



Universidade Federal de São João del-Rei
Coordenadoria do Curso de Matemática

Maria Cláudia Sousa Resende

Um estudo sobre Sistemas Dinâmicos Discretos: a dinâmica do *shift*

São João del-Rei - MG
Agosto de 2024

Universidade Federal de São João del-Rei
Coordenadoria do Curso de Matemática

Um estudo sobre Sistemas Dinâmicos Discretos: a dinâmica do *shift*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenadoria do Curso de Matemática como parte necessária da Instrução Normativa COMAT N07 de 14 de Dezembro de 2021.

Orientador: Prof. Dr. Wilker Thiago Resende Fernandes, UFSJ-DEMAT.

Banca Examinadora:

Orientador: Prof. Dr. Wilker Thiago Resende Fernandes

Profa. Dra. Ivana de Vasconcellos Latosinski

Profa. Dra. Lorena Mara Costa Oliveira

São João del-Rei - MG
Agosto de 2024

Agradecimentos

A conclusão deste trabalho não seria possível sem o apoio de muitas pessoas, às quais expresso minha profunda gratidão.

Primeiramente, agradeço aos meus pais, Elza e Luiz, que sempre acreditaram em mim. Sem o sacrifício de vocês, isso não seria possível. Também agradeço ao Guilherme, por estar ao meu lado em todos os momentos, por me encorajar e mostrar que sou capaz. Seu apoio foi essencial.

Ao meu orientador, Wilker, por ter aceitado me orientar e por fazê-lo com tanta dedicação. A confiança que depositou em mim foi uma grande motivação para enfrentar todos os desafios que surgiram ao longo do processo. Sua orientação foi uma fonte constante de aprendizado, e sou imensamente grata por todo o suporte e conhecimento compartilhados.

Às minhas amigas, Ana Clara, Brenda, Fabiana e Vanessa, pelos momentos de alegria e descontração que me proporcionaram. Vocês foram fundamentais para que eu conseguisse manter minha sanidade, especialmente nessa reta final.

À UFSJ, especialmente ao curso de Matemática e aos professores do Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, que contribuíram significativamente para o meu aprendizado. Além de ampliar meus conhecimentos, suas aulas e dedicação ao ensino me instigaram a pensar criticamente e a buscar sempre mais. O apoio e a orientação de vocês foram fundamentais para a construção deste trabalho.

À banca examinadora, composta por Ivana e Lorena, agradeço não só pela contribuição neste trabalho, mas por terem me acompanhado durante todo o curso. Vocês desempenharam um papel importante na minha formação e no meu amor pela Matemática.

Por fim, agradeço a mim mesma por não desistir e pela jornada orgulhosa que trilhei durante o curso.

“A matemática, olhada corretamente, possui não apenas verdade, mas suprema beleza, uma beleza fria e austera, como aquela da escultura, sem apelo a qualquer parte da nossa natureza mais fraca, sem as encantadoras armadilhas da pintura ou da música, mas sublimemente pura, e capaz de uma rigorosa perfeição que somente a maior das artes pode exhibir.”
(Bertrand Russell)

Resumo

Este trabalho apresenta uma introdução abrangente aos sistemas dinâmicos discretos, com ênfase na dinâmica do *shift*. Inicialmente, explora os sistemas dinâmicos em conjuntos finitos e em conjuntos infinitos enumeráveis, com estudos sobre seus comportamentos. O foco principal está na dinâmica em conjuntos não enumeráveis, particularmente no espaço de sequências e na dinâmica do *shift*, analisando pontos periódicos, órbitas densas, comportamento topologicamente *mixing* e caos. Finalmente, a análise de uma dinâmica no intervalo é apresentada, estabelecendo uma relação com o *shift*.

Palavras-chave: Sistemas dinâmicos, dinâmica discreta, *shift*, caos.

Sumário

Introdução	8
1 Conceitos preliminares	10
1.1 Sistemas dinâmicos	10
1.2 Espaços métricos	11
1.3 Propriedades da dinâmica	12
2 Dinâmica enumerável	15
2.1 Dinâmica finita	15
2.2 Dinâmica infinita enumerável	17
2.2.1 ω -limite	21
2.2.2 Órbita densa	22
2.2.3 Topologicamente <i>mixing</i>	23
3 Dinâmica não enumerável e o <i>Shift</i>	24
3.1 O espaço de sequências	24
3.2 A dinâmica do <i>shift</i>	28
3.2.1 Pontos periódicos	29
3.2.2 ω -limite	30
3.2.3 Órbita densa	30
3.2.4 Topologicamente <i>mixing</i>	31
3.2.5 Sensibilidade às condições iniciais e caos	32
4 Dinâmica em intervalos	33
4.1 Dinâmica de $f(x) = 10x \bmod 1$	34
4.2 Pontos periódicos	34
4.3 ω -limite	35
4.4 Órbita densa	36
4.5 Topologicamente <i>mixing</i>	36
4.6 Sensibilidade às condições iniciais e caos	38

Considerações finais	39
Referências Bibliográficas	40

Introdução

Os *sistemas dinâmicos* constituem uma área da Matemática que fornece ferramentas poderosas para modelar e compreender fenômenos que evoluem ao longo do tempo. Eles podem ser classificados em contínuos e discretos, dependendo da natureza do tempo considerado. Nos sistemas dinâmicos contínuos, o tempo é tratado como uma variável contínua, enquanto nos sistemas dinâmicos discretos, o tempo é considerado em etapas discretas, ou seja, como uma sequência de instantes específicos, como descrito por [1].

A história dos sistemas dinâmicos remonta ao trabalho de Isaac Newton, que utilizou equações diferenciais para descrever processos que evoluem continuamente ao longo do tempo. Apesar dos avanços na resolução de equações diferenciais lineares nos séculos XVIII e XIX, a área lidou com equações não lineares, que são cruciais para descrever a maioria dos fenômenos naturais. Henri Poincaré revolucionou o campo no final do século XIX, ao introduzir métodos qualitativos, centrando-se no comportamento das soluções em vez de soluções explícitas, levando à descoberta do caos [3]. Além disso, de acordo com [9], Poincaré foi uma das primeiras pessoas a vislumbrar a possibilidade de existência de caos em sistemas determinísticos, isto é, sistemas com parâmetros completamente determinados e que não possuem entradas aleatórias. Algumas décadas mais tarde, o vislumbre de Poincaré foi confirmado e amplamente difundido com os trabalhos de Edward Norton Lorenz, que mencionamos abaixo.

De acordo com [3], durante o século XX os estudos sobre sistemas dinâmicos tiveram uma grande crescente, estimulados por desenvolvimentos como o modelo de “ferradura” de Stephen Smale e a descoberta de Edward Norton Lorenz sobre a dependência sensível das condições iniciais, que levou à compreensão moderna do caos. O artigo de 1975 de Li e Yorke popularizou o termo “caos”, acelerando ainda mais o interesse no campo. O advento da computação de alta velocidade e da computação gráfica no final do século XX, exemplificado pela descoberta do conjunto de Mandelbrot, revitalizaram o estudo de sistemas dinâmicos, permitindo aos matemáticos explorar e visualizar comportamentos complexos que antes eram inacessíveis.

Formalmente, um *sistema dinâmico* discreto pode ser representado por uma função $f : X \rightarrow X$, onde X é o conjunto de estados possíveis do sistema. A dinâmica do sistema é descrita pela iteração desta função, ou seja, dado um estado inicial $x_0 \in X$, os estados subsequentes são dados por $f^n(x_0) = f(f^{n-1}(x_0))$, para $n \geq 1$.

A rica variedade de comportamentos exibidos pelos sistemas dinâmicos discretos faz deles um campo de estudo extremamente interessante e relevante. A compreensão desses sistemas não só contribui para o avanço teórico das ciências matemáticas, mas também possui aplicações práticas significativas em diversas áreas, como vemos, por exemplo, em [9].

O objetivo deste trabalho é proporcionar uma introdução e compreensão sobre sistemas dinâmicos discretos, com ênfase na dinâmica de um sistema muito simples e que apresenta características muito interessantes e variadas, conhecido na literatura como *shift*. Apresentamos uma análise que abrange o estudo de sistemas definidos sobre conjuntos finitos e conjuntos infinitos enumeráveis e não enumeráveis.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma. O primeiro capítulo é dedicado à apresentação dos conceitos e definições fundamentais que servirão de base para todo o desenvolvimento do texto. No segundo capítulo, realizamos uma análise do comportamento das órbitas em conjuntos finitos, fornecendo uma compreensão da dinâmica nesses espaços e também expandimos a análise para conjuntos infinitos enumeráveis, explorando como a dinâmica se manifesta em um contexto com maior complexidade. O terceiro capítulo aprofunda o estudo ao abordar conjuntos infinitos não enumeráveis, com um foco especial na introdução e investigação da dinâmica do *shift*, tema central deste trabalho. No capítulo 4 aplicamos os conceitos e resultados anteriores para examinar o comportamento das órbitas em uma dinâmica definida no intervalo $[0, 1)$.

Capítulo 1

Conceitos preliminares

Neste capítulo está reunido os conceitos e definições básicas que serão utilizados ao longo do texto.

1.1 Sistemas dinâmicos

Um sistema dinâmico discreto é uma função ou aplicação f definida em um certo conjunto X , que pode ser chamado de *espaço de fases*, ou seja,

$$f : X \rightarrow X.$$

A dinâmica do sistema representa a passagem do tempo e é vista como sendo a iteração dessa função. Desta forma, se começarmos com um ponto $x \in X$, que corresponde ao instante zero, depois ele estará em $f(x)$ no instante 1, depois em $f(f(x))$ no instante 2 e assim sucessivamente. A convenção padrão é:

$$f^0(x) := x, \quad f^1(x) := f(x), \quad f^n(x) := f(f^{n-1}(x)), \text{ para } n \geq 1.$$

Um dos objetivos da teoria dos sistemas dinâmicos consiste em entender a evolução de um ponto ao longo do tempo, isto é, $x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots$. O conjunto formado por esses pontos é conhecido como *órbita* do ponto e é denotado por,

$$\mathcal{O}(x) = \{f^n(x); n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

A estrutura do conjunto X e a natureza da função f podem ser diversas, gerando órbitas com propriedades interessantes, imprevisíveis e até inesperadas.

Um ponto $x \in X$ é chamado de *ponto periódico de período* p , se p é o menor inteiro tal que $f^p(x) = x$. Quando $p = 1$, isto é, $f(x) = x$, dizemos que x é um *ponto fixo* para f . Observe que, quando x é um ponto periódico, sua órbita é dada pelo conjunto finito $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x)\}$ que chamamos de *órbita periódica*.

Sejam $f : X \rightarrow X$ e $Y \subseteq X$, a *pré-imagem* de um conjunto Y , denotada por $f^{-1}(Y)$, é definida pelo conjunto

$$f^{-1}(Y) = \{x \in X; f(x) \in Y\}.$$

Em outras palavras, são os pontos de X que são levados em Y pela função f . Dizemos que f é injetiva se, para cada ponto $x \in X$, temos que $f^{-1}(\{x\})$ é vazio ou tem um único elemento. Dizemos que f é sobrejetiva se para todo $x \in X$, temos que $f^{-1}(\{x\})$ é não vazio. Quando f é injetiva e sobrejetiva, ou seja, quando para todo $x \in X$ a pré-imagem $f^{-1}(\{x\})$ contém exatamente um elemento, dizemos que f é *bijetiva*.

