejetiva, dado $y \in U$, existe $z \in T$, tal que $g(z) = y$. Como f é sobrejetiva, existe $x \in S$ tal que $f(x) = z$. Então, $g(f(x)) = g(z) = y$.

Portanto, $g \circ f$ é sobrejetiva.

iii. O item iii. segue dos itens ii. e i.

■

Teorema 2.2.6. *Se $A \subset \mathbb{N}$, então A é enumerável.*

Demonstração: Se A for finito por definição ele é enumerável e não teríamos nada a fazer. Suponha que A seja infinito. Pelo princípio da boa-ordenação, todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento. Seja a_1 o menor elemento de A, a_2 o menor elemento de $A_1 = A \backslash \{a_1\}$, a_3 o menor elemento de $A_2 = A \backslash \{a_1, a_2\}$, procedendo desta forma, definimos a_n como o menor elemento de $A_{n-1} = A \backslash \{a_1, ..., a_{n-1}\}$. Como $a_{n+1} > a_n$, a função $\varphi : \mathbb{N} \to X$, definida por

$$\varphi(n) = a_n$$

é injetiva. Para mostrarmos que ela é sobrejetiva, basta mostrarmos que $A = \{a_1, ..., a_n, ...\}$. Suponha que houvesse algum $a \in A$, tal que $a \neq a_n$, para todo n. Então a pertenceria a A_n para todo n, o que implica que $a > a_n$, para todo n. Portanto $a \neq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, o que é um absurdo, visto que $A \subset \mathbb{N}$. ■

Corolário 2.2.1. *Seja $g : A \to B$ uma bijeção, onde B é um subconjunto de $\mathbb{N}$. Então A é enumerável.*

Demonstração: Se B for finito, como g é uma bijeção, então A também será finito, portanto enumerável. Se B for infinito, como ele é enumerável, vimos na demonstração do Teorema 2.2.6 que existe uma bijeção $\varphi : B \to \mathbb{N}$. Então, pelo Teorema 2.2.5, $g \circ \varphi : A \to \mathbb{N}$ e uma bijeção, por ser composta de bijeções, portanto, A é enumerável. ■

Corolário 2.2.2. *Seja $f : A \to B$ injetiva. Se B for enumerável, então A também será.*

Demonstração: Se B for finito, como f é injetiva, então A também será finito, portanto enumerável. Se B for infinito, como B é enumerável, então existe uma bijeção $\varphi : B \to \mathbb{N}$. Como f e φ são injetivas, então pelo Teorema 2.2.5, a composta $\varphi \circ f : A \to \mathbb{N}$ também é injetiva. Portanto $\varphi \circ f$ é uma bijeção de A sobre a sua imagem, a qual é enumerável por ser um subconjunto $\mathbb{N}$, isto decorre do Teorema 2.2.6. Portanto, mostramos que existe uma bijeção de A sobre um subconjunto de $\mathbb{N}$ e pelo Corolário 2.2.1, temos que A é enumerável. ■

Corolário 2.2.3. *Seja $f : A \to B$ sobrejetiva. Se A for enumerável, então B também será.*

Demonstração: Como f é sobrejetiva, dado $b \in B$, podemos tomar $a \in A$, tal que $f(a) = b$. Isto nos permite definir uma função $g : B \to A$, tal que $g(b) = a$, portanto $f(g(b)) = f(a) = b$, para todo $b \in B$. Se $b_1 \neq b_2$, então $g(b_1) \neq g(b_2)$, pois $g(b_1) = g(b_2)$ implicaria $f(g(b_1)) = f(g(b_2))$, o que seria um absurdo, pois $f(g(b_1)) = b_1$ e $f(g(b_2)) = b_2$ e, por hipótese, $b_1 \neq b_2$. Logo, g é injetiva e A é enumerável, então pelo Corolário 2.2.2 é enumerável. ■

Definição 2.2.11. *Seja S_i, $i = \{1, 2, ..., n\}$ uma coleção de conjuntos. Definimos o Produto Cartesiano de S_i por:*

$$S_1 \times S_2 \times ... \times S_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n); x_i \in S_i\}.$$

Cada elemento $(x_1, x_2, ..., x_n)$ é chamado de n-upla ordenada.

Teorema 2.2.7. *O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.*
Demonstração: *De fato, sejam A e B dois conjuntos enumeráveis, então existem bijeções $f : \mathbb{N} \to A$ e $g : \mathbb{N} \to B$. Defina $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A \times B$, dada por $\varphi(m, n) = (f(m), g(n))$. Como f e g são sobrejetivas, então φ também será sobrejetiva. Sendo φ sobrejetiva e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ enumerável, pelo Corolário 2.2.3, concluímos que $A \times B$ e enumerável.*
■

Um conjunto A é enumerável se for finito ou equivalente a $\mathbb{N}$. Quando o último é verdade que o conjunto é chamado de infinito enumerável. Vejamos agora exemplos de conjuntos enumeráveis e não enumeráveis e as provas de suas várias cardinalidades.
Segue a seguir algumas propriedades do número cardinal de conjuntos enumeráveis:

a) $\aleph_0 > n$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
Se $\aleph_0 \geq k$ para algum número cardinal k, $k = \aleph_0$ ou $k = n$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

b) Se $|A| = \aleph_0$, $|B| = \aleph_0$, então $|A \cup B| = \aleph_0$, $|A \times B| = \aleph_0$, onde $||$ é denotada como a cardinalidade do conjunto A e $|B|$ a cardinalidade de B.

Familiarizados com o conceito de números cardinais, abaixo seguem alguns resultados:

Definição 2.2.12. *a) $k < \aleph_0$, se, e somente, $k \in \mathbb{N}$;*

b) $n + \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

c) $n \times \aleph_0 = \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

d) $\aleph_0^n = \aleph_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.2.13. *A cardinalidade de um conjunto enumerável é $\aleph_0$ e de um conjunto não enumerável é $\aleph$. A cardinalidade dos números reais é $2^{\aleph_0}$.*

Notamos, que a cardinalidade do intervalo unitário é $2^{\aleph_0}$.

A Hipótese do Contínuo

Nos anos 1880, Cantor estabeleceu a não-enumerabilidade da reta, e, mais geralmente, obteve a desigualdade estrita $|X| < |P(X)|$ para qualquer conjunto X e $|P(X)|$ conjunto das partes de X, resultado conhecido como Teorema de Cantor. Em seguida, Cantor passou a analisar as cardinalidades de vários tipos específicos de subconjuntos infinitos da reta, e observou que esses conjuntos ou eram enumeráveis ou tinham a cardinalidade da própria reta. Por exemplo, os subconjuntos fechados e não-enumeráveis da reta real possuem, necessariamente, número cardinal c. Em seus estudos, Cantor não conseguia "produzir", ou "exibir", nenhum subconjunto da reta real que tivesse uma cardinalidade intermediária entre aquela dos naturais e aquela dos reais. Motivado por essas tentativas, Cantor conjecturou a chamada *Hipótese do Contínuo* (usualmente denotada na literatura por **CH**, de Continuum Hypothesis):

"**CH** = Não existe um subconjunto S da reta real cujo número cardinal seja maior do que $\aleph_0$ e menor do que c."

Colocado na linguagem de cardinais, o que **CH** diz é que $c = \aleph_1$, onde $\aleph_1$ é o menor cardinal não-enumerável (i.e., o menor cardinal que é estritamente maior que $\aleph_0$).
Esta hipótese foi o número um dos 23 Problemas de Hilbert apresentados na conferência do Congresso Internacional de Matemática de 1900, o que a levou ser estudada profundamente durante o século XX.

Teorema 2.2.8. $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$.

Demonstração: A demonstração segue da Hipótese do Contínuo. ■

Teorema 2.2.9. *a)* $n + 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, $\forall n \in \mathbb{N}$*;*

b) $n \times 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \times 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, $\forall n \in \mathbb{N}$*;*

c) $(2^{\aleph_0})^n = (2^{\aleph_0})^{(\aleph_0)} = n^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: (a) *Temos a seguinte sequência de inequações*

$$2^{\aleph_0} \leq n + 2^{\aleph_0} \leq \aleph_0 + 2^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0} = 2 \times 2^{\aleph_0} = 2^{1+\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

(b) *Similarmente, temos*

$$2^{\aleph_0} \leq n \times 2^{\aleph_0} \leq \aleph_0 \times 2^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0} \times 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0+\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

(c) *Temos ambos*

$$2^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^n \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{{\aleph_0}^2} = 2^{\aleph_0}$$

e

$$2^{\aleph_0} \leq n^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{{\aleph_0}^2} = 2^{\aleph_0}.$$

■

Uma importante observação a se fazer é que mesmo com as propriedades dos números cardinais e do Teorema anterior, podemos obter consequências inesperadas. Por exemplo $2^{\aleph_0} \times 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ significa que $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = \mathbb{R}$. Assim, o conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de todos os pares de números reais possui uma correspondência um a um com o conjunto de todos os pontos do plano, através do sistema de coordenadas cartesianas. Assim vemos que existe essa correspondência da reta real $\mathbb{R}$ e o plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, assim como do plano com o espaço tridimensional $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2.2.1 Base numérica

Uma base numérica é um conjunto de símbolos com o qual pode se representar uma certa quantidade ou número.
No dia a dia costumamos utilizar a base dez, ou base decimal, que como o próprio nome já diz é composta por 10 algarismos diferentes: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Analogamente, se tomarmos a base três, ela é composta pelos algarismos $\{0, 1, 2\}$. Cabe aqui, fazer a distinção entre número, numeral e algarismo. Por exemplo, o número trinta é representado no sistema de numeração decimal pelo numeral 30, no qual foram utilizados os algarismos 3 e 0.
Mudança da base 10 para a base k.
1) Número inteiro
Para obter o equivalente da base k de um número inteiro da base 10 utiliza-se o procedimento a seguir.

i Divide-se o número por k;

ii Divide-se por k o quociente da divisão anterior;

iii Observe-se que se trata de divisão inteira, ou seja, com resto. O processo é repetido até que seja obtido quociente igual ou menor do que zero.

Por exemplo, tomamos o número 5 da base 10. Para tranformá-lo na base 2, fazemos $5 \div 2 = 2 \times 2 + 1$, pegamos seu quociente e dividimos novamente $2 \div 2 = 1 + 0$. Como seus restos foram 1 e 0, $5_{10} = 01_2$.
O número na base k é composto pelos algarismo $\{0, 1, 2, ..., k - 1\}$ e é formado pela concatenação dos restos das divisões, tomados do último para o primeiro.

2) Número fracionário

Para obter o equivalente na base k de um número fracionário da base 10 o procedimento é o seguinte.

i Multiplica-se o número por k;

ii A parte inteira do resultado obtido é o primeiro dígito do número na base k e, a parte fracionária é, novamente, multiplicada por k;

iii O processo é repetido até que se obtenha a parte fracionária nula.

Por exemplo, peguemos o número $\frac{1}{2}$ da base 10 para a base 4. Multipliquemos $0,5 \times 4 = 2,0$. Portanto $0,5_{10} = 0,2_4$.

3) Mudança da base k para a base 10

Um número de numeral $(N)_k$ na base k, ou seja, utilizando apenas os algarismos ou dígitos $\{0, 1, ..., k-1\}$, pode ser convertido para a base 10, da seguinte forma:

$$(N)_k = (a_{n-1}.k^{n-1} + a_{n-2}.k^{n-2} + ... + a_1.k^1 + a_0.k^0 + a_{-1}.k^{-1} + a_{-2}.k^{-2} + ... + a_{-m}.k^{-m})_{10},$$

onde n é o número de algarismos da parte inteira e m da parte fracionária. Por exemplo, para tranformarmos o número 1010_2 para a base 10, fazemos $1\times 2^3+0\times 2^2+1\times 2^1+0\times 2^0 = 10_{10}$.

Portanto, para encontrar a correspondência entre um número da base k e um número na base decimal, basta computar o somatório dos pesos de cada um dos algarismos em relação à base 10.

2.3 Medida

A teoria da medida foi desenvolvida no final do século XIX e no início do século XX por Emile Borel [1], Henri Lebesgue [2], Johann Radon [3] e Maurice Fréchet [4], entre outros. Alguma das principais aplicações são:

- na fundamentação da integral de Lebesgue, que generaliza (com vantagens) a integral de Riemann;
- na axiomatização da teoria de probabilidade feita por Andrey Kolmogorov;
- na definição de integral em espaços mais gerais do que os euclidianos.

[1] Émile Borel: 1871 Saint Affrique, France 1956 Paris, France.
[2] Henri Lebesgue: 1875 Beauvais, France 1941 Paris, France.
[3] Johann Radon: 1887 Tetschen, Bohemia (now Decin, Czech Republic) 1956 Vienna, Austria.
[4] Maurice Fréchet: 1878 Maligny, France 1973 Paris, France.

2.3.1 σ-Álgebra

A σ-álgebra é estabelecida por uma coleção de conjuntos abertos chamados de Conjuntos de Borel, nomeados em homenagem ao matemático Émile Borel, que foi um matemático e político francês Juntamente com René-Louis Baire e Henri Lebesgue, foi um dos pioneiros da teoria da medida e suas aplicações na teoria da probabilidade. Nasceu em 7 de janeiro de 1871 em Saint-Affrique na França e morreu em 3 de fevereiro de 1956 em Paris. Suas atividades políticas não o impediram de se dedicar nas suas inspirações na teoria da probabilidade, particularmente na teoria dos jogos (1920) ou das filas (1942). Nesta seção definiremos precisamente subclasses de $P(X)$, X é um conjunto qualquer, para que possamos definir uma noção de medida. Tomamos $E \subset \mathbb{R}^n$.

Definição 2.3.1. *Se X é um conjunto não vazio, uma álgebra de conjuntos em X é uma coleção não vazia $A \subset \mathscr{P}(X)$ de subconjuntos de X que é fechada sob uniões finitas e complementares, isto é,*

(i) Se $E_1, E_2, \cdots, E_n \in A$, então $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i \in A$.

(ii) Se $E \in A$, então $E^C = X - A \in A$.

