



Universidade Federal
de São João del-Rei

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

RAFAEL DE CASTRO ANDRETTO

**GEOMETRIA DIFERENCIAL DE SUPERFÍCIES
SINGULARES DE COPOSTO 1 EM $\mathbb{R}^3$**

SÃO JOÃO DEL-REI - MG

2025

RAFAEL DE CASTRO ANDRETTO

**GEOMETRIA DIFERENCIAL DE SUPERFÍCIES
SINGULARES DE COPOSTO 1 EM $\mathbb{R}^3$**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática, da Universidade Federal de São João del-Rei, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Benedini Riul

São João del-Rei - MG

2025

Ficha catalográfica elaborada pela Divisão de Biblioteca (DIBIB)
e Núcleo de Tecnologia da Informação (NTINF) da UFSJ,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A561g Andretto, Rafael de Castro.
 Geometria Diferencial de Superfícies Singulares em
R3 / Rafael de Castro Andretto ; orientador Pedro
Benedini Riul. -- São João del-Rei, 2025.
 102 p.

 Trabalho de Conclusão (Graduação - Matemática) --
Universidade Federal de São João del-Rei, 2025.

 1. Geometria Diferencial. 2. Singularidades. 3.
parábola de curvatura. I. Benedini Riul, Pedro,
orient. II. Título.

Rafael de Castro Andretto

Geometria Diferencial de Superfícies

Singulares de Coposto 1 em $\mathbb{R}^3$

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática, da Universidade Federal de São João del-Rei, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Benedini Riul

Data de aprovação: 10 de dezembro de 2025.

Banca examinadora:

Documento assinado digitalmente
 PEDRO BENEDINI RIUL
Data: 16/12/2025 16:14:46-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Orientador: Prof. Dr. Pedro Benedini Riul - UFSJ

Documento assinado digitalmente
 PATRICIA TEMPESTA
Data: 18/12/2025 12:46:15-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Patrícia Tempesta - UFSJ

Documento assinado digitalmente
 GUSTAVO TERRA BASTOS
Data: 20/12/2025 23:27:52-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Gustavo Terra Bastos - UFSJ

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer ao meu orientador, Pedro, que me apoiou desde que me aceitou como orientando. Por me apresentar lindas áreas da Matemática, como a Geometria Diferencial e a Teoria das Singularidades, e porque, mesmo amando estudar Matemática, sem ele provavelmente eu não conseguiria pensar em uma pós-graduação e em poder atuar como pesquisador matemático.

Agradeço à minha mãe por me apoiar nesta jornada desde o dia em que lhe disse que iria cursar Matemática.

Agradeço à Laura, meu amor, por todo apoio, seja ele emocional ou seja ele matemático. Nossas discussões sobre demonstrações me auxiliaram a melhorar ainda mais como estudante.

Agradeço aos meus amigos e colegas, os quais não citarei nomes com medo de esquecer algum. Entretanto, se estiverem lendo isso, sintam-se agradecidos por todo o tempo e discussões que compartilhamos na UFSJ.

Agradeço aos professores do Departamento de Matemática e Estatística, em especial ao Gustavo e à Patrícia por aceitarem o convite para compor a banca deste TCC e ao professor Wilker, por todo apoio e conselhos que foram além das aulas de Análise.

Resumo

Considerando M uma superfície de coposto 1 em $p \in \mathbb{R}^3$, nosso objetivo é estudar a sua geometria de segunda ordem, ou seja, as características de M herdadas de sua segunda forma fundamental. Para isso, definimos a primeira e a segunda formas fundamentais e a parábola de curvatura Δ_p : uma curva plana contida no plano normal. Mostramos que existem quatro $\mathcal{A}^2$ -órbitas no conjunto de germes de aplicações de coposto 1: $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ e que a parábola de curvatura é um invariante completo dessa classificação. Além disso, provamos que, dadas duas superfícies localmente parametrizadas por dois germes de aplicação de coposto 1, $f, g : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$, tais germes são $\mathcal{R}^2 \times \mathcal{O}(3)$ -equivalentes se, e somente se, existe uma isometria linear entre os dois planos normais das superfícies que mapeia a parábola de curvatura de uma superfície na da outra. Definimos também as direções assintóticas e binormais e as curvaturas umbílica e axial no ponto $p \in M$. Tais curvaturas se mostram como importantes invariantes por isometrias, estando intimamente ligados com a geometria de segunda ordem na vizinhança do ponto singular.

Palavras-chave: Geometria Diferencial; Singularidades; parábola de curvatura.

Abstract

Considering M a corank 1 surface at a point $p \in \mathbb{R}^3$, our goal is to study its second order geometry, that is, the geometric features of M inherited from its second fundamental form. To this end, we define the first and second fundamental forms and the curvature parabola Δ_p , which is a planar curve contained in the normal plane. We show that there exist four $\mathcal{A}^2$ -orbits in the space of germs of corank 1 mappings $f: (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$, and that the curvature parabola is a complete invariant for this classification. Moreover, we prove that, given two surfaces locally parametrized by two germs of corank 1 mappings $f, g: (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$, such germs are $\mathcal{R}^2 \times \mathcal{O}(3)$ -equivalent if and only if there exists a linear isometry between the two normal planes of the surfaces that maps the curvature parabola of one surface onto that of the other. We also define the asymptotic and binormal directions, as well as the umbilic and axial curvatures at the point $p \in M$. These curvatures turn out to be important invariants under isometries and are closely related to the second-order geometry in a neighborhood of the singular point.

Keywords: Differential Geometry; Singularities; curvature parabola.

Lista de Figuras

1	Representação de uma parametrização de uma superfície regular.	12
2	Parametrizações da esfera S^2	14
3	Gráfico de $f(u, v) = (1 - u^2 - v^2)e^{-\frac{u^2 + v^2}{2}}$	15
4	Toro T	16
5	Gráfico de $z = +\sqrt{x^2 + y^2}$	16
6	Diferentes sistemas de coordenadas em torno do ponto p	17
7	Parabolóide elíptico S	18
8	Vetor tangente w à S em p	19
9	Traço de $\varphi(u, v) = (u, v, v^2 - u^2)$ em branco e $T_p S$ em azul.	20
10	Plano $\mathcal{P}$ e seu vetor normal unitário associado à parametrização φ	21
11	O helicóide.	22
12	Representação de curvas coordenadas ortogonais.	23
13	Representação de uma região limitada R de S	24
14	Q_ε e sua imagem no toro T	25
15	Faixa de Möbius M e seus vetores normais.	28
16	Aplicação de Gauss.	29
17	Cilindro C e os campos diferenciáveis de vetores normais unitários N e $\bar{N}$	30
18	Sela de macaco.	34
19	Curvatura gaussiana K no toro T e seus respectivos pontos.	35
20	Germes de aplicação em $x = 0$ quando $n = p = 1$	37
21	Gráficos de $f(x) = x$ de azul, de $g(x) = x $ de vermelho e de roxo, onde coincidem.	37
22	Gráfico de $f(x) = x^2$ em vermelho.	38
23	Gráfico de $f(x) = \sin x$ de azul e de seu 3-jato na origem de vermelho.	40
24	Traço de $f(x, y) = (x, y^2, x^3 y + y)$ em branco e de seu 3-jato em vermelho.	40
25	Órbitas das matrizes ortogonais para $n = 2$	46
26	Traço do germe de aplicação $f(x, y) = (x, y^2, y^3)$	48
27	Traço de $f(x, y) = (x, xy, y^2)$, o <i>cross-cap</i>	50
28	Traço de $g(x, y) = (y \cos x^2 - xy \cos x^2, y \sin x^2 + xy \sin x^2, x^2)$	50
29	Representação de uma parametrização local de uma superfície singular.	53
30	Parametrização local $f(x, y) = (x, y^2, x^2 - x^3 - y^2 - y)$	53
31	Plano normal e reta tangente do vértice do cone de uma folha.	54
32	<i>Cuspidal lips</i> dada pela imagem de $f(x, y) = (3x^4 + 2x^2 y^2, x^3 + xy^2, y)$	55

33	Toro pinçado M , T_pM e N_pM para $p = \mathbf{0}$	58
34	<i>Cuspidal edge</i> , T_pM e N_pM para $p = \mathbf{0}$	59
35	Representação de diferentes coordenadas locais em $\tilde{M}$	60
36	M dada pela imagem de $f(x, y) = (x, xy, y^6 - 2x^3y^2)$	61
37	M dada pela imagem de $f(x, y) = (x, xy^2 - y^3, -xy)$	63
38	A parábola de curvatura do <i>cross-cap</i> $f(x, y) = (x, y^2, xy)$	64
39	<i>Swallowtail</i> e sua parábola de curvatura.	65
40	Parábola de curvatura da <i>cuspidal edge</i> parametrizada localmente por f e g	66
41	Superfície M dada pela imagem do 4-jato de f após mudanças de coordenadas na fonte e rotações na meta.	68
42	Toro pinçado e sua parábola de curvatura na origem.	74
43	Δ_p de $f(x, y) = (x, x^2 + y^2, 2x^2 + xy)$ em $p_1 = \mathbf{0}$	78
44	Representação de y_∞ em $T_q\tilde{M}$	81
45	Possibilidades para Δ_p sendo uma parábola não degenerada e A o conjunto de direções assintóticas de M em p	82
46	Possibilidades para Δ_p sendo uma semirreta e o conjunto A de direções assintóticas de M em p	83
47	Possibilidades para Δ_p sendo uma reta e o conjunto A de direções assintóticas de M em p	83
48	Possibilidades para Δ_p sendo um ponto e o conjunto A de direções assintóticas de M em p	84
49	Referencial adaptado para o caso em que Δ_p é uma parábola não degenerada.	86
50	Referencial adaptado para o caso em que Δ_p é uma reta ou semirreta.	87
51	Referencial adaptado para o caso em que Δ_p é um ponto.	87
52	Representação geométrica da segunda forma fundamental na direção ν_2	88
53	Projeção de uma parábola não degenerada no sentido de sua diretriz.	88
54	Casos em que a curvatura umbílica se anula.	89
55	Paralelogramo formado pelos vetores $\eta(y)$ e $\eta'(y)$	89
56	Paralelepípedo formado pelos vetores $\eta(y)$, $\eta'(y)$ e e	90
57	Parábola de curvatura em p de $f(x, y) = (x, x^2 + y^5, 3y^2 - xy^2)$	91
58	Representação da curvatura axial para os casos em que Δ_p é uma parábola não degenerada ou semirreta.	93
59	Projeção de Δ_p sendo uma reta na direção de ν_a	93
60	Casos em que $\kappa_a(p) = 0$	94
61	M dada pela imagem de $f(x, y) = \left(x, x^3y^2 - xy + 2y^2, \frac{1}{2}xy + 3y^2\right)$ e Δ_p	95
62	Parábola de curvatura de M em $p = \mathbf{0}$ para as parametrizações locais f e g	98

Lista de Símbolos

Δ_p — Parábola de curvatura em p .

κ_a — Curvatura axial.

κ_n — Curvatura normal.

κ_u — Curvatura umbílica.

$\mathbf{0}$ — Vetor nulo: $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$.

$\mathcal{A}$ — Grupo de germes de difeomorfismos agindo na fonte e na meta.

$\mathcal{A}^d$ — Subgrupo de $\mathcal{A}$ de d -jatos de difeomorfismos agindo na fonte e na meta.

$\mathcal{E}_{n,p}$ — Conjunto de germes de aplicação $f : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^p, \mathbf{0})$.

$\mathcal{M}_n^k$ — k -ésima potência do ideal maximal de $\mathcal{E}_n$.

$\mathcal{O}(n)$ — Grupo de isometrias lineares em $\mathbb{R}^n$.

$\mathcal{R}$ — Grupo de germes de difeomorfismos agindo na fonte.

$\mathcal{R}^d$ — Subgrupo de $\mathcal{R}$ de d -jatos de difeomorfismos agindo na fonte.

dg_q — Diferencial da aplicação g em q .

ν_∞ — Direção binormal infinita.

π_1 — Projeção ortogonal na reta tangente.

π_2 — Projeção ortogonal no plano normal.

$\mathbb{R}^n$ — Espaço Euclidiano de dimensão n .

$\Sigma^1 J^2(2, 3)$ — Subconjunto dos 2-jatos de coposto 1 de germes $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$.

$\mathbf{u}_\infty$ — Direção tangente infinita.

C_q — Conjunto de vetores unitários em $T_q \tilde{M}$.

H — Curvatura média.

I — Primeira forma fundamental.

II — Segunda forma fundamental.

II_ν — Segunda forma fundamental ao longo de uma direção normal ν .

$J^k(n, p)$ — Espaço dos k -jatos de germes de aplicação $f : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^p, \mathbf{0})$.

$j^k f(\mathbf{0})$ — k -jato de f na origem.

K — Curvatura gaussiana.

K_{ν_a} — Função de curvatura normal axial.

$N_p M$ — Plano normal à M em p .

S^n — Esfera n -dimensional.

$T_p M$ — Espaço tangente à M em p .

y_∞ — Parâmetro correspondente à direção tangente infinita.

Sumário

1	Introdução	10
2	Superfícies Regulares em $\mathbb{R}^3$	12
2.1	Condições para a regularidade de uma superfície em $\mathbb{R}^3$	12
2.2	Mudança de parâmetros	17
2.3	Plano tangente e a Primeira Forma Fundamental	18
2.3.1	Primeira forma Fundamental	21
2.4	A Aplicação de Gauss e a Segunda Forma Fundamental	25
2.4.1	Orientação de Superfícies	25
2.4.2	A Segunda Forma Fundamental	28
3	Singularidades de aplicações diferenciáveis	36
3.1	Germes e Jatos	36
3.2	O anel $\mathcal{E}_n$	41
3.3	Ações de grupos e órbita	44
3.3.1	O grupo $\mathcal{R}$	46
3.3.2	O grupo $\mathcal{A}$	49
4	Propriedades de superfícies singulares de posto 1 em $\mathbb{R}^3$	52
4.1	Reta tangente e plano normal	52
4.2	A parábola de curvatura	63
4.3	Direções assintóticas e binormais	78
4.4	As curvaturas no ponto singular	86
4.4.1	A curvatura umbílica	87
4.4.2	A curvatura axial	92
5	Considerações finais	100
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	101

CAPÍTULO 1

Introdução

Quando pensamos em estudar superfícies do espaço euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$, nosso primeiro pensamento está ligado ao estudo da Geometria Diferencial de superfícies regulares. Para tais superfícies, em todos os pontos podemos definir um plano tangente, a partir do qual conseguimos trabalhar com a primeira e a segunda formas fundamentais. Essas formas nos permitem estudar medidas dentro da superfície e como ela se comporta no espaço. Podemos calcular o ângulo entre curvas da superfície; a área de uma região limitada; as diferentes curvaturas; direções assintóticas; entre outras propriedades.

Entretanto, neste contexto, torna-se natural o seguinte questionamento: como realizar tal estudo quando a superfície não for regular? Para respondê-lo, temos o estudo da geometria diferencial de superfícies singulares, que tem ganhado cada vez mais destaque a partir das ferramentas da Teoria das Singularidades.

Dentre as superfícies singulares, as primeiras a serem estudadas foram as frentes e frontais, superfícies que possuíam um “bom comportamento”, uma vez que em seus pontos singulares é possível definir um plano tangente como o limite de planos tangentes em pontos regulares, conforme o estudado, por exemplo em [Bruce, Kirk e Plessis \(1997\)](#) e [Saji, Umehara e Yamada \(2009\)](#). No entanto, nem toda superfície singular é uma frente ou frontal. Diante disso, o estudo de [Martins e Nuño-Ballesteros \(2015\)](#) consegue responder tais questionamentos para um grupo mais abrangente de superfícies singulares: as de coposto 1.

Dizemos que uma superfície M possui singularidade de coposto 1 em $p \in M$ se, dada uma parametrização de M em uma vizinhança de p , a sua diferencial possui coposto 1 no ponto que corresponde a p . O objetivo deste trabalho é estudar a geometria de segunda ordem de superfícies singulares de coposto 1 em $\mathbb{R}^3$. Desta forma, nos apoiaremos em [Benedini Riul \(2019\)](#), [Benedini Riul, Deolindo-Silva e Sinha \(2023\)](#), [Martins e Nuño-Ballesteros \(2015\)](#) e [Sinha e Saji \(2022\)](#). Para esse estudo, consideraremos uma superfície regular $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^3$, de forma que M seja a imagem de uma aplicação $g : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de coposto 1. Tomando um sistema de coordenadas φ de $\tilde{M}$, temos que $f = g \circ \varphi$ é uma parametrização local de M em p . Na prática, podemos considerar $\tilde{M} = \mathbb{R}^2$.

Com isto, conseguimos definir a reta tangente e o plano normal de M apoiados no plano tangente de $\tilde{M}$ em q . Consequentemente, definimos a primeira e a segunda formas fundamentais de M em p e a parábola de curvatura Δ_p : uma curva plana contida no plano normal que desempenha um papel similar à elipse de curvatura para superfícies

regulares em $\mathbb{R}^4$, definida em [Little \(1969\)](#).

Em [Mond \(1985\)](#), o autor classificou os germes de aplicação de coposto 1 $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ conforme a ação dos 2-jatos de difeomorfismos na fonte e na meta, o grupo $\mathcal{A}^2$. Veremos no presente trabalho que tal classificação distingue totalmente a parábola de curvatura.

Além disso, podemos melhorar ainda mais este resultado considerando a ação de 2-jatos de difeomorfismos na fonte e isometrias lineares na meta, o subgrupo $\mathcal{R}^2 \times \mathcal{O}(3)$. Provamos que, dadas duas superfícies, localmente parametrizadas por dois germes de aplicação de coposto 1, $f, g : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$, tais germes são equivalentes segundo a ação deste subgrupo se, e somente se, existir uma isometria linear entre os dois planos normais das superfícies que mapeia uma parábola de curvatura na outra. Isso nos permite concluir que a parábola de curvatura Δ_p codifica localmente toda a geometria de segunda ordem de M em uma vizinhança de p .

Neste trabalho, também definimos as direções assintóticas e binormais para superfícies singulares de coposto 1 em $\mathbb{R}^3$, a curvatura umbílica, um invariante por isometria definido em pontos singulares em que Δ_p está contida em uma reta e definimos a curvatura axial, um invariante por isometria definido em pontos em que Δ_p é um ponto, uma semirreta ou uma parábola não degenerada. Tais invariantes estão intimamente ligados com a parábola de curvatura e a $\mathcal{R}^2 \times \mathcal{O}(3)$ -equivalência.

Para entendermos como as superfícies singulares se diferenciam das regulares, realizaremos uma breve revisão no Capítulo 2 de superfícies regulares em $\mathbb{R}^3$. Tal capítulo terá como objetivo compreender tais nuances a partir de exemplos e resultados primordiais, cujas demonstrações serão omitidas. Tomamos como referências: [Do Carmo \(2010\)](#), [Delgado e Frensel \(2017\)](#) e [Tenenblat \(2008\)](#).

No Capítulo 3, estudaremos ferramentas da Teoria das Singularidades que nos auxiliarão em nossa análise geométrica, sendo elas: germes, jatos e ação de grupos. Com base em [Atique e Saia \(2006\)](#), [Gibson \(1979\)](#).

Já no Capítulo 4, realizaremos a união das ferramentas forjadas nos Capítulos 2 e 3 para a análise da geometria diferencial de superfícies singulares de coposto 1. As referências utilizadas são: [Benedini Riul \(2019\)](#), [Benedini Riul, Deolindo-Silva e Sinha \(2023\)](#), [Martins e Nuño-Ballesteros \(2015\)](#) e [Sinha e Saji \(2022\)](#).

CAPÍTULO 2

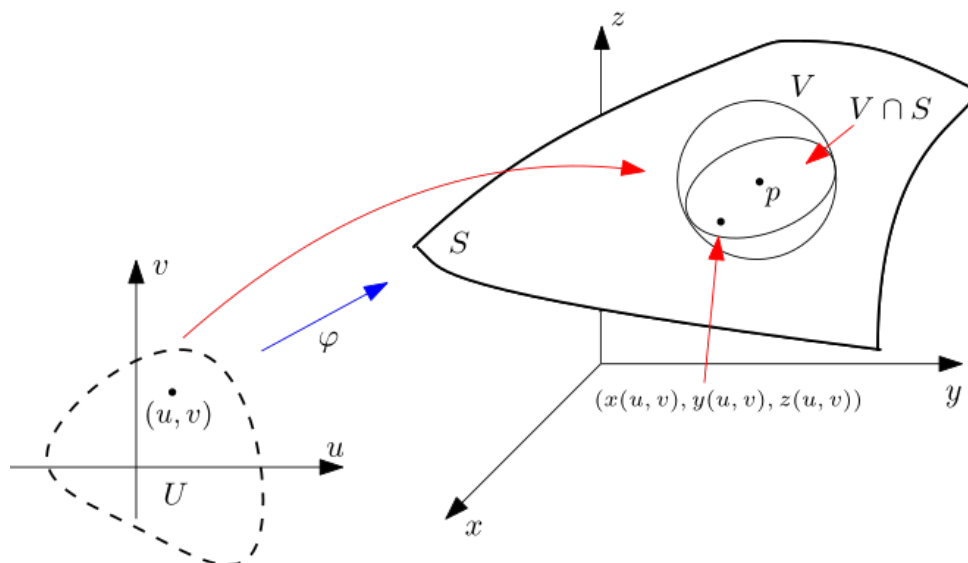
Superfícies Regulares em $\mathbb{R}^3$

Antes de iniciar o estudo voltado às superfícies de posto 1 em $\mathbb{R}^3$ e entender onde se diferenciam das superfícies regulares, é necessário entender o caso mais geral, isto é, as superfícies regulares. Neste capítulo, realizaremos uma breve revisão sobre esse tópico, apoiados em [Do Carmo \(2010\)](#), [Delgado e Frensel \(2017\)](#) e [Tenenblat \(2008\)](#). Ressaltamos que as notações utilizadas nesse capítulo serão as mesmas das referências acima. Como se trata de uma revisão, de forma a não se distanciar do foco deste trabalho, as demonstrações desse capítulo serão omitidas, mas podem ser encontradas nos textos-base. Pelo mesmo motivo, considera-se que o leitor tenha compreensão da teoria de curvas.

2.1 | Condições para a regularidade de uma superfície em $\mathbb{R}^3$

Neste trabalho, as superfícies serão tratadas como o objeto, ou seja, como conjuntos, conforme [Do Carmo \(2010\)](#), e não aplicações como em [Tenenblat \(2008\)](#). De um ponto de vista mais geométrico, uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$ é obtida tomando-se pedaços do plano e deformando-os de tal modo que a figura resultante não apresente vértices, arestas ou auto-interseções, e que tenha sentido falar em plano tangente nos pontos dessa figura, isto é:

Figura 1: Representação de uma parametrização de uma superfície regular.



Fonte: Elaboração própria (2025).

Definição 2.1. Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma **superfície regular** se, para cada $p \in S$ existe uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $\varphi : U \rightarrow V \cap S$ de um aberto U de $\mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ que respeita as seguintes condições:

1. φ é diferenciável de classe C^∞ (suave).

Isto é, ao escrever $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in U$, as funções $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U .

2. φ é um homeomorfismo.

3. Para todo $q = (u, v) \in U$, a diferencial $d\varphi_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.

Assim, cobrimos a superfície S com traços de aplicações satisfazendo as condições 1, 2 e 3, como ilustrado na Figura 1. Além disso, as seguintes condições equivalem à condição 3:

- 3 a. A matriz jacobiana de φ ,

$$J\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

ter posto máximo, para todo $q = (u, v) \in U$.