1.2 Espaços métricos

Os conceitos de proximidade, continuidade e limites de uma órbita, só fazem sentido quando temos uma estrutura no conjunto X que torne essas noções compreensíveis. Assim, consideramos X como um *espaço métrico*, isto é, um conjunto equipado com uma função que, para cada par de pontos $x, y \in X$, associa um número real não negativo $d(x, y)$, a distância entre x e y , chamada de *métrica*. De forma mais precisa, uma métrica é uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ que satisfaz as seguintes propriedades:

$$\text{Simetria:} \quad d(x, y) = d(y, x);$$

$$\text{Positividade:} \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$\text{Desigualdade triangular:} \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Quando temos uma métrica definida em X , podemos definir alguns conceitos elementares que serão importantes. Começamos considerando uma sequência,

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots).$$

Dizemos que L é o limite da sequência (x_n) quando para todo $\epsilon > 0$ arbitrário, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo x_n , com $n > n_0$, tem-se $d(x_n, L) < \epsilon$. Nesse caso, escrevemos $x_n \rightarrow L$.

Dado um ponto $a \in X$, definimos uma *bola de centro a e raio r* como o conjunto de todos os pontos do conjunto X cuja distância ao ponto a é menor que o raio r , ou seja,

$$B_{a,r} = \{x \in X; d(x, a) < r\}.$$

Se um subconjunto $A \subset X$ satisfaz que para cada ponto $a \in A$ existe uma bola $B_{a,r}$ contida em A , dizemos que A é um *aberto de X* . Além disso, dizemos que um conjunto $V \subset X$ é uma *vizinhança* de um ponto $a \in X$ quando V contém um conjunto aberto que contém a .

O *fecho* de um subconjunto $B \subset X$, denotado por $\overline{B}$, é formado por todos os pontos $x \in X$ que são limites de alguma sequência $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B$. De acordo com [6] (Capítulo 5, Proposição

10), um ponto $x \in \overline{B}$ se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existe um $y \in B$ tal que $d(x, y) < \epsilon$. Além disso, $B \subset X$ é dito ser um conjunto *fechado* quando $B = \overline{B}$, isto é, quando o limite de qualquer sequência convergente $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B$, pertence a B .

1.3 Propriedades da dinâmica

Dado um sistema dinâmico $f : X \rightarrow X$ e um ponto $x \in X$, um dos principais objetivos do estudo da dinâmica de f é o entendimento dos pontos limites da órbita de x , isto é, limites de sequências ou subsequências de $\mathcal{O}(x)$. Este conjunto é conhecido como ω -*limite* de x e denotado por $\omega(x)$. De forma mais técnica, dizemos que $z \in \omega(x)$ se existe uma sequência infinita e crescente de números naturais $n_1, n_2, \dots$, tal que $f^{n_i}(x) \rightarrow z$, ou seja,

$$\omega(x) = \{z \in X; \exists (n_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N} \text{ crescente, com } f^{n_i}(x) \rightarrow z\}.$$

Observação 1.3.1. Quando f é bijetora é possível definir o conjunto chamado de α -*limite*, porém, como este conjunto não será abordado no decorrer do trabalho, vamos omitir esta definição.

Dizemos que um conjunto $A \subset X$ é um *atrator* de $f : X \rightarrow X$ se existe um conjunto aberto $U \subset X$ tal que $A \subset U$, $f(\overline{U}) \subset U$ e $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} f^n(U)$. O conjunto U , satisfazendo as condições anteriores, é chamado de *região de captura* e o conjunto

$$B(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} f^{-n}(U),$$

é chamado de *bacia de atração do atrator* A . Ou seja, a bacia de atração de um atrator é formada pelos pontos que são atraídos para A com a evolução da dinâmica. Quando $B(A) = X$, ou seja, todos os pontos têm sua órbita atraída para A , dizemos que A é um *atrator global*.

Observação 1.3.2. 1. Note que uma vez que a órbita de x entra no conjunto A ela não pode mais sair, por isso o chamamos de atrator.

2. Se $f : X \rightarrow X$ é invertível, um conjunto $R \subset X$ é chamado de *repulsor* de f se R é um atrator de f^{-1} .

Um sistema dinâmico $f : X \rightarrow X$ é chamado de *transitivo* se existe $x \in X$ tal que $\overline{\mathcal{O}(x)} = X$, ou seja, se f possui alguma *órbita densa*. Em outras palavras, f é transitiva se existe algum ponto $x \in X$ tal que, dado qualquer conjunto aberto $U \subset X$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in U$. Esta propriedade nos diz que a órbita se espalha por todo o conjunto X .

Uma propriedade de "espalhamento mais forte" é a chamada *topologicamente mixing*, que ocorre se, para todo par de abertos U e V em X , existe um inteiro $N = N(U, V)$ tal que

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset, \text{ para todo } n \geq N.$$

Com isso, a partir de um certo instante N , todas as iteradas do conjunto U intersectam o conjunto V . Isso nos diz que iterados de conjuntos com interior não vazio se espalham pelo espaço de fase e se misturam, por isso o nome *mixing*.

Observação 1.3.3. Em [2] (Capítulo 1, Corolário 1.7) é demonstrado que, sob certas condições, se f é topologicamente *mixing*, então f é transitiva.

Dizemos que $f : X \rightarrow X$ tem *sensibilidade às condições iniciais* se existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $x \in X$ e toda vizinhança V de x , existem $y \in V$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \epsilon$. Isso significa que existem pontos arbitrariamente próximos de x cuja a órbita eventualmente se separa da órbita de x por uma distância estritamente positiva.

A sensibilidade às condições iniciais nos leva a uma das propriedades mais famosas e mais investigadas da Teoria dos Sistemas Dinâmicos, o caos, que formalmente definimos da seguinte forma: dizemos que $f : X \rightarrow X$ é *caótico* se as três condições abaixo são satisfeitas:

- f tem sensibilidade às condições iniciais;
- O conjunto de seus pontos periódicos de f é denso em X ;
- f é transitiva.

Observação 1.3.4. De acordo com [2], existem diferentes definições de sistema caótico e é possível mostrar em algumas situações que se f é uma transformação contínua então o conjunto dos pontos periódicos de f ser denso e f ser transitiva implicam que f tem sensibilidade às condições iniciais.

Quando conhecemos características dinâmicas de um determinado sistema, é possível mostrar que outros sistemas também possuem as mesmas características. Para isso é necessário que estes estejam relacionados pelo que chamamos de conjugação. Assim, finalizamos esse capítulo formalizando esse conceito e apresentando um resultado referente ao compartilhamento de propriedades dinâmicas por sistemas conjugados.

Sejam $f : X \rightarrow X$ e $g : Y \rightarrow Y$, então uma *conjugação* entre f e g é uma transformação $h : X \rightarrow Y$ que é contínua e que tem inversa também contínua (um homeomorfismo) tal que,

$$g \circ h = h \circ f.$$

Proposição 1.3.5. Sejam $f : X \rightarrow X$ e $g : Y \rightarrow Y$ e $h : X \rightarrow Y$ uma conjugação entre f e g .

- i. Se p é um ponto periódico de período P para f então $h(p)$ é um ponto periódico de período P para g .
- ii. Se $\mathcal{O}(x)$ é uma órbita de f , então $h(\mathcal{O}(x))$ é uma órbita de g , e vale que $h(\mathcal{O}(x)) = \mathcal{O}(h(x))$.

iii. Se $\mathcal{O}(x)$ é uma órbita densa de f , então $\mathcal{O}(h(x))$ é uma órbita densa de g .

Demonstração. Primeiramente note que, sendo h uma conjugação entre f e g , temos $g \circ h = h \circ f$, e assim, $h^{-1} \circ g \circ h = f$. Logo,

$$\begin{aligned} f^n &= f \circ f \circ \dots \circ f \\ &= (h^{-1} \circ g \circ h) \circ (h^{-1} \circ g \circ h) \circ \dots \circ (h^{-1} \circ g \circ h) \\ &= h^{-1} \circ g \circ (h \circ h^{-1}) \circ g \circ (h \circ \dots \circ h^{-1}) \circ g \circ h \\ &= h^{-1} \circ g \circ id \circ g \circ id \circ \dots \circ id \circ g \circ h \\ &= h^{-1} \circ g \circ g \circ \dots \circ g \circ h \\ &= h^{-1} \circ g^n \circ h, \end{aligned}$$

ou seja, $h^{-1} \circ g^n \circ h = f^n$ e assim $g^n \circ h = h \circ f^n$.

i. Segue da igualdade acima que se $p = f^P(p)$, então,

$$p = f^P(p) = h^{-1} g^P h(p) \Rightarrow h(p) = g^P(h(p)).$$

Logo, $h(p)$ é ponto periódico de período P para g .

ii. Consideremos a órbita de f como $\mathcal{O}_f(x) = \{f^n(x); n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ e a órbita de g como $\mathcal{O}_g(x) = \{g^n(x); n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} h(\mathcal{O}_f(x)) &= \{h(f^n(x)); n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \\ &= \{g^n(h(x)); n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \\ &= \mathcal{O}_g(h(x)), \end{aligned}$$

pois, como visto acima, $h \circ f^n = g^n \circ h$.

iii. Seja U um aberto qualquer de Y . Devemos mostrar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n(h(x)) \in U$.

Como h é uma conjugação entre f e g , h é contínua, então $h^{-1}(U)$ é aberto em X . Por hipótese, $\mathcal{O}(x)$ é densa em X , isto é, $\overline{\mathcal{O}(x)} = X$, e assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(x) \in h^{-1}(U)$. Logo,

$$h(f^{n_0}(x)) \in h(h^{-1}(U)) = U.$$

Como $h \circ f^{n_0} = g^{n_0} \circ h$, segue que $g^{n_0}(h(x)) \in U$. Portanto, $\overline{\mathcal{O}(h(x))} = Y$, ou seja, $\mathcal{O}(h(x))$ é densa de g . $\square$

Capítulo 2

Dinâmica enumerável

Começamos este capítulo lembrando que um conjunto X é dito ser: *finito* quando é vazio ou quando existe uma bijeção $\varphi : X \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$; *enumerável* quando é finito ou quando existe uma bijeção $\varphi : X \rightarrow \mathbb{N}$. Nas seções que seguem apresentaremos propriedades da dinâmica em conjuntos finitos e em $\mathbb{N}$.

2.1 Dinâmica finita

Nesta seção faremos um estudo do comportamento das órbitas de sistemas dinâmicos em conjuntos finitos. Assim, consideremos $f : X \rightarrow X$, onde X é finito, isto é, $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$.

O resultado abaixo descreve completamente o comportamento das órbitas de f .

Teorema 2.1.1. *Considere X um conjunto finito e $f : X \rightarrow X$. Então podemos decompor X como uma união de conjuntos disjuntos*

$$X = B_1 \cup \dots \cup B_j,$$

sendo cada B_i a bacia de atração de uma órbita periódica.

Demonstração. Como vimos no capítulo anterior a órbita de $x \in X$ é dada por

$$\mathcal{O}(x) = \{f^n(x); n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Já que o conjunto acima é a união de pontos pertencentes a X , então é um subconjunto de X e, portanto, também é finito. Desta forma existem $k, l \in \mathbb{N}$, tais que,

$$f^{l+k}(x) = f^k(x),$$

ou seja, o ponto $f^k(x)$ é um ponto periódico de período menor que ou igual a l e a órbita finita de x é dada por, $\mathcal{O}(x) = \{x, f(x), \dots, f^k(x), f^{k+1}(x), \dots, f^{k+l-1}(x)\}$.

Afirmção 1: Os pontos $x, f(x), \dots, f^{k-1}(x)$ estão na bacia de atração da órbita periódica $\{f^k(x), f^{k+1}(x), \dots, f^{l+k-1}(x)\}$.

De fato, seja B_1 a bacia de atração da órbita periódica de $f^k(x)$, ou seja, $B_1 = B(\mathcal{O}(f^k(x)))$. Note que,

- $x \in B_1$, pois $f^k(x) \in \mathcal{O}(f^k(x))$;
- $f(x) \in B_1$, pois $f^{k-1}(f(x)) = f^k(x) \in \mathcal{O}(f^k(x))$;
- $f^2(x) \in B_1$, pois $f^{k-2}(f^2(x)) = f^k(x) \in \mathcal{O}(f^k(x))$;

e de modo geral, $f^{k-1}(x) \in B_1$, pois $f(f^{k-1}(x)) = f^k(x) \in \mathcal{O}(f^k(x))$.