Definição 2.3.2. *Seja X um conjunto não vazio. Uma σ-álgebra em X é uma álgebra que é fechada também sob uniões enumeráveis, ou seja, se $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset A$, então $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i \in A$.*

Teorema 2.3.1. *σ-álgebra, são fechadas também sob interseções enumeráveis, finitas.*

Demonstração: Lembrando a Lei de De Morgan

$$\left(\bigcup_i E_i\right)^C = \bigcap_i E_i^C$$

o complementar da união é a interseção dos complementares, e como $(E_i)^C = E_i$, temos imediatamente que

$$\bigcap_i E_i = \left(\bigcup_i E_i^C\right)^C.$$

■

Teorema 2.3.2. *Qualquer σ-álgebra em X contém $\varnothing$ e X.*

Demonstração: Como uma σ-álgebra A por definição não é vazia, se $E \in A$, então

$$\varnothing = E \cap E^C \in A$$

e

$$X = E \cup E^C \in A.$$

■

Teorema 2.3.3. *Se A é uma álgebra, então A é uma σ-álgebra se ela é fechada sob uniões enumeráveis disjuntas.*

Demonstração: Seja $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset A$. Defina

$$F_1 = E_1,$$

$$F_2 = E_2 \setminus E_1,$$

$$F_3 = E_3 \setminus (E_1 \cup E_2),$$

e em geral

$$F_j = E_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i = E_j \cap \left(\bigcup_{i=1}^{j-1} E_i\right)^C.$$

Segue que $\{F_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset A$ é uma família de conjuntos enumeráveis disjuntos de A tal que

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} F_j.$$

■

Exemplo 2.3.1. *(i) Se X é qualquer conjunto, então $\{\varnothing, X\}$ e $P(X)$ são σ-álgebras.*

(ii) Se X é um conjunto não-enumerável, então $A = \{E \subset X : E$ é enumerável ou E^C é enumerável$\}$ é uma σ-álgebra, chamada de σ-álgebras dos conjuntos enumeráveis ou coenumeráveis.

(iii) A interseção de uma família de σ-álgebra é uma σ-álgebra. Segue que se $\mathscr{E} \subset P(X)$, então existe uma menor σ-álgebra $\mathscr{M}(\mathscr{E})$ que contém $\mathscr{E}$, ou seja, a interseção de todas as σ-álgebras contendo $\mathscr{E}$. Existe pelo menos uma σ-álgebra que contém $\mathscr{E}$, a σ-álgebras $P(X)$. $M(\mathscr{E})$ é chamada a σ-álgebra gerada por $\mathscr{E}$.

Teorema 2.3.4. *Se $\mathscr{E} \subset \mathscr{M}(F)$, então $\mathscr{M}(\mathscr{E}) \subset \mathscr{M}(F)$. Em particular, se $E \subset F$, então $\mathscr{M}(\mathscr{E}) \subset \mathscr{M}(F)$.*

Demonstração: A primeira afirmação segue do fato que $\mathscr{M}(F)$ é uma σ-álgebra contendo $\mathscr{E}$. A segunda afirmação segue da primeira, observando que $F \subset \mathscr{M}(F)$. ■

2.3.2 A σ-álgebra de Borel

Se X é um espaço métrico ou, mais geralmente, um espaço topológico, então a σ-álgebra gerada pela família de conjuntos abertos de X é chamada a σ-álgebra de Borel de X, denotada por $\mathscr{B}_X$; seus elementos são chamados de conjuntos de Borel. Portanto, $\mathscr{B}_X$ inclui conjuntos abertos, conjuntos fechados (os complementares dos conjuntos abertos), interseções enumeráveis de conjuntos abertos (lembrando que uniões enumeráveis de conjuntos abertos já são abertos), uniões enumeráveis de conjuntos fechados (lembrando que interseções enumeráveis de conjuntos fechados já são fechados) e assim por diante.

Definição 2.3.3. *Seja X um conjunto equipado com uma σ-álgebra $\mathscr{M}$. Uma Medida em $\mathscr{M}$ é uma função $\mu : \mathscr{M} \to [0, \infty]$ que satisfaz:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) Se $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset M$ é uma coleção enumerável disjunta, então

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

(X, M) é chamado um espaço mensurável, os conjuntos em M são chamados conjuntos mensuráveis e $(X, \mathscr{M}, \mu)$ é chamado um espaço de medida.
A propriedade (ii) é chamada aditividade enumerável. Ela implica aditividade finita (tomando $E_i = \emptyset$ para $i > n$): se $E_1, E_2, ..., E_n \in \mathscr{M}$ são disjuntos, então

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i).$$

Uma função que satisfaz (i) mas satisfaz apenas a aditividade finita é chamada uma medida finitamente aditiva.

Definição 2.3.4. *Seja $(X, \mathscr{M}, \mu)$ um espaço de medida. Se $\mu(X) < \infty$, então dizemos que μ é uma medida finita.*

Se podemos escrever X como uma união enumerável de conjuntos com medida finita, isto é, $X = \cup_{i=1}^{n} E_i$ com $\mu(E_i) < \infty$ para todo i, então dizemos que μ é uma *medida σ-finita*. Mais geralmente, qualquer conjunto mensurável E que pode ser escrito como uma união enumerável de conjuntos com medida finita é chamado um *conjunto σ-finito*.
Se para todo conjunto mensurável E tal que $\mu(E) = \infty$ existir um conjunto mensurável $F \subset E$ tal que $0 < \mu(F) < \infty$, dizemos que μ é uma *medida semifinita*.

Propriedades

Teorema 2.3.5. *Seja $(X, \mathscr{M}, \mu)$ um espaço de medida. Valem as seguintes propriedades:*

i Medida é definida para cada conjunto E dos números reais.

ii Monotonicidade: Se $E, F \in \mathscr{M}$ e $E \subset F$, então $\mu(E) \leq \mu(F)$.

iii Subatitividade: Se $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{M}$, então $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$.

iv Comutatividade por baixo: Se $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{M}$ e $E_1 \subset E_2 \subset ...$, então

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(E_i).$$

v Continuidade por cima: Se $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{M}$, $E_1 \subset E_2 \subset ...$ e $\mu(E_n) < \infty$ para algum n, então $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$.

Demonstração: *(a) Se $E \subset F$, então $\mu(F) = \mu(F \setminus E) + \mu(E) \geq \mu(E)$.*
(b) Definindo $E_1 = F_1$ e $F_j = E_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i$ segue que os F_j são disjuntos, $\cup_{i=1}^{\infty} E_i = \cup_{j=1}^{\infty} F_i$ e $F_j \subset E_j$. Logo,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(F_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

(c) Tomando $E_0 = \emptyset$, como a sequência é crescente temos $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i \setminus E_{i-1})$ e esta união é disjunta, logo

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \setminus E_{i-1}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i \setminus E_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i \setminus E_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n),$$

onde a última desigualdade decorre do fato $E_n = \cup_{i=1}^{n} (E_i \setminus E_{i-1})$ para uma sequência crescente, e esta união é disjunta pelo mesmo motivo.
(d) Seja $F_j = E_n \setminus E_j$ para todo $j > n$. Então,

$$F_{n+1} \subset F_{n+2} \subset ...,$$

$$\mu(E_n) = \mu(F_j) + \mu(E_n) \text{ para todo } j>n \text{ e}$$

$$\bigcup_{j=n+1}^{\infty} F_j = E_n \setminus \bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j.$$

Como a sequência $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é decrescente segue em particular que

$$\mu\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} F_j\right) = \mu(E_n) - \mu\left(\bigcap_{j=n+1}^{\infty} E_j\right) = \mu(E_n) - \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right).$$

Pelo item anterior segue que,

$$\mu(E_n) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) + \mu\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} F_j\right) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) + \lim_{j\to\infty} \mu(F_j)$$

$$\mu(E_n) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) + \lim_{j\to\infty} \mu(E_n \setminus E_j) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) + \lim_{j\to\infty} [\mu(E_n) - \mu(E_j)]$$

$$\mu(E_n) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) + \mu(E_n) - \lim_{j\to\infty} \mu(E_j).$$

Subtraindo $\mu(E_n) < \infty$ de ambos os lados da igualdade obtemos o resultado. ■

Definição 2.3.5. *A σ-álgebra gerada pela família de abertos de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^n$) é conhecida como σ-álgebra de Borel. Seus elementos são os conjuntos de Borel ou borelianos.*

Esta definição é generalizada para espaços topológicos (conjunto munido de uma topologia, um subconjunto das partes satisfazendo propriedades similares da definição de σ-álgebra).

Definição 2.3.6. *Seja X um espaço topológico. A σ-álgebra gerada pela família de conjuntos abertos de X é conhecida como σ-álgebra de Borel. Seus elementos são os conjuntos de Borel ou borelianos de X.*

2.3.3 Medidas Completas

Definição 2.3.7. *Seja $(X, \mathscr{M}, \mu)$ um espaço de medida. Se $\mu(E) = 0$, então dizemos que E é um conjunto de medida nula.*

Uma afirmação que é válida para todos os pontos $x \in X$ com exceção de pontos pertencentes a um conjunto de medida nula é chamada uma afirmação verdadeira para quase todo ponto, abreviada como **q.t.p**. Se $\mu(E) = 0$ e $F \subset E$, então a subaditividade garante que $\mu(F) = 0$ desde que F seja mensurável. Mas, em geral, subconjuntos de conjuntos de medida nula não precisam ser mensuráveis (considere a medida nula na σ-álgebra $\{X, \mathscr{E}\}$.

Definição 2.3.8. *Uma medida que contém todos os subconjuntos de conjuntos de medida nula é chamada uma medida completa.*

Teorema 2.3.6. *Seja $(X, \mathscr{M}, \mu)$ um espaço de medida. Seja $\mathscr{N} = \{N \in \mathscr{M} : \mu(N) = 0\}$ a coleção dos conjuntos de medida nula de X e defina $\overline{\mathscr{M}} = \{E \cup F : E \in \mathscr{M}$ e $F \subset$*

N para algum $N \in \mathscr{N}\}$. Então $\overline{\mathscr{M}}$ é uma σ-álgebra e existe uma única extensão $\overline{\mu}$ de μ para uma medida completa em $\overline{\mathscr{M}}$.

Demonstração: *$\overline{\mathscr{M}}$ é uma σ-álgebra. Como $\mathscr{M}$ e $\mathscr{N}$ são fechados sob uniões enumeráveis, $\overline{\mathscr{M}}$ também é, pois*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i \cup F_i) = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right).$$

Para provar que $\overline{\mathscr{M}}$ é fechada sob a operação de tomar complementares de conjuntos, observamos primeiro que se $E \cup F \subset \overline{\mathscr{M}}$ com $E \in \mathscr{M}$ e $F \subset N$ para algum $N \in \mathscr{N}$, então podemos assumir que $E \cap N = \varnothing$ (caso contrário, substituiríamos F, N por $F \setminus E$, $N \setminus E$, respectivamente). Portanto, podemos escrever

$$E \cup F = (E \cup N) \cap (F \cup N^C)$$

donde pela Lei de De Morgan

$$(E \cup F)^C = (E \cup N)^C \cup (F \cup N^C)^C = (E \cup N)^C \cup (N \setminus F).$$

Como $\mathscr{M}$ é uma álgebra, segue que $(E \cup N)^C \in \mathscr{M}$ e $N \subset F \in \mathscr{M}$, logo $(E \cup F)^C \in \overline{\mathscr{M}}$. Existência da extensão $\overline{\mu}$. Defina $\overline{\mu} : \overline{\mathscr{M}} \to [0, \infty]$ por

$$\overline{\mu}(E \cup F) = \mu(E)$$

se $E \in \mathscr{M}$ e $F \subset N$ para algum $N \in \mathscr{N}$. Então $\overline{\mu}$ está bem definida, pois se $E_1 \cup F_1 = E_2 \cup F_2$ com $E_1, E_2 \in \mathscr{M}$ e $F_1 \subset N_1$, $F_2 \in N_2$ para N_1, $N_2 \in \mathscr{N}$, segue que

$$E_1 \subset E_2 \cup F_2 \subset E_2 \cup N_2 \Rightarrow \mu(E_1) \le \mu(E_2) + \mu(N_2) = \mu(E_2)$$

e analogamente $\mu(E_2) \le \mu(E_1)$, donde $\mu(E_1) = \mu(E_2)$. Temos também

$$\overline{\mu}(\varepsilon) = \overline{\mu}(\varnothing \cup \varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$$

pois $\varnothing \in \mathscr{M}, \mathscr{N}$. Além disso, se $\{E_i \cup F_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é uma família disjunta, com $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{M}$ e $F_i \subset \mathscr{N}_i$ com $N_i \in \mathscr{N}$ para todo i, segue que

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i \cup F_i)\right) = \overline{\mu}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}(E_i \cup F_i),$$

já que todas as uniões acima disjuntas. Isso prova que μ é uma medida. Para verificar que $\overline{\mu}$ é completa, seja $E \cup F \in \overline{\mathscr{M}}$ com $E \in \mathscr{M}$ e $F \subset N$ para algum $N \in \mathscr{N}$ tal que $\overline{\mu}(E \cup F) = 0$. Isso significa que $\mu(E) = 0$ e portanto $E \in \mathscr{N}$. Se $V \subset E \cup F$, então

$V = \varnothing \cup V$ com $\varnothing \in \mathscr{M}$ e $V \subset E \cup N \in \mathscr{N}$, logo $V \in \mathscr{M}$.
Unicidade da extensão $\overline{\mu}$. Sejam $\overline{\mu_1}, \overline{\mu_2} : \overline{\mathscr{M}} \to [0, \infty]$ duas medidas completas em $\overline{\mathscr{M}}$ tais que $\overline{\mu_1}|_{\mathscr{M}} = \overline{\mu_2}|_{\mathscr{M}} = \mu$. Observando que se $E \cup F \in \overline{\mathscr{M}}$ com $E \in \mathscr{M}$ e $F \subset N$ para algum $N \in \mathscr{N}$, então $E, F \in \overline{\mathscr{M}}$ pois $E = E \cup \varnothing$, $F = \varnothing \cup F$ e $\varnothing \in \mathscr{M}, \mathscr{N}$, segue que

$$\overline{\mu_1}(E \cup F) = \overline{\mu_1}(E) + \overline{\mu_1}(F \setminus E) = \mu(E),$$

onde usamos o fato que

$$0 \leq \overline{\mu_1}(F \setminus E) \leq \overline{\mu_1}(N) = 0$$

para concluir que $\overline{\mu_1}(F \setminus E) = 0$. Analogamente concluímos que $\overline{\mu_2}(E \cup F) = \mu(E)$, portanto $\overline{\mu_1}(E \cup F) = \overline{\mu_2}(E \cup F)$.
*$\overline{\mu}$ é chamada o **completamento** de μ e $\overline{\mathscr{M}}$ o completamento de $\mathscr{M}$ com relação a μ.* ■

2.3.4 Medidas Exteriores

Definição 2.3.9. *Seja X um conjunto não vazio. Uma medida exterior é uma função $\mu : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ que satisfaz:*

i) $\mu * (\emptyset) = 0$;

ii) *se $A \subset B$, então $\mu * (A) \leq \mu * (B)$;*

iii) *se $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{P}(X)$, então*

$$\mu * \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu * (A_i).$$

O nome se refere ao fato de que uma medida exterior é geralmente construída a partir de uma "proto-medida" em uma família $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(X)$ e então definindo a medida exterior de subconjuntos arbitrários de X a partir da aproximação destes "por fora" por uniões enumeráveis de elementos de $\mathscr{E}$:

Teorema 2.3.7. *Sejam $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(X)$, contendo $\varnothing$ e X, e $\rho : \mathscr{E} \to [0, \infty]$ satisfazendo $\rho(\varnothing) = 0$. Para qualquer $A \subset X$ defina*

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \rho(E_i) : E_i \in \mathscr{E} \text{ para todo } i \text{ e } A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right\}.$$

Então μ^* é uma medida exterior.