- 3 b. As colunas dessa matriz, isto é, os vetores $\varphi_u(u, v)$ e $\varphi_v(u, v)$, serem linearmente independentes, para todo $(u, v) \in U$.

- 3 c. Para todo $(u, v) \in U$, têm-se que a norma do produto vetorial $\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|(u, v) \neq 0$.

A aplicação φ é chamada de **parametrização** ou sistema de coordenadas (locais) em (uma vizinhança de) p . A vizinhança $V \cap S$ de p em S é chamada de **vizinhança coordenada**.

Sendo φ uma parametrização de S , as curvas $\varphi(u, v_0)$ e $\varphi(u_0, v)$, com u_0, v_0 constantes, são chamadas de **curvas coordenadas**.

Observação 2.2. Não estamos preocupados com classes de diferenciabilidade, por isso, considera-se na condição 1 da Definição 2.1 que as parametrizações sejam de classe C^∞ .

Exemplo 2.3. A esfera unitária $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ é uma superfície regular. De fato, considere a aplicação $\varphi_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\varphi_1(u, v) = (u, v, +\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}), \quad (u, v) \in U,$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$. Observe que $\varphi_1(U)$ é a calota superior de S^2 sem o equador e que valem as condições:

1. φ_1 é diferenciável, pois $u^2 + v^2 < 1$ e assim, φ_1 tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens.
2. φ_1 é um homeomorfismo, pois $\varphi_1(U)$ é bijetiva e $\varphi_1^{-1}(\varphi_1(U))$ é a restrição da projeção $\pi(x, y, z) = (x, y)$ ao conjunto $\varphi_1(U)$, logo é contínua.
3. A matriz jacobiana de φ_1 dada por

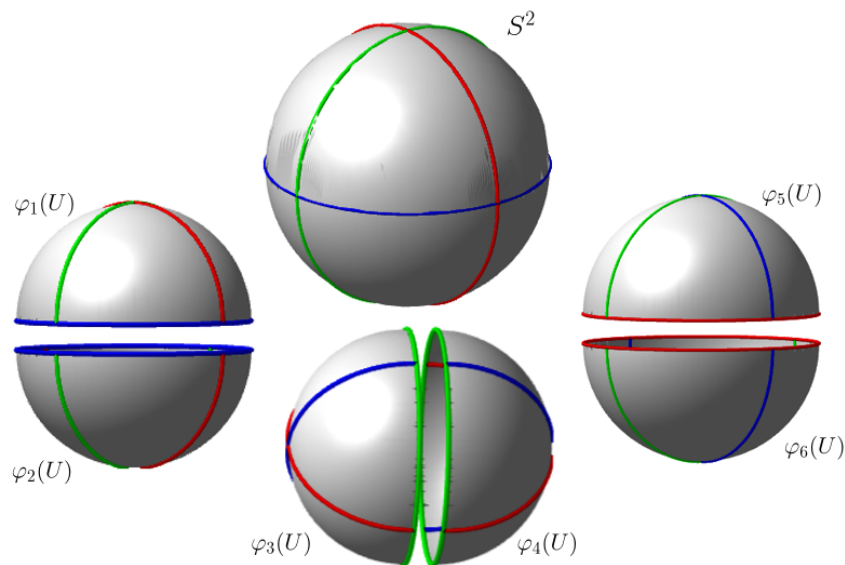
$$J\varphi_1(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -u & -v \\ \sqrt{1 - (u^2 + v^2)} & \sqrt{1 - (u^2 + v^2)} \end{pmatrix}$$

tem posto máximo para todo $(u, v) \in U$.

Assim, φ_1 é uma parametrização de S^2 . Agora, cobriremos a esfera com parametrizações similares e definidas de forma análoga, sendo elas:

$$\begin{aligned} \varphi_2(u, v) &= (u, v, -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}), \\ \varphi_3(u, v) &= (u, +\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, v), \\ \varphi_4(u, v) &= (u, -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, v), \\ \varphi_5(u, v) &= (+\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, u, v), \\ \varphi_6(u, v) &= (-\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, u, v). \end{aligned}$$

Figura 2: Parametrizações da esfera S^2 .



Fonte: Elaboração própria (2025).

Note que $\varphi_1(U) \cup \varphi_2(U)$ cobre a esfera menos o equador, onde a terceira coordenada se anula. Para tal, necessitamos “encaixar” as outras calotas da esfera, de forma a preen-

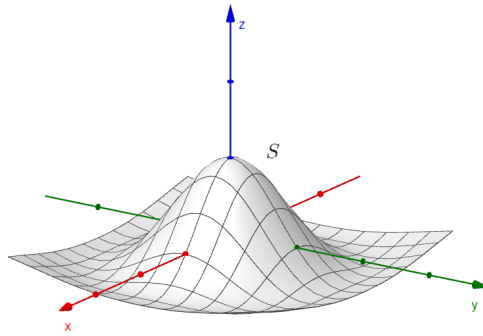
cher esse equador, conforme a Figura 2. E dessa forma, temos que S^2 é uma superfície regular.

Note que, provar que um conjunto é ou não uma superfície regular a partir da Definição 2.1 pode se mostrar uma tarefa trabalhosa; para isso, as Proposições 2.4, 2.6 e 2.8 apresentadas a seguir auxiliarão neste trabalho.

Proposição 2.4. (DO CARMO, 2010, p. 68) Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em um conjunto aberto U de $\mathbb{R}^2$, então o gráfico de f , isto é, o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado por $(x, y, f(x, y))$ para $(x, y) \in U$ é uma superfície regular.

Exemplo 2.5. Considere $f(u, v) = (1 - u^2 - v^2)e^{-\frac{u^2 + v^2}{2}}$. Como f é diferenciável para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, então pela Proposição 2.4, a imagem de $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$, descrita na Figura 3, é uma superfície regular.

Figura 3: Gráfico de $f(u, v) = (1 - u^2 - v^2)e^{-\frac{u^2 + v^2}{2}}$.



Fonte: Elaboração própria (2025).

Proposição 2.6. (DO CARMO, 2010, p. 69) Se $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $a \in f(U)$ é um valor regular de f , então $f^{-1}(a)$ é uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 2.7. O toro T é a superfície gerada pela rotação de um círculo S^1 de raio r em torno de uma reta pertencente ao plano que contém o traço do círculo e a uma distância $a > r$ do centro do círculo (Figura 4). Consideremos S^1 o círculo no plano- yz centrado no ponto $(0, a, 0)$. Então S^1 é dado por $(y - a)^2 + z^2 = r^2$ e os pontos do conjunto T , obtidos pela rotação deste círculo em torno do eixo- z satisfazem a equação

$$z^2 = r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2.$$

Consequentemente, T é a imagem inversa de r^2 pela função

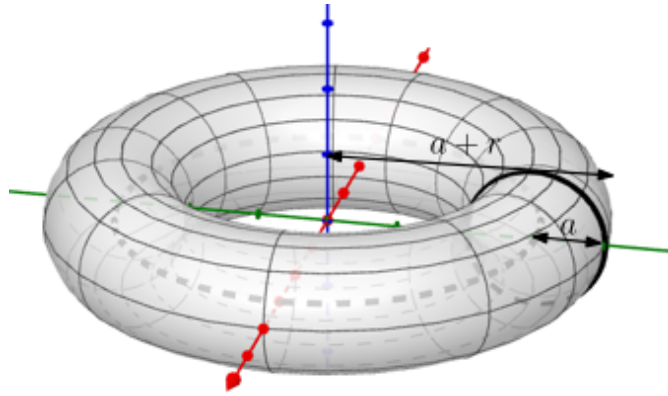
$$f(x, y, z) = z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2.$$

Assim, para $(x, y) \neq (0, 0)$ temos que

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{2x(\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{2y(\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 2z \right),$$

que é não nulo sempre que $f(x, y, z) = r^2$, ou seja, r^2 é um valor regular de f . Segue da Proposição 2.6 que o toro T é uma superfície regular

Figura 4: Toro T .

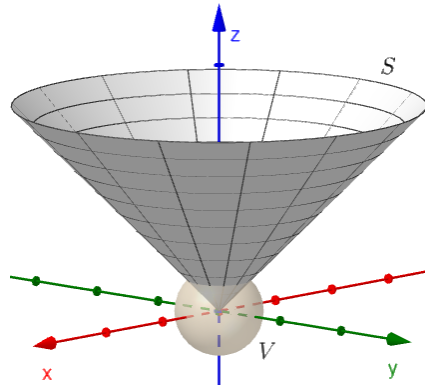


Fonte: Elaboração própria (2025).

Proposição 2.8. (DO CARMO, 2010, p. 73) Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in S$. Então, existe uma vizinhança V de p em S tal que V é o gráfico de uma função diferenciável que tem uma das seguintes formas: $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$ ou $x = h(y, z)$.

Exemplo 2.9. O cone de uma folha C , dado por $z = +\sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ não é uma superfície regular. De fato, suponha que C é uma superfície regular. Logo pela Proposição 2.8, existe uma vizinhança V de $(0, 0, 0) \in C$ tal que V é o gráfico de uma função diferenciável de uma das três formas: $x = h(y, z)$, $y = g(x, z)$ ou $z = f(x, y)$.

Figura 5: Gráfico de $z = +\sqrt{x^2 + y^2}$.



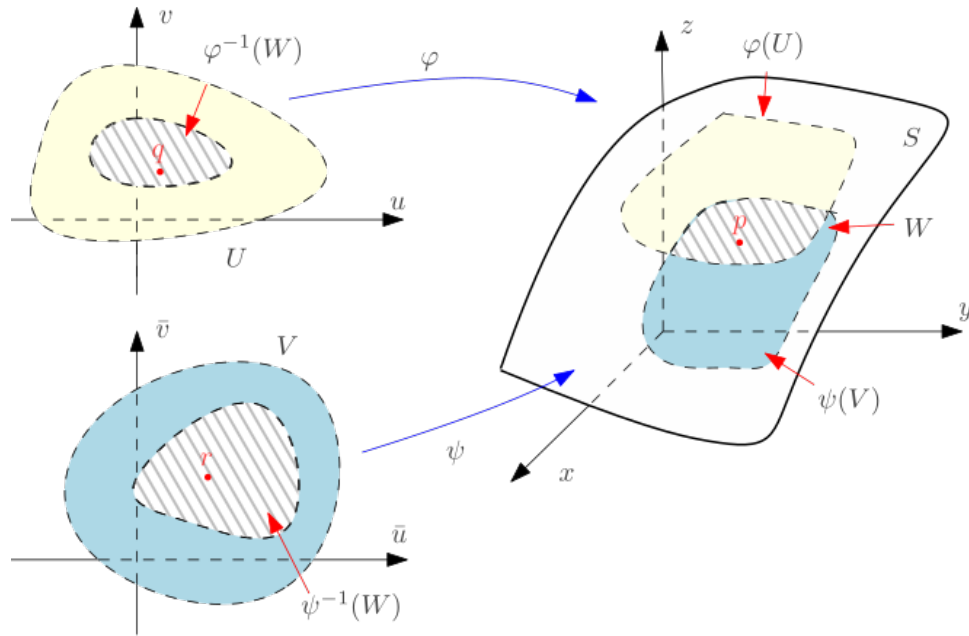
Fonte: Elaboração própria (2025).

As duas primeiras formas podem ser descartadas, visto que as projeções de C sobre o plano- xz e o plano- yz não são injetivas; logo, não é possível ser o gráfico de uma função. A terceira forma teria que coincidir, em uma vizinhança de $(0, 0, 0)$, com $z = +\sqrt{x^2 + y^2}$, o que é um absurdo, pois $z = +\sqrt{x^2 + y^2}$ não é diferenciável em $(0, 0)$.

2.2 | Mudança de parâmetros

De acordo com a Definição 2.1, cada ponto p de uma superfície regular S pertence a uma vizinhança coordenada. Os pontos de uma tal vizinhança coordenada são caracterizados pelas suas coordenadas. Assim, um ponto p de S pode pertencer a várias vizinhanças coordenadas, ou seja, ser escrito segundo diferentes sistemas de coordenadas.

Figura 6: Diferentes sistemas de coordenadas em torno do ponto p .



Fonte: Elaboração própria (2025).

Para que a definição dada faça sentido, é necessário que, quando um ponto pertença a duas vizinhanças coordenadas, com parâmetros (u, v) e $(\bar{u}, \bar{v})$, seja possível passar de um destes pares de coordenadas ao outro através de uma aplicação diferenciável.

Sejam p um ponto de uma superfície regular S , $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\psi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ duas parametrizações de S tais que $p \in \varphi(U) \cap \psi(V) = W$, como representado na Figura 6. Como φ e ψ são homeomorfismos e W é um aberto de S , temos que $\varphi^{-1}(W)$ e $\psi^{-1}(W)$ são abertos de $\mathbb{R}^2$. Se φ e ψ são dadas por:

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U,$$

$$\psi(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{x}(\bar{u}, \bar{v}), \bar{y}(\bar{u}, \bar{v}), \bar{z}(\bar{u}, \bar{v})), \quad (\bar{u}, \bar{v}) \in V,$$

então a **mudança de parâmetros** $h = \varphi^{-1} \circ \psi : \psi^{-1}(W) \rightarrow \varphi^{-1}(W)$, dada por

$$h(\bar{u}, \bar{v}) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})),$$

é um homeomorfismo com inversa $h^{-1} = \psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(W) \rightarrow \psi^{-1}(W)$ e

$$h^{-1}(u, v) = (\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v)).$$

Proposição 2.10. (Mudança de parâmetros) (DELGADO; FRENSEL, 2017, p. 101)

A aplicação $h^{-1} = \psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(W) \rightarrow \psi^{-1}(W)$ é um difeomorfismo C^∞ .

Isto é, é possível transitar de um sistema de coordenadas a outro, o que nos permite concluir que a Definição 2.1 está boa.

Exemplo 2.11. Seja o paraboloide elíptico S dado por $z = x^2 + y^2$ (Figura 7), segue da Proposição 2.4 que S é uma superfície regular e pode ser parametrizada por

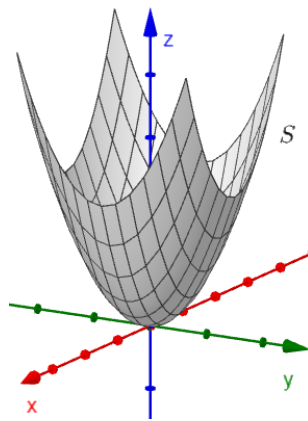
$$\varphi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2), \text{ com } (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Considere a mudança de parâmetros $h(u, v) = (2u + v, v)$, que é um difeomorfismo, e assim,

$$\psi(u, v) = (\varphi \circ h)(u, v) = (2u + v, v, 4u^2 + 4uv + 2v^2)$$

é também uma parametrização de S .

Figura 7: Paraboloide elíptico S .



Fonte: Elaboração própria (2025).

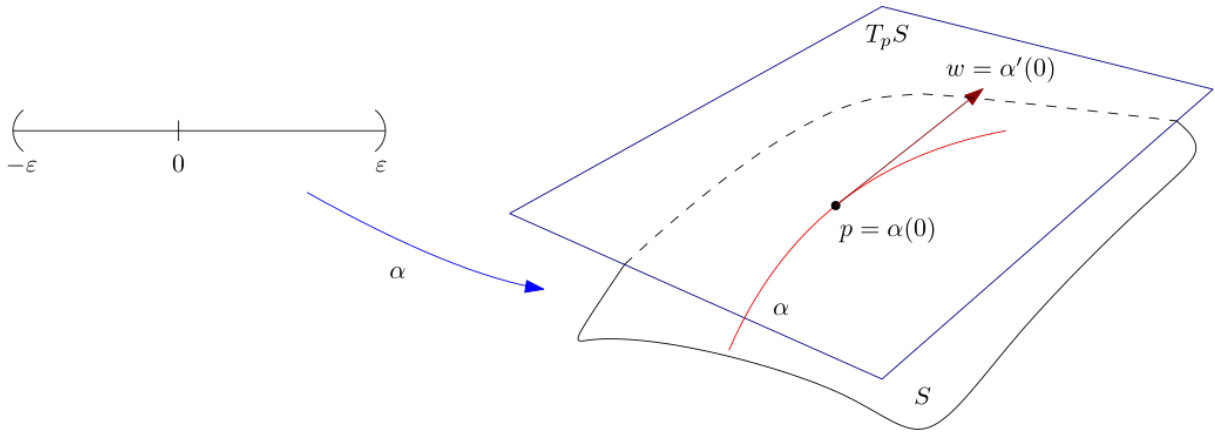
2.3 | Plano tangente e a Primeira Forma Fundamental

Nesta seção veremos que a condição 3 na Definição 2.1 de uma superfície regular S garante que, para cada $p \in S$, o conjunto de vetores tangentes às curvas parametrizadas de S , passando por p , constituem um plano. A partir desse plano podemos estudar

propriedades locais e globais da superfície regular, como o tamanho de vetores, ângulos entre curvas, área de uma parte limitada de S , dentre outros.

Definição 2.12. Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in S$. Dizemos que $w \in \mathbb{R}^3$ é um vetor tangente à S em p se $w = \alpha'(0)$, onde $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ é uma curva regular parametrizada em 0 e $\alpha(0) = p$ (Figura 8).

Figura 8: Vetor tangente w à S em p .



Fonte: Elaboração própria (2025).

Proposição 2.13. (DELGADO; FRENSEL, 2017, p.118) Seja $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de uma superfície regular e seja $q \in U$. Então o subespaço vetorial de dimensão 2,

$$d\varphi_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$$

coincide com o conjunto de vetores tangentes à S em $\varphi(q)$.

Pela proposição acima, o plano $d\varphi_q(\mathbb{R}^2)$, que passa por $\varphi(q) = p$, não depende da parametrização φ . Este plano é chamado de **plano tangente** à S em p e será denotado por $T_p S$. A escolha de uma parametrização φ determina uma base $\{\varphi_u(q), \varphi_v(q)\}$ de $T_p S$, chamada base associada a φ .

As coordenadas de um vetor $w \in T_p S$ na base associada a uma parametrização φ são determinadas do seguinte modo: w é o vetor velocidade $\alpha'(0)$ de uma curva $\alpha = \varphi \circ \beta$, onde $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ é dado por $\beta(t) = (u(t), v(t))$, com $\beta(0) = q = \varphi^{-1}(p)$. Isto é:

$$\alpha'(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \beta)(0) = \frac{d}{dt}\varphi(u(t), v(t))(0) = \varphi_u(q)u'(0) + \varphi_v(q)v'(0) = w.$$

Assim, na base $\{\varphi_u(q), \varphi_v(q)\}$, w tem coordenadas $(u'(0), v'(0))$, onde $(u(t), v(t))$ é a expressão, na parametrização φ , de uma curva cujo vetor velocidade em $t = 0$ é w . Porém, para essa ser uma boa definição, é necessário que ela independa da curva escolhida, para tal nos apoiamos na Proposição 2.14.

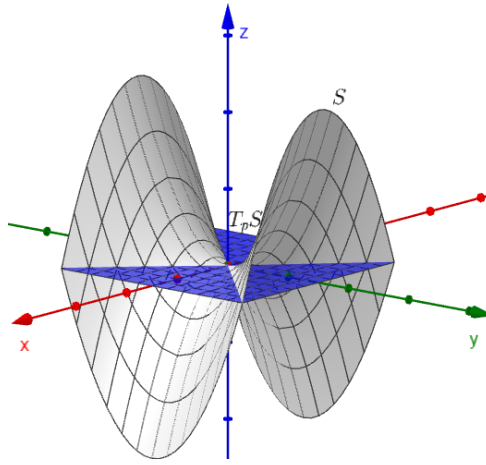
Proposição 2.14. (DELGADO; FRENSEL, 2017, 120) Dado w , o vetor $\beta'(0)$ como acima não depende da escolha da curva α .

Exemplo 2.15. Seja S o parabolóide hiperbólico dado por $z = y^2 - x^2$. Considerando a parametrização $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(u, v) = (u, v, v^2 - u^2)$, temos que

$$\varphi_u(u, v) = (1, 0, -2u) \text{ e } \varphi_v(u, v) = (0, 1, 2v).$$

Em particular, para $p = \mathbf{0}$ obtemos que $T_p S = \{\text{plano-}xy\}$, conforme a Figura 9.

Figura 9: Traço de $\varphi(u, v) = (u, v, v^2 - u^2)$ em branco e $T_p S$ em azul.



Fonte: Elaboração própria (2025).

Dado um ponto p em uma superfície regular S , existem dois vetores unitários em $\mathbb{R}^3$ que são normais ao plano tangente $T_p S$; cada um deles é chamado de **vetor normal unitário** em p . Fixada uma parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, podemos definir a escolha de um vetor normal unitário em cada ponto $p \in \varphi(U)$, pela seguinte expressão

$$N(q) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}(q),$$

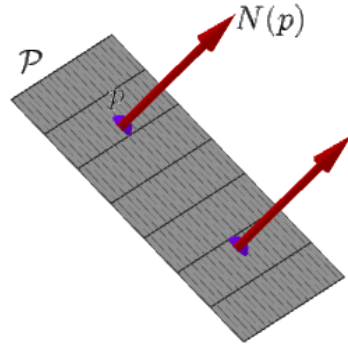
onde $\varphi(q) = p$, $q \in U$. Assim, obtemos uma aplicação diferenciável $N : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$. Note que $N(\varphi(U)) \subset S^2$. Nos aprofundaremos mais nessa aplicação na Subseção 2.4.1.

Exemplo 2.16. Considere o plano $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = d\}$, onde $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Considere a parametrização $\varphi(u, v) = (u, v, \frac{d-au-bv}{c})$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Assim, para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, temos que:

$$N(u, v) = \frac{\begin{pmatrix} 1, 0, -\frac{a}{c} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0, 1, -\frac{b}{c} \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1, 0, -\frac{a}{c} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0, 1, -\frac{b}{c} \end{pmatrix} \right\|} = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

conforme Figura 10.

Figura 10: Plano $\mathcal{P}$ e seu vetor normal unitário associado à parametrização φ .



Fonte: Elaboração própria (2025).

2.3.1 | Primeira forma Fundamental

O produto interno natural do $\mathbb{R}^3$ induz em cada plano tangente $T_p S$ de uma superfície regular S um produto interno, que denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. Se $w_1, w_2 \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$, então $\langle w_1, w_2 \rangle_p$ é igual ao produto interno de w_1 e w_2 , como vetores em $\mathbb{R}^3$. A esse produto interno, corresponde uma forma quadrática $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \|w\|^2 \geq 0.$$

Definição 2.17. A forma quadrática I_p em $T_p S$ definida acima é chamada **primeira forma fundamental** da superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ em $p \in S$.

Considere a base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ associada a uma parametrização $\varphi(u, v)$ em p . Como um vetor tangente $w \in T_p S$ é o vetor tangente a uma curva parametrizada

$$\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t)), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \text{ com } p = \alpha(0) = \varphi(q), \quad q \in U;$$

obtemos

$$\begin{aligned} I_p(w) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p = \langle \varphi_u(q)u' + \varphi_v(q)v', \varphi_u(q)u' + \varphi_v(q)v' \rangle_p \\ &= \langle \varphi_u(q), \varphi_u(q) \rangle_p (u')^2 + 2\langle \varphi_u(q), \varphi_v(q) \rangle_p u'v' + \langle \varphi_v(q), \varphi_v(q) \rangle_p (v')^2 \\ &= (u')^2 E(q) + 2u'v' F(q) + (v')^2 G(q), \end{aligned}$$

onde

$$E(u, v) = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle(u, v);$$

$$F(u, v) = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle(u, v);$$

$$G(u, v) = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle(u, v);$$

são os **coeficientes da primeira forma fundamental** na base $\{\varphi_u(q), \varphi_v(q)\}$ de $T_p S$.