Agora podemos ter duas situações: ou $B_1 = X$, e nesse caso todos os pontos de X são atraídos pela órbita periódica ou, então, $B_1 \neq X$.

Afirmção 2: Se $B_1 \neq X$, considere um ponto y em $X \setminus B_1$, a órbita de y não pode entrar em B_1 .

De fato, suponha que exista $f^t(y) \in B_1$, para algum $t \in \mathbb{N}$. Assim, por definição de bacia de atração, existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $f^\alpha(f^t(y)) \in \{f^k(x), f^{k+1}(x), \dots, f^{k+l-1}(x)\}$, isto é, $f^{\alpha+t}(y) = f^\beta(x)$ para algum $\beta \in \{k, k+1, \dots, k+l-1\}$, ou seja, a iterada $\alpha+t$ de y pertence a $\mathcal{O}(f^k(x))$. Logo, $y \in B_1$, o que é uma contradição.

Além disso, o conjunto $X \setminus B_1$ também é finito e, pelo que foi mostrado anteriormente, a órbita de y está contida em $X \setminus B_1$, logo de forma similar ao que foi feito para X , podemos encontrar uma órbita periódica que ou inclui y ou atrai y . A bacia de atração desta órbita é B_2 .

Assim, ou $B_1 \cup B_2 = X$ ou $B_1 \cup B_2 \neq X$. Se vale o segundo caso então, como antes, podemos tomar um ponto $z \in (X \setminus B_1) \cup B_2$ e, repetindo o procedimento, teremos que X pode ser escrito como união finita de bacias de atração de órbitas periódicas,

$$X = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_j.$$

Consequentemente, todo ponto $a \in X$ pertence à bacia de atração de uma órbita periódica e, dessa forma, a partir de um certo instante, seus iterados, no futuro, estarão exatamente sobre essa órbita periódica. $\square$

Observação 2.1.2. Se X for um espaço métrico, podemos concluir do Teorema 2.1.1 que, nesse caso, temos j órbitas atratoras e que cada uma delas é o ω -limite de um ponto pertencente a uma das bacias de atração.

Observação 2.1.3. Se $f : X \rightarrow X$ é uma bijeção, a bacia de atração de uma órbita periódica é ainda mais simples. Note que se,

$$\{x, f(x), \dots, f^{P-1}(x), f^P(x) = x\},$$

é uma órbita periódica, então sua pré-imagem é ela mesma, pois cada ponto tem exatamente uma pré-imagem: de $f^k(x)$ é $f^{k-1}(x)$ e a de x é $f^{P-1}(x)$, pois a imagem deste ponto é x . Portanto a bacia de atração de uma órbita periódica é ela mesma. Logo, pelo Teorema 2.1.1 o conjunto X pode ser decomposto como uma união finita e disjunta de bacias de atração de órbitas periódicas, que são as próprias órbitas periódicas. Desta forma, no caso de uma bijeção de um conjunto finito temos que cada ponto pertence a exatamente uma órbita periódica.

2.2 Dinâmica infinita enumerável

Nesta seção faremos o estudo de sistemas dinâmicos definidos sobre um conjunto infinito enumerável, a saber, $\mathbb{N}$. Vale ressaltar que, se uma dinâmica definida em um conjunto enumerável qualquer é conjugada a uma dinâmica em $\mathbb{N}$, segue da Proposição 1.3.5 que ela herdará diversas propriedades topológicas da dinâmica em $\mathbb{N}$.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.2.1. Seja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{se } x \text{ é par} \\ 2x, & \text{se } x \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, um ponto $x \in \mathbb{N}$ pode ser escrito de maneira única, como

$$x = 2^{p_1} 3^{p_2} 5^{p_3} 7^{p_4} \dots,$$

onde $p_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, para todo k . Então,

$$f(x) = 2^{p_1-1} 3^{p_2} 5^{p_3} 7^{p_4} \dots, f^2(x) = 2^{p_1-2} 3^{p_2} 5^{p_3} 7^{p_4} \dots, \dots, f^{p_1}(x) = 3^{p_2} 5^{p_3} 7^{p_4} \dots.$$

Como $f^{p_1}(x)$ não é múltiplo de 2 sua imagem por f é $2 \cdot 3^{p_2} 5^{p_3} 7^{p_4} \dots$, que, por sua vez, é levado por f em $3^{p_2} 5^{p_3} 7^{p_4}$. Ou seja, o ponto inicial foi atraído para a órbita periódica (de período 2) $\{3^{p_2} 5^{p_3} 7^{p_4} \dots, 2 \cdot 3^{p_2} 5^{p_3} 7^{p_4} \dots\}$. Assim, segue que $\omega(x) = \{3^{p_2} 5^{p_3} 7^{p_4} \dots, 2 \cdot 3^{p_2} 5^{p_3} 7^{p_4} \dots\}$, já que as iterações de f se aproximam (neste caso são iguais) infinitas vezes desses pontos, ou seja, $\omega(x)$ é uma órbita periódica.

Exemplo 2.2.2. Seja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, dada por,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{se } x \text{ é par} \\ 2^x, & \text{se } x \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

Para entender a dinâmica das órbitas de f começemos considerando $x = 3$. Assim, como x é ímpar, $x_1 = f(3) = 2^3 = 8$, que, por sua vez, é par e $x_2 = f(8) = \frac{8}{2} = 4$, $x_3 = f(4) = \frac{4}{2} = 2$

e $x_4 = f(2) = \frac{2}{2} = 1$. Como 1 é ímpar, temos que $x_5 = f(1) = 2^1 = 2 = x_3$. Logo, $\mathcal{O}(3) = \{3, 8, 4, 2, 1\}$, representada na Figura 2.1 e assim, $\omega(3)$ é a órbita periódica $\{2, 1\}$.

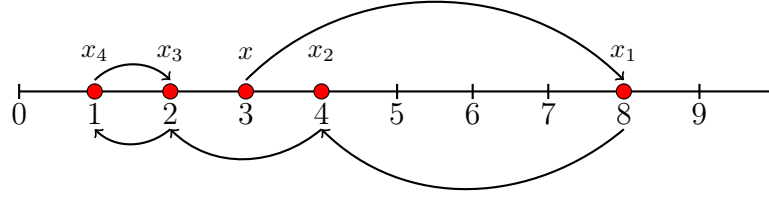


Figura 2.1: Iterações para $x = 3$.

De forma geral, se x é ímpar então sua imagem é 2^x , que é par. As iteradas desse ponto, por sua vez, serão $2^{x-1}, 2^{x-2}, \dots, 2, 1, 2, 1, \dots$, ou seja, $\mathcal{O}(x) = \{x, 2^x, 2^{x-1}, \dots, 2, 1\}$.

Se x é par então é da forma $x = 2^k p$ (com p ímpar). Assim, $\mathcal{O}(x) = \{2^{k-1}p, 2^{k-2}p, \dots, p\} \cup \mathcal{O}(p)$ e a órbita de p , que é ímpar, é a vista acima.

Logo, a órbita periódica $\{1, 2\}$ atrai todas as órbitas, não importando o ponto de partida. Portanto, temos um atrator global, a órbita periódica $\{2, 1\}$, que é igual ao $\omega(x)$, para todo $x \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.2.3. Seja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, dada por,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 1 \\ x + 1, & \text{se } x \text{ é primo} \\ \text{maior fator primo na decomposição de } x, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para entender a dinâmica das órbitas de f , comecemos considerando $x = 5$. Como 5 é um número primo, obtemos $x_1 = f(5) = 6$, que como não é primo, $x_2 = f(6) = 3$, um número primo. E com isso, $x_3 = f(3) = 4$ e $x_4 = f(4) = 2$. Como 2 é um número primo $f(2) = 3$, retornando para o ponto x_4 . Logo, $\mathcal{O}(5) = \{5, 6, 3, 4, 2\}$, representada na Figura 2.2, e assim, $\omega(3)$ é a órbita periódica $\{3, 4, 2\}$.

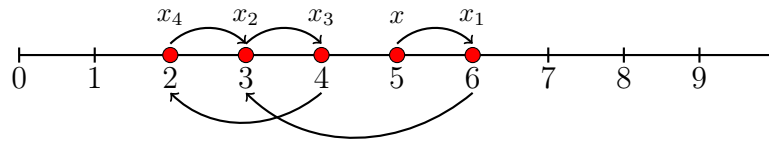


Figura 2.2: Iterações para $x = 5$.

Assim, note que, quando $x \neq 1$ após um número finito de iteradas chegamos à órbita periódica $\{2, 3, 4\}$. Esta órbita é um atrator global, pois note que a órbita sempre passará por um número primo, pois se o número não é primo sua imagem certamente o será, já que será

o maior fator primo da decomposição. Portanto, basta mostrar que a órbita de um primo irá para a órbita periódica acima. A órbita do primeiro primo, 2, já está na órbita periódica.

Vamos agora proceder por indução completa. Sejam $p_1, p_2, \dots, p_n$ os n primeiros primos, tal que $p_1 < p_2 < \dots < p_n$. Assumindo que $f^k(p_i) \rightarrow \{2, 3, 4\}$ então queremos verificar se $f^k(p_{n+1}) \rightarrow \{2, 3, 4\}$. Note que, $f(p_{n+1}) = p_{n+1} + 1$ é par, pois p_{n+1} é primo e, portanto, é ímpar, já que é diferente de 2. Assim, podemos escrever $f(p_{n+1}) = 2q_1^{k_1} \dots q_r^{k_r}$, onde q_i 's são primos menores que p_{n+1} e $q_1 < q_2 < \dots < q_r$. Portanto

$$f^2(p_{n+1}) = f(p_{n+1} + 1) = f(2q_1^{k_1} \dots q_r^{k_r}) = q_r = p_l,$$

para algum $l \in \{1, 2, \dots, n\}$, e a órbita de p_l contém a órbita periódica $\{2, 3, 4\}$ pela hipótese de indução.

Logo, a órbita de p_{n+1} também contém essa órbita periódica. Portanto, a órbita de qualquer primo contém a órbita periódica $\{2, 3, 4\}$, e assim, $\{2, 3, 4\}$ é um atrator global para a dinâmica.

Exemplo 2.2.4. Seja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, dada por,

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{se } x \text{ é primo ou se } x = 1 \\ \text{menor fator primo na decomposição de } x, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Para entender a dinâmica, comecemos com $x = 1$. Assim, obtemos $x_1 = f(1) = 3$, que como é um número primo, $x_2 = f(3) = 5$, $x_3 = f(5) = 7$ e $x_4 = f(7) = 9$. Como 9 não é um número primo, $x_5 = f(9) = 3 = x_1$. Logo, $\mathcal{O}(1) = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ que possui a órbita periódica $\{3, 5, 7, 9\}$.

Se $x = 2$, $x_1 = f(2) = 4$ e $x_2 = f(4) = 2 = x_1$. Assim, a órbita de 2 é periódica e é dada por $\{2, 4\}$.

Se x é par e maior que 2 então x não é primo e seu menor fator primo é 2. Portanto $f(x) = 2$ e este ponto é atraído para a órbita periódica $\{2, 4\}$.

Se x é ímpar, note sua órbita sempre passará por um número primo, pois se x não é primo sua imagem certamente o será. Vamos mostrar que a órbita de todo número ímpar é atraída para a órbita periódica $\{3, 5, 7, 9\}$. Para isso, basta mostrar que a órbita de todo primo maior que 2 irá para essa órbita periódica.

Vamos proceder por indução completa. Sejam $p_1, p_2, \dots, p_n$, os n primeiros primos tal que $2 < p_1 < p_2 < \dots < p_n$. Assumindo que $f^k(p_i) \rightarrow \{3, 5, 7, 9\}$, queremos verificar se $f^k(p_{n+1}) \rightarrow \{3, 5, 7, 9\}$. Note que, $f(p_{n+1}) = p_{n+1} + 2$ e assim temos dois casos, $p_{n+1} + 2$ é primo ou não.