Demonstração: *Como $A \subset X \in \mathscr{E}$, μ^* está bem definida. Como $\mu^*(\varnothing) = 0$ e pela definição de ínfimo temos $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ sempre que $A \subset B$. Para provar (iii) da*

Definição 2.3.9, seja $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{P}(X)$ *e denote* $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. *Por definição de* μ^*, *dado* $\varepsilon > 0$, *para cada* j *existe uma família* $\{E_i^j\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{E}$ *tal que*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \rho(E_i^j) \leq \mu^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Como $A \subset \bigcup_{i,j=1}^{\infty} E_i^j$ *e*

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} \rho(E_i^j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) + \varepsilon$$

segue que $\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \varepsilon$. *Como* ε *é arbitrário, segue o resultado.* ■

Definição 2.3.10. *Se* μ^* *é uma medida exterior em* X, *dizemos que um subconjunto* $A \subset X$ *é* μ^**-mensurável se*

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^C)$$

para todo $E \subset A$.

Observe que para provar que um conjunto A é μ^*-mensurável, basta provar que $\mu^*(E) > \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^C)$ para todo $E \subset X$, já que a recíproca é verdadeira, e portanto basta considerar conjuntos E tais que $\mu^*(E) < \infty$.

Teorema 2.3.8. *(Teorema de Carathéodory): Se* μ^* *é uma medida exterior em* X, *então a coleção* $\mathscr{M}$ *dos conjuntos* μ^**-mensuráveis é uma* σ*-álgebra e a restrição de* μ^* *a* $\mathscr{M}$ *é uma medida completa.*

Demonstração: $\mathscr{M}$ *é uma* σ*-álgebra.* $\mathscr{M}$ *não é vazio pois* $\varnothing$ *é* μ^**-mensurável.* $\mathscr{M}$ *é fechado sob a operação de tomar complementares de conjuntos porque a definição de conjuntos* μ^**-mensurável é simétrica em relação a substituir* A *por* A^C. *Para ver que* $\mathscr{M}$ *é uma álgebra, dados* $A, B \in \mathscr{M}$ *e* $E \subset X$, *temos*

$$\begin{gathered}\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap Ac)\\ = \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A^C \cap B)\\ +\mu^*(E \cap A \cap B^C) + \mu^*(E \cap A^C \cap Bc)\\ \geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^C),\end{gathered}$$

o que implica que $A \cup B$ *é* μ^**-mensurável. A última desigualdade no desenvolvimento* *acima segue do fato que* $E \cap (A \cup B) = (E \cap A) \cup (E \cap B)$ *e*

$$E \cap A = (E \cap A \cap B) \cup (E \cap A \cap B^C),$$

$$E \cap B = (E \cap A^C \cap B) \cup (E \cap A \cap B^C),$$

de modo que

$$E \cap (A \cup B) \subset (E \cap A \cap B) \cup (E \cap A \cap B^C) \cup (E \cap A^C \cap B),$$

logo

$$\mu^*(E \cap (A \cup B)) \leq \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A^C \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^C),$$

e do fato que $E \cap (A \cup B)^C = E \cap A^C \cap B^C$. *Para provar que* $\mathscr{M}$ *é uma* σ*-álgebra, lembramos que, como já sabemos que* $\mathscr{M}$ *é uma álgebra, basta considerar uniões enumeráveis disjuntas (Proposição 2.3.3).*

Seja $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{M}$ *uma sequência enumerável disjunta e denote* $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ *e* $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$*; note que como* $\mathscr{M}$ *é uma álgebra, temos que cada* $B_n \in \mathscr{M}$. *Para todo* $E \subset X$ *temos*

$$\mu^*(E \cap B_n) = \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^C) = \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1}),$$

donde, por indução,

$$\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i).$$

Daí,

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^C) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap B^C).$$

Fazendo $n \to \infty$, *segue que*

$$\mu^*(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap B^C) > \mu^* \geq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(E \cap A_i)\right) + \mu^*(E \cap B^C)$$

$$= \mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) + \mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^C\right),$$

logo $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{M}$. $\mu^*|\mathscr{M}$ *é uma medida completa.*

Seja $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset M$ *uma sequência enumerável disjunta como no argumento anterior. Na última sequência de desigualdades, como*

$$\mu^*(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap B^C) \geq \mu^* \left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \right) + \mu^* \left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)^C \right) \geq \mu^*(E)$$

segue que todas as desigualdades são igualdades. Em particular,

$$\mu^*(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap B^C)$$

Tomando $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$*, segue que*

$$\mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i),$$

portanto μ^* *é uma medida. Para verificar que é completa, seja* $\mu^*(A) = 0$*. Para qualquer* $E \subset X$ *temos*

$$\mu^*(E) \leq (E \cap A) + \mu^*(E \cap A^C) = \mu^*(E \cap A^C) \leq \mu^*(E)$$

de modo que $A \in \mathscr{M}$*.* ■

2.3.5 Pré-Medida

Usando o teorema de Carathéodory poderemos estender medidas definidas em álgebras a medidas definidas em σ-álgebras.

Definição 2.3.11. *Seja* X *um conjunto equipado com uma álgebra* A*. Uma pré-medida em* $\mathscr{A}$ *é uma função* $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ *que satisfaz*

1. $\mu(\varnothing) = 0$;

2. *se* $\{E_i\}i \in \mathbb{N} \subset \mathscr{A}$ *é uma coleção enumerável disjunta tal que* $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathscr{A}$*, então*

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Pela Proposição 2.3.7, uma pré-medida induz uma medida exterior em X.

Teorema 2.3.9. *Sejam* $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ *uma álgebra,* μ *uma pré-medida em* $\mathscr{A}$*,* μ^* *a medida exterior induzida por* μ *e* $\mathscr{M}$ *a* σ*-álgebra gerada por* $\mathscr{A}$*.*
Então $\overline{\mu} = \mu|\mathscr{M}$ *define uma medida em* $\mathscr{M}$ *cuja restrição a* $\mathscr{A}$ *é* μ*. Se* v *é uma outra tal medida em* $\mathscr{M}$*, então* $v(E) \leq \overline{\mu}(E)$ *para todo* $E \in \mathscr{M}$*, a igualdade valendo se* $\overline{\mu}(E) < \infty$*.*

Se μ σ-finita, então $\overline{\mu}$ é a única extensão de μ a uma medida em $\mathscr{M}$.

Demonstração: *A primeira afirmação segue do Teorema de Carathéodory e da proposição anterior, já que a σ-álgebra dos conjuntos μ^*-mensuráveis inclui $\mathscr{A}$. Se $E \in \mathscr{M}$ e $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ com $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$, então*

$$v(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} v(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i),$$

logo $v(E) \leq \overline{\mu}(E)$. Além disso, denotando $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, temos que

$$v(A) = \lim_{n\to\infty} v\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \overline{\mu}(A)$$

de modo que, se $\overline{\mu}(E) < \infty$, podemos escolher os A_i de tal maneira que $\overline{\mu}(A) < \overline{\mu}(E) + \varepsilon$, logo $\overline{\mu}(A \setminus E) < \varepsilon$ e portanto

$$\overline{\mu}(E) \leq \overline{\mu}(A) = v(A) = v(E) + v(A \setminus E) \leq v(E) + \overline{\mu}(A \setminus E) \leq v(E) + \varepsilon;$$

como ε é arbitrário, concluímos que $\overline{\mu}(E) = v(E)$. Finalmente, se $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ com $\mu(A_i) < \infty$ para todo i, e como podemos assumir os A_i disjuntos, segue que para qualquer $E \in \mathscr{M}$ temos

$$\overline{\mu}(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}(E \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} v(E \cap A_i) = v(E),$$

de modo que $\overline{\mu} = v$. ■

2.3.6 Medida de Lebesgue

Definição 2.3.12. *A medida de Lebesgue-Stieltjes μ_F associada à função identidade $F(x) = x$ será denotada por m. Ela é chamada a medida de Lebesgue. O domínio de m é chamado a classe dos conjuntos Lebesgue-mensuráveis e será denotada por $\mathscr{L}$.*

Teorema 2.3.10. *Se $E \subset \mathbb{R}$ e t, $r \in \mathbb{R}$, considere a translação e a dilatação de E:*

$$E + t = \{x + t : s \in E\},$$

$$rE = \{rx : x \in E\}.$$

Se $E \in \mathscr{L}$, então $E + t \in \mathscr{L}$ e $rE \in \mathscr{L}$ para todos t, $r \in \mathbb{R}$. Além disso,

$$m(E + t) = m(E),$$

$$m(rE) = |r|m(E).$$

Demonstração: *Como a coleção de intervalos abertos é invariante sob translações e dilatações, o mesmo vale para* $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. *Em* $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, *defina as medidas* $mt(E) = m(E+t)$ *e* $mr(E) = m(rE)$. *Como* mt *e* mr *coincidem respectivamente com* m *e* $|r|m$ *em intervalos finitos, pelo teorema 2.3.9 elas coincidem em* $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. *Em particular, se* $E \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ *é tal que* $m(E) = 0$ *segue que* $m(E+t) = m(rE) = 0$, *logo segue o resultado para* $\mathscr{L}$. ■

2.4 Categoria

Categoria é uma parte do estudo do campo da *Topologia*. Em topologia, podemos generalizar o conceito de conjuntos abertos. A primeira idealização de *Espaço Topológico* foi de Félix Hausdorff's em 1944. A definição atual segue abaixo.

Definição 2.4.1. *Um Espaço Topológico é um conjunto* S *junto com uma coleção* T *de subconjuntos de* S *que satisfazem as seguintes propriedades*

i $\emptyset,\ S \in T$,

ii se U_α, $\alpha \in A$, *um conjunto de índices, está em* T, *então*

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in T,$$

iii se $U,\ V \in T$, *então* $U \cap V \in T$.

Os conjuntos em T são chamados de conjuntos abertos em S e T é chamado de topologia em S. Quando nos referimos a um espaço como um espaço topológico, é um par (S,T). Então, podemos definir o que significa um conjunto ser aberto. Por exemplo, seja S um conjunto e $T = \{\emptyset, S\}$. Esse é chamado de topologia (também o indiscreto) trivial em S. Nos espaços topológicos, a definição de sequências convergentes deve ser generalizada, então, definimos a seguir.

Definição 2.4.2. *Seja* (S,T) *um espaço topológico e* $\{x_n\}$ *um sequência de elementos de* S. *Dizemos que* $\{x_n\}$ *converge para* $x_0 \in S$ *se para todo conjunto* $U \in T$ *tal que* $x_0 \in U$ *onde um* $N \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > N$, *então*

$$x_n \in U.$$

Nós dizemos que uma função é eventualmente constante se, para algum $c \in S$, $x_n = c$ *para* $n > N$.

Seja $f : S \to V$ e $U \subset V$. A *imagem inversa* de um conjunto U é o conjunto, que para todo $x \in S$, seu correspondente está em U. A notação para isso é

$$f^{-1}(U) = \{x \in S; f(x) \in U\}.$$

Assim, como na convergência de sequências, o espaço topológico nos dá uma definição mais geral de funções contínuas, a saber.

Definição 2.4.3. *Sejam (S, T_1) e (V, T_2) espaços topológicos, $f : S \to V$ e $x_0 \in S$. Dizemos que f é contínua em x_0 para todo conjunto aberto $U \in T_2$ com $f(x_0) \in U$ a imagem inversa de U*

$$f^{-1}(U) = \{x \in S; f(x) \in U\},$$

é aberto em T_1. Além disso, dizemos que f é uma função contínua se ela é continua em cada ponto do domínio.

Definição 2.4.4. *Seja (S, T) um espaço topológico e A seja um subconjunto de S. Dizemos que A é denso em S se para todo $U \in T$ existe um $a \in A$ tal que $a \in U$, ou seja, todo conjunto aberto contém pelo menos um ponto em A.*

Agora, devemos definir um tipo escasso de conjunto. Estamos tentando manuseios de forma que nenhuma parte do conjunto seja considerado denso.

Definição 2.4.5. *Seja (S, T) um espaço topológico e B um subconjunto de S. Então B não é denso em nenhum lugar de S se para todo $U \subset S$ existe um conjunto $V \in T$ aberto tal que*

$$V \subset U \text{ e } V \cap B = \emptyset.$$

Um conjunto pode não ser denso e não ser denso em lugar nenhum.

Definição 2.4.6. *Um conjunto é chamado Primeira Categoria se ele pode ser escrito como uma união enumerável de conjuntos densos em nenhuma parte. Então existe uma coleção A_i onde cada A_i não é denso em nenhuma parte e*

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Se o conjunto não for de primeira categoria, ele é chamado de Segunda Categoria.