Observação 2.18. As funções $E, F, G : U \rightarrow \mathbb{R}$ são de classe C^∞ , Além disso, vale que

$$E(u, v) > 0, \quad F(u, v) > 0 \quad \text{e} \quad (EG - F^2)(u, v) = \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2(u, v) > 0, \quad \forall (u, v) \in U.$$

Exemplo 2.19. Seja $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$ um plano passando por $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e contendo os vetores ortonormais $w_1 = (a_1, a_2, a_3), w_2 = (b_1, b_2, b_3)$. Considerando a parametrização

$$\varphi(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

note que para todo ponto $p \in \mathcal{P}$ temos que $\varphi_u(p) = w_1$ e $\varphi_v(p) = w_2$. Desta forma, obtemos que os coeficientes da primeira forma são constantes e dados por

$$E \equiv 1, \quad F \equiv 0 \quad \text{e} \quad G \equiv 1.$$

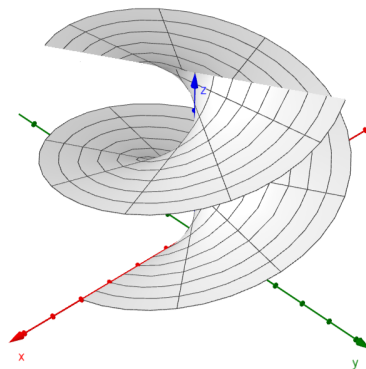
Exemplo 2.20. Considere a hélice $\alpha(u) = (\cos u, \sin u, u)$. Traçando, para cada ponto da hélice, uma reta paralela ao plano- xy que intersecta o eixo- z obtemos uma superfície regular denominada helicóide (Figura 11). Uma parametrização do helicóide é dada por

$$\varphi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{onde} \quad \varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u).$$

Calculando os coeficientes da primeira forma a partir desta parametrização obtemos que

$$E(u, v) = v^2 + 1, \quad F(u, v) \equiv 0 \quad \text{e} \quad G(u, v) \equiv 1.$$

Figura 11: O helicóide.



Fonte: Elaboração própria (2025).

A partir da primeira forma fundamental podemos resolver problemas métricos de uma superfície regular sem fazer referência ao espaço $\mathbb{R}^3$ em que S está contida. Assim, o **comprimento de arco** s de uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$ é dado por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt = \int_{t_0}^t \sqrt{I(\alpha'(t))} dt.$$

Em particular, se $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ está contida numa vizinhança coordenada de uma parametrização $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset S$, temos que:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{(u'(t)^2 E + 2u'(t)v'(t)F + v'(t)^2 G)} dt$$

com os coeficientes da primeira forma calculados em $(u(t), v(t))$.

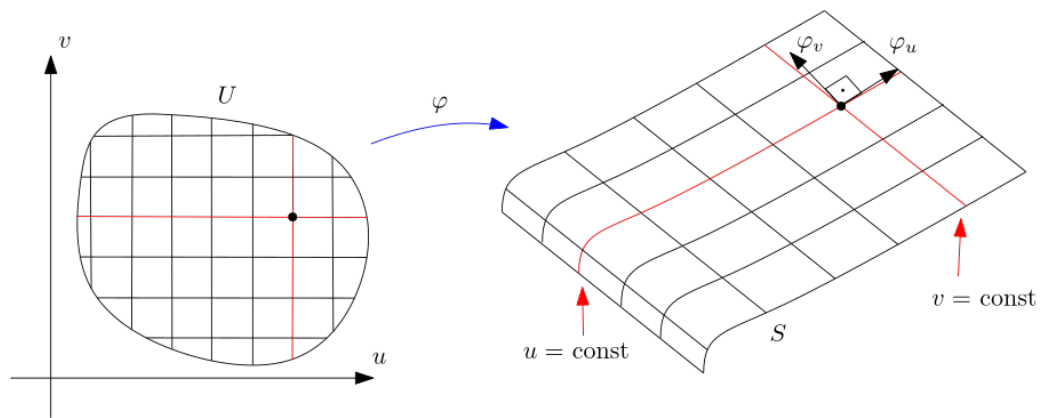
O **ângulo** θ que duas curvas parametrizadas regulares $\alpha, \beta : I \rightarrow S$ que se intersectam em $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ fazem neste ponto é dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \|\beta'(t_0)\|}.$$

Em particular, o ângulo θ de interseção das curvas coordenadas de uma parametrização $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ é:

$$\cos \theta = \frac{\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle}{\|\varphi_u\| \|\varphi_v\|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Figura 12: Representação de curvas coordenadas ortogonais.



Fonte: Elaboração própria (2025).

Então as curvas coordenadas de uma parametrização são ortogonais se, e somente se, $F(u, v) = 0$ para todo $(u, v) \in U$ (Figura 12).

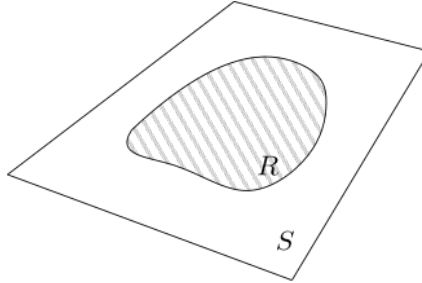
Uma outra questão métrica que pode ser tratada com a primeira forma fundamental é o cálculo da área de uma região limitada de uma superfície regular S .

Definição 2.21. Um **domínio** (regular) em S é um subconjunto aberto e conexo de S tal que sua fronteira é a imagem de um círculo por uma aplicação que é um homeomorfismo diferenciável regular, exceto num número finito de pontos. Uma **região** de S é a união de um domínio com a sua fronteira. Uma região de S é **limitada** se está contida em alguma bola de $\mathbb{R}^3$.

Considere regiões limitadas R que estão contidas em uma vizinhança coordenada

$\varphi(U)$ de uma parametrização $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ de S , isto é, $R = \varphi(Q)$, onde Q é uma região limitada de $\mathbb{R}^2$ contida em U (Figura 13).

Figura 13: Representação de uma região limitada R de S .



Fonte: Elaboração própria (2025).

Definição 2.22. Seja $R \subset S$ uma região limitada de uma superfície S contida em uma vizinhança coordenada $\varphi(U)$ de uma parametrização $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset S$. O número positivo

$$A(R) = \iint_Q \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| du dv$$

é chamado **área de R** , onde $Q = \varphi^{-1}(R)$.

Observação 2.23. $A(R)$ independe da parametrização. Com efeito, seja $\psi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma outra parametrização tal que $R \subset \psi(V)$, defina $\bar{Q} = \psi^{-1}(R)$. Desta forma, seja $\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right|$ o Jacobiano da mudança de coordenadas $h = \varphi^{-1} \circ \psi$, então, pelo teorema de mudança de variáveis para integrais múltiplas

$$\iint_{\bar{Q}} \|\psi_{\bar{u}} \wedge \psi_{\bar{v}}\| d\bar{u} d\bar{v} = \iint_Q \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right| d\bar{u} d\bar{v} = \iint_Q \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| du dv.$$

Observação 2.24. Segue da Observação 2.18 que:

$$A(R) = \int \int_Q \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| du dv = \int \int_Q \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Exemplo 2.25. Considere o toro T e a vizinhança coordenada correspondente à parametrização $\varphi : U \rightarrow T$ dada por

$$\varphi(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u),$$

onde $U = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$, que cobre o toro, exceto por um mediano e um paralelo. Assim, para todo $(u, v) \in U$ temos que:

$$\begin{aligned} \varphi_u(u, v) &= (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u) \\ \varphi_v(u, v) &= (-(a + r \cos u) \sin v, (a + r \cos u) \cos v, 0) \end{aligned}$$

E conseqüentemente:

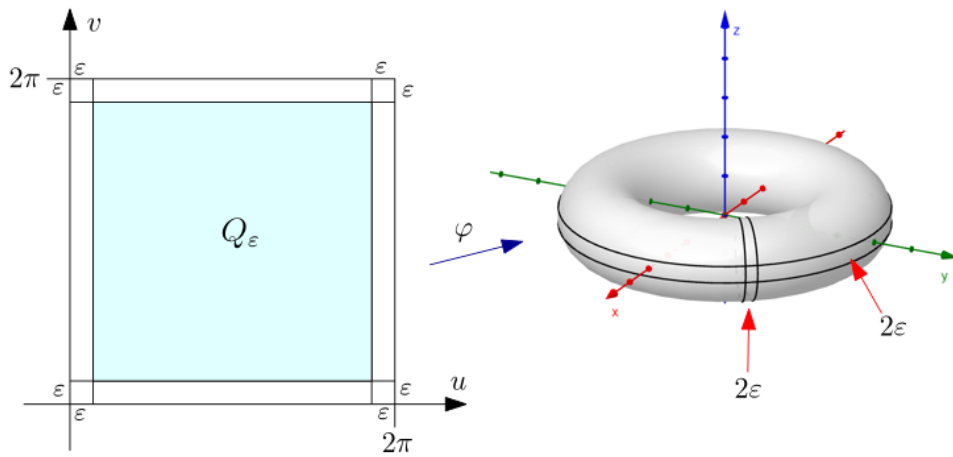
$$E(u, v) = r^2, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = (a + r \cos u)^2.$$

Logo

$$\sqrt{EG - F^2} = r(a + r \cos u).$$

Considere a região R_ε , dada pela imagem de $\varphi(Q_\varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$ e pequeno, onde $Q_\varepsilon = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 + \varepsilon \leq u \leq 2\pi - \varepsilon, 0 + \varepsilon \leq v \leq 2\pi - \varepsilon\} \subset U$, como na Figura 14.

Figura 14: Q_ε e sua imagem no toro T .



Fonte: Elaboração própria (2025).

Desta forma,

$$A(R_\varepsilon) = \iint_{Q_\varepsilon} r(a + r \cos u) du dv = ra(2\pi - 2\varepsilon)^2 + r^2(2\pi - 2\varepsilon)(\sin(2\pi - \varepsilon) - \sin \varepsilon).$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ na expressão acima, temos que $A(T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A(R_\varepsilon) = 4\pi^2 ra$.

2.4 | A Aplicação de Gauss e a Segunda Forma Fundamental

Com o intuito de definir a segunda forma fundamental para superfícies regulares, trabalharemos a partir de um campo vetorial normal à superfície. Na subseção a seguir, discutiremos a ideia de orientação de uma superfície regular, a qual se relaciona diretamente com a existência desse campo normal.

2.4.1 | Orientação de Superfícies

Sejam S uma superfície regular, $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ e $\bar{\varphi} : V \rightarrow \bar{\varphi}(V)$ parametrizações de S em p . As bases $\{\varphi_u(q), \varphi_v(q)\}$, $\varphi(q) = p$ e $\{\bar{\varphi}_u(\bar{q}), \bar{\varphi}_v(\bar{q})\}$, $\bar{\varphi}(\bar{q}) = p$, determinam orientações do plano tangente $T_p S$.

Se $W = \varphi(U) \cap \bar{\varphi}(V)$ e $h : \varphi^{-1} \circ \bar{\varphi} : \bar{\varphi}^{-1} \rightarrow \varphi^{-1}(W)$, dada por

$$h(\bar{u}, \bar{v}) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})), \text{ com } h(\bar{q}) = q,$$

temos que:

$$\bar{\varphi}_{\bar{u}}(\bar{q}) = \varphi_u(q) \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}(\bar{q}) + \varphi_v(q) \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}(\bar{q}) \text{ e } \bar{\varphi}_{\bar{v}}(\bar{q}) = \varphi_u(q) \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}(\bar{q}) + \varphi_v(q) \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}(\bar{q}). \quad (1)$$

Então a matriz mudança de base é

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}(\bar{q}) & \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}(\bar{q}) \\ \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}(\bar{q}) & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}(\bar{q}) \end{pmatrix},$$

que é exatamente a matriz Jacobiana de h em $\bar{q}$, ou seja, $\{\varphi_u(q), \varphi_v(q)\}$ e $\{\bar{\varphi}_{\bar{u}}(\bar{q}), \bar{\varphi}_{\bar{v}}(\bar{q})\}$ determinam a mesma orientação no plano tangente $T_p S$ se, e só se,

$$\det(dh_{\bar{q}}) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}(\bar{q}) > 0.$$

Definição 2.26. Uma superfície regular S é **orientável** quando existe uma família de parametrizações de S , $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \varphi(U_\alpha) \mid \alpha \in A\}$, tal que:

1. $S = \bigcup_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(U_\alpha)$;
2. se $W_{\alpha\beta} = X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, a aplicação mudança de coordenadas

$$h_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta : \varphi_\beta^{-1}(W_{\alpha\beta}) \rightarrow \varphi_\alpha^{-1}(W_{\alpha\beta})$$

tem jacobiano positivo em todo ponto $q \in \varphi_\beta^{-1}(W_{\alpha\beta})$.

A escolha de uma tal família é chamada **uma orientação de S** e a superfície S , neste caso, é dita **orientada**. Se não existir uma família de parametrizações de S satisfazendo as condições da Definição 2.26, dizemos que S é uma superfície **não-orientável**. Se S é orientada, uma parametrização $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ de S é **compatível com a orientação de S** se, juntando φ à família de parametrizações dadas pela orientação, obtém-se ainda uma orientação de S .

Exemplo 2.27. Toda superfície que é coberta por uma única vizinhança coordenada é orientável; em particular, temos que toda superfície que é gráfico de uma função diferenciável é orientável.

Verificar se uma superfície é orientável ou não a partir da definição é, em alguns casos, uma tarefa trabalhosa; para isso, nos apoiaremos nos vetores normais à superfície e a ideia geométrica de que em uma superfície orientada, ao percorrermos qualquer curva

fechada contida na superfície com um campo de vetores normais, o vetor deve permanecer voltado para o mesmo sentido.

Definição 2.28. Um **campo de vetores normais unitários diferenciável** em um aberto V de uma superfície S é uma aplicação $N : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciável tal que

$$\|N(p)\| = 1 \text{ e } N(p) \perp T_p S, \text{ para todo } p \in V.$$

Como visto anteriormente, dada uma parametrização $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$, existe um campo de vetores normais unitários diferenciável em $\varphi(U)$, $N : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$, dado por

$$N(\varphi(u, v)) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}(u, v).$$

Tomando outro sistema de coordenadas $\bar{\varphi} : V \rightarrow \bar{\varphi}(V)$, de forma que tenhamos $W = \varphi(U) \cap \bar{\varphi}(V) \neq \emptyset$, analogamente existe um campo de vetores normais diferenciável em $\bar{\varphi}(V)$, $\bar{N} : \bar{\varphi}(V) \rightarrow \mathbb{R}^3$, dado por:

$$\bar{N}(\bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v})) = \frac{\bar{\varphi}_{\bar{u}} \wedge \bar{\varphi}_{\bar{v}}}{\|\bar{\varphi}_{\bar{u}} \wedge \bar{\varphi}_{\bar{v}}\|}(u, v).$$

Assim, obtemos de (1) que

$$\bar{\varphi}_{\bar{u}} \wedge \bar{\varphi}_{\bar{v}} = (\varphi_u \wedge \varphi_v) \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})},$$

onde $\partial(u, v)/\partial(\bar{u}, \bar{v})$ é o Jacobiano da mudança de coordenadas. Portanto, N conserva ou muda de sinal, conforme $\partial(u, v)/\partial(\bar{u}, \bar{v})$ seja positivo ou negativo, respectivamente, o que nos permite enunciar a seguinte proposição.

Proposição 2.29. (DELGADO; FRENSEL, 2017, p.137-139) Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é orientável se, e só se, existe um campo de vetores normais unitários $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciável em S .

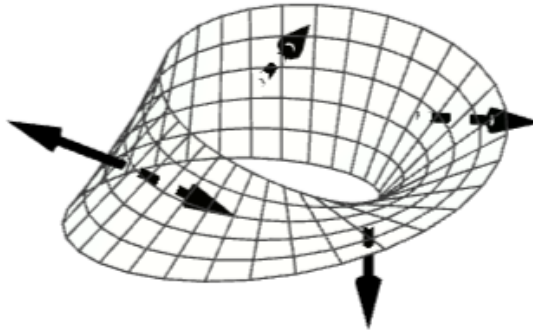
A escolha de um campo diferenciável de vetores normais unitários $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ é também chamada de uma **orientação de S** .

Em geral, grande parte das superfícies regulares são orientáveis, o que torna difícil a exemplificação de superfícies não orientáveis. Para tal, temos a **faixa de Möbius** que será apresentada a seguir. No Exemplo 2.30 discutiremos geometricamente o porquê dela não ser uma superfície orientável, mas os cálculos que comprovam este fato estarão omitidos, podendo ser encontrados em Delgado e Frensel (2017, p.142-147).

Exemplo 2.30. A faixa de Möbius é a superfície regular M obtida considerando o círculo S^1 dado por $x^2 + y^2 = 4$ e o segmento aberto AB dado no plano- yz por $y = 2, |z| < 1$. Deslocando o centro c de AB ao longo de S^1 , e girando AB em torno de c no plano

formado pelo eixo- z e c , de tal modo que quando c descreve um ângulo u , AB tenha girado $u/2$. Quando c completa uma volta ao longo de S^1 , AB retorna à sua posição inicial, com os extremos invertidos.

Figura 15: Faixa de Möbius M e seus vetores normais.



Fonte: Elaboração própria (2025).

Geometricamente podemos perceber que M não é uma superfície orientável. De fato, caso M fosse orientável, existiria um campo diferenciável $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ de vetores normais unitários. Tomando esses vetores ao longo do círculo $x^2 + y^2 = 4$, observe pela Figura 15 que, depois de uma volta completa, N retorna à sua posição inicial com sentido contrário, o que contradiz a orientabilidade de M . Note que não há como fazer uma escolha do que seria um “lado” para a faixa de Möbius.

2.4.2 | A Segunda Forma Fundamental

Enquanto a primeira forma fundamental de uma superfície regular nos permite estudar medidas sobre a superfície, a segunda forma fundamental definida nesta seção nos diz sobre como ela se comporta no espaço e está relacionada com o quanto a superfície se encurva no espaço, ou seja, o quanto ela se afasta, em cada ponto, de seu plano tangente. Esse afastamento se dá, geometricamente, através da variação do vetor normal da superfície. Para este estudo, consideraremos superfícies regulares orientáveis.

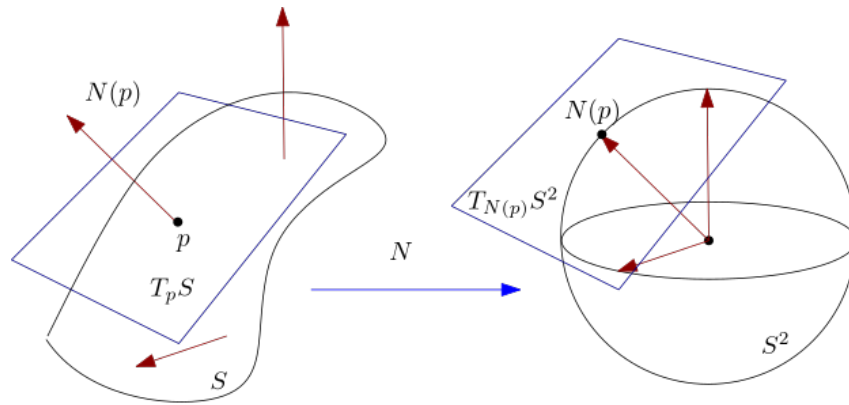
Definição 2.31. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície com uma orientação N . A aplicação $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ toma seus valores na esfera unitária

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

A aplicação $N : S \rightarrow S^2$, assim definida, é chamada de **aplicação de Gauss de S** (Figura 16).

Além disso, a aplicação de Gauss é diferenciável e assim, podemos falar na sua diferencial. Sejam $p \in S$ e $dN_p : T_p S \rightarrow T_{N(p)} S^2$ a diferencial de N em p . Como $T_{N(p)} S^2$ e $T_p S$ são iguais como espaços vetoriais, dN_p pode ser vista como um operador linear em $T_p S$.

Figura 16: Aplicação de Gauss.



Fonte: Elaboração própria (2025).

Considere $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ a diferencial da aplicação de Gauss em p e uma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w \in T_p S$. Então $dN_p(w) = N'(0) \in T_p S$, onde $N(t) = N \circ \alpha(t)$, mede a taxa de variação com que N , restrita à curva α , muda de direção numa vizinhança de $t = 0$. Assim, dN_p mede quanto N se afasta de $N(p)$ numa vizinhança de p , isto é, mede quanto S se afasta de $T_p S$ numa vizinhança de p .

Proposição 2.32. (DELGADO; FRENSEL, 2017, p. 166-167) A diferencial da aplicação normal de Gauss $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ é uma aplicação linear auto-adjunta, isto é, $\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle$, para todos $w_1, w_2 \in T_p S$.

Deste fato, podemos extrair algumas propriedades, como a de que, para cada aplicação linear auto-adjunta associamos uma aplicação bilinear e simétrica $B(w_1, w_2) = \langle -dN_p(w_1), w_2 \rangle$ (para todos $w_1, w_2 \in T_p S$) e uma forma quadrática $Q(w) = B(w, w) = \langle -dN_p(w), w \rangle$ (para todo $w \in T_p S$), o que torna intuitiva a seguinte definição.

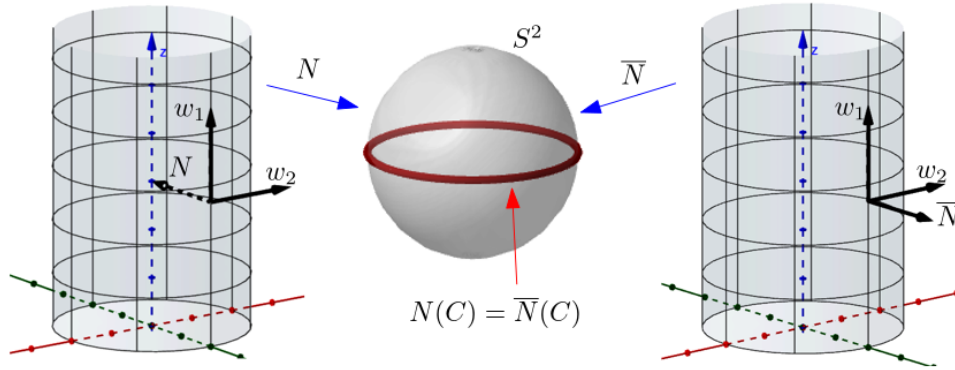
Definição 2.33. A forma quadrática $II_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $II_p(w) = -\langle dN_p(w), w \rangle$ é chamada a segunda forma fundamental de S em p .

Observação 2.34. Das propriedades de aplicação linear auto-adjunta temos que existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_p S$ tal que $dN_p(e_1) = \lambda_1 e_1$, $dN_p(e_2) = \lambda_2 e_2$, ou seja, e_1 e e_2 são autovetores de dN_p . Além disso, a matriz de dN_p relativa à base $\{e_1, e_2\}$ é diagonal e os autovalores λ_1, λ_2 , com $\lambda_1 \geq \lambda_2$, da diagonal são o máximo e mínimo, respectivamente, da forma quadrática $Q(w) = \langle -dN_p(w), w \rangle$ sobre o círculo unitário de $T_p S$ (DELGADO; FRENSEL, 2017, p. 161-164).

Exemplo 2.35. Seja $\mathcal{P}$ o plano dado no Exemplo 2.16. Como o campo de vetores normais unitários N é constante, temos que $dN_p \equiv 0$, isto é, todo vetor de $T_p S$ é um autovetor associado ao autovalor zero.

Exemplo 2.36. Considerando o cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Temos que $\bar{N}(x, y, z) = (x, y, 0)$ e $N(x, y, z) = (-x, -y, 0)$ são os dois campos diferenciáveis de vetores normais unitários em C .