- Se $p_{n+1} + 2$ é primo, então sendo p_{n+1} e $p_{n+1} + 2$ primos diferentes de 3, temos que $p_{n+1} + 1$ é múltiplo de 3, pois de três números seguidos, um deles deve ser múltiplo de 3. Logo, $f(p_{n+1} + 2) = (p_{n+1} + 2) + 2 = (p_{n+1} + 1) + 3$ também é múltiplo de 3 (e não pode ser par).

Portanto, $f^3(p_{n+1}) = f^2(p_{n+1} + 2) = f(p_{n+1} + 4) = 3$ e a órbita $\mathcal{O}(p_{n+1}) = \{p_{n+1}, p_{n+1} + 2, p_{n+1} + 4, 3, 5, 7, 9\}$ é então atraída para órbita periódica $\{3, 5, 7, 9\}$.

• Se $p_{n+1} + 2$ não é primo, $f(p_{n+1}) = p_{n+1} + 2 = q_1^{k_1} \cdots q_r^{k_r}$, onde q_i 's são primos menores que p_{n+1} e $q_1 < q_2 < \cdots < q_r$. Portanto,

$$f^2(p_{n+1}) = f(p_{n+1} + 2) = f(q_1^{k_1} \cdots q_r^{k_r}) = q_1 = p_l,$$

para algum $l \in \{1, 2, \dots, n\}$, e a órbita de p_l contém a órbita periódica $\{3, 5, 7, 9\}$ pela hipótese de indução. Logo, a órbita de p_{n+1} também contém essa órbita periódica.

Portanto, a órbita de qualquer primo maior que 2 contém a órbita $\{3, 5, 7, 9\}$.

Exemplo 2.2.5. Seja a função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} x/2, & \text{se } x \text{ é par} \\ 3x + 1, & \text{se } x \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

Considerando $x = 3$, como 3 é ímpar, obtemos $x_1 = f(3) = 10$, que é par, assim $x_2 = f(10) = 5$, $x_3 = f(5) = 16$, $x_4 = f(16) = 8$, $x_5 = f(8) = 4$, $x_6 = f(4) = 2$, $x_7 = f(2) = 1$ e $x_8 = f(1) = 4 = x_5$. Assim, $\mathcal{O}(3) = \{3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1\}$, representada na Figura 2.3, e vale que $\omega(x)$ é a órbita periódica $\{4, 2, 1\}$.

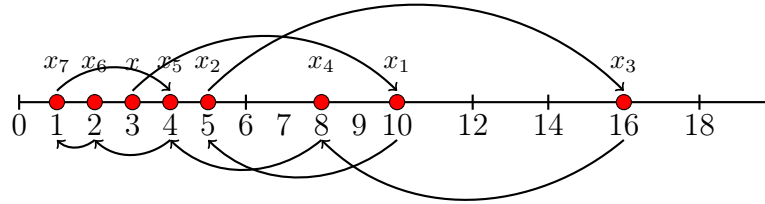


Figura 2.3: Iterações para $x = 3$.

Para $x = 1$, note que $\mathcal{O}(1) = \{4, 2, 1\}$, que se trata de uma órbita periódica.

A função acima está associada com o *Problema* $3x + 1$ ou *Conjectura de Collatz* que diz que a partir de qualquer número inteiro positivo n , as iterações de f eventualmente alcançarão a órbita periódica $\{4, 2, 1\}$, isto é, essa órbita é um atrator global.

Segundo [4], o Problema $3x + 1$ circulou de boca a boca por muitos anos e geralmente é atribuído à Lothar Collatz (1910-1990), que dizem ter divulgado o problema oralmente no Congresso Internacional de Matemática em Cambridge, Massachusetts, em 1950. Este problema fascinou matemáticos e não matemáticos. Durante a década de 1960 foram feitos grandes cálculos para provar a conjectura, supostamente, verificando para todos os números menores que 10^9 . Entretanto, este continua a ser um problema não resolvido, e seu histórico até agora sugere que este é um problema extraordinariamente difícil, completamente fora do alcance da matemática atual. Atualmente, a partir de cálculos computacionais, segundo [8] a conjectura já foi verificada para todos números menores que 20×2^{58} .

2.2.1 ω -limite

O resultado a seguir caracteriza o conjunto limite de qualquer ponto em $\mathbb{N}$.

Teorema 2.2.6. *Sejam $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{N}$. Então $\omega(x)$ ou é vazio ou é uma órbita periódica.*

Demonstração. Suponha que $w(x)$ não é vazio, assim existe $p \in w(x)$. Com isso, por definição de $\omega(x)$, existe uma sequência de números naturais $n_i \rightarrow +\infty$ tal que $f^{n_i}(x) \rightarrow p$. Para todo $i > i_0$, $d(f^{n_i}(x), p) < 1$. Assim, como $f^{n_i}(x)$ e $p \in \mathbb{N}$, temos que $f^{n_i}(x) = p$, para todo $i > i_0$. Excluindo os primeiros termos da sequência $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ podemos supor que $f^{n_i}(x) = p$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Portanto, temos

$$f^{n_1}(x) = p \quad \text{e} \quad f^{n_2}(x) = p = f^{n_2-n_1}(f^{n_1}(x)) = f^{n_2-n_1}(p),$$

mostrando que p de fato é um ponto periódico, e assim, sua órbita é periódica.

Mostremos agora que $\omega(x) = \mathcal{O}(p)$. Iniciaremos pela inclusão $\mathcal{O}(p) \subset \omega(x)$. Seja $y \in \mathcal{O}(p)$, então, por definição, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(p) = y$. Como $f^{n_i}(x) = p$, para todo $i > i_0$, segue que $f^{n_0}(f^{n_i}(x)) = f^{n_0+n_i}(x) = f^{n_0}(p) = y$. Escrevendo $m_i = n_0 + n_i$, segue que a sequência $(f^{m_1}, f^{m_2}, \dots, f^{m_i}, \dots)$ converge para y , pois $f^{m_i}(x) = y$, para todo $i > i_0$. Logo, $y \in \omega(x)$, e com isso, $\mathcal{O}(p) \subset \omega(x)$.

Mostremos a outra inclusão. Seja $y \in \omega(x)$, por definição, existe uma sequência $(n_i) \subset \mathbb{N}$ e $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_i}(x) = y$, para todo $i \geq i_0$. Como $p \in \omega(x)$, por definição, existe uma sequência $(m_i) \subset \mathbb{N}$ e $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{m_i}(x) = p$, para todo $j \geq j_0$. Se $n_{i_0} > m_{j_0}$,

$$\begin{aligned} y = f^{n_{i_0}}(x) &= f^{n_{i_0}+m_{j_0}-m_{j_0}}(x) \\ &= f^{n_{i_0}-m_{j_0}}(f^{m_{j_0}}(x)) \\ &= f^{n_{i_0}-m_{j_0}}(p), \end{aligned}$$

como $n_{i_0} - m_{j_0} \in \mathbb{N}$, então $y \in \mathcal{O}(p)$. Já se $n_{i_0} < m_{j_0}$, com $(n_i) \rightarrow +\infty$, então existe $i_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_{i_1} > m_{j_0}$ e assim,

$$\begin{aligned} y = f^{n_{i_1}}(x) &= f^{n_{i_1}+m_{j_0}-m_{j_0}}(x) \\ &= f^{n_{i_1}-m_{j_0}}(f^{m_{j_0}}(x)) \\ &= f^{n_{i_1}-m_{j_0}}(p), \end{aligned}$$

como $n_{i_1} - m_{j_0} \in \mathbb{N}$, então $y \in \mathcal{O}(p)$. Logo $\omega(x) \subset \mathcal{O}(p)$ e, portanto, $\omega(x) = \mathcal{O}(p)$. □

A partir deste resultado podemos concluir que o ω -limite de todo o conjunto $\mathbb{N}$ ou é vazio ou é uma união enumerável de órbitas periódicas, assim como foi observado nos exemplos.

2.2.2 Órbita densa

Nesta subseção será caracterizado situações em que existe algum ponto $x \in \mathbb{N}$ cuja órbita é densa em todo $\mathbb{N}$. Observe que ficar a uma distância menor do que 1 de um ponto $y \in \mathbb{N}$ é, na verdade, o mesmo que ser igual a y .

Teorema 2.2.7. *Seja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Se f tem órbita densa, então não tem órbitas periódicas.*

Demonstração. Suponha que f tenha alguma órbita periódica. Então existe um subconjunto finito $\mathcal{O}$ de $\mathbb{N}$, a saber, a órbita periódica, tal que $f(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}$. Obviamente, por $\mathcal{O}$ ser finito, ele não é denso em $\mathbb{N}$. Além disso, qualquer órbita que entre em $\mathcal{O}$ não pode ser densa em $\mathbb{N}$, pois passará no máximo por um número finito de pontos, tendo em vista que, quando entrar em $\mathcal{O}$, não sairá mais. Por outro lado, qualquer órbita que não entre em $\mathcal{O}$ também não é densa, já que não passará pelos pontos de $\mathcal{O}$. Logo, a existência de ao menos uma órbita periódica impede a existência de órbitas densas, concluindo a demonstração. $\square$

Corolário 2.2.8. *Se $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é uma aplicação transitiva, então $\omega(x) = \emptyset$, para todo $x \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.2.6, temos que $\omega(x) = \emptyset$ ou é uma órbita periódica. Porém, pelo Teorema 2.2.7, f não tem órbitas periódicas. Portanto, $\omega(x) = \emptyset$. $\square$

Exemplo 2.2.9. Considere a transformação *translação* $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $t(x) = x + 1$. Analisando a órbita de $x = 0$, temos,

$$\mathcal{O}(0) = \{0, t(0), t^2(0), \dots\} = \{0, 0 + 1, 0 + 2, 0 + 3, \dots\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}.$$

Isso significa que a órbita de 0 é densa em $\mathbb{N}$. Assim, pelo Teorema 2.2.7, t não possui órbitas periódicas.

Teorema 2.2.10. *Uma transformação $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é transitiva se, e somente se, é conjugada a $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, onde $t(x) = x + 1$.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Pelo Exemplo 2.2.9 t possui órbita densa em $\mathbb{N}$. Pela Proposição 1.3.5 se t possui órbita densa, sua conjugada f também possui. Logo, f é transitiva.

($\Rightarrow$) Suponha agora que f seja transitiva, ou seja, que existe $x \in \mathbb{N}$ tal que sua órbita $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$ é densa em $\mathbb{N}$. Assim, temos que $\{x, f(x), \dots\} = \mathbb{N}$.

Queremos, então, construir uma conjugação entre t e f . Considere $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $h(n) = f^n(x)$.

Como $\{x, f(x), f^2(x), \dots\} = \mathbb{N}$, segue que h é sobrejetiva, pois tomando $y \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $y = f^m(x)$, ou seja, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $h(m) = y$. Além disso, como todos os pontos de $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$ são distintos (visto que, do contrário, f teria uma órbita periódica, contradizendo o Teorema 2.2.7), segue que f é injetiva. Portanto, h é uma bijeção e sua

inversa satisfaz $h^{-1}(f^n(x)) = n$, pois, $h(n) = f^n(x) \Rightarrow h \circ h^{-1}(f^n(x)) = h(n) \Rightarrow h^{-1}(f^n(x)) = h^{-1} \circ h(n) \Rightarrow h^{-1}(f^n(x)) = n$. Usando essa observação, obtemos que,

$$h^{-1}(f(h(k))) = h^{-1}(f(f^k(x))) = h^{-1}(f^{k+1}(x)) = k + 1 = t(k),$$

ou seja, $h^{-1} \circ f \circ h = t$. Finalmente, como toda aplicação $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é contínua, segue que h é de fato uma conjugação entre f e t . $\square$

2.2.3 Topologicamente *mixing*

A seguir mostraremos que não é possível a existência de uma dinâmica em $\mathbb{N}$ que seja topologicamente *mixing*.