As noções de denso e denso em nenhum lugar não são opostas no sentido mais estrito. Às vezes definimos que não são densos em lugar nenhum pode ser particionado em pedaços que são densos em lugar nenhum . O exemplo canônico de um conjunto de primeira categoria que é denso na reta é os números racionais. Cada único número racional r é um lugar denso definido e desde que os racionais é um conjunto enumerável, $\mathbb{Q}$ é de primeira categoria. No entanto, todos intervalos não vazios e abertos na reta contém pontos racionais.

Falando um pouco mais sobre categoria, dizemos que um conjunto S é residual em $\mathbb{R}$ se seu complementar $\mathbb{R} \setminus S$ é de primeira categoria. Então o set $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ é um conjunto residual, desde que o conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ pode ser escrito como uma união enumerável de conjuntos densos em nenhuma parte . Então chegamos ao seguinte teorema:

Teorema 2.4.1. *(Teorema da Categoria de Baire): Todo subconjunto residual de* $\mathbb{R}$ *com topologia Euclidiana é denso em* $\mathbb{R}$.

Existem outras maneiras de afirmar isso. Por exemplo, se tivermos uma coleção enumerável de conjuntos densos e abertos A_k é verdade que $\cap A_k$ é denso em $\mathbb{R}$. Analogamente, o complemento de $\cup A_k$ deve ser um conjunto denso em lugar nenhum.

Outra maneira de olhar esse resultado é através do chamado "Jogo de Banach-Mazur". O jogo envolve dois jogadores, o jogador I e o jogador II. Ao jogador I é dado um conjunto A de $\mathbb{R}$ e ao jogador II, seu complementar $\mathbb{R} \setminus A$. Em movimentos alternados, os jogadores escolhem intervalos fechados e aninhados. Isto significa que o jogador I escolhe um intervalo fechado I_1, então o jogador II escolhe um intervalo fechado $I_2 \subset I_1$. Depois disso, o jogador I escolhe $I_3 \subset I_2$ e assim por diante. Então olhamos para o ponto

$$x \in \cup I_k.$$

Se $x \in A$, então o jogador I ganha, caso contrário o jogador II é o vencedor. A questão é, "Em que circunstâncias o jogador me garante uma estratégia vencedora?"

O que o jogador I precisa é que o conjunto seja grande em algum aspecto. Para garantir uma vitória para o jogador I, o conjunto A deve ser de segunda categoria. Assim, algumas provas de que um conjunto é de segunda categoria são provas de que o Jogador I pode ganhar o Jogo de Banach-Mazur. A origem deste resultado vale a pena ser vista como um fascinante vislumbre da cultura da matemática. A ideia do jogo foi colocada pela primeira vez no *Scottish Book*[5].

De 1935 a 1941, um grupo de matemáticos da Universidade de Lwow (Polônia na época, agora parte da Ucrânia) se reunia no The Scottish Cafe House, restaurante e café. Além de Banach e Mazur, esse grupo incluía Ulam, Steinhaus, Borsuk e outros. Eles discutiriam seus vários trabalhos e, se surgisse um problema interessante, sinalizaria o garçom para trazer um caderno guardado atrás do bar. Problemas iriam ser escrito no caderno. Alguns dos problemas tinham prêmios ligados a eles. O problema 43 continha o início do jogo e proposto por Mazur. Foi resolvido por Banach, com o prêmio sendo uma garrafa de

[5] Vallin, 2013

vinho, mas ele nunca publicou sua prova. O livro sobreviveu à Segunda Guerra Mundial e foi publicado por Ulam em 1957.[6]

[6] Vallin, 2013

Capítulo 3

O Conjunto de Cantor

3.1 A vida de Cantor

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 - 1918) nasceu em S. Petersburgo, Rússia, o mais velho de seis filhos de um comerciante dinamarquês, George Waldemar Cantor e de uma música russa, Maria Anna Böhmque, tendo ficado conhecido por ter criado a moderna teoria dos conjuntos. Foi a partir desta teoria que chegou ao conceito de número transfinito, incluindo as classes numéricas dos cardinais e ordinais, estabelecendo a diferença entre estes dois conceitos que colocam novos problemas quando se referem a conjuntos infinitos. Cantor também ficou conhecido pelo seu trabalho sobre as representações originais de funções por meio de séries trigonométricas (uma versão generalizada de uma série de Fourier).[1]

Após a sua educação infantil em casa de um professor particular, Cantor frequentou a escola primária em S. Petersburgo. Em 1856 mudaram-se para a Alemanha. Em 1863 ingressou na Universidade de Berlim, teve como mestre o grande Karl Weierstrass, famoso por ter dado sólidas fundações à análise infinitesimal, tendo feito o seu doutorado, em 1867, com uma tese sobre Teoria dos Números. Em 1869 Cantor foi chamado para lecionar na Universidade de Halle, tornando-se mais tarde professor associado e em 1879 catedrático.

O seu interesse pelos conjuntos e pelos números transfinitos começou em 1870 e pouco depois demonstrou que o conjunto dos números racionais é enumerável. Prosseguindo, ano após ano, na investigação dos conjuntos infinitos e nos problemas de continuidade, Cantor foi obtendo resultados cada vez mais surpreendentes, nem sempre bem recebidos pela totalidade dos matemáticos. Por exemplo, todos ficaram intrigados quando Cantor demonstrou que os números transcendentais, isto é, aqueles que não são soluções de equações algébricas, não formam apenas um conjunto infinito, mas sim um conjunto não enumerável.

Em 1874, Cantor publicou no Journal de Crelle o mais revolucionário artigo que até

[1] Vallin, 2013

mesmo seus editores hesitaram em aceitar: havia reconhecido a propriedade fundamental dos conjuntos infinitos e ao contrário de Dedekind, percebeu que nem todos eram iguais, passando a construir uma hierarquia destes conjuntos conforme suas potências.
A sua obra foi ridicularizada por muitos de seus contemporâneos. Entre os críticos estava Kronecker, seu antigo instrutor. Entre os entusiastas de seu trabalho, contava com o apoio de Julius Richard Dedekind, com quem manteve contato ou correspondência durante toda a vida. Quando, perto do fim da vida, Cantor começou a sofrer das faculdades mentais, houve quem responsabilizasse Kronecker por esses problemas.
Algumas de suas ideias mais conhecidas é o Conjunto de Cantor, a noção de diferentes tipos de infinitos e a Hipótese do Contínuo. Trabalhar no infinito atraiu a ira de alguns matemáticos, filósofos e estudiosos religiosos. Os filósofos sentiam que haviam muitas contradições ao lidar com o infinito. Por exemplo, se a e b forem dois números positivos, então $a < a + b$ e $b < a + b$. No entanto, $\infty < a + \infty$ não é verdade. Poincaré disse que no futuro as pessoas iriam considerar o trabalho de Cantor como "uma doença a partir do qual se recuperou". Os teólogos cristãos também se opunham ao infinito atual, a maior parte deles consideravam a ideia como um desafio direto para o único e absoluto infinito da natureza de Deus.
No entanto, Cantor não estava sem seus partidários. No Segundo Congresso Internacional realizado na Paris World Exposition em 1900, David Hilbert apresentou uma lista dos principais problemas não resolvidos da época, na esperança de estimular o interesse no que ele acreditava ser os problemas mais importantes do dia. O item no topo da lista foi Hipótese do Contínuo de Cantor. Hilbert é citado como dizendo: "No one shall expel us from the paradise that Cantor has created for us.", ou seja, "Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós ". A influência de Hilbert foi profunda, como pode ser visto na vasta lista de artigos escritos apenas nos últimos anos que mencionam Cantor.
Depois de alcançar justa fama, sempre procurou ajudar e incentivar jovens matemáticos talentosos. Georg Cantor morreu com um ataque cardíaco em 6 de Janeiro de 1918, em um hospital psiquiátrico em Hale.

3.2 O Conjunto de Cantor

O conjunto de Cantor é um exemplo de um subconjunto da reta que serve como fonte de exemplos interessantes em análise e topologia.
O conjunto de Cantor que denotaremos como K, pode ser definido de várias formas. Tomemos o intervalo $I_0 = [0, 1]$, retiramos desse intervalo seu terço central $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e obtemos,

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, 1\right],$$

a união disjunta de dois intervalos fechados, com comprimento de cada intervalo igual a

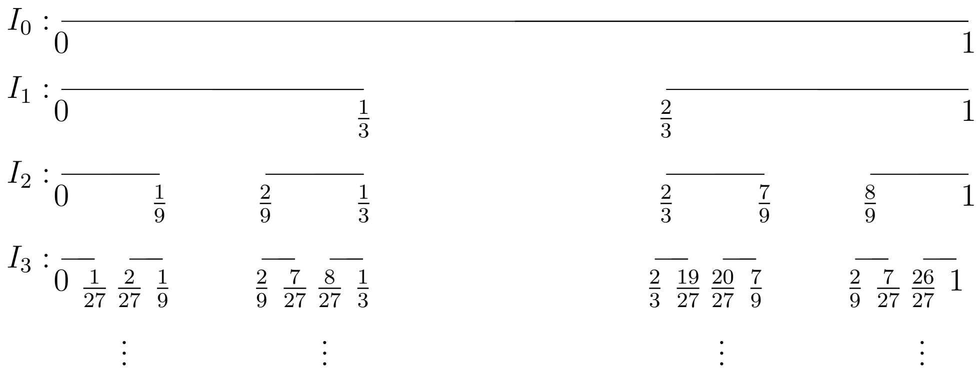
$\frac{1}{3}$. Repetindo o processo, retiramos os terços centrais desses dois intervalos, obtemos,

$$I_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right],$$

ou seja, I_2 é o conjunto formado por quatro intervalos congruentes com comprimento de cada intervalo igual a $\frac{1}{9}$. Continuamos o processo, sempre retirando os terços centrais dos intervalos restantes. Continuando o processo para os quatro intervalos obtidos no passo anterior, obtemos oito intervalos com comprimento de cada intervalo igual a $\frac{1}{27}$. Repetindo indefinidamente o processo, para cada $n \in \mathbb{N}$, iremos obter um conjunto $I_n \subset [0,1]$ tal que I_n é constituído pela união disjunta de 2^n intervalos fechados com comprimento de cada um desses intervalos igual a $\frac{1}{3^n}$.
Desta forma, o conjunto de Cantor K, é definido por

$$K = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n.$$

O Conjunto de Cantor, é portanto, o conjunto dos pontos que restam dadas repetidas retiradas.
Uma ilustração da construção do conjunto K é dada a seguir.



Em cada passo neste processo, temos um intervalo I e a partir desse intervalo removemos o terço médio de I e obtemos um subintervalo J de modo que $\ell(J)/\ell(I) = 1/3$, onde $\ell(.)$ se refere ao comprimento de um intervalo. Podemos criar um novo Conjunto de Cantor insistindo que o intervalo do meio removido tenha relação $\ell(J)/\ell(I) = r$, onde $0 < r < 1$. Nós denotaremos este Conjunto de Cantor por C_r.

Teorema 3.2.1. *O comprimento total dos subintervalos removidos na derivação em $C_{\frac{1}{3}}$ é um.*

Demonstração: Para cada $n \in \mathbb{N}$, são retirados 2^{n-1} subintervalos abertos de comprimento $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. O comprimento total dos intervalos removidos é dado pela série geométrica,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n-1}\left(\frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

Como $|q| = \frac{2}{3} < 1$, segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\left(\frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{1-\dfrac{2}{3}}\right) = \frac{1}{3}\cdot 3 = 1.$$

■

Proposição 3.2.1. *A representação de uma fração irredutível na base 3 é finita se, e somente se, o denominador é uma potência de 3.*

Demonstração: *Sejam $p,\ q \in \mathbb{Z}$ com $q \neq 0$ tais que a fração $\frac{p}{q}$ esteja na forma irredutível. Suponhamos que $\frac{p}{q}$ possui representação ternária finita, consequentemente ela pode ser escrita,*

$$\frac{a_n}{3^n} + \frac{a_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{a_{n-2}}{3^{n-2}} + ... + \frac{a_1}{3^1} + \frac{a_0}{3^0}, \tag{3.1}$$

onde a_i são os algarismos 0, 1 e 2.
De 3.1 temos:

$$\frac{1}{3^n}\left(a_n + a_{n-1}\times 3^1 + a_{n-2}\times 3^2 + ... + a_1\times 3^{n-1} + a_0\times 3^n\right).$$

Como a fração acima está em sua forma irredutível, o fator entre parênteses é a representação de p na base 3. Portanto, o denominador q é uma potência de 3.
Por outro lado, suponhamos que $q = 3^n$, $n \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{Z}$. A representação de p na base 3 é da seguinte forma:

$$p = a_m \times 3^m + a_{m-1}\times 3^{m-1} + ... + a_1 \times 3^1 + a_0,$$

com $m < n$ pois $\frac{p}{q} < 1$. Então:

$$\frac{p}{q} = \frac{a_m \times 3^m + a_{m-1}\times 3^{m-1} + ... + a_1\times 3^1 + a_0}{3^n}$$

$$= a_m \times 3^{m-n} + a_{m-1}\times 3^{m-n-1} + ... + a_1 \times 3^{1-n} + a_0 \times 3^{-n}.$$

Como $m < n$, temos $m - n < 0$. Logo, $\frac{p}{q}$ possui representação ternária finita se q for uma potência de 3.

■

Teorema 3.2.2. *O Conjunto de Cantor pode ser escrito em base 3 utilizando apenas os algarismos 0 e 2, ou seja,* $K = \left\{ \sum_{n-1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}, x_n \in \{0,2\},\ \forall n \in \mathbb{N} \right\}$.

Demonstração: *No primeiro passo da construção do conjunto de Cantor, retirarmos o intervalo aberto* $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. *Observe que* $\frac{1}{3} = (0,1)_3$ *e que* $\frac{2}{3} = (0,2)_3$. *Portanto, todo número da forma* $x = (0,1x_2x_3...)_3$, *que está entre* $(0,1)_3$ *e* $(0,2)_3$ *foram excluídos na primeira etapa do processo, exceto* $\frac{1}{3} = (0,1)_3$.