Figura 17: Cilindro C e os campos diferenciáveis de vetores normais unitários N e $\bar{N}$.



Fonte: Elaboração própria (2025).

Além disso, se w_1 é um vetor tangente ao cilindro e paralelo ao eixo- z , então $dN_p(w_1) = d\bar{N}_p(w_1) = 0$, isto é, w_1 é um autovetor de dN_p e $d\bar{N}_p$ associado ao autovalor 0. Caso w_2 seja um vetor tangente ao cilindro e paralelo ao plano- xy , então $dN_p(w_2) = -w_2$ e $d\bar{N}_p(w_2) = w_2$, isto é, w_2 é um autovetor de dN_p e de $d\bar{N}_p$ associado aos autovalores -1 e 1, respectivamente.

Definição 2.37. Seja $\mathcal{C}$ uma curva regular em S que passa por p , $k(p)$ a curvatura de $\mathcal{C}$ em p e $\cos \theta = \langle \mathbf{n}(p), N(p) \rangle$, onde $\mathbf{n}(p)$ é o vetor normal à $\mathcal{C}$ em p e $N(p)$ é o vetor normal à S em p . O número $\kappa_n(p) = k(p) \cos \theta$ é chamado de **curvatura normal de $\mathcal{C}$ em p** .

Observação 2.38. Seja $\mathcal{C}$ uma curva regular em S , com $p \in \mathcal{C}$, e $\alpha : I \rightarrow \mathcal{C}$ uma parametrização de $\mathcal{C}$ pelo comprimento de arco tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$.

Seja $\bar{N}(s) = N \circ \alpha(s)$. Temos que $\langle \bar{N}(s), \alpha''(s) \rangle = -\langle \bar{N}'(s), \alpha'(s) \rangle$, para todo $s \in I$, pois $\langle N'(s), \alpha'(s) \rangle = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} II_p(v) &= II_p(\alpha'(0)) = -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle = -\langle -\bar{N}'(0), \alpha'(0) \rangle \\ &= \langle \bar{N}(0), \alpha''(0) \rangle = \langle N(p), k(p)\mathbf{n}(p) \rangle = \kappa_n(p). \end{aligned}$$

Desta forma, o valor de II_p em um vetor unitário $w \in T_p S$ é igual à curvatura normal de qualquer curva regular em S que passa por p e é tangente a w em p .

Proposição 2.39. (Meusnier) (DO CARMO, 2010, p. 167) Todas as curvas de uma superfície S que têm, em um ponto $p \in S$, a mesma reta tangente têm, neste ponto, a mesma curvatura normal.

A Proposição 2.39 nos permite definir a curvatura normal de S em $p \in S$ a partir

de uma dada direção $w \in T_p S$ da seguinte maneira:

$$\kappa_{n_p}(w) = \frac{II_p(w)}{I_p(w)}, w \in T_p S - \{0\}.$$

Assim, $\kappa_{n_p}(w) = \kappa_{n_p}(\lambda w)$, $\forall w \in T_p S - \{0\}$ e $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Observação 2.40. Sendo $dN_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}^3$ a diferencial de $N : S \rightarrow S^2$ em p , e $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal de autovalores de dN_p , tal que $-dN_p(e_1) = k_1 e_1$, $-dN_p(e_2) = k_2 e_2$, com $k_1 \geq k_2$, como na Observação 2.34, então,

$$II_p(xe_1 + ye_2) = k_1 x^2 + k_2 y^2,$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, com $x^2 + y^2 = 1$, ou seja, k_1 é o máximo e k_2 é o mínimo das curvaturas normais a S em p (DELGADO; FRENSEL, 2017, p. 177).

Exemplo 2.41. Considere S o parabolóide hiperbólico como no Exemplo 2.15. Tomando como orientação $N(x, y, z) = \frac{(2x, -2y, 1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$, temos que, sendo p a origem de $\mathbb{R}^3$, $N(p) = (0, 0, 1)$, $T_p S = \{\text{plano-}xy\}$ e para $w = (x, y, 0) \in T_p S$, $dN_p(w) = (2x, -2y, 0)$. Assim, $w_1 = (1, 0, 0)$ é um autovetor de $-dN_p$ associado ao autovalor -2 e $w_2 = (0, 1, 0)$ é um autovetor de $-dN_p$ associado ao autovalor 2 . Pela observação anterior temos que $-2 \leq \kappa_{n_p}(w) \leq 2$, $\forall w \in T_p S - \{0\}$.

Definição 2.42. A curvatura normal máxima k_1 e a curvatura normal mínima k_2 são chamadas **curvaturas principais** de S em p , e as direções dadas pelos autovetores e_1 e e_2 são chamadas **direções principais** de S em p .

Exemplo 2.43. Em um plano, todas as direções em todos os pontos são principais, pois $\kappa_{n_p} \equiv 0$.

Exemplo 2.44. No cilindro C , como no Exemplo 2.36, os vetores $w_1 = (-a, b, 0)$ e $w_2 = (0, 0, 1)$ fornecem as direções principais no ponto $p = (a, b, c)$, correspondentes às curvaturas principais 1 e 0 , respectivamente.

Definição 2.45. Sejam $p \in S$ e $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ a diferencial da aplicação normal de Gauss em p . O determinante de dN_p é chamado a **curvatura gaussiana** K de S em p , e o negativo da metade do traço de dN_p é chamado a **curvatura média** H de S em p . Assim,

$$K(p) = \det(dN_p) \quad \text{e} \quad H(p) = -\frac{1}{2} \text{traço}(dN_p).$$

No caso em que $\{e_1, e_2\}$ é uma base ortonormal de $T_p S$ formada de autovetores de dN_p , com $-dN_p(e_1) = k_1 e_1$ e $-dN_p(e_2) = k_2 e_2$, temos que

$$K(p) = k_1 k_2 \quad \text{e} \quad H(p) = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Mudanças na orientação de S não alteram a curvatura Gaussiana, mas alteram o sinal da curvatura média.

Podemos classificar os pontos de uma superfície regular da seguinte forma.

Definição 2.46. Um ponto p de uma superfície regular S é chamado:

- (i) **Elíptico**, se $\det(dN_p) > 0$;
- (ii) **Hiperbólico**, se $\det(dN_p) < 0$;
- (iii) **Parabólico**, se $\det(dN_p) = 0$, com $dN_p \neq 0$;
- (iv) **Planar**, se $dN_p = 0$.

Pelas Definições 2.45 e 2.46 temos que, num ponto elíptico, a curvatura Gaussiana é positiva e, portanto, as curvaturas principais têm o mesmo sinal. Em um ponto hiperbólico p , a curvatura Gaussiana é negativa. Assim, as curvaturas principais têm sinais opostos. Em um ponto parabólico, a curvatura Gaussiana é nula, mas uma das curvaturas principais é diferente de zero. Em um ponto planar p , todas as curvaturas normais são nulas e assim, $K(p) = H(p) = 0$.

Exemplo 2.47. Dos Exemplos 2.16 e 2.36, conclui-se, respectivamente, que todos os pontos do plano são planares e que todos os pontos do cilindro são parabólicos. Além disso, o Exemplo 2.41 nos permite afirmar que a origem do parabolóide hiperbólico é um ponto hiperbólico.

Definição 2.48. Seja $p \in S$. Dizemos que uma **direção** de $T_p S$ é **assintótica** se a curvatura normal em p nesta direção é zero.

Observação 2.49. w é uma direção assintótica se, e somente se, $w \neq 0$ e $II_p(w) = 0$.

Exemplo 2.50. Segue do Exemplo 2.36 que em todos os pontos do cilindro C , a direção $w = (0, 0, 1)$ é assintótica.

Observação 2.51. Podemos relacionar as classificações dos pontos de uma superfície regular com a quantidade de direções assintóticas nele, de forma que:

- (i) Se p é **elíptico**, então $K(p) > 0$ e assim, a curvatura normal nunca se anula, ou seja, não há direções assintóticas;
- (ii) Se p é **hiperbólico**, então k_1 e k_2 possuem sinais diferentes e, segue da Observação 2.40, que há duas direções soluções para a equação $k_1 x^2 + k_2 y^2 = 0$, ou seja, existem duas direções assintóticas no ponto;
- (iii) Se p é **parabólico**, então $K = 0$, com k_1, k_2 não simultaneamente nulos, e segue da Observação 2.40 que há apenas uma direção assintótica;

(iv) Se p é **planar**, então $\kappa_n(w) = 0$, para todo $w \in T_p S$ e portanto, toda direção é assintótica.

Podemos expressar a segunda forma fundamental a partir de um sistema de coordenadas locais. Sejam S uma superfície orientada com orientação $N : S \rightarrow S^2$ e $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ uma parametrização de S compatível com a orientação de S , isto é,

$$N(u, v) = N(\varphi(u, v)) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}(u, v), \quad \forall (u, v) \in U.$$

Tomando $w \in T_p S$ e escrevendo $w = a\varphi_u(q) + b\varphi_v(q)$, com $\varphi(q) = p$, a expressão da segunda forma fundamental na base $\{\varphi_u(q), \varphi_v(q)\}$ é dada por

$$\begin{aligned} II_p(w) &= -\langle dN_p(w), w \rangle = -\langle aN_u(q) + bN_v(q), a\varphi_u(q) + b\varphi_v(q) \rangle \\ &= a^2 e(q) + 2ab g(q) + b^2 f(q), \end{aligned} \quad (2)$$

onde

$$\begin{aligned} e(q) &= -\langle N_u(q), \varphi_u(q) \rangle = \langle N(q), \varphi_{uu}(q) \rangle \\ f(q) &= -\langle N_u(q), \varphi_v(q) \rangle = \langle N_v(q), \varphi_u(q) \rangle \\ &= \langle N(q), \varphi_{vu}(q) \rangle = \langle N(q), \varphi_{uv}(q) \rangle \\ g(q) &= -\langle N_v(q), \varphi_v(q) \rangle = \langle N(q), \varphi_{vv}(q) \rangle. \end{aligned}$$

As funções $e, f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ são os **coeficientes da segunda forma fundamental na base** $\{\varphi_u(q), \varphi_v(q)\}$.

Exemplo 2.52. A “sela de macaco” é a superfície regular S dada pelo gráfico de

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2,$$

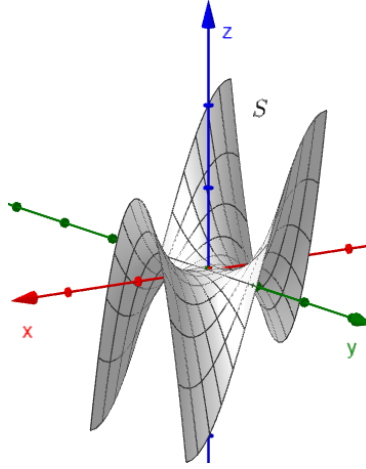
conforme Figura 18. Considerando a parametrização $\varphi(u, v) = (u, v, u^3 - 3uv^2)$, temos que suas primeiras e segundas derivadas são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \varphi_u(u, v) &= (1, 0, 3u^2 - 3v^2), \quad \varphi_v(u, v) = (0, 1, -6uv), \\ \varphi_{uu}(u, v) &= (0, 0, 6u), \quad \varphi_{uv}(u, v) = (0, 0, -6v) \text{ e } \varphi_{vv}(u, v) = (0, 0, -6u). \end{aligned}$$

Observe que em $p = \mathbf{0} \in S$, os coeficientes da segunda forma fundamental são todos nulos. Consequentemente, $II_p \equiv 0$ e assim, p é um ponto planar.

Podemos também obter as seguintes expressões para o cálculo das curvaturas Gaussiana e Média utilizando os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais (DEL-

Figura 18: Sela de macaco.



Fonte: Elaboração própria (2025).

GADO; FRENSEL, 2017, p. 188-190):

$$K(p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}(q) \quad \text{e} \quad H(p) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}(q). \quad (3)$$

Exemplo 2.53. Considere o toro T coberto pela parametrização

$$\varphi(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u),$$

onde $U = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$. Desta forma

$$\varphi_u(u, v) = (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u);$$

$$\varphi_v(u, v) = (-(a + r \cos u) \sin v, (a + r \cos u) \cos v, 0);$$

$$\varphi_{uu}(u, v) = (-r \cos u \cos v, -r \cos u \sin v, -r \sin u);$$

$$\varphi_{uv}(u, v) = (r \sin u \sin v, -r \sin u \cos v, 0);$$

$$\varphi_{vv}(u, v) = (-(a + r \cos u) \cos v, -(a + r \cos u) \sin v, 0).$$

Logo, os coeficientes da segunda forma são dados por

$$e(u, v) = \langle N, \varphi_{uu} \rangle(u, v) = \frac{\langle \varphi_u \wedge \varphi_v, \varphi_{uu} \rangle}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}(u, v) = r;$$

$$f(u, v) = \langle N, \varphi_{uv} \rangle(u, v) = \frac{\langle \varphi_u \wedge \varphi_v, \varphi_{uv} \rangle}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}(u, v) = 0;$$

$$g(u, v) = \langle N, \varphi_{vv} \rangle(u, v) = \frac{\langle \varphi_u \wedge \varphi_v, \varphi_{vv} \rangle}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}(u, v) = (a + r \cos u) \cos u.$$

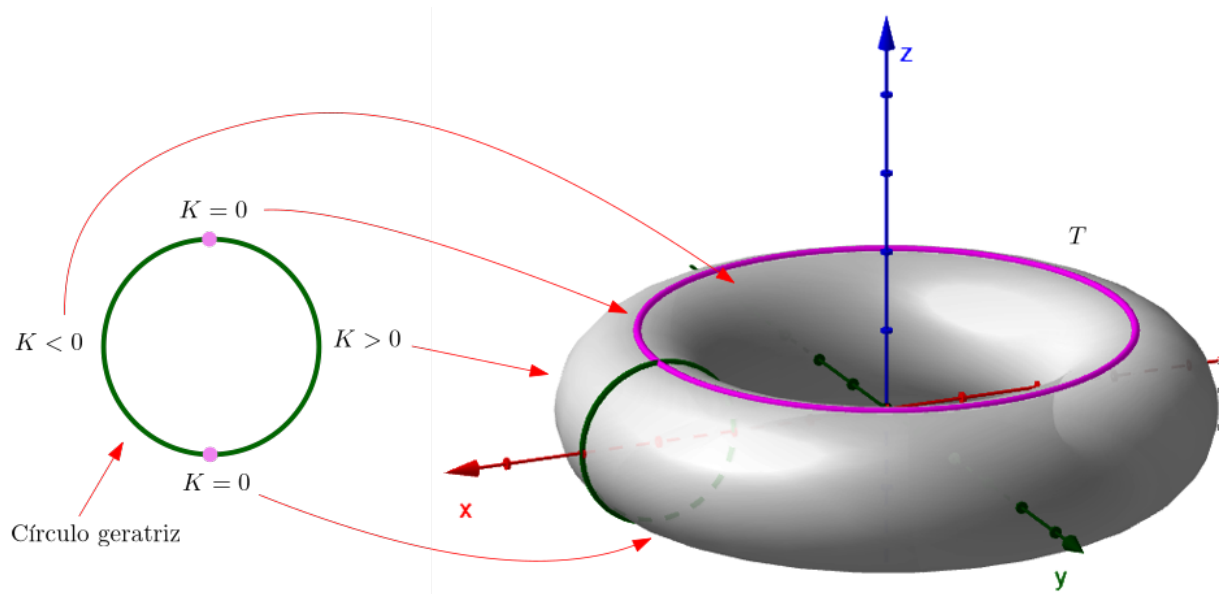
Do Exemplo 2.25 e de (3), segue que

$$K(u, v) = \frac{\cos u}{r(a + r \cos u)},$$

e assim, K só depende de u , ou seja, K é constante ao longo de um paralelo, o que nos permite concluir que

- (i) Os pontos dos paralelos $u = \frac{\pi}{2}$ e $u = \frac{3\pi}{2}$ possuem gaussiana nula e portanto, são parabólicos.

Figura 19: Curvatura gaussiana K no toro T e seus respectivos pontos.



Fonte: Elaboração própria (2025).

- (ii) Os pontos ao longo da região do toro dados por $u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ a curvatura é positiva e assim, tais pontos são elípticos.
- (iii) Os pontos ao longo da região do toro dados por $u \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ possuem gaussiana negativa e sendo assim, são hiperbólicos.

Veja a representação na Figura 19.

Desta forma, podemos iniciar o Capítulo 3 com enfoque em singularidades de aplicações diferenciáveis afim de estudar uma das intersecções entre tais capítulos, as superfícies singulares.

CAPÍTULO 3

Singularidades de aplicações diferenciáveis

Neste capítulo, realizamos uma breve introdução à Teoria das Singularidades, com base em [Atique e Saia \(2006\)](#) e [Gibson \(1979\)](#). Em [Izumya et al. \(2016\)](#), os autores também dedicam um capítulo todo ao estudo de ferramentas de Teoria das Singularidades que são utilizadas no estudo de geometria diferencial de variedades regulares. Tais ferramentas também podem ser utilizadas no estudo de geometria de variedades singulares. Desta forma, o objetivo deste capítulo é apresentar alguns conceitos e resultados que serão aplicados no Capítulo 4 para o estudo da geometria diferencial de superfícies singulares de coposto 1 em $\mathbb{R}^3$.

3.1 | Germes e Jatos

O estudo de singularidades de aplicações diferenciáveis é realizado localmente; para isso, é necessário estudar aplicações que se comportam de forma semelhante no ponto analisado. Os seguintes resultados serão enunciados considerando aplicações de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^p$, mas podem ser feitos de forma mais abrangente, considerando funções definidas entre variedades diferenciáveis N e P quaisquer (para mais detalhes, ver [Gibson \(1979\)](#)). A escolha para tal abordagem se deve ao foco deste trabalho em parametrizações de superfícies singulares em $\mathbb{R}^3$.

Consideremos a seguinte relação no conjunto de todas as aplicações suaves (de classe C^∞) definidas em uma vizinhança de $x \in \mathbb{R}^n$ com contradomínio $\mathbb{R}^p$.

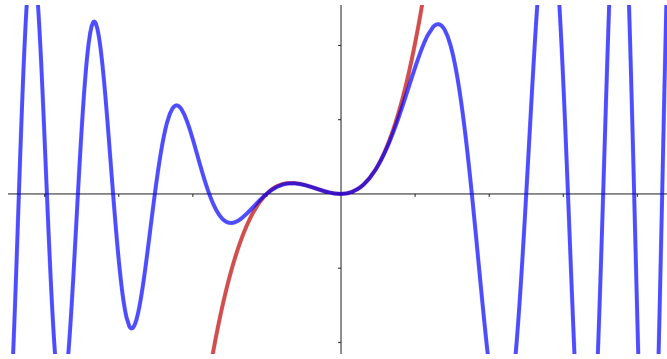
Definição 3.1. Sejam U_1 e U_2 vizinhanças de $x \in \mathbb{R}^n$. Duas aplicações suaves $f_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $f_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ são equivalentes ($f_1 \sim f_2$) quando existir uma vizinhança $U \subset U_1 \cap U_2$ de x em $\mathbb{R}^n$ tal que $f_1|_U = f_2|_U$ (Figura 20).

A relação “ $\sim$ ” é uma relação de equivalência. De fato:

- A relação é reflexiva. Seja $f_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Tomando $U = U_1$, temos $f|_U = f|_U$ e então $f \sim f$.
- A relação é simétrica. Sejam $f_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $f_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ tais que $f_1 \sim f_2$, ou seja, existe $U \subset U_1 \cap U_2$ tal que $f_1|_U = f_2|_U$. Tomando $U' = U$ temos a igualdade $f_2|_{U'} = f_1|_{U'}$ e, portanto, $f_2 \sim f_1$.

- A relação é transitiva. Sejam f_1, f_2 como acima e $f_3 : U_3 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ tais que $f_1 \sim f_2$ e $f_2 \sim f_3$, ou seja, existem $U' \subset U_1 \cap U_2$ e $U'' \subset U_2 \cap U_3$ de forma que $f_1|_{U'} = f_2|_{U'}$ e $f_2|_{U''} = f_3|_{U''}$. Tomando $U = U' \cap U''$ temos que $f_1|_U = f_2|_U = f_3|_U$ e portanto, $f_1 \sim f_3$.

Figura 20: Germes de aplicação em $x = 0$ quando $n = p = 1$.



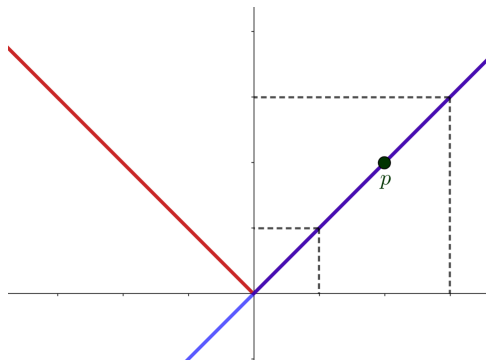
Fonte: Elaboração própria (2025).

Sempre que definimos uma relação de equivalência em um conjunto, podemos considerar as classes de equivalência dos elementos do conjunto via tal relação. Neste caso, as classes de equivalência são chamadas de **germes de aplicação em x** e um elemento da classe de equivalência é chamado **representante do germe**.

Observação 3.2. A notação $f : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y)$ indica que $f(x) = y$, ou seja, f é um germe de aplicação em x que satisfaz a condição $f(x) = y$. Quando não é fixada a imagem de x , escrevemos simplesmente $f : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow \mathbb{R}^p$. Chamamos $\mathbb{R}^n$ de **fonte** e $\mathbb{R}^p$ de **meta**.

Exemplo 3.3. Considere $f, g : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ dados por: $f(x) = x$ e $g(x) = |x|$. Note que, para todo $p \in (0, +\infty)$, temos que $f \sim g$, pois existe uma vizinhança de p em que f e g coincidem, como ilustrado na Figura 21.

Figura 21: Gráficos de $f(x) = x$ de azul, de $g(x) = |x|$ de vermelho e de roxo, onde coincidem.

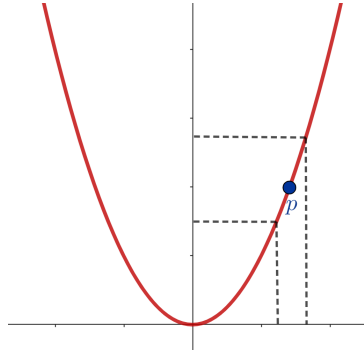


Fonte: Elaboração própria (2025).

Definição 3.4. Para cada germe $f : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y)$, a derivada $d_x f : T_x \mathbb{R}^n \rightarrow T_y \mathbb{R}^p$ é definida como sendo a derivada em x de qualquer representante. Além disso, dizemos que $f : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y)$ é um **germe de difeomorfismo** se um de seus representantes é um germe de difeomorfismo local.

Exemplo 3.5. Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Note que f não é injetora, pois $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, f não é difeomorfismo. No entanto, para todo $p \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f : (\mathbb{R}, p) \rightarrow (\mathbb{R}, p^2)$ é um germe de difeomorfismo, veja na Figura 22.

Figura 22: Gráfico de $f(x) = x^2$ em vermelho.



Fonte: Elaboração própria (2025).

Definição 3.6. O posto de um germe $f : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y)$ é definido como o posto da derivada de um de seus representantes em x . Quando o posto é igual a n , o germe é **imersível** e quando o posto é igual a p , dizemos que o germe é **submersível**. Quando o germe não é nem imersível nem submersível em x dizemos que x é um ponto **singular**.

Exemplo 3.7. Considere o germe $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ que parametriza o paraboloide elíptico, dado por $f(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$. Note que, sua Jacobiana é dada por

$$Jf_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, possui posto 2. Desta forma, f é imersível.

Segue dos resultados do Capítulo 2 que toda parametrização de uma superfície regular é um germe imersível.