Teorema 2.2.11. *Não existe $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ topologicamente *mixing*.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que exista $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ topologicamente *mixing*. Então, para todo par U e V de subconjuntos de $\mathbb{N}$, temos a existência de um n_0 tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$, para $n \geq n_0$.

Fixemos dois conjuntos unitários $U = \{u\}$ e $V = \{v\}$, onde $u, v \in \mathbb{N}$, $u \neq v$, que são abertos em $\mathbb{N}$, pois a bola aberta centrada em u ou v e de raio menor do que $\frac{1}{2}$ é exatamente o ponto u ou v . Nesse caso, dizer que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$, para todo $n \geq n_0$, é equivalente a dizer que $f^n(u) = v$, para todo $n \geq n_0$. Em particular, $f(v) = f(f^{n_0}(u)) = f^{n_0+1}(u) = v$, ou seja, v é ponto fixo de f , e assim, $f^n(V) = V$.

Invertendo os papéis de U e V , isto é, $f^n(V) \cap U \neq \emptyset$, para $n \geq n_1$, ou seja, $V \cap U \neq \emptyset$. Como U e V são unitários, segue que $v = u$, o que é uma contradição. Portanto, não existe $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ topologicamente *mixing*. $\square$

Capítulo 3

Dinâmica não enumerável e o *Shift*

Neste capítulo apresentamos um sistema dinâmico definido sobre um conjunto não enumerável. Mais especificamente, estudaremos a aplicação conhecida na literatura como *shift*, definida em um espaço de sequências, que possui diversas propriedades dinâmicas interessantes.

Observação 3.0.1. Neste capítulo consideraremos $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

3.1 O espaço de sequências

Considere o conjunto

$$\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots), x_i \in \{0, 1\}, \text{ para todo } i \in \mathbb{N}\},$$

formado por sequências infinitas de zeros e uns. Representaremos os elementos de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ sem as vírgulas separando as entradas das sequências e sem os parênteses. Assim, por exemplo, temos o elemento de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$,

$$011000111101001 \dots,$$

onde as reticências substituem uma infinidade de elementos que, obviamente, não podemos escrever. O conjunto $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ é também chamado de *espaço de palavras*, as sequências de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ de *palavras* e $\{0, 1\}$ de *letras*.

Para simplificar a notação convencionaremos o seguinte, o símbolo $0^{+\infty}$ corresponde a um bloco infinito (para a direita) de símbolos 0 ou seja,

$$0^{+\infty} = 000000 \dots,$$

(e nesse caso as reticências substituem a infinidade de zeros que não escrevemos). De forma similar definimos $1^{+\infty}$. Vamos também indicar a repetição de um bloco de símbolos por meio

dessa notação, por exemplo,

$$\begin{aligned}(0110)^{+\infty} &= 0110011001100110 \cdots, \\ 001(1011)^{+\infty} &= 001101110111011 \cdots.\end{aligned}$$

Uma das características que diferenciam o espaço que estamos estudando neste capítulo, do conjunto abordado no capítulo anterior, é o fato de que ele não é enumerável. Lembrando que um conjunto é não enumerável quando não existe uma bijeção entre ele e o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Vamos provar que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ é não enumerável usando uma técnica introduzida por Georg Cantor no final do Século XIX.

Proposição 3.1.1. $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ é não enumerável.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que exista uma bijeção $h : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Assim, podemos montar uma lista de elementos de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ tomando,

$$x_0 = h(0), x_1 = h(1), x_2 = h(2), \cdots.$$

Cada elemento dessa lista é uma sequência de símbolos 0 e 1, isto é,

$$\begin{aligned}x_0 &= (x_{00}, x_{01}, x_{02}, x_{03}, \cdots) \\ x_1 &= (x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, \cdots) \\ x_2 &= (x_{20}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, \cdots) \\ x_3 &= (x_{30}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, \cdots) \\ &\vdots\end{aligned}$$

Por h ser bijetiva e, em particular, sobrejetiva, essa lista deve ser completa, isto é, precisa conter todos os elementos de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Em particular, precisa conter o elemento $y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ dado por,

$$y = (1 - x_{00}, 1 - x_{11}, 1 - x_{22}, 1 - x_{33}, \cdots).$$

Note que y não pode ser o elemento x_0 , pois a primeira coordenada de y é diferente de x_{00} , a primeira coordenada de x_0 ; y também não pode ser x_1 , pois na segunda coordenada as duas sequências são distintas. De forma similar podemos concluir que y não é o elemento x_n qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, e portanto, y não está na lista acima. Logo, h não é sobrejetora, contradizendo nossa hipótese inicial. Desta forma, concluímos que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ não é um conjunto enumerável. $\square$

Diversas propriedades dinâmicas são expressas em termos da topologia do espaço de fases, então para podermos considerar as noções de proximidade e limites precisamos introduzir uma maneira de medir distâncias no espaço das sequências $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, ou seja, precisamos definir uma métrica.

Dadas duas seqüências $x = (x_0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ e $y = (y_0, y_1, y_2, y_3, \dots)$, definimos $N : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por

$$N(x, y) = \min_{k \geq 0} \{x_k \neq y_k\}.$$

Ou seja, $N(x, y)$ nos diz a primeira coordenada em que as seqüências x e y diferem. Por exemplo,

$$N(011101(1)^{+\infty}, 011100(0)^{+\infty}) = 6$$

Note que, $N(x, y) = N(y, x)$ e $N(x, x) = +\infty$. Além disso, se $N(x, y) = +\infty$ então necessariamente as duas seqüências coincidem termo a termo, ou seja, temos $x = y$. Logo, $N(x, y) = +\infty \Leftrightarrow x = y$.

Observação 3.1.2. Note que não faz sentido escrever $N(x, y) = +\infty$, porém usaremos essa notação quando os termos da seqüência x e y forem sempre iguais.

Seja agora um número real entre 0 e 1, por exemplo, $\frac{1}{2}$. Definimos a distância entre duas seqüências x e y , $d : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^+$, por,

$$d(x, y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{N(x, y)}.$$

Essa noção de distância significa que duas seqüências x e y estão próximas se coincidem no início, isto é, $x_0 = y_0, x_1 = y_1, x_2 = y_2$ até um certo $x_k = y_k$ e depois diferem.

Exemplo 3.1.3. Considere os pontos $x = 0^{+\infty}$ e $y = 10^{+\infty}$, vemos que eles diferem no primeiro termo, ou seja, $x_0 \neq y_0$, assim $N(x, y) = 0$. Logo, $d(x, y) = d(0^{+\infty}, 10^{+\infty}) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$.

Agora, considere $x = 010^{+\infty}$ e $y = 0010^{+\infty}$, vemos que eles se diferem no segundo termo, ou seja, $x_1 \neq y_1$, assim $N(x, y) = 1$. Logo, $d(x, y) = d(010^{+\infty}, 0010^{+\infty}) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$.

Proposição 3.1.4. $d : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^+$, onde $d(x, y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{N(x, y)}$, é uma métrica.

Demonstração. A função é simétrica, pois

$$d(x, y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{N(x, y)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{N(y, x)} = d(y, x).$$

Além disso,

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow N(x, y) = +\infty \Leftrightarrow x = y.$$

Por fim, devemos verificar a desigualdade triangular $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Se $d(x, z) \leq d(x, y)$ a desigualdade é satisfeita trivialmente. Se $d(x, z) > d(x, y)$, então as seqüências x e

y coincidem por mais símbolos do que x e z . Agora vamos estimar $d(y, z)$. Note que para os primeiros símbolos, as sequências de x , y e z são iguais. Mas num determinado z_k temos $z_k \neq x_k$. Porém, como x e y coincidem para mais símbolos do que x e z então temos que $z_k \neq x_k = y_k$. Portanto, z_k também é o primeiro símbolo no qual y e z ficam diferentes, o que nos permite concluir que $d(y, z) = d(x, z)$. Logo, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (pois $d(x, y) \geq 0$) e d é realmente uma métrica. $\square$

Definimos agora o *espaço de palavras de comprimento n em $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$* , W_n como sendo o conjunto,

$$W_n = \{(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}); x_i \in \{0, 1\}\}.$$

Dada uma palavra $w \in W_n$ definimos o *cilindro* $[w]$ como sendo o conjunto,

$$[w] = [w_0 w_1 \dots w_{n-1}] = \{x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}; x_0 = w_0, \dots, x_{n-1} = w_{n-1}\},$$

ou seja, este é o conjunto de sequências de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ que coincidem com w em seus n primeiros símbolos.

Note que, da definição de distância, se $a, b \in [w]$ então $d(a, b) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, visto que a e b certamente tem os n primeiros símbolos iguais. Esse fato nos permite caracterizar o cilindro tanto como uma bola fechada,

$$[w] := \left\{ z \in X; d(z, w_0 w_1 \dots w_{n-1} 0^{+\infty}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\},$$

quanto como uma bola aberta,

$$[w] := \left\{ z \in X; d(z, w_0 w_1 \dots w_{n-1} 0^{+\infty}) < \left(\frac{1}{2}\right)^n + \epsilon \right\},$$

(onde escolhemos um $\epsilon > 0$ bem pequeno). Essas duas descrições nos contam que os cilindros são exemplos de conjuntos que ao mesmo tempo são abertos e fechados.

Também, temos que,

$$\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = [0] \cup [1] = [00] \cup [01] \cup [10] \cup [11] = \dots,$$

pois $[0]$ são todas as sequências de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ que começam com 0 e $[1]$ todas as que começam com 1, desta forma $[0] \cup [1] = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Com argumento análogo, para cada $x \in W_n$, podemos escrever,

$$[w] = [w_0 w_1 w_2 \dots w_{n-1}] = [w_0 w_1 w_2 \dots w_{n-1} 0] \cup [w_0 w_1 w_2 \dots w_{n-1} 1].$$

3.2 A dinâmica do *shift*

Vamos agora definir um sistema dinâmico $f : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ dado por,

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots),$$

isto é, f "apaga" a primeira coordenada x_0 e desloca os demais para a esquerda. Por essa razão f é conhecida como *shift*, deslocamento em inglês. O resultado abaixo fornece algumas propriedades do *shift*.

Proposição 3.2.1. *Seja $f : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, $f(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$. Então:*

- i. f é contínua;
- ii. f não é injetora;
- iii. f é sobrejetora.

Demonstração. i. Mostremos que dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que se

$$d((x_n), (y_n)) \leq \delta \text{ então } d(f(x_n), f(y_n)) \leq \epsilon.$$

Vamos considerar inicialmente $\epsilon = \left(\frac{1}{2}\right)^N$, para algum $N \in \mathbb{N}$. Dados $x, y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, afirmar que $d(f(x_n), f(y_n)) \leq \epsilon$ é o mesmo que dizer que

$$d((x_1, x_2, x_3, \dots), (y_1, y_2, y_3, \dots)) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^N,$$

que, por sua vez, significa que $x_i = y_i$, para todo $i \in \{0, 1, \dots, N\}$. Tome $\delta = \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}$. Então, se $d((x_n), (y_n)) \leq \delta = \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}$, temos que $x_i = y_i$, para todo $i \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$. Dessa forma, concluímos que se $d((x_n), (y_n)) \leq \delta$, então $d(f(x_n), f(y_n)) \leq \epsilon$ como desejado.

No caso de um $\epsilon > 0$ qualquer, tomando $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de forma que $\left(\frac{1}{2}\right)^N \leq \epsilon$ e $\delta = \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}$, segue da observação anterior que se $d((x_n), (y_n)) \leq \delta$, então

$$d(f(x_n), f(y_n)) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^N \leq \epsilon,$$

conforme desejado.