Já na segunda etapa da construção do conjunto, retirarmos os intervalos $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ *e* $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. *Para o primeiro intervalo, observe que* $\frac{1}{9} = (0,01)_3$ *e que* $\frac{2}{9} = (0,02)_3$. *Portanto, todo número da forma* $x = (0,01x_3x_4...)_3$, *que está entre* $(0,01)_3$ *e* $(0,02)_3$ *foram excluídos na segunda etapa do processo, exceto* $\frac{1}{9} = (0,01)_3$. *Para o segundo intervalo, como* $\left(\frac{7}{9}\right) = (0,21)_3$ *e* $\left(\frac{8}{9}\right) = (0,22)_3$, *segue que todo número da forma* $x = (0,21x_3x_4...)_3$, *foram excluídos, execto,* $\frac{1}{9} = (0,01)_3$ *e* $\left(\frac{7}{9}\right) = (0,21)_3$.

Para o terceiro passo da construção do conjunto, retirarmos os intervalos $\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right)$, $\left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right)$, $\left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right)$ *e* $\left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)$. *Observe que* $\frac{1}{27} = (0,001)_3$, $\frac{7}{27} = (0,021)_3$, $\frac{19}{27} = (0,201)_3$ *e que* $\frac{25}{27} = (0.221)_3$. *Portanto, todo número das formas* $x = (0,001x_4x_5...)_3$, $x = (0,021x_4x_5...)_3$, $x = (0,201x_4x_5...)_3$ *e* $x = (0,221x_4x_5...)_3$, *que estão entre* $(0,001)_3$ *e* $(0,002)_3$, *ou* $(0,021)_3$ *e* $(0,022)_3$, *ou* $(0,201)_3$ *e* $(0,202)_3$, *ou* $(0,221)_3$ *e* $(0,222)_3$ *foram excluídos na terceira etapa do processo, exceto* $\frac{1}{27} = (0,001)_3$, $\frac{7}{27} = (0,021)_3$, $\frac{19}{27} = (0,201)_3$ *e* $\frac{25}{27} = (0,221)_3$. *Podemos observar que*

$$1 = \frac{3}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{3}{9} = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{1}{27} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{3}{81} = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81} + \frac{1}{81} = \cdots,$$

ou seja, 1 pode ser escrito na base 3 da forma de dízima periódica contendo apenas algarismos 0 e 2, ou seja,

$$1 = (0,222\cdots)_3.$$

Consequentemente, $0,1 = (0,0222\cdots)_3$, $0,01 = (0,00222\cdots)_3$, *e assim por diante. Logo, todo número* x, *terminado em 1 na sua representação decimal na base 3, do Conjunto de Cantor, pode ser visto como uma dízima periódica que possui apenas algarismos 0 e 2. Aplicando a ideia anterior até a etapa* n ($\forall\ n \in \mathbb{N}$) *ficam restando apenas números cuja representação decimal na base 3 constam apenas algarismos 0 e 2, ou números decimais exatos terminados em 1 que, consequentemente podem ser substituídos por dízimas periódicas que constam apenas algarismos 0 ou 2. Portanto, podemos afirmar, sem exceções,* *que os elementos do conjunto de Cantor são os números do intervalo* $I = [0, 1]$ *cuja representação decimal na base* 3 *é formada apenas pelos algarismos* 0 *e* 2. ■

3.3 Tamanho do Conjunto de Cantor

Antes de dizermos que o Conjunto de Cantor é pequeno devemos definir o que entendemos como um conjunto é pequeno. Uma coleção de conjuntos S de K é uma coleção de pequenos conjuntos se:

i $\mathbb{R} \notin S$.

ii Se $A \in S$ e $B \subset A$,então $B \in S$, ou seja, um subconjunto de um conjunto pequeno é pequeno.

iii Se A é pequeno, então para todo b valor fixado temos $b + A = \{b + a; a \in A\} \in S$, ou seja a transposição de um conjunto pequeno é pequeno.

iv Se A_n, $n \geq 1$ são pequenos um a um, então $\cup A_n$, a união enumerável de conjuntos pequenos, é pequeno.

Algumas das coleções que veremos que se qualificam como um conjunto pequeno incluem conjuntos de medida zero e conjuntos de primeira categoria. Vale a pena notar que conjuntos finitos não atendem a essa ideia de conjunto pequeno. Como veremos, de certa forma o Conjunto de Cantor é pequeno e de outras formas grande. Caracterizaremos grande por ser não enumerável.

Teorema 3.3.1. *A unidade do intervalo* $[0, 1]$ *não é enumerável.*
Demonstração: *Todos os números no intervalo* $[0, 1]$ *podem ser escritos como* $0, d_1 d_2 d_3 ...$*, onde cada* d_i *é um algarismo de* 0 *a* 9*. Nenhum número terminará em uma sucessão infinita de* $0's$ *mas sim em uma sucessão infinita de* $9's$*. Por exemplo, o número* $0, 135000...$ *será reescrito da forma* $0, 134999....$
Faremos a demonstração por absurdo. Para isso, suponhamos que o intervalo $[0, 1]$ *seja enumerável. Então, temos que o intervalo* $[0, 1]$ *possui uma bijeção com* $\mathbb{N}$*. Logo,*

$$a_1 = 0, {d_1}^1 {d_2}^1 {d_3}^1 ...,$$

$$a_2 = 0, {d_1}^2 {d_2}^2 {d_3}^2 ...,$$

$$a_3 = 0, {d_1}^3 {d_2}^3 {d_3}^3 ...,$$

$$\vdots$$

onde $d_i{}^j$ refere ao i-ésimo algarismo na expansão decimal do número a_j.
Agora, vamos criar um número $x \in [0,1]$, $x = 0, b_1 b_2 b_3...$, onde $b_i = 3$ se $a_i \neq 3$ e $b_i = 4$ se $a_i = 3$. Então $x \neq a_j$ para algum j já que os dois números devem discordar no j-ésimo lugar. Isso contradiz a nossa lista sendo essa uma lista completa dos números em $[0,1]$. Assim, o intervalo unitário não é enumerável. ■

Teorema 3.3.2. *A cardinalidade do Conjunto de Cantor é $2^{\aleph_0}$.*
Demonstração: *Como o conjunto de Cantor é um subconjunto da reta, pela Hipótese do Contínuo, tem a mesma cardinalidade dos números reais. Logo sua cardinalidade é $2^{\aleph_0}$.* ■

3.3.1 Categoria do Conjunto de Cantor

Definição 3.3.1. *Um conjunto é chamado denso em lugar nenhum se seu interior é vazio.*

Corolário 3.3.1. *O conjunto de Cantor é um conjunto denso em lugar nenhum em $\mathbb{R}$.*
Demonstração: *Seja I um intervalo em $\mathbb{R}$. Então, existe um inteiro positivo k tal que $3^{-k} < \ell(I)$,onde $\ell(I)$ denota o comprimento de I.*
Lembre-se que na construção do K_{n+1} de K_n, qualquer intervalo existente é dividido em terços e o subintervalo intermediário é removido. Assim, no estágio $n+1$, nunca permanecem três intervalos laterais de comprimento 3^{-n-1}. Assim I deve conter um intervalo aberto J que é removido no passo $(k+l)$-ésimo na construção de Cantor. ■

3.3.2 Medida do Conjunto de Cantor

A medida de Lebesgue de um conjunto unitário $\{x\}$, consistindo de um único ponto, é 0, pois

$$m(\{x\}) = \lim_{n\to\infty} m\left(\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0.$$

Consequentemente, a medida de Lebesgue de qualquer conjunto enumerável $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ também é 0, pois

$$m(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} m(\{x_n\}) = 0.$$

Em particular, $m(\mathbb{Q}) = 0$. No entanto, existem conjuntos não enumeráveis com medida de Lebesgue igual a 0. O exemplo mais interessante é o conjunto de Cantor. O conjunto de Cantor é construído da seguinte forma. Todo ponto $x \in [0,1]$ possui uma representação decimal na base 3 da forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$$

com $a_n = 0, 1$ *ou* 2. Esta expansão é única, a menos que x seja da forma $\frac{p}{3^q}$ para alguns inteiros p, q; neste caso, há duas representações possíveis, uma com $a_n = 0$ para todo $n > q$ e uma com $a_n = 2$ para todo $n > q$ porque

$$\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3^{q+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{2}{3^{q+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3^q}.$$

Por exemplo, o número

$$\frac{49}{243} = \frac{1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0}{3^5} = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5}$$

tem as representações

$$0.01211000\cdots$$

e

$$0.01210222\cdots$$

Convencionaremos usar a segunda representação. Desta forma, temos

$$a_1 = 1 \textit{ se e somente se } \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3},$$

$$a_2 = 1 \textit{ se e somente se } \frac{1}{9} < x < \frac{2}{9} \textit{ ou } \frac{7}{9} < x < \frac{8}{9}$$

ou seja, se $\frac{1}{3^2} < x < \frac{2}{3^2}$ ou $\frac{2}{3} + \frac{1}{3^2} < x < \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2}$ e, em geral, $a_n = 1$ se, e somente se, x está no intervalo médio entre cada três subintervalos de comprimento $\frac{1}{3^n}$, começando de 0. E, como o conjunto de Cantor é definido como: $K = \left\{ \sum_{n-1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}, x_n \in \{0, 2\}, \ \forall n \in \mathbb{N} \right\}$, obtemos um conjunto compacto, totalmente desconexo e que não tem pontos isolados.

Corolário 3.3.2. *O Conjunto de Cantor é não enumerável mas tem medida nula.*
Demonstração: *Se $x \in K$, então $x \in \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, com $a_n = 0$ ou $a_n = 2$. Definimos $b_n = \frac{a_n}{2}$ e*

$$\begin{array}{rcl} f: K & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \end{array},$$

onde $f(x)$ é a representação decimal na base 2 de um número no intervalo $[0, 1]$. Como vemos f é sobrejetiva, logo, o conjunto de Cantor tem a mesma cardinalidade do contínuo. Como K é obtido removendo-se um intervalo de comprimento $\frac{1}{3}$, dois intervalos de comprimento $\frac{1}{9}$, quatro de $\frac{1}{27}$ e assim por diante, temos que a medida do conjunto

$$m(K) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = 0.$$

■

Capítulo 4

Aplicações

4.1 Frações Contínuas

Estamos familiarizados com o conceito de frações do tipo $\frac{a}{b}$, onde a e b são números inteiros. Muitas vezes ainda chamamos de fração composta as frações que possuem no denominador outra fração. As *Frações Contínuas* são representadas de forma similar.

Definição 4.1.1. *Seja a_i, $i = 0, 1, 2, 3, ...$ e b_i, $i = 0, 1, 2, 3, ...$, denotados coleções, possivelmente finita, de números reais. Uma Fração Contínua é uma expressão da forma*

$$a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \ddots}}}$$

Para facilitar nosso estudo, considerar apenas as simples frações contínuas, onde todos os $b_i = 1$.

Definição 4.1.2. *Seja a_i, $i = 0, 1, 2, 3, ...$, denotado coleção, possivelmente finita, de inteiros com a_i positivo em $i \geq 1$. Uma Fração Contínua Simples é uma expressão da forma*

$$a_0 = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}$$

Para simplificar nossa notação podemos escrever a expressão como

$$[a_0 : a_1, a_2, a_3, ...].$$

Os valores individuais a_0, a_1, a_2, ... são referentes aos quocientes parciais da expansão da fração contínua simples.

Por exemplo, se tomarmos uma fração contínua simples finita $[2 : 3, 6]$, ela representa

$$2+\frac{1}{3+\frac{1}{6}}=2+\frac{1}{\frac{19}{6}}=2+\frac{6}{19}=\frac{44}{19}.$$

Isso, é claro, também funciona na direção oposta. Se começarmos com qualquer número racional $\frac{b}{a}$, onde a, $b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, então podemos expressá-lo como uma fração contínua simples e finita. Isso requer apenas uma aplicação ao Algoritmo de Divisão que diz que dados dois inteiros a e b, com $b \neq 0$, existem inteiros únicos q e r com $0 < r < |b|$ tal que $a = bq + r$. Por exemplo, comecemos com o número $\frac{32}{7}$. Como sabemos, $32 \div 7 = 4 + \frac{4}{7}$ que equivale a

$$4+\frac{1}{7/4}.$$

E, como $\frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4}$, nosso número original é representado como

$$4+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{4}{3}}}.$$

E no próximo passo, $\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$, então temos

$$\frac{32}{7}=4+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}=[4:1,1,3].$$

Há duas características importantes a serem destacadas. Primeiro, para um número racional em termos menores este processo é garantido que termina. Observe que na nossa divisão, os restos são estritamente decrescentes. Isso significa que em algum momento vão se tornar o número 1. Então, embora isso não seja teorema formal, cada número racional pode ser escrito como uma fração contínua simples finita. Em segundo lugar, não é a única maneira de representar $\frac{32}{7}$. Também é correto

$$\frac{32}{7}=4+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1}}}}=[4:1,1,2,1].$$

No entanto, o Algoritmo de Divisão, que garante que a divisão dá restos únicos, nos diz que, enquanto nós não escrevemos o quociente parcial a_n como um $a_{n-1} + \frac{1}{1}$ não podemos ter duas representações. Então, exigiremos em nossa representação $[a_0 : a_1, a_2, ..., a_n]$ que $a_n > 1$. Se o nosso número $\frac{b}{a}$ é negativo, mudamos o primeiro passo para que estejamos multiplicando o divisor por um número negativo que nos dará o menor resto positivo. Assim, por exemplo, a expansão da fração contínua de $-\frac{15}{7}$ começando com $-15 = -3 \times 7 + 6$. Isso nos dá

$$-\frac{15}{7}=-3+\frac{1}{7/6}=-3+\frac{1}{1+\frac{1}{6}}=[-3:1,6].$$

Um fato interessante sobre o assunto são os *números irracionais quadráticos.* Como sabemos, os números irracionais não podem ser escritos na forma $\frac{p}{q}$, com $q \neq 0$, o que nos leva a um tipo especial de irracional, que pode ser escrito na forma

$$\frac{p \pm \sqrt{d}}{q},$$

onde p, q e d são inteiros com $d > 0$ e não um quadrado perfeito. O nome vem do fato de que ele compreende as soluções para

$$q^2x^2 - 2pqx + (p^2 - d^2) = 0.$$

π é um exemplo de irracional que não é um número irracional quadrático.
Seja x um número irracional positivo. Devido à propriedade de Arquimedes, existe um maior número inteiro a_0 tal que $x = a_0 + \frac{1}{x_1}$, onde $0 < (x_1)^{-1} < 1$. Então

$$x_1 = \frac{1}{x - a_0} > 1$$

e é irracional, com x irracional e a_0 inteiro. Repetindo o processo, começando com x_1, encontramos a_1, o maior inteiro tal que

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2},$$

onde $0 < (x_2)^{-1} < 1$. E continuamos generalizando as frações contínuas para x

$$[a_0 : a_1, a_2, a_3, ...],$$

onde, dessa vez, a sequência de x não termina, pois x é irracional.
Quando temos um número real comum mas com uma representação decimal periódica, somos capazes de encontrar sua representação racional. Podemos fazer o mesmo com uma fração contínua periódica.