Exemplo 3.8. Seja $g : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ a projeção dada por $g(x, y) = x$. Sua jacobiana na origem é dada por

$$Jg_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},$$

e desta forma, g é submersível.

Exemplo 3.9. Considere $h : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ o germe de aplicação dado por $h(x, y) = (x, y^2, xy)$. Sua jacobiana é dada por

$$Jh_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e portanto, $(0, 0)$ é um ponto singular de h .

Definição 3.10. O **espaço dos jatos** $J^k(n, p)$ é o espaço vetorial real das aplicações $f = (f_1, \dots, f_p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ onde cada componente f_i de f é um polinômio de grau menor ou igual a k nas coordenadas canônicas $x_1, x_2, \dots, x_n$ de $\mathbb{R}^n$ com termo constante nulo. Os elementos de $J^k(n, p)$ são chamados k -jatos.

Para cada aplicação de classe $C^\infty f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ e cada $a \in \mathbb{R}^n$, definimos a aplicação $j^k f : \mathbb{R}^n \rightarrow J^k(n, p)$ por: $j^k f(a)$ é o polinômio de Taylor de $f(x + a) - f(a)$ de ordem k na origem. A aplicação $j^k f$ é de classe C^∞ e $j^k f(a)$ é chamado o k -jato de f em a .

Note que na Definição 3.10 podemos trocar “aplicações $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ” por germes de aplicações $f : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y)$ de maneira natural.

Exemplo 3.11. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Para obter $j^k f(a)$, $a \in \mathbb{R}$, definimos $g(x) = f(x + a) - f(a)$ e calculamos o seu polinômio de Taylor em 0. Obtemos:

$$g(0) = f(a) - f(a) = 0;$$

$$g'(x) = f'(x + a) \Rightarrow g'(0) = f'(a).$$

Continuando o processo, concluímos que:

$$j^k f(a) = f'(a)x + \frac{f''(a)x^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(k)}(a)x^k}{k!}.$$

Tomando como caso particular, calculemos o 3-jato de $f(x) = \sin x$ na origem.

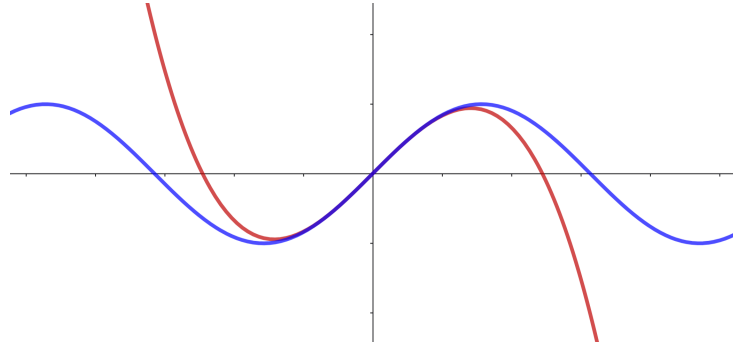
- $f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1;$
- $f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = 0;$
- $f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -1;$

E, portanto, temos que o 3-jato de $f(x) = \sin x$ na origem é dado por:

$$j^3 f(\mathbf{0}) = x - \frac{x^3}{3!},$$

conforme Figura 23.

Figura 23: Gráfico de $f(x) = \sin x$ de azul e de seu 3-jato na origem de vermelho.



Fonte: Elaboração própria (2025).

Exemplo 3.12. Considere agora o germe de aplicação $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ dado por $f(x, y) = (x, y^2, x^3y + y)$. Para calcular seu 3-jato na origem, sabemos que, escrevendo $f = (f_1, f_2, f_3)$:

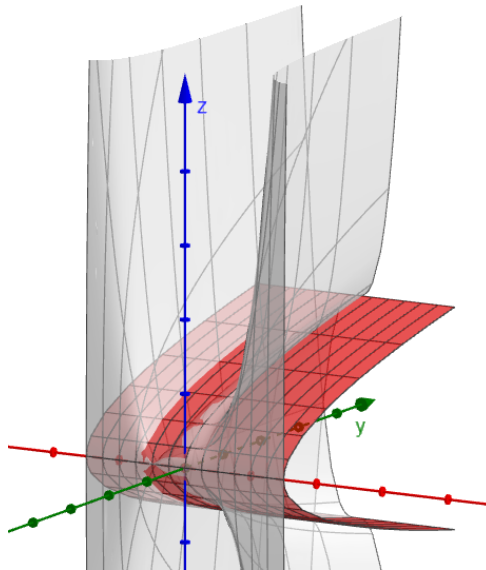
$$d_{(0,0)}^k f(x, y) = \left(\sum_{i+j=k} \frac{\partial^{i+j} f_1}{\partial x^i \partial y^j}(0, 0) x^i y^j, \sum_{i+j=k} \frac{\partial^{i+j} f_2}{\partial x^i \partial y^j}(0, 0) x^i y^j, \sum_{i+j=k} \frac{\partial^{i+j} f_3}{\partial x^i \partial y^j}(0, 0) x^i y^j \right).$$

Assim, o 3-jato de f na origem é dado por:

$$j^3 f(\mathbf{0}) = d_{(0,0)} f(x, y) + \frac{d_{(0,0)}^2 f(x, y)}{2!} + \frac{d_{(0,0)}^3 f(x, y)}{3!}.$$

Obtemos, então, que $j^3 f(\mathbf{0}) = (x, y^2, y)$, conforme Figura 24.

Figura 24: Traço de $f(x, y) = (x, y^2, x^3y + y)$ em branco e de seu 3-jato em vermelho.



Fonte: Elaboração própria (2025).

Nota-se nas Figuras 23 e 24, o comportamento semelhante dos jatos às suas respectivas funções no ponto de interesse e diferente quando nos afastamos dele. Como estamos interessados em um estudo local, é possível encontrar uma aplicação mais fácil de ser trabalhada, a partir de outros representantes do mesmo germe, ou dos k -jatos de algum desses germes. Isso será de especial importância no Capítulo 4, quando forem estudadas as propriedades geométricas de segunda ordem de superfícies singulares. Na ocasião, será mostrado que informações geométricas da geometria diferencial de superfícies de coposto 1 em $\mathbb{R}^3$ estarão em dependência direta com o 2-jato de suas parametrizações locais.

3.2 | O anel $\mathcal{E}_n$

A partir de agora, por simplicidade, as definições e resultados serão enunciados para germes de aplicação na origem, ou seja, $f : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^p, \mathbf{0})$.

Em particular, quando $p = 1$, o conjunto dos germes de aplicação $f : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ possui uma estrutura de anel local, ou seja, possui somente um ideal maximal. Tal estrutura fornece ferramentas que serão necessárias nas próximas seções, onde serão feitas classificações de aplicações singulares.

Definição 3.13. O conjunto de germes de aplicação $f : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^∞ é denotado por $\mathcal{E}_{n,p}$. Quando $p = 1$, este conjunto é denotado por $\mathcal{E}_n$. Em geral, consideramos germes $f \in \mathcal{E}_{n,p}$ tais que $f(\mathbf{0}) = 0$.

Proposição 3.14. Valem os seguintes resultados:

- (i) $f \in \mathcal{E}_n$ possui inverso multiplicativo se, e somente se, $f(\mathbf{0}) \neq 0$.
- (ii) $\mathcal{E}_n$ é um anel local cujo ideal maximal é $\mathcal{M}_n = \{f \in \mathcal{E}_n; f(\mathbf{0}) = 0\}$.

Demonstração:

- (i) Seja $f \in \mathcal{E}_n$ invertível. Logo existe $g \in \mathcal{E}_n$ tal que $f(x).g(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Em particular, $f(\mathbf{0}).g(\mathbf{0}) = 1$, ou seja, $f(\mathbf{0}) \neq 0$.

Por outro lado, suponha que $f(\mathbf{0}) \neq 0$. Como f é de classe C^∞ , em particular, f é contínua. Pelo Teorema de Conservação do Sinal, existe um aberto $U \in \mathbb{R}^n$ contendo $\mathbf{0}$ tal que $f(x) \neq 0$, para todo $x \in U$. Assim, para $x \in U$, existe $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, ou seja, $g(x).f(x) = 1$, onde g é de classe C^∞ . Portanto, f é localmente invertível.

- (ii) $\mathcal{E}_n$ é um conjunto de germes, ou seja, cada elemento é uma classe de equivalência. Denotamos o germe então por $[f]$ de forma a deixar esta representação mais clara. Definimos as operações de soma e produto respectivamente como:

$$[f] + [g] = [f + g] \text{ e } [f] * [g] = [f.g].$$

Como os representantes dos germes são aplicações, as operações estão bem definidas. Sejam $[f_1], [f_2], [f_3] \in \mathcal{E}_n$. Para a operação $+$ temos:

(a) **Associatividade:**

$$\begin{aligned} [f_1] + ([f_2] + [f_3]) &= [f_1] + [f_2 + f_3] = [f_1 + f_2 + f_3] = \\ &= [(f_1 + f_2) + f_3] = [f_1 + f_2] + [f_3] = ([f_1] + [f_2]) + [f_3]. \end{aligned}$$

(b) **Comutatividade:**

$$[f_1] + [f_2] = [f_1 + f_2] = [f_2 + f_1] = [f_2] + [f_1].$$

(c) **Existência do elemento neutro:** Seja $e : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$, $e(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Note que:

$$[f] + [e] = [f + e] = [f + 0] = [f], \forall [f] \in \mathcal{E}_n.$$

(d) **Existência do inverso:** Para todo $[f] \in \mathcal{E}_n$, existe $[-f] \in \mathcal{E}_n$, $-f : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $(-f)(x) = -f(x)$, tal que:

$$[f] + [-f] = [f + (-f)] = [f - f] = [0] = [e].$$

Portanto, $(\mathcal{E}_n, +)$ é um grupo abeliano. Para a operação $*$ temos:

(a) **Associatividade:**

$$\begin{aligned} [f_1] * ([f_2] * [f_3]) &= [f_1] * [f_2 \cdot f_3] = [f_1 \cdot f_2 \cdot f_3] = [(f_1 \cdot f_2) \cdot f_3] = [f_1 \cdot f_2] * [f_3] = \\ &= ([f_1] * [f_2]) * [f_3]. \end{aligned}$$

(b) **Comutatividade:**

$$[f_1] * [f_2] = [f_1 \cdot f_2] = [f_2 \cdot f_1] = [f_2] * [f_1].$$

(c) **Distributividade à direita:**

$$\begin{aligned} ([f_1] + [f_2]) * [f_3] &= [(f_1 + f_2)] * [f_3] = [(f_1 + f_2) \cdot f_3] = [f_1 \cdot f_3 + f_2 \cdot f_3] = \\ &= [f_1 \cdot f_3] + [f_2 \cdot f_3] = [f_1] * [f_3] + [f_2] * [f_3]. \end{aligned}$$

A distributividade à esquerda é provada analogamente.

(d) **Existência do elemento neutro:** Seja $1 : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$, $1(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Assim:

$$[1] * [f] = [1 \cdot f] = [f], \forall [f] \in \mathcal{E}_n.$$

Portanto, $\mathcal{E}_n$ é um anel comutativo com identidade. Provemos agora que é um anel local, ou seja, possui um único ideal maximal $\mathcal{M}_n = \{f \in \mathcal{E}_n; f(\mathbf{0}) = 0\}$.

Observe que $\mathcal{M}_n \neq \emptyset$, pois $[e] = [0] \in \mathcal{M}_n$. Vejamos que o conjunto $\mathcal{M}_n$ é um ideal:

(a) Sejam $[f_1], [f_2] \in \mathcal{M}_n$, logo $f_1(\mathbf{0}) = f_2(\mathbf{0}) = 0$. Assim,

$$[f_1 - f_2](\mathbf{0}) = (f_1 - f_2)(\mathbf{0}) = 0.$$

Portanto, $[f_1 - f_2] \in \mathcal{M}_n$.

(b) Se $[f_1] \in \mathcal{E}_n$ e $[f_2] \in \mathcal{M}_n$, então

$$[f_1 \cdot f_2](\mathbf{0}) = f_1(\mathbf{0}) \cdot f_2(\mathbf{0}) = f_1(\mathbf{0}) \cdot 0 = 0.$$

Portanto, $[f_1 \cdot f_2] \in \mathcal{M}_n$, ou seja, $\mathcal{M}_n$ é um ideal de $\mathcal{E}_n$.

Provemos que $\mathcal{M}_n$ é maximal. Suponha I ideal de $\mathcal{E}_n$, tal que $\mathcal{M}_n \subsetneq I$, desta forma, existe $[f] \in I$ tal que $[f] \notin \mathcal{M}_n$. Logo, $f(\mathbf{0}) \neq 0$ e pelo item (i) temos que f é invertível, isto é, existe $g \in \mathcal{E}_n$, tal que $f \cdot g = 1$. Por definição de ideal, $1 \in I$, isto é, $\mathcal{E}_n = I$.

Assim, $\mathcal{M}_n$ é um ideal maximal. Analogamente, provemos que ele é único. Seja J maximal de $\mathcal{E}_n$ com $J \neq \mathcal{M}_n$, logo existe $[f] \in J$ tal que $f(\mathbf{0}) \neq 0$ e $J = \mathcal{E}_n$, ou seja, $\mathcal{E}_n$ é um anel local.

Concluimos assim a demonstração do resultado. $\square$

O lema a seguir será útil para a demonstração da Proposição 3.16, em que será mostrado que o ideal maximal $\mathcal{M}_n$ é finitamente gerado e são encontrados os seus geradores.

Lema 3.15. (Lema de Hadamard) Sejam U uma vizinhança convexa de $\mathbf{0}$ em $\mathbb{R}^n$ e $f : U \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que $f(\mathbf{0}, y) = 0$, para qualquer $y \in \mathbb{R}^q$. Então existem funções $f_1, \dots, f_n$ definidas em $U \times \mathbb{R}^q$ tais que $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_q) = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$.

Demonstração: Considerando $f(tx_1, \dots, tx_n, y_1, \dots, y_q)$, a partir do Teorema Fundamental do Cálculo temos que:

$$\int_0^1 \frac{df(tx_1, \dots, tx_n, y_1, \dots, y_q)}{dt} dt = f(x, y) - f(\mathbf{0}, y) = f(x, y).$$

Note que, pela Regra da Cadeia:

$$\frac{df(tx_1, \dots, tx_n, y_1, \dots, y_q)}{dt} = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(tx_1, \dots, y_q) + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(tx_1, \dots, y_q).$$

Assim, $f(x, y) = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$, onde $f_i = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, y_q) dt$, para $i = 1, \dots, n$. $\square$

Proposição 3.16. O ideal maximal $\mathcal{M}_n$ é gerado por $\{x_1, \dots, x_n\}$, ou seja, $\mathcal{M}_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, onde cada x_i é a função projeção $f_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$.

Demonstração: Seja $f \in \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, ou seja, $f = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$. Assim, $f(\mathbf{0}) = 0f_1 + \dots + 0f_n = 0$ e $f \in \mathcal{M}_n$, isto é, $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \subset \mathcal{M}_n$. Tome agora $f \in \mathcal{M}_n$. Pelo Lema de Hadamard (3.15), para o caso $q = 0$, existem $f_1, \dots, f_n$ tais que $f = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$, ou seja, $f \in \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, o que conclui a demonstração. $\square$

Seja k um inteiro positivo. A k -ésima potência do ideal maximal $\mathcal{M}_n$ é denotado por $\mathcal{M}_n^k$. Assim, $\mathcal{M}_n^k = \langle x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}; i_1 + \dots + i_n = k \rangle$. Podemos melhor caracterizá-lo a partir da seguinte proposição.

Proposição 3.17. Nas condições anteriores, vale que $\mathcal{M}_n^k = \{f \in \mathcal{E}_n \mid j^{k-1}f(\mathbf{0}) = 0\}$.

Demonstração: Vejamos primeiramente que $\mathcal{M}_n^k \subset \{f \in \mathcal{E}_n \mid j^{k-1}f(\mathbf{0}) = 0\}$. Considere $g \in \mathcal{M}_n^k$, então g é formada por monômios de n variáveis de grau maior ou igual a k e assim, todas as suas derivadas de ordem $k-1$ se anulam na origem. Desta forma, $g \in \{f \in \mathcal{E}_n \mid j^{k-1}f(\mathbf{0}) = 0\}$ e portanto, vale a inclusão.

Por outro lado, mostremos por indução que $\{f \in \mathcal{E}_n \mid j^{k-1}f(\mathbf{0}) = 0\} \subset \mathcal{M}_n^k$.

- Quando $k = 1$, por definição vale que $\mathcal{M}_n = \{f \in \mathcal{E}_n \mid f(\mathbf{0}) = 0\}$ e segue o resultado.
- Suponha que o resultado seja válido para $k-1$.

Considere $f \in \{f \in \mathcal{E}_n \mid j^{k-1}f(\mathbf{0}) = 0\}$. Como $f \in \mathcal{E}_n$, vale que $f(\mathbf{0}) = 0$ e, pelo Lema de Hadamard para $q = 0$, temos que

$$f = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n, \text{ onde } f_i = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, y_q) dt, \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

Observe que, como $j^{k-1}f(\mathbf{0}) = 0$ o k -jato é uma soma e produto de derivadas, segue que $j^{k-2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{0}) = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$, ou seja, cada $f_i \in \{f \in \mathcal{E}_n \mid j^{k-2}f(\mathbf{0}) = 0\}$. Assim, por hipótese de indução, $f_i \in \mathcal{M}_n^{k-1}$ e então, $x_i f_i \in \mathcal{M}_n^k$, para todo $i = 1, \dots, n$; conseqüentemente, temos que $f \in \mathcal{M}_n^k$.

Portanto, $\mathcal{M}_n^k = \{f \in \mathcal{E}_n \mid j^{k-1}f(\mathbf{0}) = 0\}$. $\square$

Exemplo 3.18. Segue da proposição acima que o germe $f(x, y) = x^3 + 2x^2y^2 + xy^5$ está contido em $\mathcal{M}_2^3 = \langle x^3, x^2y, xy^2, y^3 \rangle$, pois $j^2f(\mathbf{0}) = 0$. Além disso, podemos escrever $f(x, y) = x^3 + (2x + y^3)xy^2$.

3.3 | Ações de grupos e órbita

Uma forma de estudarmos germes é classificá-los por meio de uma relação de equivalência; assim, podemos estudar os representantes mais simples de cada classe de equivalência. Para tal, utilizaremos as órbitas de determinadas ações de grupo em $\mathcal{E}_{n,p}$, a saber,

os grupos $\mathcal{R}$ e $\mathcal{A}$, grupos cujos elementos são germes de difeomorfismos que agem através de mudanças de coordenadas nos elementos de $\mathcal{E}_{n,p}$.

Definição 3.19. Uma **ação** de um grupo G em um conjunto $M \neq \emptyset$ é uma aplicação $\varphi : G \times M \rightarrow M$ denotada por $\varphi(g, x) = g.x$ tal que para todo $x \in M$ e $g, h \in G$ têm-se:

- (i) $\varphi(1, x) = 1.x = x$, onde 1 é o elemento neutro de G .
- (ii) $\varphi(gh, x) = (gh).x = g.(h.x) = \varphi(g, \varphi(h, x))$.

A definição acima induz uma relação de equivalência: dizemos que $x, y \in M$ são equivalentes ($\sim_\varphi$) se existir $g \in G$ tal que $y = g.x$. De fato:

- A relação é reflexiva por definição.
- Se $x \sim_\varphi y$, então existe $g \in G$ tais que $y = g.x$, como G é grupo, existe $g^{-1} \in G$ tal que $g.g^{-1} = g^{-1}.g = 1$, assim $g^{-1}y = x$, ou seja, $y \sim_\varphi x$.
- Sejam $x, y, z \in M$ tais que $x \sim_\varphi y$ e $y \sim_\varphi z$ temos que existem $g, h \in G$ tal que $y = g.x$ e $z = h.y$, logo $z = (hg).x$, ou seja, $x \sim_\varphi z$.

O conjunto dos elementos $y \in M$ tais que existe $g \in G$ satisfazendo $y = g.x$ é chamado de **órbita** de x em M , ou seja, a órbita é a classe de equivalência de x . Esse conjunto será denotado por $G.x = \{g.x \mid g \in G\}$.

A ação do grupo pode ser entendida como a maneira com que um grupo age num conjunto, alterando seus elementos. A órbita, por sua vez, como o conjunto de elementos que podem ser alcançados a partir de um elemento inicial, através da ação do grupo. Podemos visualizar geometricamente essa ideia no Exemplo 3.21.

Proposição 3.20. Seja G um grupo agindo em M . Duas órbitas ou são disjuntas ou iguais.

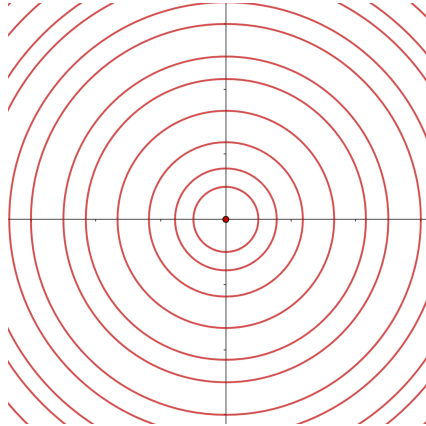
Demonstração: Sejam $x_1, x_2 \in M$ tais que $x_1 \neq x_2$. Considere as órbitas $G.x_1$ e $G.x_2$ tais que $G.x_1 \neq G.x_2$.

Suponha que $G.x_1 \cap G.x_2 \neq \emptyset$, isto é, existe $y \in G.x_1 \cap G.x_2$. Logo, existem $g_1, g_2 \in G$ tais que $g_1.x_1 = y = g_2.x_2$. Assim, $x_1 = (g_1^{-1}g_2).x_2$, logo $x_1 \in G.x_2$. Analogamente provamos que $x_2 \in G.x_1$ e assim $G.x_1 = G.x_2$, o que é uma contradição.

Portanto, duas órbitas ou são disjuntas ou iguais. □

Exemplo 3.21. Considere o grupo $G = O(n) = \{A \in M_{n \times n} \mid AA^t = A^tA = Id\}$, grupo das matrizes ortogonais, e $M = \mathbb{R}^n$. Seja $\varphi : O(n) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a ação definida por $(A, x) \mapsto A.x$. Mostremos que as órbitas são a origem e as hipersferas com centro na origem.

Por simplicidade, faremos para o caso $n = 2$:

Figura 25: Órbitas das matrizes ortogonais para $n = 2$.

Fonte: Elaboração própria (2025).

Tome $\mathbf{0} = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Para todo $A \in O(2)$, temos que $\varphi(A, \mathbf{0}) = A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Logo $G \cdot \mathbf{0} = \{\mathbf{0}\}$ é uma órbita. Além disto, da ortogonalidade de A , temos que

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tomando $x = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, temos $A \cdot (x_0, y_0) = (ax_0 + by_0, cx_0 + dy_0)$ e assim:

$$\|A(x_0, y_0) - (0, 0)\| = \sqrt{x_0^2(a^2 + c^2) + y_0^2(b^2 + d^2) + 2x_0y_0(ab + cd)} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

Portanto, para todo $x \in \mathbb{R}^2$ e todo $A \in O(2)$, a distância de $A \cdot x$ até a origem é constante.

Por outro lado, se x e $\bar{x}$ pertencem ao círculo centrado na origem de raio r , seja θ o ângulo entre x e $\bar{x}$. Tome

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in O(2).$$

A_θ é a rotação tal que $A \cdot x = \bar{x}$. Assim, as órbitas são círculos centrados na origem.