- ii. Tomando $01^{+\infty} = (0, 1, 1, 1, \dots)$ e $1^{+\infty} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, vemos que $01^{+\infty} \neq 1^{+\infty}$, porém $f(01^{+\infty}) = f(1^{+\infty}) = 1^{+\infty}$. Logo, f não é injetora.
- iii. Seja $x = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ qualquer. Mostremos que $f^{-1}(\{x\}) \neq \emptyset$. Como,

$$f^{-1}(\{x\}) = f^{-1}(\{(x_0, x_1, x_2, \dots)\}) = \{(0, x_0, x_1, x_2, \dots), (1, x_0, x_1, x_2, \dots)\} \neq \emptyset,$$

segue que f é sobrejetora.

□

Observação 3.2.2. Note que $f([0]) = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} = f([1])$ e, mais geralmente, a ação do *shift* em cilindros é dada por,

$$f([a_0 a_1 a_2 \cdots a_n]) = [a_1 a_2 a_3 \cdots a_n].$$

3.2.1 Pontos periódicos

Para encontrar os pontos periódicos do *shift*, vamos começar pelos de período 1, isto é, os pontos fixos. Assim, buscamos por sequências tais que,

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots) = f((x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots)) = (x_1, x_2, x_3, \cdots),$$

ou seja, que $x_0 = x_1$, $x_1 = x_2$, $x_2 = x_3$, $\cdots$, ou ainda, $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 \cdots$. Para isso, temos apenas duas possibilidades: ou consideramos todos $x_i = 0$ e o ponto fixo é $0^{+\infty} = (0, 0, 0, \cdots)$, ou $x_i = 1$ e o ponto fixo é $1^{+\infty} = (1, 1, 1, \cdots)$. Portanto, esses são os dois únicos pontos fixos do *shift*.

Vejamos agora os pontos periódicos de período 2, ou seja, as sequências tais que

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots) = f^2(x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots) = (x_2, x_3, x_4, x_5, \cdots),$$

ou seja, $x_0 = x_2$, $x_1 = x_3$, $x_2 = x_4$, $x_3 = x_5$, $x_4 = x_6$, $\cdots$, ou ainda, $x_0 = x_2 = x_4 = x_6 \cdots$ e $x_1 = x_3 = x_5 = x_7 \cdots$. Nesse caso as escolhas possíveis são: $x_0 = 1$ e $x_1 = 0$ ou $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$, que fornecem os únicos pontos periódicos de período 2: $(10)^{+\infty} = (1, 0, 1, 0, \cdots)$ e $(01)^{+\infty} = (0, 1, 0, 1, \cdots)$.

Note que pontos fixos também satisfazem a expressão $f^2(x) = x$, mas o período é o menor inteiro tal que $f^k(x) = x$. Assim, $0^{+\infty}$ tem período 1 e não 2, ainda que $f^2(0^{+\infty}) = 0^{+\infty}$.

De modo geral, para construir um ponto periódico de período n basta considerar uma palavra de comprimento n , $B_n = (b_0, b_1, b_2, \cdots, b_{n-1})$, e repeti-la periodicamente obtendo o ponto,

$$(B_n)^{+\infty} = b_0 b_1 b_2 \cdots b_{n-1} b_0 b_1 b_2 \cdots b_{n-1} b_0 \cdots,$$

que é periódico de período n (desde que $(b_0, b_1, \cdots, b_{n-1})$ não tenha uma repetição periódica, pois nesse caso, o período seria menor que n).

No próximo resultado iremos falar sobre o conjunto dos pontos periódico de f , que denotaremos por $Per(f)$.

Teorema 3.2.3. $Per(f)$ é denso em $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Demonstração. Precisamos provar que $\overline{Per(f)} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Por um lado, como $Per(f) \subset \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, segue que $\overline{Per(f)} \subset \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Assim, resta mostrar a inclusão oposta, isto é, $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \subset \overline{Per(f)}$.

Sejam $x = (x_0, x_1, \dots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ e $\epsilon > 0$ quaisquer. Seja também $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\frac{1}{2})^{n_0} < \epsilon$ e consideremos $y = (x_0 x_1 \dots x_{n_0})^{+\infty} = (x_0, x_1, \dots, x_{n_0}, x_0, x_1, \dots, x_{n_0}, x_0, x_1, \dots, x_{n_0}, \dots)$. Assim, segue que $f^{n_0+1}(y) = y$, ou seja, $y \in \text{Per}(f)$ e $d(x, y) \leq (\frac{1}{2})^{n_0+1} < (\frac{1}{2})^{n_0} < \epsilon$, já que x e y se diferenciam na coordenada x_{n_0+1} .

Logo, existe $y \in \text{Per}(f)$ tal que $d(x, y) < \epsilon$ qualquer que seja $\epsilon > 0$, ou seja, $x \in \overline{\text{Per}(f)}$. Com isso, $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \subset \overline{\text{Per}(f)}$, e $\overline{\text{Per}(f)} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, e portanto, $\text{Per}(f)$ é denso em $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. $\square$

3.2.2 ω -limite

Diferentemente do que foi feito para a dinâmica enumerável, na dinâmica do *shift* não temos um resultado que caracteriza ω -limite de qualquer ponto $x \in X$. Assim, provaremos abaixo um resultado parcial, mostrando qual é o ω -limite de alguns pontos especiais.

Teorema 3.2.4. *Seja $P \in W_k$ e considere o ponto periódico correspondente $(P)^{+\infty}$, então o ω -limite de qualquer ponto da forma $C(P)^{+\infty}$, onde $C \in W_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$, é igual à órbita periódica de período k , $\mathcal{O}((P)^{+\infty})$.*

Demonstração. Vamos considerar um ponto da forma $C(P)^{+\infty}$, onde $C \in W_n$. Note que, após n iterados teremos exatamente o ponto periódico $(P)^{+\infty}$, isto é, $f^n(C(P)^{+\infty}) = (P)^{+\infty}$. Portanto, para qualquer ponto da forma $C(P)^{+\infty}$, sua órbita passa infinitas vezes pela órbita periódica de $(P)^{+\infty}$. Assim, concluímos que,

$$\omega(C(P)^{+\infty}) = \mathcal{O}((P)^{+\infty}).$$

Além disso, os pontos que se acumulam em $\mathcal{O}((P)^{+\infty})$ são precisamente os que estão na bacia de atração de $(P)^{+\infty}$, onde,

$$B((P)^{+\infty}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}((P)^{+\infty}) = \{C(P)^{+\infty}; C \in W_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

$\square$

3.2.3 Órbita densa

A seguir, apresentaremos um resultado importante que garante a existência de um ponto cuja órbita é densa em $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Teorema 3.2.5. *Existe $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ tal que $\mathcal{O}(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}$ é um conjunto denso em $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.*

Demonstração. Definimos o ponto $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ dado por,

$$x = 0 \ 1 \ 00 \ 01 \ 10 \ 11 \ 000 \ 001 \ 010 \ 100 \ 110 \ 101 \ 111 \ \dots,$$

ou seja, x é construído pela concatenação de todas as palavras possíveis de comprimento 1, depois todas as possíveis de comprimento 2, todas as possíveis de comprimento 3 e assim sucessivamente.

Considere um ponto qualquer $y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Devemos mostrar que existem iterados de x arbitrariamente próximos de y . O primeiro símbolo de y , y_0 , só pode ser 0 ou 1. Desta forma, usando o próprio x ou $f(x)$ obtemos que a imagem de x coincide com y no primeiro símbolo, garantindo assim que a distância seja menor que ou igual a $\frac{1}{2}$.

Também, é possível fazer com que algum iterado de x coincida com y nas duas primeiras coordenadas que podem ser 00, 01, 10 ou 11, e assim, a distância é menor que ou igual a $(\frac{1}{2})^2$ (Note que isso é possível pois x é formado pela concatenação de todas as palavras de comprimento 2 e, em particular, tem exatamente a palavra que corresponde a y_0y_1).

Procedendo desta forma é possível obter iterados de x que coincidam com y em suas primeiras n coordenadas, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, pois todas as palavras de comprimento n são escritas em x , em particular $y_0, y_1, \dots, y_n$. Assim, existem iterados de x tão próximos quanto se deseja. Portanto, a órbita de x é densa em $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. $\square$

Observação 3.2.6. A construção de x não é única. Podemos, por exemplo, modificar a ordem de aparecimento das palavras de um certo comprimento, o que fornece novos pontos, sem que a órbita deixe de ser densa. Por exemplo, podemos considerar,

$$x' = 1\ 0\ 00\ 01\ 10\ 11\ 000\ 001\ 010\ 100\ 110\ 101\ 111\ \dots \neq x,$$

que também terá órbita densa, ou então

$$x'' = 0\ 1\ 01\ 00\ 11\ 10\ 000\ 001\ 010\ 100\ 110\ 101\ 111\ \dots,$$

que é distinto de x e x' , mas que também tem órbita densa.

3.2.4 Topologicamente *mixing*

A seguir, mostraremos que o *shift* possui a propriedade do *mixing* topológico.

Teorema 3.2.7. *O shift é topologicamente mixing.*

Demonstração. Primeiramente, note que qualquer conjunto aberto em $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ contém um cilindro, pois, pela definição de aberto, um subconjunto U aberto de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ contém alguma bola aberta, mas os cilindros são exatamente bolas abertas na métrica que estamos considerando. Assim, precisamos mostrar que para cada par de cilindros U e V de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$, para todo $n \geq n_0$.

Consideremos $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $u \in W_n$ e $v \in W_m$ tais que $U = [u] = [u_0u_1u_2 \dots u_n]$, $V = [v] = [v_0v_1v_2 \dots v_m]$ e fixemos palavras arbitrárias $P^j \in W_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Agora,

consideremos $x_0 = (uv)^{+\infty}$ e $x_j = uP^jv(uv)^{+\infty} \in U$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim, observe que,

$$\begin{aligned} f(x_0) &= (u_1, u_2, \dots, u_n, v_0, v_1, v_2, \dots, v_m, u_0, u_1, u_2, \dots), \\ f^2(x_0) &= (u_2, u_3, \dots, u_n, v_0, v_1, v_2, \dots, v_m, u_0, u_1, u_2, \dots), \end{aligned}$$

e assim por diante até

$$f^{n+1}(x_0) = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_m, u_0, u_1, u_2, \dots, v_0, v_1, v_2, \dots) = v(uv)^{+\infty} \in V.$$

E, para x_1 ,

$$\begin{aligned} f(x_1) &= (u_1, u_2, \dots, u_n, p_0, v_0, v_1, v_2, \dots, v_m, u_0, u_1, u_2, \dots), \\ f^2(x_1) &= (u_2, u_3, \dots, u_n, p_0, v_0, v_1, v_2, \dots, v_m, u_0, u_1, u_2, \dots), \end{aligned}$$

e assim por diante até

$$\begin{aligned} f^{n+1}(x_1) &= (p_0, v_0, v_1, v_2, \dots, v_m, u_0, u_1, u_2, \dots, v_0, v_1, v_2, \dots), \\ f^{n+2}(x_1) &= (v_0, v_1, v_2, \dots, v_m, u_0, u_1, u_2, \dots, v_0, v_1, v_2, \dots) = v(uv)^{+\infty} \in V. \end{aligned}$$

E, de modo geral, $f^{n+j+1}(x_k) = v(uv)^{+\infty} \in V$. Portanto, $f^{n+1+\alpha}(U) \cap V \neq \emptyset$, para todo $\alpha \geq 0$. $\square$

3.2.5 Sensibilidade às condições iniciais e caos

Terminamos esse capítulo apresentando duas das características mais interessantes do *shift* e que tornam sua dinâmica muito rica.

Teorema 3.2.8. *O shift possui sensibilidade às condições iniciais.*

Demonstração. Precisamos mostrar que existe $\epsilon > 0$, tal que, para todo $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ e para todo $\delta > 0$, existem $y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ e $n \in \mathbb{N}$ com $d(x, y) < \delta$ e $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \epsilon$.