Definição 4.1.3. *Seja x com uma simples expanssão de frações contínuas, finita ou infinita, $[a_0 : a_1, a_2, a_3, ...]$. Os Convergentes de x é uma sequência de frações contínuas simples finita*

$$c_0 = a_0, \quad c_1 = a_0 + \frac{1}{a_1}, \quad c_2 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}, \quad ...$$

e em geral, $c_n = [a_0 : a_1, a_2, a_3, ..., a_n]$. Normalmente, representamos esses convergentes como os números racionais que eles são. Por exemplo $c_0 = \frac{p_0}{q_0}$, $c_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}$, $c_2 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \frac{p_2}{q_2}$ e assim por diante, onde cada $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$ e $q_i \neq 0$. A relação entre os valores dos p_i, q_i e a_i é indutivo e resumido no próximo resultado.

Teorema 4.1.1. *Começando com uma fração contínua simples* $[a_0 : a_1, a_2, a_2, ...]$, *seja* c_i *o i-ésimo convergente que na forma de número racional é escrito na forma* $\frac{p_i}{q_i}$, p_i *é um inteiro e* q_i *é um inteiro positivo. Então, os valores desses numeradores e denominadores satisfazem as equações a seguir*

$$p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2},$$

$$q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2},$$

para $i = 2, 3, 4, ...$ *com valores iniciais*

$$p_0 = a_0, \quad p_1 = a_1 a_0 + 1,$$

$$q_0 = 1, \quad q_1 = a_1.$$

Demonstração: *Podemos notar que para* $i = 0$, $c_0 = a_0/1 = p_0/q_0$ *e que* $c_1 = (a_1 a_0 + 1)/a_1 = p_1/q_1$. *Em* $i = 2$, *temos*

$$c_2 = a_0 + \frac{1}{a_1 + a/a_2} = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{a_2 p_1 + p_0}{a_1 q_1 + q_0} = \frac{p_2}{q_2}.$$

Supomos que foi mostrado para $i = 0, 1, 2, 3, ..., k$. *Então*

$$c_{k+1} = \frac{p_{k+1}}{q_{q+1}} = [a_0 : a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}].$$

Pode ser reescrito como

$$c_{k+1} = \left[a_0 : a_1, a_2, ..., \left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right)\right].$$

Agora temos uma fração contínua com apenas k termos. Assim, através da hipótese de indução

$$c_{k+1} = \left[a_0 : a_2, a_2, ..., a_{k-1}, \left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right)\right] = \frac{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right) p_{k-1} + p_{k-2}}{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right) q_{k-1} + q_{k-1}}$$

$$= \frac{(a_k a_{k+1} + 1) p_{k-1} + a_{k+1} p_{k+1}}{(a_k a_{k+1} + 1) q_{k-1} + a_{k+1} q_{k+1}} = \frac{a_{k+1}(a_k p_{k-1} + p_{k-2} + p_{k-1})}{a_{k+1}(a_k q_{k-1} + q_{k-2} + q_{k-1})}$$

$$= \frac{a_{k+1} p_k + p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + q_{k-1}}.$$

■

Teorema 4.1.2. *Se os convergentes c_i são escritos como números racionais p_i/q_i, então*

$$p_{i-1}q_i - p_iq_{i-1} = (-1)^i$$

para $i = 0, 1, 2, 3, ...$
Demonstração: *Usaremos a indução para provar o resultado acima. Para $i = 1$ temos,*

$$p_0q_1 - p_1q_0 = (-1)^1 \Rightarrow a_0a_1 - (a_1a_0 + 1) = -1.$$

Suponhamos ser válido para $i = n$, ou seja $p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = (-1)^n$ e provaremos para $n + 1$. Logo

$$p_nq_{n+1} - p_{n+1}q_n = (-1)^{n+1},$$

como $p_n = a_np_{n-1} + p_{n-2}$ e $q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2}$ temos

$$(a_np_{n-1} + p_{n-2})(a_{n+1}q_n + q_{n-1}) - [(a_{n+1}p_n + p_{n-1})(a_nq_{n-1} + q_{n-2})] =$$

$$= a_na_{n+1}q_np_{n-1} + a_np_{n-1}q_{n-1} + a_{n+1}q_np_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}-$$

$$(a_na_{n+1}p_nq_{n-1} + a_{n+1}p_nq_{n-2} + a_np_{n-1}q_{n-1} + p_{n-1}q_{n-2})$$

$$= a_na_{n+1}(q_np_{n-1} - p_nq_{n-1}) + a_{n+1}(q_np_{n-2} - p_nq_{n-2}) + (-1)^{n-1}$$

$$= a_{n+1}[a_n(q_np_{n-1} - p_nq_{n-1}) - p_nq_{n-2} + q_np_{n-2}] + (-1)^{n-1}$$

$$= a_{n+1}[q_n(a_np_{n-1} + p_{n-2}) - p_n(a_nq_{n-1} + q_{n-2})] + (-1)^{n-1}$$

$$= a_{n+1}[q_np_n - p_nq_n] + (-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}.$$

Portanto, $p_{i-1}q_i - p_iq_{i-1} = (-1)^i$. ■

Uma consequência desse teorema mostra que esses convergentes se aproximam em um limite. Por exemplo, se temos dois convergentes consecutivos c_i e c_{i+1} vemos que

$$c_{i+1} - c_i = \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} - \frac{p_i}{q_i} = \frac{p_{i+1}q_i - p_iq_{i+1}}{q_{i+1}q_i} = \frac{(-1)^{i+1}}{q_{i+1}q_i}$$

e, seguindo o mesmo caminho para c_n e c_{n-2}, obtemos

$$c_n - c_{n-2} = \frac{a_n(-1)^{n-1}}{q_nq_{n-2}}.$$

Teorema 4.1.3. *Para qualquer fração contínua simples $[a_0 : a_1, a_2, a_3, ...]$ os convergentes c_i formam uma seqüência de números reais, onde para todos i*

- $c_{2i} > c_{2i-1}$ *e*

- $c_{2i-1} > c_{2i-2}$.

Assim, a sequência de convergentes tem a propriedade

$$c_1 < c_3 < c_5 < ... < c_{2i-1} < ... < c_{2i} < ... < c_4 < c_2.$$

Isso nos leva, finalmente, a um teorema que diz que qualquer fração contínua simples infinita tem significado como um ponto na reta numérica.

Teorema 4.1.4. *Seja* $[a_0 : a_1, a_2, a_3, ...]$ *representa uma fração contínua simples e infinita. Então existe um ponto* x *real tal que* $x = [a_0 : a_1, a_2, a_3, ...]$.
Demonstração: *A maior parte desta prova já foi mostrada. Nós sabemos que as duas subsequências convergentes* $\{c_{2i}\}$ *e* $\{c_{2i+1}\}$ *são limitadas e monótonas. Um bem conhecido teorema da análise real é que as sequências monótonas são convergentes se, e somente se, elas são limitadas. Portanto* $\{c_{2i}\}$ *e* $\{c_{2i+1}\}$ *convergem para limites* L_1 *e* L_2 *respectivamente. Precisamos provar que* L_1 *e* L_2 *são iguais. Se não, existe um* $\varepsilon > 0$ *tal que* $L_1 - L_2 > \varepsilon$, *o que significa que temos* $c_{2i} - c_{2i+1} = 1/(q_{2i}q_{2i+1}) > \varepsilon$. *Contudo, o teorema 4.1.1 nos mostra que para todo i temos* $q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}$, *onde* a_i, q_{i-1} *e* q_{i-2} *são inteiros positivos. Isso implica que* $\{q_i\}$ *é em si mesmo uma sequência ilimitada crescente. Portanto*

$$\frac{1}{q_{2i}q_{2i+1}} \to 0,$$

uma contradição. Então, $L_1 = L_2$ *e os convergentes se aproximam da mesmo valor.* ■

4.1.1 Construindo o Conjunto de Cantor

Nesta seção, vamos introduzir outra maneira de construir um tipo de conjunto Cantor, usando frações contínuas na definição. Em geral, podemos pensar em uma construção do conjunto de Cantor iniciando com um intervalo fechado [a, b] e removendo uma porção intermediária do intervalo, criando assim dois subintervalos fechados. Nós então repetimos indefinidamente, em cada estágio, removendo um intervalo intermediário aberto de cada intervalo. Definimos nosso intervalo fechado inicial como $A = [x, x + a]$ em que x e a são alguns números reais e $a > 0$. Em seguida, removemos um meio (não necessariamente centrado) aberto, subintervalo de A que tem a forma $(x + a_1, x + a_1 + a_{12})$. Isso nos deixa com dois subintervalos fechados: $A_1 = [x, x + a_1]$ e $A_2 = [x + a_1 + a_{12}, x + a]$. Continuando esse processo nos leva a um conjunto de Cantor.
Mostraremos que é possível fazer tal construção utilizando as frações contínuas. De fato, para inteiros $k \geq 2$, seja $S(k)$ o conjunto de todos os x em $[0, 1/k]$, onde a expansão da fração contínua de x não contém nenhum quociente parcial menor que k, é um Conjunto de Cantor em $[0, 1/k]$. Como o que está a esquerda da vírgula é zero, $a_0 = 0$ na expansão da fração contínua. Existem dois tipos de intervalos com os extremos racionais que precisamos

considerar quando olhamos o que é $S(k)$. O primeiro é da forma:

$$[[0 : a_1, a_2, ..., a_n], [0 : a_1, a_2, ..., a_{n+1}]],$$

onde n é par e $a_i \geq k$ para todo i enquanto o segundo tipo tem a forma

$$[[0 : a_1, a_2, ..., a_n], [0 : a_1, a_2, ..., a_{n-1}]],$$

onde n é um número natural par e $a_i \geq k$.
Uma vez que temos um intervalo fechado, quando removemos o subintervalo do meio, do tipo 1 removemos o intervalo

$$([0 : a_1, a_2, ..., a_{n+1}], [0 : a_1, a_2, ..., a_{n+1}, k])$$

enquanto removendo intervalos do tipo 2, tomamos subintervalos abertos do tipo

$$([0 : a_1, a_2, ..., a_n, k], [0 : a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n + 1]).$$

Em ambos os casos, a remoção do intervalo aberto deixa um intervalo da primeira forma no lado esquerdo e um intervalo da segunda forma à direita. Assim podemos continuar o processo, e o conjunto resultante consiste nos números descritos por $S(k)$.

4.1.2 Equações Diofantinas

Para que a discussão sobre Frações Contínuas seja completa, devemos falar sobre *Equações Diofantinas*. Existem muitas soluções para a equação $8x + 15y = 31$. Existem os pares ordenados $(2, 1)$, $(17, -7)$ ou $(1, 23/15)$. De fato, para cada valor de x temos um valor y tal que

$$y = \frac{31 - 8x}{15}.$$

Porém, nos concentraremos somente nas soluções onde as soluções são pares ordenados inteiros, que é a base de estudo das equações diofantinas.

Definição 4.1.4. *Uma Equação diofantina linear é uma equação da forma*

$$ax + by = c,$$

onde a, b e c são números inteiros fixados, $a, b \neq 0$, com $(a, b) = 1$ e a solução é um par de inteiros.

O nome homenageia Diofante, um matemático grego que escreveu sobre esses equações em uma série de livros chamados Arithmetica.

A maneira de resolver uma equação Diofantina é através do uso repetido do *Algortimo de Euclides*. Então, vamos resolver a equação $8x + 15y = 31$,

$$x = \frac{31 - 5y}{8} = \frac{(3 \cdot 8 + 7) - (y \cdot 8 + 7y)}{8} = (3 - y) + \frac{7 - 7y}{8}.$$

Para que as soluções sejam pares inteiros, $\frac{7-7y}{8}$ deve ser igual a um inteiro t. O que nos dá a seguinte equação:

$$8t + 7y = 7. \tag{4.1}$$

Resolvendo em função de y, temos

$$y = \frac{7 - 8t}{7} = 1 - t - \frac{t}{7} = 1 - t - u,$$

onde $u = \frac{t}{7}$ e precisamos que u seja um inteiro desde que y e t sejam inteiros. Como não existe termo constante em $u = t/7$, substituímos em 4.1 e obtemos

$$y = 1 - 7u - u = 1 - 8u$$

e

$$x = 3 - (1 - 8u) + 7u = 2 + 15u.$$

Podemos criar uma família de soluções incluindo quando $(2, 1)$ quando $u = 0$, $(-13, 9)$ quando $u = -1$ e $(17, 7)$ quando $u = 1$. O Algoritmo de Euclides é também o que usamos para encontrar os inteiros que precisamos para a representação da fração contínua de um número.

Construímos por etapas, começando com uma equação específica e depois com uma mais geral $\pm ax \pm bx = c$. O primeiro tipo de equação é $ax + bx = 1$, onde $mdc(a, b) = 1$, esta equação tem infinitas soluções pelo Algortimo de Euclides. Desde que a/b, $b \neq 0$ é um número racional que podemos converter em uma fração contínua simples e finita.

$$\frac{a}{b} = [a_0 : a_1, a_2, ..., a_n],$$

de onde obtemos os convergentes c_0, c_1, ..., c_n. O último par de convergentes

$$c_{n-1} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$$

e

$$c_n = \frac{p_n}{q_n},$$

o que importa aqui. Do teorema 4.1.2 temos que

$$p_{i-1}q_i - p_iq_{i-1} = (-1)^i.$$

Por enquanto, suponhamos n par e que $p_n = a$ e $q_n = b$ e chegamos em

$$bp_{n-1} - aq_{n-1} = 1,$$

dando (q_{n-1}, p_{n-1}) como uma solução particular. Isso depende de n ser par. que não é um problema pois n é arbitrário, podemos reescrever nossa expansão da fração contínua como

$$[a_0 : a_1, a_2, ..., a_n - 1, 1],$$

se $a_n > 1$ e

$$[a_0 : a_1, a_2, ..., a_n + 1],$$

se $a_n = 1$. Agora, vamos transformar nossa solução particular em uma solução geral. Até agora temos que $ax + by = 1$ e $ax_0 + by_0 = 1$, onde $x_0 = q_{n-1}$ e $y_0 = p_{n-1}$, substraindo as equações temos

$$a(x - x_0) = b(y - y_0).$$

Onde entra o $mdc(a, b) = 1$, o lado direito é múltiplo de b mas não pode ser divisível por a. Portanto, $x - x_0 = bt$ onde t é um inteiro implicando em $y - y_0 = at$. Concluímos que

$$x = x_0 + bt$$

e

$$y = y_0 + at,$$

para todos os valores de t. A equação $ax - by = -1$ é resolvida da mesma forma, mas desta vez insistimos que a fração continua tem um número ímpar de convergentes. Então $aq_{n-1} - bp_{n-1} = -1$, mas podemos novamente encontrar a solução geral, como fizemos antes.