3.3.1 | O grupo $\mathcal{R}$

Estudando os germes $f : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^p, \mathbf{0})$, ou seja, os elementos de $\mathcal{E}_{n,p}$, queremos obter uma lista parcial das classes de equivalências destes germes, a menos de uma mudança de coordenadas na fonte. Para isto, consideraremos o conjunto

$$Diff(\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) = \{h : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \mid h \text{ é germe de difeomorfismo}\}.$$

Munindo tal conjunto com a operação de composição, temos o grupo $(Diff(\mathbb{R}^n, \mathbf{0}), \circ)$, o qual denotaremos por $\mathcal{R}$, quando estiver clara a dimensão n em que está sendo trabalhada.

Vejamos que $\mathcal{R}$ é, de fato, um grupo. Dados $[h_1], [h_2], [h_3] \in Diff(\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$, temos que são válidas:

(a) **Associatividade:**

$$\begin{aligned} ([h_1] \circ [h_2]) \circ [h_3] &= ([h_1 \circ h_2] \circ [h_3]) = [(h_1 \circ h_2) \circ h_3] = [h_1 \circ h_2 \circ h_3] \\ &= [h_1 \circ (h_2 \circ h_3)] = [h_1] \circ [(h_2 \circ h_3)] = [h_1] \circ [h_2] \circ [h_3]. \end{aligned}$$

(b) **Existência do elemento neutro:** Considere a identidade em $\mathbb{R}^n$ denotada por Id_n . Assim, Id_n é um germe de difeomorfismo e vale que $Id_n(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, ou seja, $[Id_n] \in Diff(\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$. Desta forma, temos que

$$[h_1] \circ [Id_n] = [h_1] = [Id_n] \circ [h_1].$$

(c) **Existência do inverso:** Seja $[h_1] \in Diff(\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$, tome $h_1 \in [h_1]$, assim, sua inversa, h_1^{-1} , é germe de difeomorfismo com $h_1^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e, conseqüentemente, $[h_1^{-1}] \in Diff(\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$. Daí, temos que

$$[h_1] \circ [h_1^{-1}] = [h_1 \circ h_1^{-1}] = [Id_n] = [h_1^{-1} \circ h_1] = [h_1^{-1}] \circ [h_1].$$

Portanto, $\mathcal{R}$ é um grupo e, além disso, vejamos que ele age sobre $\mathcal{E}_{n,p}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{R} \times \mathcal{E}_{n,p} &\rightarrow \mathcal{E}_{n,p} \\ (h, f) &\mapsto h.f = f \circ h^{-1}. \end{aligned}$$

De fato:

- Para todo $f \in \mathcal{E}_{n,p}$ temos que $\varphi(Id_n, f) = f \circ Id_n = f$.
- Dados $h_1, h_2 \in \mathcal{R}$ e $f \in \mathcal{E}_{n,p}$, temos que:

$$\varphi((h_1 \circ h_2), f) = f \circ (h_1 \circ h_2)^{-1} = f \circ h_2^{-1} \circ h_1^{-1} = \varphi(h_1, \varphi(h_2, f)).$$

Desta forma, φ é uma ação de $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{E}_{n,p}$. Tal ação nos permite classificar os germes $f : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^p, \mathbf{0})$ a partir das mudanças de coordenadas em $\mathbb{R}^n$. Além disso, devido a importância dessa classificação, as suas órbitas recebem a seguinte nomenclatura.

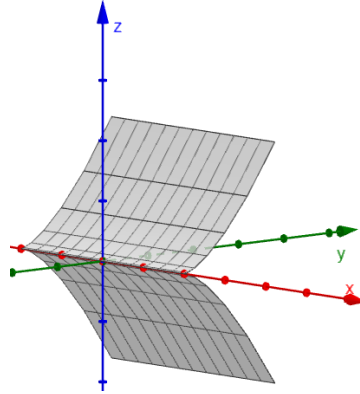
Definição 3.22. Dois germes $f, g \in \mathcal{E}_{n,p}$ são **$\mathcal{R}$ -equivalentes** se existe um germe de difeomorfismo $h : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$ tal que $f = g \circ h^{-1}$, isto é, se o diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^p, \mathbf{0}) \\
 h^{-1} \downarrow & \circlearrowleft & \nearrow g \\
 (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) & &
 \end{array}$$

denota-se $f \sim_{\mathcal{R}} g$.

Exemplo 3.23. Os germes de aplicação $f, g \in \mathcal{E}_{2,3}$ dados por $f(x, y) = (x, y^2, y^3)$ e $g(x, y) = (-x, 4x^2 + 4xy + y^2, 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + 4y^3)$ são $\mathcal{R}$ -equivalentes e seus traços coincidem (ver Figura 26). De fato, tome o difeomorfismo $h(x, y) = (-x, 2x + y)$. Assim, $f(x, y) = (g \circ h^{-1})(x, y)$.

Figura 26: Traço do germe de aplicação $f(x, y) = (x, y^2, y^3)$.



Fonte: Elaboração própria (2025).

Observação 3.24. Note que, se considerarmos φ, ψ germes de parametrizações de superfícies regulares como definido no Capítulo 2, φ e ψ são $\mathcal{R}$ -equivalentes se, e somente se, φ e ψ descrevem a mesma superfície.

A relação de $\mathcal{R}$ -equivalência definida acima induz a seguinte relação de equivalência no espaço dos jatos $J^d(n, p)$:

Definição 3.25. Dois germes de aplicação $f, g \in \mathcal{E}_{n,p}$ são $\mathcal{R}^d$ -equivalentes se, e somente se, existe $h : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$ difeomorfismo tal que

$$j^d f(\mathbf{0}) = j^d (g \circ h^{-1})(\mathbf{0}).$$

Denota-se $f \sim_{\mathcal{R}^d} g$.

Exemplo 3.26. Considerando $f, g : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ dados por $f(x) = \sin x$ e $g(x) = 2x + x^5$, temos, pelo Exemplo 3.11 que $f \sim_{\mathcal{R}^1} g$, pois

$$j^1 f(0) = x = j^1 (g \circ h^{-1})(0),$$

onde $h^{-1} : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ é dado por $h^{-1}(x) = x/2$.

3.3.2 | O grupo $\mathcal{A}$

Podemos estender as noções da subseção anterior e estudar os elementos de $\mathcal{E}_{n,p}$, considerando também mudanças de coordenadas na meta. Desta forma, temos como objetivo, nesta subseção, definir classes de equivalência destes germes, a menos de uma mudança de coordenadas na fonte e uma na meta.

Para tal, considere o grupo $(\text{Diff}(\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \times \text{Diff}(\mathbb{R}^p, \mathbf{0}), \circ)$, o qual denotaremos por $\mathcal{A}$, quando estiverem claras as dimensões n e p tratadas. Além disso, temos que $\mathcal{A}$ age sobre $\mathcal{E}_{n,p}$ através de

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{E}_{n,p} &\rightarrow \mathcal{E}_{n,p} \\ ((h, k), f) &\mapsto \varphi((h, k), f) = k \circ f \circ h^{-1}. \end{aligned}$$

De fato:

- Note que, o elemento neutro de $\mathcal{A}$ é dado por (Id_n, Id_p) , onde Id_n e Id_p são os elementos neutros de $\text{Diff}(\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$ e $\text{Diff}(\mathbb{R}^p, \mathbf{0})$, respectivamente. Assim, para todo $f \in M = \mathcal{E}_{n,p}$, vale que:

$$\varphi(Id_n, Id_p, f) = Id_p \circ f \circ Id_n = f.$$

- Sejam $h_1, h_2 \in \text{Diff}(\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$ e $k_1, k_2 \in \text{Diff}(\mathbb{R}^p, \mathbf{0})$, escrevendo $g = (h_1, k_1)$ e $h = (h_2, k_2)$, temos que:

$$\begin{aligned} \varphi((gh), f) &= \varphi((h_1 \circ h_2, k_1 \circ k_2), f) = k_1 \circ k_2 \circ f \circ (h_1 \circ h_2)^{-1} \\ &= k_1 \circ k_2 \circ f \circ h_2^{-1} \circ h_1^{-1} = k_1 \circ (k_2 \circ f \circ h_2^{-1}) \circ h_1^{-1} = \varphi(g, \varphi(h, f)). \end{aligned}$$

Portanto, φ é uma ação de $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{E}_{n,p}$. Tal ação nos permite classificar os germes $f : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^p, \mathbf{0})$ a partir das mudanças de coordenadas em $\mathbb{R}^n$ e em $\mathbb{R}^p$. Análogo à seção anterior, a importância dessa classificação define a seguinte nomenclatura para suas órbitas.

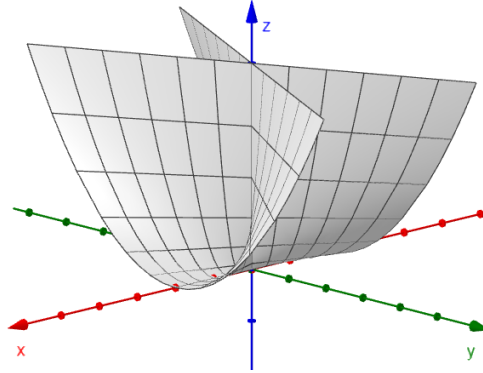
Definição 3.27. Dois germes $f, g : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^p, \mathbf{0})$ são $\mathcal{A}$ -equivalentes quando existem germes de difeomorfismos $h : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$ e $k : (\mathbb{R}^p, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^p, \mathbf{0})$ para os quais o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \\ h \uparrow & & \uparrow k \\ (\mathbb{R}^p, \mathbf{0}) & \xrightarrow{g} & (\mathbb{R}^p, \mathbf{0}) \end{array}$$

isto é, $f = k \circ g \circ h^{-1}$ (ou $f \circ h = k \circ g$). Denota-se $f \sim_{\mathcal{A}} g$.

Exemplo 3.28. Considere duas superfícies em $\mathbb{R}^3$ localmente parametrizadas pelos germes de aplicação $f, g : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$, dados por: $f(x, y) = (x, xy, y^2)$, o *cross-cap* (Figura 27) e $g(x, y) = (y \cos x^2 - xy \cos x^2, y \sin x^2 + xy \sin x^2, x^2)$ (Figura 28). Vejamos que eles são $\mathcal{A}$ -equivalentes.

Figura 27: Traço de $f(x, y) = (x, xy, y^2)$, o *cross-cap*.



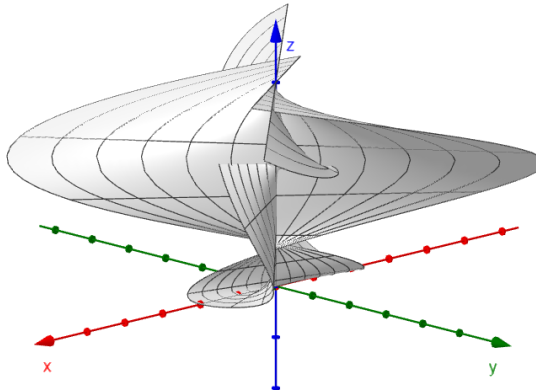
Fonte: Elaboração própria (2025).

De fato, considere os germes de aplicação

$$h(x, y) = (y, x) \text{ e } k(x, y, z) = (x \cos z - y \sin z, x \sin z + y \cos z, z),$$

h é um difeomorfismo e k é um difeomorfismo local em todo $p \in \mathbb{R}^3$, pois seus respectivos determinantes jacobianos são constantes iguais a -1 e 1. Temos também que $g(x, y) = (k \circ f \circ h)(x, y)$ e, portanto, $f \sim_{\mathcal{A}} g$.

Figura 28: Traço de $g(x, y) = (y \cos x^2 - xy \cos x^2, y \sin x^2 + xy \sin x^2, x^2)$.



Fonte: Elaboração própria (2025).

Da mesma forma como feito anteriormente, conseguimos induzir naturalmente uma relação de equivalência nos d -jatos dos germes de aplicação.

Definição 3.29. Dois germes de aplicação f, g têm d -jatos $\mathcal{A}^d$ -equivalentes se existem germes de difeomorfismos $h : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$ e $k : (\mathbb{R}^p, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^p, \mathbf{0})$ tais que:

$$j^d(f \circ h) = j^d(k \circ g)$$

e denotamos por $f \sim_{\mathcal{A}^d} g$.

Exemplo 3.30. Considere o *cross-cap* como no exemplo anterior, o germe de aplicação $g : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$, dado por $g(x, y) = (x, 3x^2 + 2y^2, xy + y^5)$, e o difeomorfismo

$$k(x, y, z) = \left(x, z, \frac{1}{2}(y - 3x^2) \right).$$

Desta forma $j^2 f(\mathbf{0}) = j^2(k \circ g)(\mathbf{0})$ e assim, $f \sim_{\mathcal{A}^2} g$. Além disso, este resultado pode ser expandido, conforme será realizado na Proposição 4.31.

Observação 3.31. Se $f, g \in \mathcal{E}_{n,p}$ são $\mathcal{A}$ -equivalentes, então existe $h \in \text{Diff}(\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$ e $k \in \text{Diff}(\mathbb{R}^p, \mathbf{0})$, tais que:

$$f \circ h = k \circ g \Rightarrow j^d(f \circ h) = j^d(k \circ g),$$

isto é; f e g são $\mathcal{A}^d$ -equivalentes. Observe que dois d -jatos são $\mathcal{A}$ -equivalentes se, e somente se, são $\mathcal{A}^d$ -equivalentes.

Observação 3.32. O espaço dos jatos $J^k(n, p)$ é um subconjunto de $\mathcal{E}_{n,p}$. Desta forma, a ação de $\mathcal{A}$ é a mesma de $\mathcal{A}^d$ e o mesmo vale para $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}^d$.

Note pelas Figuras 27 e 28 que o grupo $\mathcal{A}$ não é bom em conservar a geometria das superfícies estudadas. Para tal, definimos um tipo de aplicação que nos auxiliará a filtrar o grupo $\mathcal{A}$ e melhor preservar a geometria de superfícies equivalentes.

Definição 3.33. (TENENBLAT, 2008, p. 82) Uma aplicação $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ é uma isometria de $\mathbb{R}^p$ se preserva distâncias, isto é, para todos $p, q \in \mathbb{R}^p$,

$$\|F(p) - F(q)\| = \|p - q\|.$$

Temos que as translações são isometrias e as rotações são isometrias lineares.

Ao estudar a geometria de segunda ordem de superfícies é interessante que sejam preservados os 2-jatos no conjunto de parametrizações locais em $\mathcal{E}_{n,p}$. Para tanto, podemos considerar o subgrupo $\mathcal{R}^2 \times \mathcal{O}(3) \subset \mathcal{A}^2$, onde $\mathcal{O}(3)$ é o grupo de isometrias lineares na meta.

Assim, temos as ferramentas necessárias para estudar superfícies singulares de posto 1 na vizinhança de seus pontos singulares. Tal estudo será realizado no capítulo a seguir.

CAPÍTULO 4

Propriedades de superfícies singulares de coposto 1 em $\mathbb{R}^3$

Como visto no Capítulo 2, a condição 3 da Definição 2.1 garante a existência de um plano tangente e de um vetor normal bem definidos nos pontos de uma superfície regular. Consequentemente, é possível definir e estudar a primeira e a segunda formas fundamentais, as curvaturas normal, Gaussiana e média, ferramentas fundamentais no estudo de superfícies em geometria diferencial clássica. Neste capítulo estudaremos superfícies $M \subset \mathbb{R}^3$ em que essa condição falha, em específico, analisaremos quando para alguma (e, consequentemente, toda) parametrização em uma vizinhança de $p \in M$, tem-se que sua matriz Jacobiana possui coposto 1 no ponto correspondente a p . Assim, dizemos que $p \in M$ é uma singularidade de coposto 1 de M .

Para tanto, definiremos a primeira e a segunda formas fundamentais com base em [Benedini Riul \(2019\)](#) e [Martins e Nuño-Ballesteros \(2015\)](#) e as curvaturas umbílica e axial, com base em [Benedini Riul, Deolindo-Silva e Sinha \(2023\)](#), [Martins e Nuño-Ballesteros \(2015\)](#) e [Sinha e Saji \(2022\)](#). Como este estudo é realizado localmente em uma vizinhança do ponto singular, tais parametrizações serão sempre germes de aplicações. Além disso, de forma a manter consonância com a bibliografia estudada, utilizaremos coordenadas (x, y) para estas aplicações.

4.1 | Reta tangente e plano normal

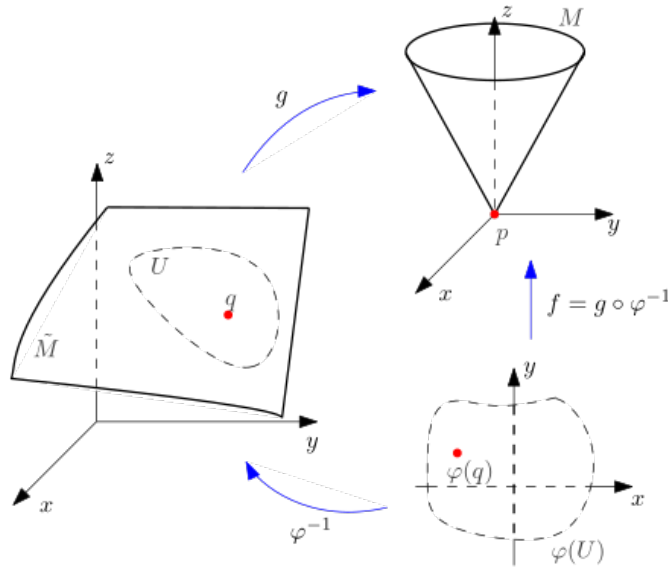
Definição 4.1. Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície com singularidade de coposto 1 em $p \in M$. Assumimos que M é a imagem de uma aplicação $g : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ , onde $\tilde{M}$ é uma superfície regular suave e $q \in \tilde{M}$ é um ponto singular de g de coposto 1 tal que $g(q) = p$.

Dado um sistema de coordenadas $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido em uma vizinhança aberta U de q em $\tilde{M}$, dizemos que $f = g \circ \varphi^{-1}$ é uma **parametrização local** de M em p , como mostra o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xleftarrow{\varphi} & U \subset \tilde{M} & \xrightarrow{g} & M \subset \mathbb{R}^3 \\ & & \searrow f & \nearrow & \end{array}$$

Uma parametrização local também pode ser representada como na Figura 29.

Figura 29: Representação de uma parametrização local de uma superfície singular.



Fonte: Elaboração própria (2025).

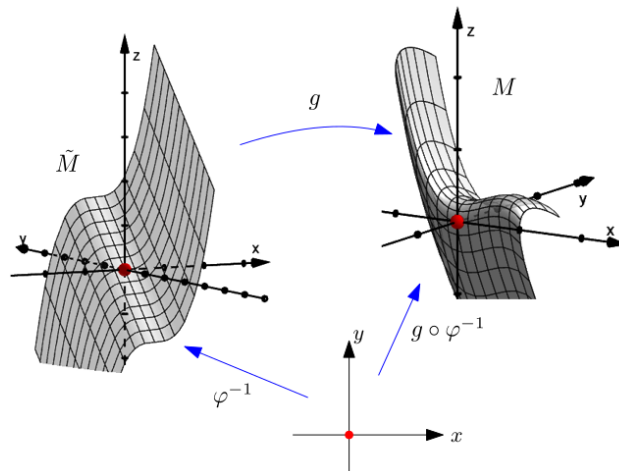
Exemplo 4.2. Considere a superfície M dada pela imagem de $g : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde $\tilde{M}$ é a superfície regular parametrizada por

$$\varphi^{-1}(x, y) = (x, y, x^3 + y) \quad \text{e} \quad g(x, y, z) = (x, y^2, x^2 - y^2 - z).$$

Desta forma, $p = \mathbf{0} \in M$ é uma singularidade de coposto 1 e

$$f(x, y) = g \circ \varphi^{-1}(x, y) = (x, y^2, x^2 - x^3 - y^2 - y)$$

é uma parametrização local de M , conforme Figura 30.

Figura 30: Parametrização local $f(x, y) = (x, y^2, x^2 - x^3 - y^2 - y)$.

Fonte: Elaboração própria (2025).

Na prática consideramos $\tilde{M} = \mathbb{R}^2$, isto é, tomamos a superfície regular sendo o plano- xy e assim, $\varphi = Id_2$ e $f(x, y) = g(x, y)$, o que diminui as dificuldades apresentadas no Exemplo 4.2. Além disso, denotaremos neste capítulo $\partial_x = (\varphi^{-1})_x(q)$ e $\partial_y = (\varphi^{-1})_y(q)$, para simplificar a notação.

Definição 4.3. Sejam f e g como na Definição 4.1 e $dg_q : T_q\tilde{M} \rightarrow T_p\mathbb{R}^3$ a diferencial de g em q . Definimos a **reta tangente** de M em p como a imagem de dg_q , a qual denotamos como $T_pM = \text{Im}(dg_q)$. A partir da reta tangente, definimos o plano normal N_pM em p , de forma que $\mathbb{R}^3 = T_pM \oplus N_pM$. Denotaremos as suas correspondentes projeções ortogonais por:

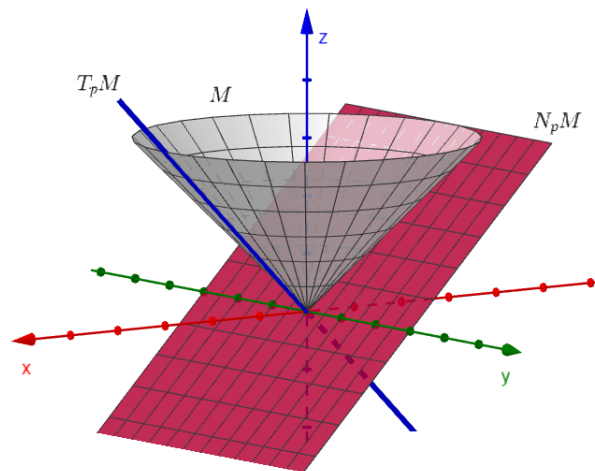
$$\begin{array}{lll} \pi_1 : T_p\mathbb{R}^3 & \rightarrow & T_pM \\ w & \mapsto & \pi_1(w) \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \pi_2 : T_p\mathbb{R}^3 & \rightarrow & N_pM \\ w & \mapsto & \pi_2(w). \end{array}$$

Exemplo 4.4. Seja M o cone de uma folha dado no Exemplo 2.9. Tomando a parametrização local $f(x, y) = (x \cos y, x \sin y, x)$, a Jacobiana de f em $q = (0, 0)$ é dada por

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Jf_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, $f(q) = p = \mathbf{0}$ é um ponto de coposto 1 de M . Calculando a diferencial de f em p temos que $T_pM = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$ e assim, $N_pM = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -x\}$, como na Figura 31.

Figura 31: Plano normal e reta tangente do vértice do cone de uma folha.



Fonte: Elaboração própria (2025).

Exemplo 4.5. Considere M a superfície que é definida localmente pela imagem de

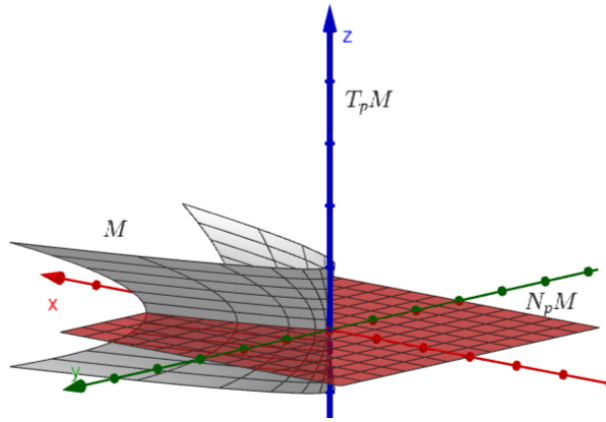
$$f(x, y) = (3x^4 + 2x^2y^2, x^3 + xy^2, y).$$

Segundo (FUKUI; HASEGAWA, 2012, p. 63), denominamos-a como *cuspidal lips*. Analisando a matriz jacobiana de f em $q = (0, 0)$, temos que

$$Jf_q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

E assim, $p = \mathbf{0} \in M$ é uma singularidade de coposto 1. Além disso, obtemos que $T_p M = \{\text{eixo-}z\}$ e $N_p M = \{\text{plano-}xy\}$ (Figura 32).