Sejam $x = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ e $\delta > 0$ quaisquer. Tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\frac{1}{2})^n < \delta$ e $y = (y_0, y_1, y_2, \dots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, $x \neq y$, tal que $d(x, y) \leq (\frac{1}{2})^n < \delta$, ou seja, existe $k \geq 1$ tal que $x_{n+k} \neq y_{n+k}$. Assim, temos que, $f^{n+k}(x) = (x_{n+k}, x_{n+k+1}, x_{n+k+2}, \dots)$ e $f^{n+k}(y) = (y_{n+k}, y_{n+k+1}, y_{n+k+2}, \dots)$, que se diferem desde a primeira coordenada. Logo, tomando $\epsilon = 1$, segue que $d(f^{n+k}(x), f^{n+k}(y)) = 1 \geq \epsilon$. Portanto, o *shift* tem sensibilidade às condições iniciais. $\square$

Teorema 3.2.9. *O shift é um sistema dinâmico caótico.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.2.3, $Per(f)$ é denso em $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Pelo Teorema 3.2.5, f possui órbita densa, consequentemente f é transitiva. Pelo Teorema 3.2.8, f tem sensibilidade às condições iniciais. Portanto, o *shift* é um sistema caótico. $\square$

Capítulo 4

Dinâmica em intervalos

No capítulo anterior, abordamos o espaço formado por sequências de zeros e uns. Neste capítulo, estudaremos propriedades do espaço formado por sequências cujos dígitos podem ser $0, 1, \dots, 9$. Note que existe uma relação biunívoca entre as sequências desse espaço com os números reais que pertencem ao intervalo $[0, 1)$, onde para cada sequência da forma $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ com $x_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$, para todo $i \in \mathbb{N}$, associamos o número $x \in [0, 1)$ pela seguinte série,

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{10^i}.$$

Isso significa que a sequência $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ é interpretada como a expansão decimal do número x . Por exemplo, o número $x = 0,1234\dots$ está associado à sequência $(1, 2, 3, 4, \dots)$.

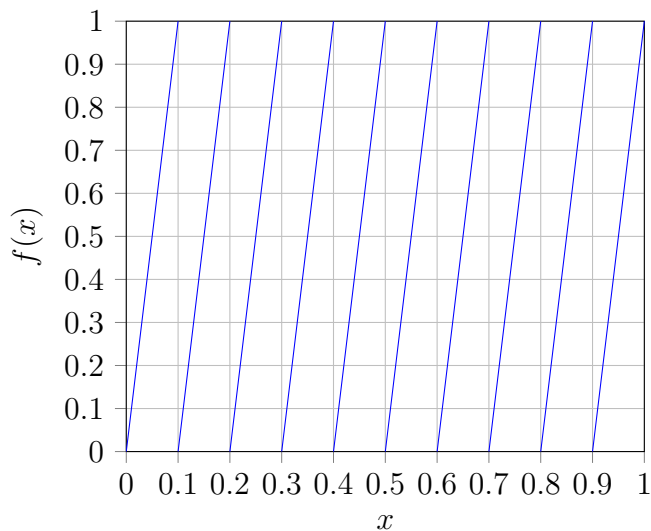


Figura 4.1: Representação gráfica da aplicação $f(x) = 10x \bmod 1$.

Assim, consideremos o intervalo $[0, 1)$ com a métrica definida em $\mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ e

definimos o sistema dinâmico $f : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ dado por $f(x) = 10x \bmod 1$. A aplicação f pode ser representada graficamente pela Figura 4.1.

4.1 Dinâmica de $f(x) = 10x \bmod 1$

Para entender a dinâmica de f , comecemos a analisar as iteradas de alguns pontos.

- Se $x_0 = 0,2743$, então: $x_1 = f(x_0) = 2,743 \bmod 1 = 0,743$; $x_2 = f(x_1) = f^2(x_0) = 7,43 \bmod 1 = 0,43$; $x_3 = f(x_2) = f^3(x_0) = 4,3 \bmod 1 = 0,3$; $x_4 = f^4(x_0) = 3,0 \bmod 1 = 0$, e assim, $x_n = f^n(x_0) = 0$, para todo $n \geq 4$.
- Se $x_0 = 0,\bar{1} = 0,1111\dots$, então: $x_1 = f(x_0) = 0,1111\dots = 0,\bar{1}$; $x_2 = f^2(x_0) = 0,1111\dots = 0,\bar{1}$, e assim, $x_n = f^n(x_0) = 0,\bar{1} = x_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

De modo geral, aplicar f em um número x escrito na base 10 é o mesmo que apagar o primeiro dígito e mover os outros uma unidade para a esquerda, o que nos faz lembrar do *shift* no espaço de sequências $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

4.2 Pontos periódicos

Primeiramente, vamos analisar os pontos periódicos de período 1, isto é, pontos tais que $f(x) = x$. Note que, $x = 0, x_1 x_2 x_3 x_4 \dots$ é ponto fixo de f se, e somente se, $\underbrace{0, x_1 x_2 x_3 x_4 \dots}_x = \underbrace{0, x_2 x_3 x_4 \dots}_{f(x)}$, isto é, se, e somente se,

$$x_1 = x_2; x_2 = x_3; x_3 = x_4; \dots \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = \dots.$$

Logo, os únicos pontos fixos de f são da forma $0, \bar{k} = 0, k k k \dots$, com $k \in \{0, 1, \dots, 9\}$.

Para os pontos periódicos de período 2, isto é, pontos tais que $f^2(x) = x$, note que,

$$\begin{aligned} x = f^2(x) &\Leftrightarrow 0, x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \dots = 0, x_3 x_4 x_5 \dots \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_3; x_2 = x_4; x_3 = x_5; x_4 = x_6; \dots \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_3 = x_5 = \dots; x_2 = x_4 = x_6 = \dots \\ &\Leftrightarrow x = 0, x_1 x_2 x_1 x_2 x_1 x_2 \dots = 0, \overline{x_1 x_2}. \end{aligned}$$

Logo, os pontos periódicos de período 2 de f são da forma $0, \overline{k_1 k_2} = 0, k_1 k_2 k_1 k_2 \dots$, com $k_1, k_2 \in \{0, 1, \dots, 9\}$.

De forma similar, obtemos que os pontos periódicos de período $n \in \mathbb{N}$ qualquer, são os que podem ser escritos na forma,

$$0, \overline{k_1 k_2 \dots k_n} = 0, k_1 k_2 \dots k_n k_1 k_2 \dots k_n \dots,$$

com $k_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

No Capítulo 3 mostramos que os pontos periódicos do *shift* formavam um conjunto denso no espaço de sequências. A seguir mostraremos um resultado similar para o conjunto dos pontos periódicos da aplicação $f(x) = 10x \bmod 1$.

Teorema 4.2.1. *Seja $Per(f) = \{x \in [0, 1]; x \text{ é um ponto periódico de } f(x) = 10x \bmod 1\}$. $Per(f)$ é denso em $[0, 1]$.*

Demonstração. Precisamos provar que $\overline{Per(f)} = [0, 1]$. Por um lado, como $Per(f) \subset [0, 1]$, segue que $\overline{Per(f)} \subset [0, 1]$. Assim, resta mostrar a inclusão oposta, isto é, $[0, 1] \subset \overline{Per(f)}$.

Sejam $x = 0, x_1 x_2 \dots \in [0, 1]$ e $\epsilon > 0$ quaisquer. Seja também $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $10^{-n_0} < \epsilon$ e consideremos o ponto $y = 0, \overline{x_1 x_2 \dots x_{n_0}} \in [0, 1]$. Assim, segue que $f^{n_0}(y) = y$, ou seja, $y \in Per(f)$ e $d(x, y) = |x - y| = |(x_{n_0+1} - x_1)10^{-(n_0+1)} + \dots| < 10^{-n_0} < \epsilon$.

Logo, existe $y \in Per(f)$ tal que $d(x, y) < \epsilon$ qualquer que seja $\epsilon > 0$, ou seja, $x \in \overline{Per(f)}$. Assim, $[0, 1] \subset \overline{Per(f)}$ e $\overline{Per(f)} = [0, 1]$, portanto, $Per(f)$ é denso em $[0, 1]$. $\square$

4.3 ω -limite

Assim como na dinâmica do *shift* em $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, nessa dinâmica não é possível caracterizar o conjunto ω -limite de qualquer $x \in [0, 1]$, mas podemos fazer algumas considerações.

Inicialmente, considere $x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Assim, x tem expansão decimal finita ou periódica.

Se x possuir expansão decimal finita, isto é, $x = 0, x_1 x_2 \dots x_n$, $x_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$, para $i = 1, 2, \dots, n$, então,

$$f(x) = 0, x_2 x_3 \dots x_n; f^2(x) = 0, x_3 x_4 \dots x_n; \dots; f^{n-1}(x) = 0, x_n; f^n(x) = 0;$$

e $f^k(x) = 0$, para todo $k \geq n$. Logo, $f^n \rightarrow 0$, e assim, $\omega(x) = \{0\}$.

Se x tem expansão decimal periódica, isto é, $x = x_1 x_2 \dots x_k \overline{x_{k+1} x_{k+2} \dots x_{k+n}}$, a partir da iterada $f^k(x)$ tem-se a órbita periódica $\mathcal{O}(x) = \{x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}, \dots, x_{k+n}\}$. Com isso, o limite de qualquer sequência da forma $(f^{n_i}(x))_{i \in \mathbb{N}}$ deve ser um ponto dessa órbita periódica. Logo, $\omega(x) = \mathcal{O}(x)$.

Agora, consideremos $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$. Para este caso, $\omega(x)$ pode ser de um conjunto unitário a todo o intervalo $[0, 1]$. Primeiramente, vamos encontrar $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $\omega(x) = \{0, \overline{x_1}\}$, onde $x_1 \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Defina x da seguinte forma,

$$x = 0, x_1 0 x_1 x_1 0 x_1 x_1 x_1 0 x_1 x_1 x_1 x_1 0 x_1 x_1 x_1 x_1 0 \dots$$

Assim, por exemplo:

$$\begin{aligned} f^2(x) &= x_1 x_1 0 x_1 x_1 x_1 0 x_1 x_1 x_1 0 \dots, \\ f^5(x) &= x_1 x_1 x_1 0 x_1 x_1 x_1 x_1 0 x_1 x_1 x_1 x_1 0 \dots, \\ f^9(x) &= x_1 x_1 x_1 x_1 0 x_1 x_1 x_1 x_1 x_1 0 x_1 x_1 x_1 x_1 x_1 0 \dots, \end{aligned}$$

ou seja, é possível obter uma iterada $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(x)$ tenha tantos dígitos x_1 quanto se queira. Assim, $f^{n_i}(x) \rightarrow 0, \overline{x_1}$. Logo, $\omega(x) = \{0, \overline{x_1}\}$.

Por fim, podemos encontrar $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ tal que $\omega(x) = [0, 1)$, dizer isso é o mesmo que dizer que existe x tal que $\mathcal{O}(x)$ é densa em $[0, 1)$, o que será feito na Seção 4.4.

4.4 Órbita densa

Agora, mostraremos que também existe órbita densa no intervalo $[0, 1)$.

Teorema 4.4.1. *Existe $x \in [0, 1)$ tal que $\mathcal{O}(x)$ é densa em $[0, 1)$.*

Demonstração. Precisamos mostrar que, para qualquer $y \in [0, 1)$ e qualquer $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^n(x), y) = |f^n(x) - y| < \epsilon$.

Tome x formado pela concatenação dos números naturais, isto é,

$$x = 0,01234567891011121314 \dots,$$

e considere $y = 0, y_1 y_2 \dots \in [0, 1)$ e $\epsilon > 0$ quaisquer. Temos que $y_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, desta forma, $x, f(x), f^2(x), \dots$ ou $f^9(x)$ coincide com y no primeiro dígito da expansão decimal e, assim, a distância entre eles é menor que ou igual a 10^{-1} .

Também é possível fazer com que algum iterado de x coincida com y nos dois primeiros dígitos da expansão decimal, por exemplo, se $y = 0,1474464 \dots$ temos que $f^{18}(x) = 0,14151617 \dots$, e desta forma a distância é menor que ou igual a 10^{-2} .