Exemplo 4.1.1. *Tomando $8x + 15y = 31$, onde $a/b = 8/15$. Expandindo essa fração em frações contínuas, temos*

$$\frac{8}{15} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{1}{1+1/8}}} = [0 : 1, 1, 8].$$

Os convergentes dessa fração continua são

$$c_0 = 0,\ c_1 = 1,\ c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = \frac{8}{15}.$$

Então $n-1=2$ e temos $q_2=2$ e $p_2=1$, então nossa solução é

$$x = 31(2) - 15t = 62 - 15t$$

e

$$y = 8y - 31(1) = 8t - 31,$$

onde $t \in \mathbb{Z}$.

4.2 Objetos Auto-Similares

Podemos observar no Conjunto de Cantor a partir de sua construção que, para qualquer k, uma cópia escalonada do $k-$ésimo nível da imagem aparece nos níveis subsequentes. Por exemplo, quando $k=1$, o conjunto K_1, é a união dos intervalos $[0,1/3[$ e $]1/3,1]$ que por sua vez é representado pela imagem abaixo

K_1 : 0 $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ 1

Para $k=3$, a imagem de K_3 é

K_3 : 0 $\frac{1}{9}$ $\frac{2}{9}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{7}{9}$ $\frac{8}{9}$ 1

Onde pode ser interpretada como quatro cópias encolhidas de K_1, que nos levam as ideias do que se trata os objetos *Auto-Similares*, que por sua vez, nos leva para os fractais e para várias noções de dimensões.

Um conjunto que é auto-similar tem a propriedade de que, em qualquer ampliação, há partes do conjunto que têm a mesma forma que o todo. Temos que um segmento de linha é um exemplo trivial de um objeto auto-similar, mas para um exemplo não trivial vamos considerar um galho de samambaia.

Estes objetos são particulamente gerados pela relação repetida de uma imagem em um sistema de funções similares e deixando a sequência aproximar uma forma que seja invariante. Com o avanço tecnológico, o estudo desses conjuntos teve um grande avanço pelo uso de computadores para aproximar imagens e o estudo dos fractais ganhou destaque.

Teorema 4.2.1. *Seja (S, d) um espaço métrico. Uma sequência $\{x_n\}$ em S é chamada uma Sequência de Cauchy se para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $m,\ n \geq N$ implica em*

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Definição 4.2.1. *Se $\{x_n\}$ é uma sequência convergente em (S, d) então ela é uma sequência de Cauchy.*

Definição 4.2.2. *Um espaço métrico S é dito Completo se cada sequência de Cauchy $\{x_n\}$ converge para um ponto em S.*

Definição 4.2.3. *Uma função $f : A \to B$ é um homeomorfismo se f for bijetiva e ambas f, f^{-1} são contínuas.*

Qualquer espaço métrico é um espaço de Hausdorff. No entanto, essa é uma propriedade topológica, portanto, uma métrica não precisa estar no espaço. Existem espaços topológicos que não são de Hausdorff. De fato, seja $f : X \to Y$ onde X é um espaço métrico compacto e Y é um espaço de Hausdorff. Se f é bijetiva e contínua, então f é um homeomorfismo entre X e seu contra domínio $f(X)$.

Teorema 4.2.2. *A imagem contínua de um conjunto compacto é compacta.*
Demonstração: *Seja $f : (S, d) \to (T, \rho)$ uma função contínua e supomos A um conjunto compacto em S. Para mostrar que $f(A)$ é compacto, seja $\{U_n\}$ uma cobertura aberta de A. Sabemos que A é compacto, logo existe uma subcobertura finita. Sem perda de generalidade chamemos*

$$\{f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2), f^{-1}(U_3), \cdots, f^{-1}(U_n)\}.$$

Nossa afirmação é que $\{U_1, U_2, \cdots, U_n\}$ é uma subcobertura finita de $f(A)$. Isto pois $y \in f(A)$ o que significa que existe $x \in f^{-1}A$ com $f(x) = y$ e $x \in f^{-1}(U_j)$ para algum j. Consequentemente $y \in U_j$ então $f(A) \subset \cup_{j=1}^{n} U_j$. ■

Finalmente chegamos ao que Barnsly [1] chama de "O Espaço onde os Fractais vivem". Começamos com o espaço S onde S é um subconjunto fechado do $\mathbb{R}^n$. Definimos a seguir o espaço $H(S)$.

Definição 4.2.4. *Um espaço Y é chamado um Espaço de Hausdorff se para os pontos $x,\ y \in Y$, existem dois conjuntos abertos U e V com $x \in U$ e $y \in V$ onde*

$$U \cap V = \varnothing.$$

[1] Em Michael Barnsley, Fractals Everywhere, Academic Press, 1988

Definição 4.2.5. *Denotaremos como* $H(S)$ *uma coleção de subconjuntos não vazios e compactos de* $S \subset \mathbb{R}^n$*, onde* S *é um conjunto fechado e não vazio. Definimos a métrica de Hausdorff como*

$$d(A, B) = \inf\{\delta : A \subset B_\delta \text{ e } B \subset A_\delta\}.$$

Temos o espaço, agora precisamos definir a métrica com as ideias de Kenneth Falconer [2]. Nós definimos A como sendo um conjunto da coleção $H(S)$, denotaremos como $\delta-$corpo de A um conjunto de pontos de máximo δ tão longe de A que

$$A_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| \leq \delta \text{ para algum } a \in A\}.$$

Dados dois conjuntos A e B em $H(S)$, podemos observar que $B \subset A_\delta$ para um δ suficientemente grande. Nossa distância entre dois subconjuntos não vazios e compactos será a menor distância para que possamos obter uma restrição em ambos $\delta-$corpos.
Uma maneira de entender essa distância é, dado um ponto b em um compacto A em uma métrica (S, d) definimos $D(b, A)$ como o mínimo de todas as distâncias entre b e a, onde $a \in A$. Ou seja, $D(b, A) = \min\{D(b, a) : a \in A\}$, então, se temos dois conjuntos compactos A e B, dizemos que a distância de B a A é o maior de todos os $D(b, A)$, isto é

$$D(B, A) = \max_{b \in B}\{\min_{a \in A}\{D(b, a)\}\}.$$

Essa ideia, no entanto, não define uma métrica pois não é verdade que $D(B, A) = D(A, B)$. Para finalmente chegar à métrica de Hausdorff, temos

$$d(A, B) = \max\{D(A, B), D(B, A)\}.$$

Como conseqüência desta definição e A e B sendo conjuntos compactos, temos que há pontos $\tilde{a} \in A$ e $\tilde{b} \in B$ tais que

$$d(A, B) = d(\tilde{a}, \tilde{b}),$$

onde $d(A, B)$ é a métrica de Hausdorff e a métrica $d(\tilde{a}, \tilde{b})$ é a métrica original em S.
Tal como acontece com a construção do conjunto Cantor, quando criamos esses objetos auto similares temos um processo que leva ao resultado final, mas o objeto em questão é o resultado de infinitas aplicações. Isso significa que temos uma sequência de iterações e devemos saber que essa sequência converge. Em outras palavras, precisamos que $(H\ (S), d)$ seja um espaço métrico completo.

Teorema 4.2.3. *A métrica* $(H(S), d)$ *é um espaço métrico completo. Assim se* $\{A_n\}$ *é uma sequência de Cauchy em* $(H(S), d)$ *então existe um conjunto* $A \in H(S)$ *tal que*

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n,$$

[2]Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications, J. Wiley e Sons, 1990.

onde o limite é tomado sob a métrica de Hausdorff.

Demonstração: *Para provar isso, devemos começar com um espaço métrico (S, ρ), mas trabalhar no espaço $(H(S), d)$. Suponha que tenhamos uma sequência de Cauchy A_n em $(H(S), d)$. Seja*

$$A = \{x : \text{existe uma sequncia } \{x_j\} \text{ com } x_j \in A_j \text{ e } x_j \to x\}.$$

Note que $x_j \to x$ em ρ e não em d. Mostraremos que o limite de A_n de fato converge para A. Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário e fixo. Desde que A_m é uma sequência de Cauchy em $(H(s), d)$ então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq N$ temos $d(A_m, A_n) < \varepsilon/2$. Seja n um valor maior que N.

Se $x \in A$, então existe uma sequência $\{x_j\}$ tal que $x_j \in A_j$ e para um k grande $\rho(x_k, x) < \varepsilon/2$. Da desigualdade triangular temos

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, x_k) + \rho(x_k, y) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Então $A \subset (A_m)_\varepsilon$.

Agora tomamos $y \in A_m$. Desde que $\{A_m\}$ é uma sequência de Cauchy podemos escolher números inteiros tal que $j_1 < j_2 < j_3 < \ldots$ com $j_i = m$ e $d(A_{jk}, A_m) < \frac{\varepsilon}{2^k}$ para todo $m \geq j_k$. Agora, definimos a sequência y_j com cada $y_j \in A$. Para $j < n$ escolhemos qualquer $y_j \in A_j$ e seja $y_n = y$. Para $j_k < j < j_{k+1}$, escolhemos $y_j \in A_j$ onde $\rho(y_{jk}, y_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}$. Então, $\{y_k\}$ é uma sequência de Cauchy em (S, ρ) converge para algum $x \in A$. Então $\rho(y, x) = \lim \rho(y, y_j) < \varepsilon$. Assim $y \in A_\varepsilon$ e desde que y arbitrário, $A_m \subset A_\varepsilon$.

Portanto, $d(A, A_m) < \varepsilon$ e $\{A_m\}$ converge para A. ■

4.3 Transformações Afim

Embora muitas das nossas noções funcionem em qualquer espaço métrico (S, d), para ter ilustrações do que está acontecendo, nos restringiremos principalmente a $S = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ com suas respectivas métricas euclidianas junto com $(H(S), d)$ e com a métrica de Hausdorff, onde S é um subconjunto compacto de X, no entanto, as provas tendem a ser para espaços métricos em geral.

Desejamos aplicar um certo tipo de função aos subconjuntos compactos de S. Essa função é capaz de fazer três coisas (separadamente ou em conjunto) para um conjunto limitado. Pode encolher o objeto, girar o objeto, transladar o objeto. Tal função é chamada de *Transformação Afim* e é definida em generalidade abaixo.

Definição 4.3.1. *A função $T : X \to Y$ é chamada uma Transformação Afim se para* *algum $x, y \in X$ e algum $c \in [0,1]$ temos que*

$$T(cx + (1-c)y) = cT(x) + (1-c)T(y).$$

Teorema 4.3.1. *Uma transformação afim de um intervalo $[a,b]$ em $\mathbb{R}$. deve ser da forma*

$$T(x) = mx + b,$$

onde $m,\ b \in \mathbb{R}$.

Demonstração: *Suponhamos $a < b$, é possível que $a = b$, mas o intervalo é trivial assim como o resultado. Para algum $x \in [a,b]$ podemos reescrever como*

$$x = \frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b.$$

Como x está entre a e b é da forma $ca + (1-c)b$ onde $c \in [0,1]$. Usando o fato que T é afim temos

$$T(x) = \frac{b-x}{b-a}T(a) + \frac{x-a}{b-a}T(b) = \frac{T(b)-T(a)}{b-a}x + \frac{bT(a)-aT(b)}{b-a}.$$

Isso mostra de fato que T é linear. ■

Exemplo 4.3.1. *A função $T(x) = \frac{x}{2}+2$ é uma transformação afim no conjunto $A = [0,1]$. Se deixarmos $T(A) = \{T(x) : x \in A\}$, vemos $T(A) = [2; 2,5]$, que é um encolhido do intervalo original que foi então deslocado para a direita 2 unidades.*

Teorema 4.3.2. *Cada transformação afim de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ tem a forma*

$$T(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2 + e, cx_1, dx_2 + f),$$

onde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.
A expressão acima pode ser descrita como:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Embora as transformações movam pontos no espaço, há pontos que não se movem sob T. Esses pontos são muito importantes no estudo de sistemas dinâmicos e na criação de fractais.

Definição 4.3.2. *Seja $T : S \to S$ uma transformação em um espaço métrico. Um ponto $x_0 \in X$ é chamado de ponto fixo (ou atrator ou invariante) se $T(x_o) = x_o$.*

Para criar os objetos auto-similares para os quais estamos nos dirigindo, precisamos de um tipo de transformação, chamado de *Contração*, o que nos garante que, quando aplicamos as transformações, os pontos estão se aproximando.

Definição 4.3.3. *Seja (S, d) um espaço métrico. Uma transformação $T : S \to S$ é chamada um mapeamento de contração se existe $r \in (0, 1]$ tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq rd(x, y),$$

para todo $x, y \in S$. Nos referimos a r como fator de contração ou relação de contração.

Teorema 4.3.3. *Se T é uma contração em (S, d) com fator de contração r, então T é uma função contínua.*

Demonstração: *Dado $\varepsilon > 0$ devemos mostrar que para $\delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta$ implique em $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Supondo $\varepsilon > 0$ e T com fator de contração $r \geq 0$. Se tomarmos $\delta = \frac{\varepsilon}{r+1}$, então para $d(x, y) < \varepsilon$*

$$d(T(x), T(y)) < rd(x, y) < r\delta = r\frac{\varepsilon}{r+1} < \varepsilon.$$

Esta é realmente uma prova de que T é uniformemente contínuo, mas não vamos entrar em detalhes.[3] ■

Contrações dão uma qualidade especial aos seus invariantes. Enquanto não podemos garantir a existência de um ponto fixo (depende do espaço), se houver um invariante sabemos que não pode haver mais de um.