Figura 32: *Cuspidal lips* dada pela imagem de $f(x, y) = (3x^4 + 2x^2y^2, x^3 + xy^2, y)$.



Fonte: Elaboração própria (2025).

Analogamente ao caso regular, o produto interno euclidiano de $\mathbb{R}^3$ induz a primeira forma fundamental para superfícies de coposto 1. A diferença neste caso é o espaço onde ela está definida. Como não está definido um plano tangente para M em p , utilizaremos do fato que todo vetor da reta tangente de M é imagem de dg_q para algum $\mathbf{u} \in T_q \tilde{M}$. Desta forma, utilizaremos os vetores tangentes bem definidos da superfície regular $\tilde{M}$ em q para a definição das formas fundamentais da superfície singular M .

Definição 4.6. A forma quadrática $I : T_q \tilde{M} \times T_q \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$I(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle dg_q(\mathbf{u}), dg_q(\mathbf{v}) \rangle$$

é chamada a **primeira forma fundamental** da superfície singular M em p .

Tomando uma parametrização local $f = g \circ \varphi^{-1}$ de M em p , temos que, se $\alpha : I \rightarrow \varphi(U)$, $\alpha(t) = (x_0 + t, y_0)$ é uma curva parametrizada diferenciável em $\varphi(U)$, tal que $q = (x_0, y_0)$, então:

$$dg_q(\partial_x) = \frac{d}{dt}(g \circ (\varphi^{-1} \circ \alpha))(t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t) \Big|_{t=0} = f_x(\varphi(q)).$$

Analogamente, sendo $\beta : I \rightarrow \varphi(U)$, $\beta(t) = (x_0, y_0 + t)$ curva parametrizada diferenciável, então:

$$dg_q(\partial_y) = \frac{d}{dt}(g \circ (\varphi^{-1} \circ \beta))(t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ \beta)(t) \Big|_{t=0} = f_y(\varphi(q)).$$

Assim, como $\{\partial_x, \partial_y\}$ é uma base de $T_q\tilde{M}$, podemos escrever os **coeficientes da primeira forma fundamental**, considerando a parametrização φ como:

$$E(q) = I(\partial_x, \partial_x) = \langle f_x, f_x \rangle(\varphi(q)), F(q) = I(\partial_x, \partial_y) = \langle f_x, f_y \rangle(\varphi(q)),$$

$$G(q) = I(\partial_y, \partial_y) = \langle f_y, f_y \rangle(\varphi(q)).$$

Tomando $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_q\tilde{M}$ e escrevendo $\mathbf{u} = a\partial_x + b\partial_y$ e $\mathbf{v} = c\partial_x + d\partial_y$, temos que:

$$\begin{aligned} I(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= I(a\partial_x + b\partial_y, c\partial_x + d\partial_y) = \langle dg_q(a\partial_x + b\partial_y), dg_q(c\partial_x + d\partial_y) \rangle \\ &= ac\langle dg_q(\partial_x), dg_q(\partial_x) \rangle + (ad + bc)\langle dg_q(\partial_x), dg_q(\partial_y) \rangle + bd\langle dg_q(\partial_y), dg_q(\partial_y) \rangle \\ &= acE(q) + (ad + bc)F(q) + bdG(q). \end{aligned}$$

Note que, semelhantemente à Definição 2.17 para o caso regular,

$$I(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = a^2E(q) + 2abF(q) + b^2G(q).$$

Observação 4.7. A primeira forma fundamental I não induz uma métrica Riemanniana em $T_q\tilde{M}$ mas sim uma pseudo-métrica. O próximo exemplo justifica esta afirmação.

Exemplo 4.8. Seja M a superfície singular de coposto 1 em p dada localmente pela imagem de $f(x, y) = (x, f_2(x, y), f_3(x, y))$, com $f(q) = p$ e $(f_i)_x(q) = (f_i)_y(q) = 0$ para $i = 2, 3$. No Lema 4.23, mostraremos que é sempre possível tomar uma parametrização local de uma superfície singular de coposto 1 como acima. Sendo assim, a jacobiana de f em q é dada por

$$Jf_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Segue que p é uma singularidade de coposto 1 em M . Além disso, aplicando a diferencial de f em $\mathbb{R}^2$ temos que $T_pM = \{\text{eixo-}x\}$ e $N_pM = \{\text{plano-}yz\}$.

Calculando os coeficientes da primeira forma fundamental obtemos

$$E(q) = \langle f_x, f_x \rangle(q) = \langle (1, 0, 0), (1, 0, 0) \rangle = 1;$$

$$F(q) = \langle f_x, f_y \rangle(q) = \langle (1, 0, 0), (0, 0, 0) \rangle = 0;$$

$$G(q) = \langle f_y, f_y \rangle(q) = \langle (0, 0, 0), (0, 0, 0) \rangle = 0.$$

Desta forma, tomando $\mathbf{u} = a\partial_x + b\partial_y$ e $\mathbf{v} = c\partial_x + d\partial_y \in T_q\tilde{M}$ como anteriormente, a primeira forma fundamental é dada por $I(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = ac$. Induzindo a métrica do produto interno, de forma análoga ao usual em $\mathbb{R}^3$, temos

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{I(\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})} = \sqrt{\langle dg_q(\mathbf{u} - \mathbf{v}), dg_q(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \rangle} = a - c$$

Assim, se $a = c$ e $b \neq d$ temos que $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$, mas $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$. Portanto, I induz uma pseudo-métrica em $T_q\tilde{M}$. Note que dessa forma, podemos ter $I(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$, mas $\mathbf{u} \neq 0$.

Definição 4.9. Chamamos de **direção tangente infinita** e denotamos por $\mathbf{u}_\infty$ um vetor tangente à $\tilde{M}$ em q tal que $\mathbf{u}_\infty \neq (0, 0)$ e $I(\mathbf{u}_\infty, \mathbf{u}_\infty) = 0$.

No Exemplo 4.8, temos que $\mathbf{u}_\infty = (0, c)$, onde $c \neq 0$.

Definição 4.10. Dadas coordenadas locais como anteriormente e $\{\partial_x, \partial_y\}$ base de $T_q\tilde{M}$, definimos a **segunda forma fundamental** de M em p ,

$$II : T_q\tilde{M} \times T_q\tilde{M} \rightarrow N_pM$$

de forma que na base $\{\partial_x, \partial_y\}$ tenhamos

$$II(\partial_x, \partial_x) = \pi_2(f_{xx}(\varphi(q))), \quad II(\partial_x, \partial_y) = \pi_2(f_{xy}(\varphi(q))), \quad II(\partial_y, \partial_y) = \pi_2(f_{yy}(\varphi(q)))$$

e assim, podemos estendê-la a todo o espaço $T_q\tilde{M} \times T_q\tilde{M}$ de maneira única como uma aplicação bilinear e simétrica. Desta forma, sejam $\mathbf{u} = a\partial_x + b\partial_y, \mathbf{v} = c\partial_x + d\partial_y \in T_q\tilde{M}$. Temos que:

$$\begin{aligned} II(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= II(a\partial_x + b\partial_y, c\partial_x + d\partial_y) \\ &= II(a\partial_x, c\partial_x) + II(a\partial_x, d\partial_y) + II(b\partial_y, c\partial_x) + II(b\partial_y, d\partial_y) \\ &= acII(\partial_x, \partial_x) + adII(\partial_x, \partial_y) + bcII(\partial_y, \partial_x) + bdII(\partial_y, \partial_y) \\ &= ac\pi_2(f_{xx}(\varphi(q))) + (ad + bc)\pi_2(f_{xy}(\varphi(q))) + bd\pi_2(f_{yy}(\varphi(q))). \end{aligned}$$

Em particular, $II(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = a^2\pi_2(f_{xx}(\varphi(q))) + 2ab\pi_2(f_{xy}(\varphi(q))) + b^2\pi_2(f_{yy}(\varphi(q)))$.

Exemplo 4.11. Seja M o toro pinçado (Figura 33) definido pela imagem de

$$f(x, y) = \left(\left(2 + \cos y \cos \frac{x}{2} \right) \cos x, \left(2 + \cos y \cos \frac{x}{2} \right) \sin x, \sin y \cos \frac{x}{2} \right).$$

Para $p = \mathbf{0} \in M$, note que $f(q) = p$, para $q = (\pi, 0)$, e as derivadas de primeira ordem em q são dadas por

$$f_x(q) = \left(\frac{1}{2}, -2, 0 \right) \text{ e } f_y(q) = (0, 0, 0).$$

Assim, a diferencial de f em q é dada por

$$df_q(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}x, -2x, 0 \right).$$

Desta forma, p é uma singularidade de coposto 1 de M . Além disso, a reta tangente e o plano normal em p são dados, respectivamente, por

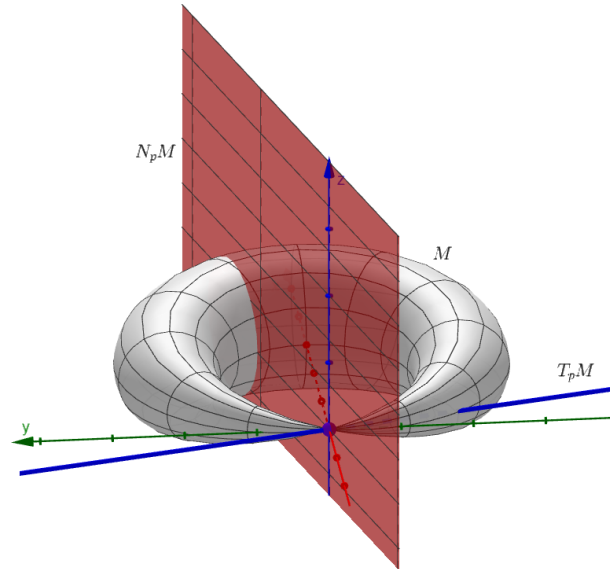
$$T_p M = \left\{ \left(\frac{1}{2}x, -2x, 0 \right) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R} \right\} \text{ e } N_p M = \{(4y, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y, z \in \mathbb{R}\}.$$

E assim, os coeficientes da primeira forma fundamental de M em p são

$$\begin{aligned} E(q) &= \langle f_x, f_x \rangle(q) = \left\langle \left(\frac{1}{2}, -2, 0 \right), \left(\frac{1}{2}, -2, 0 \right) \right\rangle = \frac{17}{16}, \\ F(q) &= \langle f_x, f_y \rangle(q) = \langle (0, 0, 0), (0, 0, 0) \rangle = 0, \\ G(q) &= \langle f_y, f_y \rangle(q) = \langle (0, 0, 0), (0, 0, 0) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Sendo $\mathbf{u} = a\partial_x + b\partial_y \in T_q \tilde{M}$ temos que $I(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \frac{17}{16}a^2$. Segue que $\mathbf{u}_\infty = b\partial_y$, para $b \neq 0$.

Figura 33: Toro pinçado M , $T_p M$ e $N_p M$ para $p = \mathbf{0}$.



Fonte: Elaboração própria (2025).

Para calcular a segunda forma fundamental de M em p , temos que as segundas derivadas de f em q são dadas por

$$f_{xx}(q) = (2, 1, 0); \quad f_{xy}(q) = \left(0, 0, -\frac{1}{2} \right) \text{ e } f_{yy}(q) = (0, 0, 0).$$

E assim, suas respectivas projeções ortogonais em $N_p M$ são

$$\pi_2(f_{xx}(q)) = \left(\frac{36}{17}, \frac{9}{17}, 0\right), \quad \pi_2(f_{xy}(q)) = \left(0, 0, -\frac{1}{2}\right) \text{ e } \pi_2(f_{yy}(q)) = (0, 0, 0).$$

Desta forma, sendo $\mathbf{v} = c\partial_x + d\partial_y \in T_q \tilde{M}$, temos que

$$II(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = ac \left(\frac{36}{17}, \frac{9}{17}, 0\right) + (ad + bc) \left(0, 0, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{36ac}{17}, \frac{9ac}{17}, -\frac{(ad + bc)}{2}\right).$$

Exemplo 4.12. Considere M a *cuspidal edge* dada pela imagem de $f(x, y) = (x, y^2, y^3)$. Assim, para todo ponto $p = (x_0, 0, 0) \in M$, com $x_0 \in \mathbb{R}$ constante, temos uma singularidade de coposto 1 e sendo $q = (x_0, 0)$, vale que

$$T_p M = \{\text{eixo-}x\}, \quad N_p M = \{\text{plano-}yz\}, \quad E(q) = 1 \text{ e } F(q) = G(q) = 0.$$

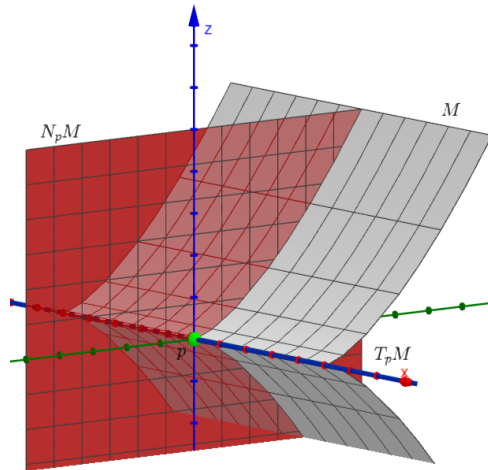
Na Figura 34 representamos o caso $p = \mathbf{0}$. Além disso, como

$$f_{xx}(x_0, 0) = (0, 0, 0), \quad f_{xy}(x_0, 0) = (0, 0, 0) \text{ e } f_{yy}(x_0, 0) = (0, 2, 0),$$

dados $\mathbf{u} = a\partial_x + b\partial_y, \mathbf{v} = c\partial_x + d\partial_y \in T_q M$, temos que

$$I(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = ac \text{ e } II(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (0, 2bd, 0).$$

Figura 34: *Cuspidal edge*, $T_p M$ e $N_p M$ para $p = \mathbf{0}$.

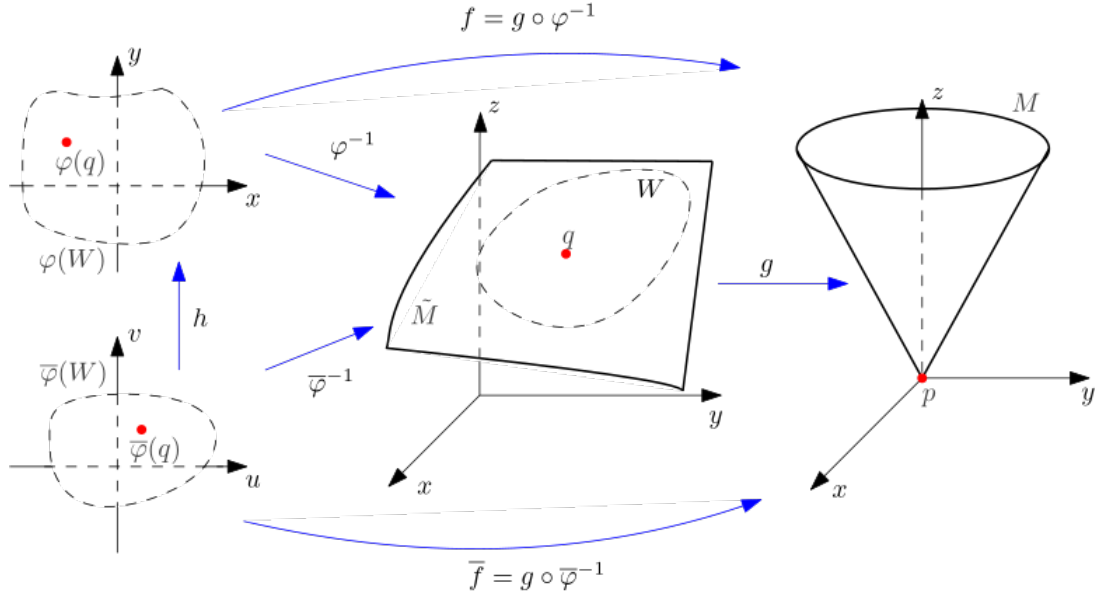


Fonte: Elaboração própria (2025).

A segunda forma fundamental foi definida a partir de um sistema de coordenadas de M . Entretanto, para que essa seja uma “boa” definição, precisamos que ela seja independente à escolha de uma parametrização local de M em p . Para tal temos a Proposição 4.13.

Proposição 4.13. (Mudança de parâmetros) A definição da segunda forma fundamental não depende da escolha de coordenadas locais em $\tilde{M}$.

Figura 35: Representação de diferentes coordenadas locais em $\tilde{M}$.



Fonte: Elaboração própria (2025).

Demonstração: Sejam $\bar{\varphi}$ outro sistema de coordenadas de $\tilde{M}$ em q com coordenadas (u, v) em uma vizinhança V de q . Denotemos $W = U \cap V$ e $\bar{f} = g \circ \bar{\varphi}^{-1}$. Temos em W que $f(x(u, v), y(u, v)) = (f \circ h)(u, v) = \bar{f}(u, v)$, conforme Figura 35. A partir deste momento, ocultaremos os parâmetros de forma a simplificar a notação. Derivando, segue que

$$\bar{f}_u = f_x x_u + f_y y_u, \quad \bar{f}_v = f_x x_v + f_y y_v.$$

Já as segundas derivadas são dadas por:

$$\begin{aligned} \bar{f}_{uu} &= f_{xx} x_{uu} + f_{xy} y_{uu} + f_{xx} x_u^2 + 2f_{xy} x_u y_u + f_{yy} y_u^2; \\ \bar{f}_{uv} &= f_{xx} x_{uv} + f_{xy} y_{uv} + f_{xx} x_u x_v + 2f_{xy} (x_u y_v + x_v y_u) + f_{yy} y_u y_v; \\ \bar{f}_{vv} &= f_{xx} x_{vv} + f_{xy} y_{vv} + f_{xx} x_v^2 + 2f_{xy} x_v y_v + f_{yy} y_v^2. \end{aligned}$$

Além disso, como $f_x, f_y \in T_q \tilde{M}$, então $\pi_2(f_x) = \pi_2(f_y) = 0$. Tomando as projeções ortogonais em $N_p M$ temos que

$$\begin{aligned} \pi_2(\bar{f}_{uu}) &= \pi_2(f_{xx}) x_u^2 + 2\pi_2(f_{xy}) x_u y_u + \pi_2(f_{yy}) y_u^2; \\ \pi_2(\bar{f}_{uv}) &= \pi_2(f_{xx}) x_u x_v + \pi_2(f_{xy}) (x_u y_v + x_v y_u) + \pi_2(f_{yy}) y_u y_v; \\ \pi_2(\bar{f}_{vv}) &= \pi_2(f_{xx}) x_v^2 + 2\pi_2(f_{xy}) x_v y_v + \pi_2(f_{yy}) y_v^2. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_2(f_{xx}) & \pi_2(f_{xy}) \\ \pi_2(f_{xy}) & \pi_2(f_{yy}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_2(\bar{f}_{uu}) & \pi_2(\bar{f}_{uv}) \\ \pi_2(\bar{f}_{uv}) & \pi_2(\bar{f}_{vv}) \end{pmatrix}.$$

Ou seja, $\pi_2(\bar{f}_{uu}), \pi_2(\bar{f}_{uv}), \pi_2(\bar{f}_{vv})$ e $\pi_2(f_{xx}), \pi_2(f_{xy}), \pi_2(f_{yy})$ estão relacionados pela equação de mudança de base em uma aplicação simétrica e bilinear com respeito a matriz

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix},$$

que é a matriz de mudança de base de $\{\partial_x, \partial_y\}$ para $\{\partial_u, \partial_v\}$ em $T_q\tilde{M}$. Portanto, ambos os sistemas de coordenadas definem a mesma aplicação bilinear e simétrica. $\square$

Exemplo 4.14. Considere a superfície M parametrizada localmente por

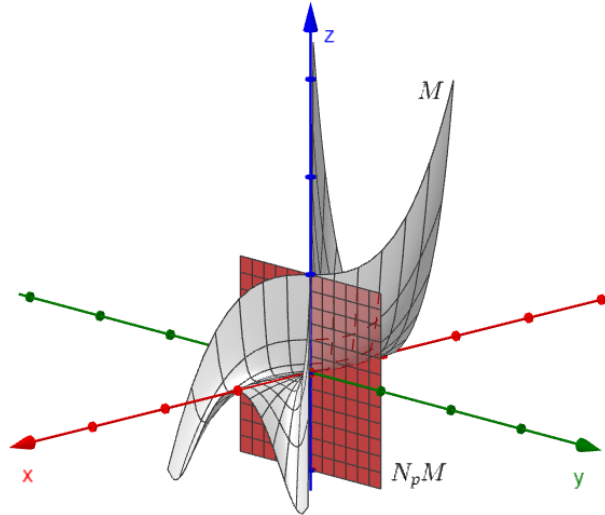
$$f(x, y) = (x, xy, y^6 - 2x^3y^2),$$

conforme Figura 36. Sendo h a mudança de coordenadas dada por $h(x, y) = (2x, y)$ segue que

$$g(x, y) = (f \circ h)(x, y) = (2x, 2xy, y^6 - 16x^3y^2),$$

é outra parametrização local de M .

Figura 36: M dada pela imagem de $f(x, y) = (x, xy, y^6 - 2x^3y^2)$.



Fonte: Elaboração própria (2025).

Note que, enquanto a segunda forma fundamental de superfícies regulares é definida como um produto interno de uma aplicação bilinear e simétrica, para o caso de pontos singulares de coposto 1, definimos-a como a projeção de vetores tangentes no plano normal. A explicação para essa diferença está no fato de que, como para um ponto singular de coposto 1 tem-se um plano normal, então temos infinitas direções normais, diferentemente

de pontos de uma superfície regular, em que há apenas uma direção normal. Dessa maneira, pode-se definir a segunda forma fundamental ao longo de uma determinada direção normal. Observe também que a seguinte definição se assemelha à segunda forma fundamental para superfícies regulares.