De forma geral, para qualquer sequência de comprimento m , existe algum $f^n(x)$ que coincida com y até a m -ésima posição. Logo, $d(f^n(x), y) = |f^n(x) - y| \leq 10^{-m} < \epsilon$. Portanto, a órbita de x é densa em $[0, 1)$.

□

4.5 Topologicamente *mixing*

A seguir, demonstraremos que $f(x) = 10x \bmod 1$ possui a propriedade do *mixing* topológico.

Teorema 4.5.1. *A aplicação $f(x) = 10x \bmod 1$ é topologicamente *mixing*.*

Demonstração. Primeiramente, vejamos algumas observações sobre o comportamento de intervalos sobre a ação da aplicação f .

- (i) $f\left(\left[\frac{k}{10}, \frac{k+1}{10}\right]\right) = [0, 1)$, para todo $k \in \{0, 1, \dots, 8\}$, e $f\left(\left[\frac{9}{10}, 1\right)\right) = [0, 1)$;
- (ii) $f\left(\left[0, \frac{1}{100}\right]\right) = \left[0, \frac{1}{10}\right]$ e, pelo item (i), $f^2\left(\left[0, \frac{1}{100}\right]\right) = [0, 1)$;

- (iii) Se $0 < a < \frac{1}{10}$, temos que $f([0, a)) = [0, 10a)$, cujo tamanho é 10 vezes o tamanho de $[0, a]$;
- (iv) Qualquer que seja o intervalo aberto (a, b) , se $\frac{k}{10} \in (a, b)$, para algum $k \in \{0, 1, \dots, 9\}$, como $f(\frac{k}{10}) = 0$, então $f((a, b)) = [0, a_1) \cup A$, onde $A \subset [0, 1)$ e $a_1 \in [0, 1)$. Para fixar ideias, veja a Figura 4.2;

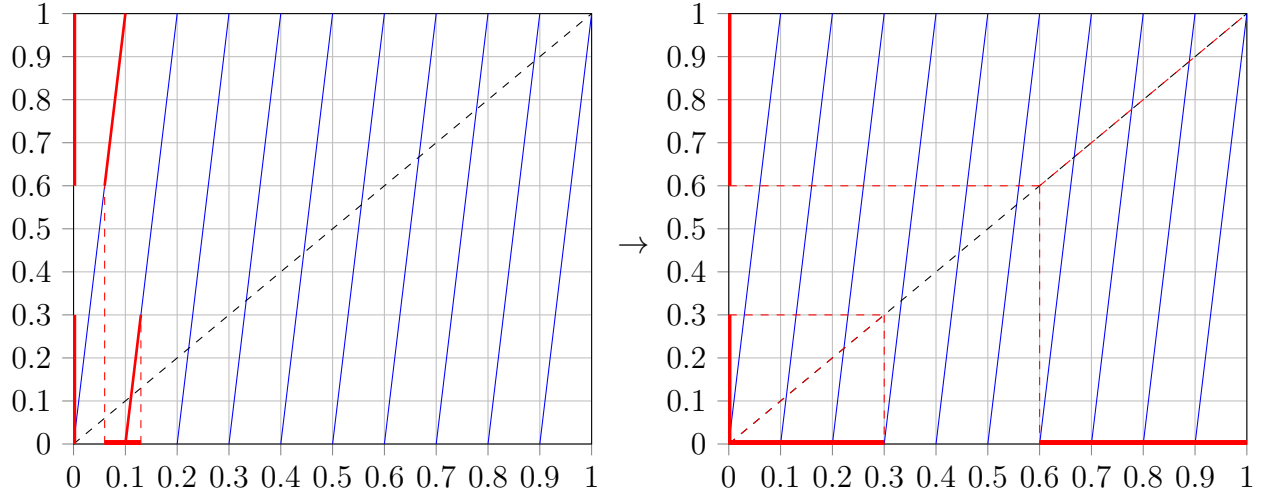


Figura 4.2: Imagem do intervalo $I = (0, 06, 0, 13)$ pela função $f(x) = 10x \bmod 1$. Note que $f(I) = [0, 0, 3) \cup (0, 6, 1)$.

- (v) Qualquer que seja o intervalo aberto (a, b) , existe $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \{1, 2, \dots, 9\}$ tal que $\frac{k}{10^n} \in (a, b)$. De fato, tomando $\epsilon = b - a$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{10^{n_0}} < \epsilon$, temos que

$$[0, 1) = \bigcup_{k=0}^{10^{n_0}-1} \left[\frac{k}{10^{n_0}}, \frac{k+1}{10^{n_0}} \right).$$

Como $a \in [0, 1)$ existe $k_0 \in \{0, 1, \dots, 10^{n_0} - 1\}$ tal que $a \in [\frac{k_0}{10^{n_0}}, \frac{k_0+1}{10^{n_0}})$, ou seja,

$$\frac{k_0}{10^{n_0}} \leq a < \frac{k_0+1}{10^{n_0}}.$$

E, com isso, $\frac{k_0}{10^{n_0}} + \frac{1}{10^{n_0}} \leq a + \frac{1}{10^{n_0}}$. Como $a + \frac{1}{10^{n_0}} < a + \epsilon = b$, segue que

$$a < \frac{k_0+1}{10^{n_0}} \leq a + \frac{1}{10^{n_0}} < a + \epsilon = b,$$

ou seja,

$$a < \frac{k_0+1}{10^{n_0}} < b.$$

Assim, escrevendo $k_0 + 1 = k \in \mathbb{N}$, e $n_0 = n \in \mathbb{N}$, segue que $\frac{k}{10^n} \in (a, b)$.

(vi) Qualquer que seja o intervalo $(a, b) \subset [0, 1)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n((a, b)) = [0, a_2) \cup A$.
De fato, por (v), existe $\frac{k}{10^n} \in (a, b)$. Assim, como $f^{n-1}(\frac{k}{10^n}) = \frac{k}{10} \in f^{n-1}((a, b))$, segue de (iv) que $f^n((a, b)) = [0, a_1) \cup A$.

Sejam então U e V abertos quaisquer em $[0, 1)$. Mostremos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$, para todo $n \geq n_0$. Como U e V são abertos em $\mathbb{R}$, existem intervalos abertos $(a, b) \subset U$ e $(c, d) \subset V$. Vimos, em (vi), que para qualquer intervalo $(a, b) \subset [0, 1)$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}((a, b)) = [0, a_1) \cup A$. Como, por (iii), $f([0, a_1))$ tem comprimento 10 vezes maior que $[0, a_1)$, existe um iterado m_0 tal que $[0, \frac{1}{10}] \subset f^{m_0}([0, a_1))$. Assim, por (ii), $[0, 1) = f([0, \frac{1}{10}]) \subset f^{m_0+1}([0, a_1))$, ou seja, $f^{m_0+1}([0, a_1)) = [0, 1)$. Logo, $f^{n_0+m_0+1}((a, b)) = [0, 1)$. Dessa forma, como $(c, d) \subset [0, 1)$, $f^{n_0+m_0+1}(U) \cap V \neq \emptyset$, para todo $n \geq n_0 + m_0 + 1$. □

4.6 Sensibilidade às condições iniciais e caos

A seguir, mostraremos que a função $f(x) = 10x \bmod 1$ exibe sensibilidade às condições iniciais.

Teorema 4.6.1. *$f(x) = 10x \bmod 1$ possui sensibilidade às condições iniciais.*

Demonstração. Precisamos mostrar que existe $\epsilon > 0$, tal que para todo $x \in [0, 1)$ e para todo $\delta > 0$, existem $y \in [0, 1)$ e $n \in \mathbb{N}$ com $d(x, y) < \delta$ e $d(f^n(x), f^n(y)) > \epsilon$.

Sejam $x = 0, x_1x_2x_3 \dots \in [0, 1)$ e $\delta > 0$ quaisquer. Tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{10^n} = 10^{-n} < \delta$ e $y = 0, x_1x_2x_3 \dots x_n y_{n+1} y_{n+2} y_{n+3} \dots \in [0, 1)$, com $x_{n+1} \neq y_{n+1}$. Note que $d(x, y) \leq 10^{-(n+1)} < \frac{1}{10^n} < \delta$. Assim, temos que, $f^{n+1}(x) = 0, x_{n+1}x_{n+2} \dots$ e $f^{n+1}(y) = 0, y_{n+1}y_{n+2} \dots$, que se diferenciam na primeira casa decimal, pois $y_{n+1} \neq x_{n+1}$. Logo, tomando $\epsilon = \frac{1}{100}$, segue que $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \epsilon$. Portanto, a dinâmica tem sensibilidade às condições iniciais. □

Finalizamos o capítulo mostrando que $f(x) = 10x \bmod 1$ é também um sistema caótico.

Teorema 4.6.2. *$f(x) = 10x \bmod 1$ é caótico.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.2.1, $Per(f)$ é denso em $[0, 1)$. Pelo Teorema 4.4.1, f possui órbita densa, consequentemente f é transitiva. Pelo Teorema 4.6.1, f tem sensibilidade às condições iniciais. Portanto, a dinâmica é caótica. □

Considerações finais

Este trabalho apresentou uma introdução aos sistemas dinâmicos discretos, com ênfase na dinâmica do *shift*. Iniciamos com uma exploração dos conceitos e propriedades fundamentais desses sistemas, estabelecendo uma base para os estudos subsequentes. Nos capítulos seguintes, foram analisadas as dinâmicas em conjuntos finitos e infinitos enumeráveis, onde destacamos comportamentos característicos e resultados significativos, como a inexistência de uma dinâmica topologicamente *mixing* em conjuntos enumeráveis.

O foco principal foi direcionado ao estudo da dinâmica em conjuntos não enumeráveis no espaço de sequências $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Abordamos a dinâmica do *shift* demonstrando resultados importantes, como a densidade dos pontos periódicos, o comportamento topologicamente *mixing*, a sensibilidade às condições iniciais e a presença de caos nesse sistema. Esses resultados ressaltam a complexidade e a riqueza do *shift*.

Por fim, abrangemos as teorias desenvolvidas para a dinâmica do *shift* a um sistema dinâmico definido no intervalo $[0, 1)$. Mostramos que as propriedades do *shift* são preservadas nesse contexto, ampliando a compreensão dos sistemas dinâmicos e reforçando a conexão entre diferentes tipos de dinâmicas. Além disso, é importante destacar que o estudo dos sistemas dinâmicos abrange problemas muito mais amplos e complexos, que frequentemente envolvem o uso de equações diferenciais, análise matemática avançada, e teoria da medida e integração, entre outros aspectos.

De um ponto de vista pessoal, este trabalho foi de grande importância para a minha formação, pois permitiu a aplicação de diversas técnicas e conceitos adquiridos ao longo do curso de graduação. Através da apresentação teórica e dos exemplos, consegui consolidar conhecimentos fundamentais. Esse processo não só proporcionou uma revisão abrangente dos conteúdos estudados, mas também aprofundou minha compreensão, preparando-me para desafios futuros na matemática.

Referências Bibliográficas

- [1] ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer-Verlag, 1996.
- [2] BACKES, L.; BARAVIERA, A. T.; BRANCO, F. M. *Uma introdução aos sistemas dinâmicos via exemplos*. Rio de Janeiro: IMPA, 2023.
- [3] DEVANEY, R. L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Westview Press, 2003.
- [4] LAGARIAS, J. *The $3x + 1$ Problem: An Overview*. 2010.
- [5] LIMA, E. L. *Análise Real: Funções de Uma Variável*. 10. ed. v. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- [6] LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- [7] LUZZATO, S. *Introduction to Dynamical Systems*. Lecture Notes, 2021.
- [8] OLIVEIRA E SILVA, T. *Empirical Verification of the $3x + 1$ and Related Conjectures*. American Mathematical Society, 2010.
- [9] STROGATZ, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Westview Press, 2015.