Teorema 4.3.4. *Seja T uma contração em (S, d) com fator de contração r. Então o invariante para T, se existir, deve ser único.*

Demonstração: *Supomos que não. Dizemos que T possui dois invariantes x e y. Então temos o seguinte*

$$d(x, y) = d(T(x), T(y)) < rd(x, y).$$

Desde que $x \neq y$ significa $d(x, y) > 0$ e chegamos à contradição $1 < r$. Portanto pode haver no máximo um invariante. ■

Podemos garantir um invariante exatamente quando podemos garantir que sequências em (S, d) que são Cauchy vão ser convergentes. Isso significa que o espaço deve ser completo e nos dá o Teorema do Mapeamento de Contração. Para isto, dada uma função T e um inteiro positivo n denotamos como a composição de T, n vezes como

$$T^{(n)}(s) = \underbrace{(T \circ T \circ T \circ \cdots \circ T)}_{n \text{ cópias de } T}(s).$$

[3] Vallin, (2013)

Teorema 4.3.5. ***(O Teorema do Mapeamento de Contração:)*** *Seja (S, d) um espaço métrico completo e seja $T : S \to S$ uma contração com fator r. Então, para qualquer ponto $s \in S$, a sequência $T^n(s)$ converge para um ponto $\hat{s}$ e $\hat{s}$ é o invariante para T.*

Demonstração: *Seja s um ponto em S. A desigualdade triangular nos dá*

$$d\left(s, T^{(2)}(s)\right) \leq d\left(s, T(s)\right) + d\left(T(s), T^{(2)}(s)\right) < d\left(s, T(s)\right) + rd\left(s, T(s)\right).$$

De fato, para n positivo, temos

$$\begin{aligned} d\left(s, T^{(2)}(s)\right) &\leq d\left(s, T(s)\right) + d\left(T(s), T^{(2)}(s)\right) + \cdots + d\left(T^{(n-1)(s)}, T^{(n)}(s)\right) \\ &< d\left(s, T(s)\right) + rd\left(s, T(s)\right) + \cdots + r^{n-1}d\left(s, T(s)\right) \\ &= (1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1})d\left(s, T(s)\right) \\ &= \frac{1 - r^n}{1 - r}d\left(s, T(s)\right) < \frac{1}{1 - r}d\left(s, T(s)\right). \end{aligned}$$

De uma forma similar

$$d\left(T^{(n)}(s), T^{(m)}(s)\right) \leq r^{\min\{m,n\}}\frac{d\left(s, T(s)\right)}{1 - r}.$$

Isso mostra que $\{T^{(n)}(s)\}$ é uma seqüência de Cauchy. Como (S, d) está completo, ele converge para algum ponto que chamaremos de $\hat{s}$. E pelo fato que T é uma função contínua, temos

$$T(\hat{s}) = T(\lim_{n\to\infty} T^{(n)}(s)) = T(\lim_{n\to\infty} T^{(n+1)}(s)) = \hat{s}.$$

Portanto $\hat{s}$ é o invariante. ∎

Agora estamos prontos para avançar para o espaço $(H(S), \rho)$ e aplicar as tranformações.

Teorema 4.3.6. *Seja $T : S \to S$ uma contração no espaço métrico (S, d) com fator de contração s. Então T é também uma contração em H com métrica ρ, onde $T(A) = \{T(a) : a \in A\}$ com fator de contração s.*

Demonstração: *Do Teorema 4.3.3 temos que T é contínuo em S e o Teorema 4.2.2 temosque a imagem de um conjunto compacto é compacta, portanto, o T mapeia H para si mesmo. A métrica ρ procura a maior distância entre dois pontos nos conjuntos compactos U e V. Como os conjuntos são compactos, eles são membros reais do conjunto, isto é, existe $u \in U$ e $v \in V$ tal que se $\delta = d(u, v)$ temos*

$$U \subset V_\delta \text{ e } V \subset U_\delta.$$

Tomamos A e B em $H(S)$. Então existe $a \in A$ e $b \in B$ de modo que $d(T(A), T(B)) =$

$d(T(a), T(b)) < sd(a, b) = sd(A, B)$. Isso significa da definição da métrica de Hausdorff que $T(A) \subset T(B)_{\delta^*}$, onde $\delta^* = s.d(A, B)$. Similarmente, $T(B) \subset T(A)_{\delta^*}$, onde $\delta^* = s.d(B, A)$. Portanto, $\rho(T(A), T(B)) \leq s.\rho(A, B)$, que é o que precisávamos provar. $\blacksquare$.

Por um *IFS (Iterated Function System)*, queremos dizer uma coleção finita $\{T_i\}_{i=1}^n$ de contrações, cada uma com razão de contração correspondente r_i. Com esta coleção criamos a transformação

$$T(A) = T_1(A) \cup T_2(A) \cup \cdots \cup T_n(A),$$

onde A é um conjunto compacto não vazio. Isto é em si uma contração com relação de contração $r = \max\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$. O invariante para T existe pelo Teorema 4.3.6 e será auto-similar.

Exemplo 4.3.2. *Na unidade quadrada, temos três contrações*

$$T_1(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right),$$

$$T_2(x, y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2}\right),$$

$$T_3(x, y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2} + \frac{1}{2}\right).$$

Então, um conjunto compacto (como um triângulo dentro do quadrado da unidade) é reduzido por um fator de $\frac{1}{2}$ em ambas as direções, uma vez encolhida e, em seguida, traslada $\frac{1}{2}$ unidade para a direita, e outra vez encolhe e depois traslada uma unidade de $\frac{1}{2}$ para a direita e $\frac{1}{2}$ unidades para cima. O invariante resultante é chamado de Triângulo de Sierpinksi.

A ideia de invariante é que o resultado final será o Triângulo de Sierpinski, independentemente da forma com a qual começamos. A única diferença seria a velocidade com a qual as iterações convergem. Vale a pena notar aqui que o resultado final sendo um triângulo não tem nada a ver com a imagem inicial sendo um triângulo.

Exemplo 4.3.3. *Mais uma vez começamos no quadrado da unidade. Nossa imagem inicial será o intervalo unitário que vamos transformar em uma curva. A curva de Koch (nomeado em homenangem o sueco matemático Helge von Koch) apareceu pela primeira vez em um artigo de 1904 intitulado "On a Continuous Curve without Tangents, Constructed from Elementary Geometry".*
Este exemplo, ao contrário dos outros, usa a rotação do objeto. Existem quatro transformações aqui. O primeiro está encolhendo em $\frac{1}{3}$ em ambas as direções. O segundo também encolhe em $\frac{1}{3}$ nas direções x e y, mas depois translada em $\frac{2}{3}$ horizontalmente. O próximo encolhe em $\frac{1}{3}$, depois gira em $60°$, em seguida, traslada $\frac{1}{3}$ para a direita. A transformação

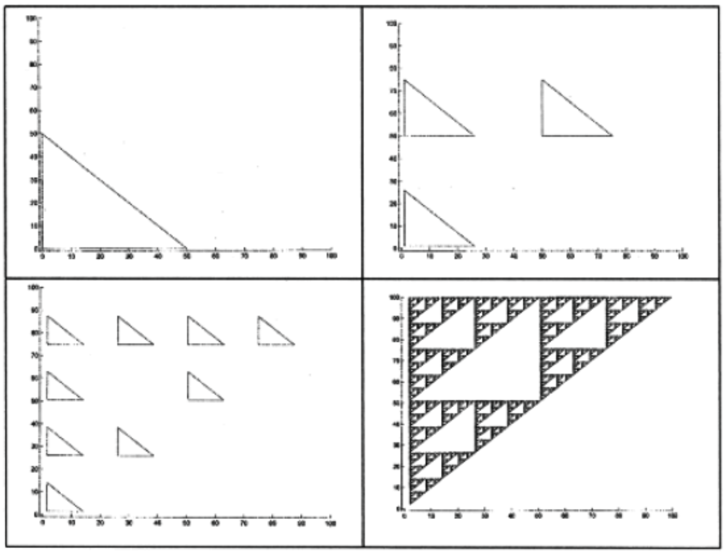


Figura 4.1: Para várias iterações de $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3$.

final é encolher em $\frac{1}{3}$*, girar* $-60°$*, e depois trasladar* $\frac{2}{3}$ *para a direita e para cima por* $\frac{\sqrt{3}}{6}$*. Uma rotação pelo ângulo* θ *é dada por*

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Nossas quatro transformações são:

$$T_1(x,y) = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$T_2(x,y) = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$T_3(x,y) = \begin{pmatrix} (1/3)\cos(60°) & (-1/3)\sin(60°) \\ (1/3)\sin(60°) & (1/3)\cos(60°) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$T_4(x,y) = \begin{pmatrix} (1/3)\cos(60°) & (1/3)\sin(60°) \\ -(1/3)\sin(60°) & (1/3)\cos(60°) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/6 \end{pmatrix}$$

ou

$$T_1(x,y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}\right),$$

$$T_2(x,y) = \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}, \frac{y}{3}\right),$$

$$T_3(x,y) = \left(\frac{x}{6} - \frac{\sqrt{3}y}{2} + \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{y}{6}\right),$$

$$T_4(x,y) = \left(\frac{x}{6} + \frac{\sqrt{3}y}{2} + \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}x}{6} - \frac{y}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right).$$

Um fato interessante sobre essa curva é que, em cada etapa, k, o comprimento da curva é $\frac{4}{3}^k$. Assim, o produto final tem comprimento infinito, mas, como se encaixa dentro do quadrado da unidade, cobre a área finita.

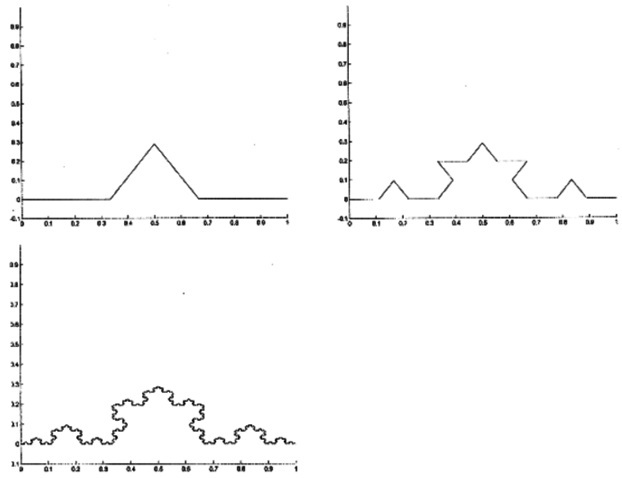


Figura 4.2: A primeira, segunda iteração e a forma final da curva.

Quando definimos o Conjunto Ternário de Cantor, discutimos uma maneira de ajustá-lo. Isto levou a uma generalização que escrevemos como C_r, $0 < r < 1$. Estes conjuntos são também atratores para um IFS, usando as contrações

$$T_1(x) = rx \text{ e } T_2(x) = rx + (1-r).$$

Porém, não é todo Conjunto de Cantor que é um atrator de IFS. Esse assunto seria para um próximo estudo.

Capítulo 5

Conclusão

Visto que o estudo deste conjunto surgiu apenas na disciplina: Trabalho de Conclusão de Curso, tentamos exibí-lo de maneira mais didática possível. Para tanto, preparamos o capítulo: Conceitos Básicos, cujo objetivo foi fornecer as ferramentas fundamentais para a leitura dos capítulos seguintes. Além disso, durante todo o trabalho, insistimos na apresentação de vários exemplos, de forma a elucidar toda a teoria desenvolvida. Ora, para que esse objetivo fosse cumprido adequadamente, buscamos demonstrar todos os resultados aqui estabelecidos. Ressaltamos também a parte histórica desenvolvida neste trabalho, que fora incluída em diversas partes.

O estudo teve como finalidade a construção do Conjunto Ternário de Cantor bem como a descrisão das suas principais características, sendo ele um conjunto não enumerável, com medida nula, tendo sua cardinalidade igual a cardinalidade dos números reais e podendo ser representado somente com algarismos 0 e 2 na base decimal 3. Além disso, com a sua construção a partir das frações contínuas, conseguimos notar que existem diversas formas de se construir tal conjunto mantendo suas propriedades.

Com o estudo dos Objetos Auto Similares, pudemos falar sobre as Transformações Afim e aplicar ao Triângulo de Sierpinsk e na curva de Koch. Para que a similaridade seja garantida, é necessário que a transformação afim seja uma contração e além do mais, que a composição de n contrações seja convergente. O convergente nos dá a segurança que os pontos se aproximam no decorrer das iterações.

O Conjunto de Cantor é um claro exemplo de um objeto auto similar, desde que ele se mostra semelhante entre qualquer parte com o intervalo inicial dadas retiradas, sendo assim, a base para as noções de dimensão e os fractais.

O trabalho abre margens para novos estudos, um deles a elaboração de um software que gere curvas a partir de dadas transformações afim. Além disso, pode ser feito um estudo com outro tipo de aplicação que Vallin (2013) apresenta em seu livro, utilizado aqui como principal referência, ou outra bibliografia que aplique tais conhecimentos em áreas como sistemas dinâmicos e álgebra abstrata.

Capítulo 6

Referências

FERNANDEZ, Pedro J., Medida e Integração. Rio de Janiero. IMPA. 1976.

LIMA, Elon Lages, Análise Real.Vol 1 - 12ª edição, IMPA. 2017.

LIPSCHUTZ, Seymour, Teoria dos Conjuntos. First edition. Rio de Janeiro. 1964.

MARCO, A. P. Cabral., Introdução à Teoria da Medida e Integral de Lebesgue.PhD Indiana University, EUA Instituto de Matemática.Universidade Federal do Rio de Janeiro.Rio de Janeiro, RJ, Brasil. 3ª edição. 2016.
Disponível em: <http://www.labma.ufrj.br/ mcabral/textos/medida-a4.pdf>. Acesso em: 14 de junho de 2018 às 13:13 horas.

MARQUES, Mauro. Teoria da Medida. Campinas. Editora da Unicamp. 2009.

VALLIN, Robert W., The elements of Cantor sets : with applications. Department of Mathematics, Slippery Rock University, Slippery Rock, PA. First edition, 2013.