Definição 4.15. Para cada vetor normal $\nu \in N_p M$, consideramos a forma $II_\nu : T_q \tilde{M} \times T_q \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ que denominamos **a segunda forma fundamental de M em p ao longo de ν** , dada por:

$$II_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle II(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \nu \rangle.$$

Assim, dados $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v} \in T_q \tilde{M}$ como anteriormente, temos que:

$$\begin{aligned} II_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \langle ac\pi_2(f_{xx}) + (ad + bc)\pi_2(f_{xy}) + bd\pi_2(f_{yy}), \nu \rangle(\varphi(q)) \\ &= ac\langle \pi_2(f_{xx}), \nu \rangle(\varphi(q)) + (ad + bc)\langle \pi_2(f_{xy}), \nu \rangle(\varphi(q)) + bd\langle \pi_2(f_{yy}), \nu \rangle(\varphi(q)). \end{aligned}$$

Desta forma, **os coeficientes de II_ν** em termos das coordenadas locais (x, y) são:

$$l_\nu(q) = \langle \pi_2(f_{xx}), \nu \rangle(\varphi(q)), \quad m_\nu(q) = \langle \pi_2(f_{xy}), \nu \rangle(\varphi(q)) \quad \text{e} \quad n_\nu(q) = \langle \pi_2(f_{yy}), \nu \rangle(\varphi(q)).$$

Logo,

$$II_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = a^2 l_\nu(q) + 2abm_\nu(q) + b^2 n_\nu(q),$$

de forma semelhante a como foi dado em (2) para o caso regular. Além disso, fixando um referencial ortonormal $\{\nu_1, \nu_2\}$ de $N_p M$, como $II(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \in N_p M$, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $II(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \alpha\nu_1 + \beta\nu_2$ e assim

$$\begin{aligned} II(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \alpha\nu_1 + \beta\nu_2 &\Rightarrow \langle II(\mathbf{u}, \mathbf{u}), \nu_1 \rangle = \alpha \text{ e } \langle II(\mathbf{u}, \mathbf{u}), \nu_2 \rangle = \beta \\ &\Rightarrow II(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = II_{\nu_1}(\mathbf{u}, \mathbf{u})\nu_1 + II_{\nu_2}(\mathbf{u}, \mathbf{u})\nu_2; \end{aligned}$$

ou seja, podemos escrever a segunda forma fundamental como:

$$II(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (a^2 l_{\nu_1} + 2abm_{\nu_1} + b^2 n_{\nu_1})\nu_1 + (a^2 l_{\nu_2} + 2abm_{\nu_2} + b^2 n_{\nu_2})\nu_2, \quad (4)$$

com os coeficientes acima calculados em q . Desta maneira, a segunda forma fundamental pode ser representada pela seguinte **matriz de coeficientes**:

$$\begin{pmatrix} l_{\nu_1} & m_{\nu_1} & n_{\nu_1} \\ l_{\nu_2} & m_{\nu_2} & n_{\nu_2} \end{pmatrix}.$$

Note que, a matriz dos coeficientes vai depender da escolha de coordenadas em $\tilde{M}$ e do referencial ortonormal em $N_p M$, mesmo que a segunda forma fundamental não dependa.

Exemplo 4.16. Seja M a superfície dada pela imagem de $f(x, y) = (x, xy^2 - y^3, -xy)$, conforme Figura 37. Temos que $p = \mathbf{0}$ é uma singularidade de coposto 1 de M e $N_p M = \{\text{plano-}yz\}$. Além disto,

$$f_{xx}(p) = f_{yy}(p) = (0, 0, 0) \text{ e } f_{xy}(p) = (0, 0, -1).$$

Assim, considerando o referencial ortonormal $\{e_2, e_3\}$ de $N_p M$, onde $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$. Segue que

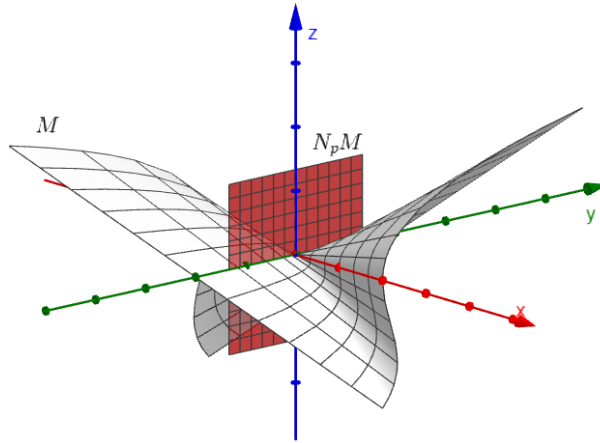
$$l_{e_2}(q) = m_{e_2}(q) = n_{e_2}(q) = l_{e_3}(q) = n_{e_3}(q) = 0; \quad m_{e_3}(q) = -1.$$

Desta forma, podemos representar a segunda forma fundamental de M em p pela seguinte matriz de coeficientes

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Além disso, dado $\mathbf{u} = a\partial_x + b\partial_y \in T_q \tilde{M}$, temos que $II(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (0, 0, -2ab)$.

Figura 37: M dada pela imagem de $f(x, y) = (x, xy^2 - y^3, -xy)$.



Fonte: Elaboração própria (2025).

4.2 | A parábola de curvatura

Nessa seção definiremos uma curva especial, a parábola de curvatura de M em p , como a imagem na segunda forma fundamental dos vetores unitários em $T_q \tilde{M}$ segundo a primeira forma fundamental de M em p . Mostraremos a seguir que esta curva possui papel vital em relação ao estudo da geometria de segunda ordem em uma vizinhança dos pontos singulares.

Definição 4.17. Sejam C_q o conjunto de vetores unitários em $T_q \tilde{M}$ e $\eta_q : C_q \rightarrow N_p M$ a aplicação dada por $\eta_q(\mathbf{u}) = II(\mathbf{u}, \mathbf{u})$. A imagem dessa aplicação, que denotaremos por Δ_p , é chamada **parábola de curvatura** de M em p ($\Delta_p = \eta_q(C_q)$).

Observação 4.18. Temos que $\Delta_p = \{II(\mathbf{u}, \mathbf{u}); I(\mathbf{u}, \mathbf{u})^{\frac{1}{2}} = 1\}$ e segue da Proposição 4.13 que a definição acima não depende da escolha de coordenadas locais em $\tilde{M}$.

Exemplo 4.19. Considere M o *cross-cap* dado pela imagem de $f(x, y) = (x, y^2, xy)$. Pelo Exemplo 4.8, segue que $p = \mathbf{0}$, $q = (0, 0)$, $N_p M = \{\text{plano-}yz\}$ e dado $\mathbf{u} = x\partial_x + y\partial_y \in T_q \tilde{M}$, temos que $I(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = x^2$. Assim,

$$C_q = \{(\pm 1, y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Para o cálculo da segunda forma fundamental temos que

$$f_{xx}(0, 0) = (0, 0, 0); \quad f_{xy}(0, 0) = (0, 0, 1); \quad f_{yy}(0, 0) = (0, 2, 0).$$

Desta maneira, seja $\mathbf{u} = \pm\partial_x + y\partial_y \in C_q$, então

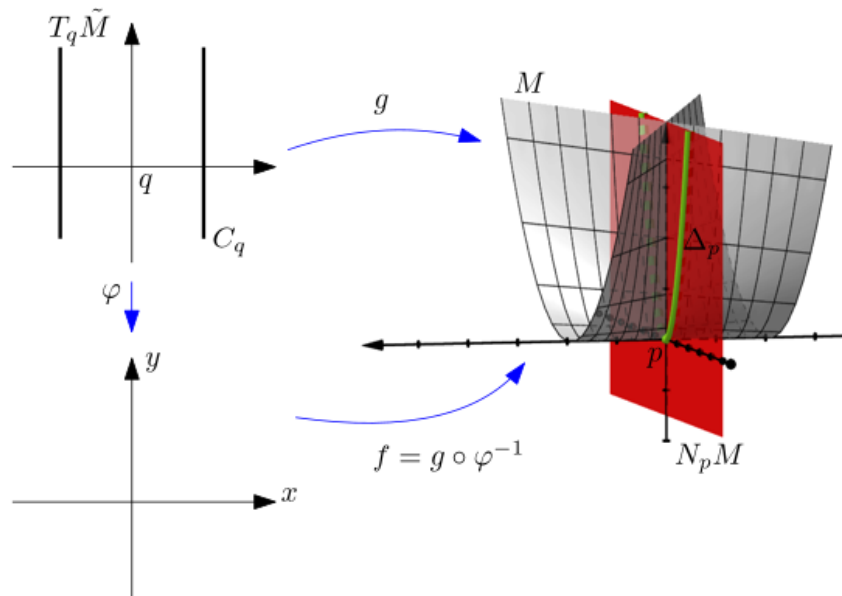
$$II(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \pm 2y(0, 0, 1) + y^2(0, 2, 0) = (0, 2y^2, \pm 2y).$$

Logo,

$$\Delta_p = \{II(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \mid \mathbf{u} = (\pm 1, y), y \in \mathbb{R}\} = \{(0, 2y^2, \pm 2y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

E assim, a parábola de curvatura de M é uma parábola não degenerada parametrizada por $\eta(y) = (0, 2y^2, 2y)$, conforme Figura 38.

Figura 38: A parábola de curvatura do *cross-cap* $f(x, y) = (x, y^2, xy)$.



Fonte: Elaboração própria (2025).

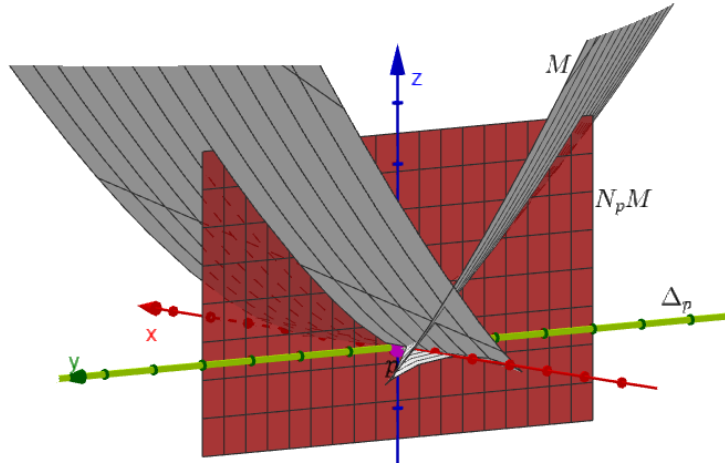
Exemplo 4.20. A *swallowtail*, ou rabo de andorinha, é a superfície singular M definida pela imagem de $f(x, y) = (x, 2xy + 4y^3, 3y^4 + xy^2)$. Cálculos mostram que $p = \mathbf{0}$ é uma

singularidade de coposto 1 de M e além disso, $T_p M = \{\text{eixo-}x\}$, $N_p M = \{\text{plano-}yz\}$, e $C_q = \{(\pm 1, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$. As segundas derivadas parciais de f são dadas em $q = (0, 0)$ por

$$f_{xx}(q) = (0, 0, 0), \quad f_{xy}(q) = (0, 2, 0), \quad f_{yy}(q) = (0, 0, 0).$$

Logo, a parábola de curvatura é a reta dada por $\Delta_p = \{(0, 4y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} = \{\text{eixo-}y\}$, como ilustrado na Figura 39.

Figura 39: *Swallowtail* e sua parábola de curvatura.



Fonte: Elaboração própria (2025).

Observação 4.21. Embora a definição da parábola de curvatura não dependa da escolha de coordenadas locais em $\tilde{M}$, depende da aplicação g que parametriza M . Isto ocorre caso uma reparametrização de M “desfavoreça” a geometria de segunda ordem em uma vizinhança do ponto singular. Conforme, ilustrado no exemplo a seguir.

Exemplo 4.22. Seja M a *cuspidal edge* dada pela imagem de $f(x, y) = (x, y^2, y^3)$. Pelo Exemplo 4.12 segue que, para todo $p = (x_0, 0, 0) \in M$, $C_q = \{(\pm 1, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$. E, dado $\mathbf{u} = \pm 1\partial_x + y\partial_y \in C_q$, então $II(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (0, 2y^2, 0)$. Portanto, Δ_p é a semirreta parametrizada por $\eta(y) = (0, 2y^2, 0)$. Veja a Figura 40a para o caso $p = \mathbf{0}$.

Além disso, considere a superfície dada localmente pela imagem de $g(x, y) = (x, (y^3 + x)^2, (y^3 + x)^3)$. Note que a imagem de f e g coincidem, isto é, definem a mesma superfície. Analisando $p = \mathbf{0} \in M$, temos que $q = (0, 0)$ e as primeiras derivadas neste ponto são dadas por

$$g_x(q) = (1, 0, 0), \quad g_y(q) = (0, 0, 0),$$

e assim, C_q é dado como anteriormente. Já as segundas derivadas em q são

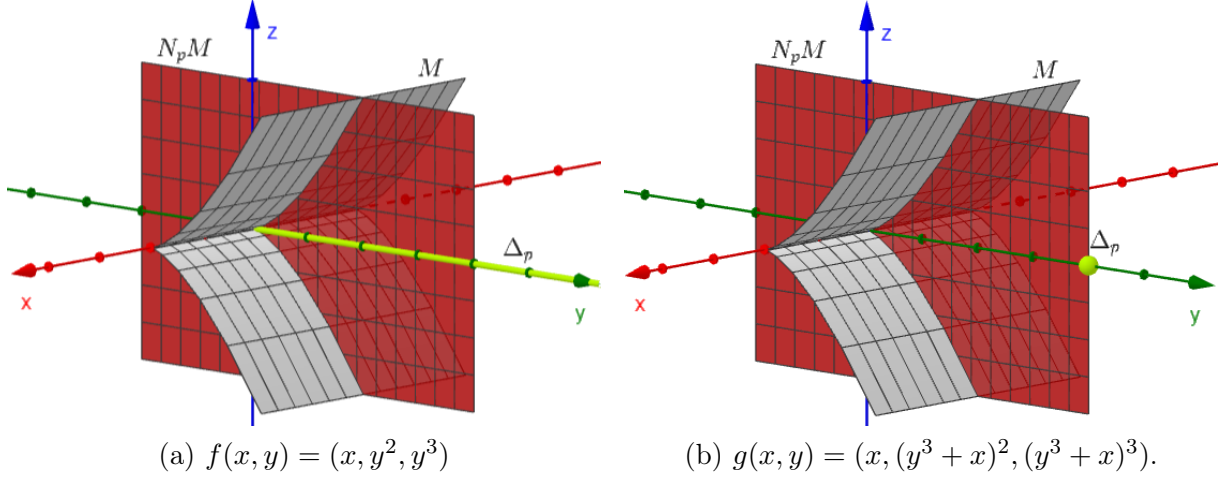
$$g_{xx}(q) = (0, 2, 0), \quad g_{xy}(q) = g_{yy}(q) = (0, 0, 0).$$

E desta forma, dado $\mathbf{u} = (\pm 1, y) \in C_q$, então a segunda forma fundamental de M em p restrita aos vetores unitários é dada por $II(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (0, 2, 0)$. Portanto, Δ_p é apenas o

ponto $\{(0, 2, 0)\}$ (Figura 40b).

Note que, $g(x, y) = (f \circ h)(x, y)$, onde $h(x, y) = (x, y^3 + x)$, que é difeomorfismo local em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Em outras palavras, temos que f e g não são $\mathcal{A}$ -equivalentes, com o “problema” estando justamente na origem, onde ocorrem as diferentes parábolas de curvaturas.

Figura 40: Parábola de curvatura da *cuspidal edge* parametrizada localmente por f e g .



Fonte: Elaboração própria (2025).

Observe também que Δ_p é uma aplicação que depende das segundas derivadas da parametrização. Logo, ao estudarmos uma superfície, é necessário tomar “boas” parametrizações, de forma a preservar a geometria de segunda ordem.

Análogo à ideia de “boas” parametrizações temos o seguinte resultado. Dado um germe de aplicação f na vizinhança do ponto singular de coposto 1, podemos rotacionar a superfície e realizar mudanças na fonte, de maneira a escrever f como a seguir, não alterando a geometria do objeto.

Lema 4.23. Se $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ tem coposto 1 na origem, então existem coordenadas (x, y) nas quais f assume a forma:

$$(x, y) \mapsto (x, f_2(x, y), f_3(x, y)).$$

onde $f_2, f_3 \in \mathcal{M}_2^2 = \langle x^2, xy, y^2 \rangle$. Neste caso, dizemos que f está dada em forma de Monge.

Demonstração: Seja $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ de coposto 1 na origem. Suponha f polinomial, caso f não seja polinomial, basta tomar o seu k -jato, visto que estamos interessados apenas com a forma que f se comporta na origem. Assim, f possui parte linear em pelo menos uma de suas coordenadas, pois, caso contrário, a Jacobiana de f na origem seria a matriz nula, isto é, f possui coposto 2.

Escrevendo $f(x, y) = (\bar{f}_1(x, y), \bar{f}_2(x, y), \bar{f}_3(x, y))$. Suponha, sem perda de generalidade, que a parte linear esteja na segunda coordenada, isto é,

$$\bar{f}_2(x, y) = \alpha x + \beta y + r(x, y); r \in \mathcal{M}_2^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ tal que } (\alpha, \beta) \neq (0, 0).$$

Seja φ a matriz de rotação de f em $\pi/2$ em torno do eixo- z no sentido anti-horário. Realizamos uma mudança de coordenadas na meta, que é isometria e difeomorfismo, logo $\mathcal{A}$ -equivalente à f e preserva sua geometria. Assim,

$$f(x, y) \sim_{\mathcal{A}} (\varphi \circ f)(x, y) = (-\alpha x - \beta y - r(x, y), \bar{f}_1(x, y), \bar{f}_3(x, y)).$$

Supondo sem perda de generalidade que α é não nulo, considere

$$h(x, y) = \left(\frac{-x - \beta y - r(x, y)}{\alpha}, y \right)$$

difeomorfismo local na origem como mudança de coordenadas na fonte. Assim:

$$f(x, y) \sim_{\mathcal{A}} (\varphi \circ f \circ h)(x, y) = (x, f_2(x, y), f_3(x, y)).$$

Portanto, f pode ser escrito, a menos de mudanças de coordenadas na fonte e rotações na meta, como $(x, f_2(x, y), f_3(x, y))$, onde $f_2, f_3 \in \langle x^2, xy, y^2 \rangle$.

Para os demais casos realizamos mudanças de coordenadas análogas para escrever f contendo parte linear em apenas uma das coordenadas e retornamos ao caso acima. $\square$

Exemplo 4.24. Considere a superfície M que é imagem do germe de aplicação $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ de coposto 1 na origem dado por $f(x, y) = (x \cos y, x \sin y, x)$, como no Exemplo 4.4. Cálculos nos mostram que, para k par, seu k -jato é dado por

$$j^k f(\mathbf{0}) = \left(x - \frac{xy^2}{2} + \frac{xy^4}{24} - \dots + (-1)^{\frac{k-2}{2}} \frac{xy^{k-2}}{(k-2)!}, xy - \frac{xy^3}{6} + \dots + (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{xy^{k-1}}{(k-1)!}, x \right).$$

Escreva

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= -\frac{xy^2}{2} + \frac{xy^4}{24} - \dots + (-1)^{\frac{k-2}{2}} \frac{xy^{k-2}}{(k-2)!}; \\ f_2(x, y) &= xy - \frac{xy^3}{6} + \dots + (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{xy^{k-1}}{(k-1)!}. \end{aligned}$$

Realizando a rotação φ de $\pi/4$ em torno do eixo- y no sentido anti-horário, de forma a manter o termo linear em apenas uma das coordenadas, temos que M pode ser escrito

em uma vizinhança da origem como

$$(x, y) \mapsto \left(\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}f_1(x, y), f_2(x, y), -f_1(x, y) \right).$$

Considere a mudança de coordenadas na fonte dada por $h(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}f_1(x, y), y \right)$.

Desta forma, escrevendo $g = \varphi \circ f \circ h$, vale que

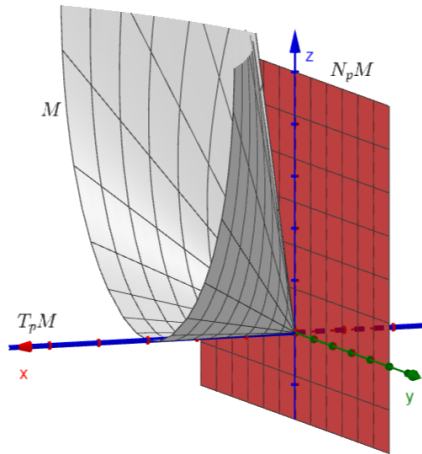
$$g(x, y) = \left(x, f_2 \left(\frac{\sqrt{2}x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}f_1(x, y), y \right), -\frac{\sqrt{2}}{2}f_1 \left(\frac{\sqrt{2}x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}f_1(x, y), y \right) \right).$$

Segue que g é uma parametrização local de M dada na forma de Monge. Assim, $T_p M = \{\text{eixo-}x\}$, $N_p M = \{\text{plano-}yz\}$ e $C_q = \{(\pm 1, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Para $k = 4$ temos que g é dada por

$$g(x, y) = \left(x, \frac{\sqrt{2}}{2}xy + \frac{\sqrt{2}}{6}xy^3 - \frac{\sqrt{2}}{24}xy^5, \frac{1}{4}xy^2 + \frac{1}{8}xy^4 \right),$$

sendo M como na Figura 41.

Figura 41: Superfície M dada pela imagem do 4-jato de f após mudanças de coordenadas na fonte e rotações na meta.



Fonte: Elaboração própria (2025).

Desta forma, como nosso objetivo é estudar apenas a vizinhança do ponto singular, desde que g tenha coposto 1 em q , transladando M de forma que $p = \mathbf{0}$, pelo Lema 4.23, podemos escolher um sistema de coordenadas φ e fazer rotações em $\mathbb{R}^3$ de forma que

$$f(x, y) = (g \circ \varphi^{-1})(x, y) = (x, f_2(x, y), f_3(x, y)),$$

com $(f_i)_x = (f_i)_y = 0$ em $\varphi(q)$, para $i = 2, 3$. Nesse caso, note que $f_x(\varphi(q)) = (1, 0, 0)$ e

$f_y(\varphi(q)) = (0, 0, 0)$, ou seja,

$$T_p M = \{\text{eixo-}x\}, \quad N_p M = \{\text{plano-}yz\}, \quad E(q) = 1 \text{ e } F(q) = G(q) = 0.$$

Assim, o conjunto de vetores tangentes unitários em $T_q \tilde{M}$ é dado por

$$C_q = \{(\pm 1, y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Consequentemente, fixando um referencial ortonormal $\{\nu_1, \nu_2\}$ de $N_p M$ e usando (4), temos que

$$\eta(y) = (l_{\nu_1} + 2m_{\nu_1}y + n_{\nu_1}y^2)\nu_1 + (l_{\nu_2} + 2m_{\nu_2}y + n_{\nu_2}y^2)\nu_2 \quad (5)$$

é uma parametrização de Δ_p no plano normal.

Observação 4.25. A parábola de curvatura é de fato uma parábola. Uma vez que a parametrização η apresentada está escrita em termos lineares e quadráticos, temos que Δ_p pode ser uma parábola, elipse, hipérbole ou estar contido em uma reta. Entretanto, a aplicação η é contínua e observe que

$$II((1, y), (1, y)) = II((-1, y), (-1, y)),$$

ou seja, podemos restringir C_q a apenas uma das retas e assim, Δ_p tem que ser conexa, o que retira a hipótese de ser uma hipérbole. Note também que, ao fazer com que $y \rightarrow \infty$, obtemos, quando $m_{\nu_1}, n_{\nu_1}, m_{\nu_2}$ e n_{ν_2} não são simultaneamente nulos, que $\|\eta(y)\| \rightarrow \infty$, ou seja, nestes casos, Δ_p não é limitada e, portanto, não é uma elipse.

Assim, podemos assumir que Δ_p é uma parábola que pode se degenerar em curva que está contida em uma reta ou um ponto.

Em Mond (1985), o autor classificou germes de aplicação $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ de coposto 1 de acordo com o seu 2-jato, $j^2 f(\mathbf{0})$, via a ação do grupo $\mathcal{A}^2$, como visto na Definição 3.25. Vejamos que a parábola de curvatura distingue totalmente essas $\mathcal{A}^2$ -órbitas. Denotamos por $\Sigma^1 J^2(2, 3)$ o conjunto dos 2-jatos de coposto 1.

Proposição 4.26. Existem quatro $\mathcal{A}^2$ -órbitas em $\Sigma^1 J^2(2, 3)$:

$$(x, y^2, xy), (x, y^2, 0), (x, xy, 0) \text{ e } (x, 0, 0).$$

Demonstração: Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ de coposto 1 na origem, pelo Lema 4.23 podemos escrever $f(x, y) = (x, f_2(x, y), f_3(x, y))$, $f_2, f_3 \in \langle x^2, xy, y^2 \rangle$. Assim, podemos escrever seu 2-jato como:

$$j^2 f(\mathbf{0}) = (x, b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2, c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2).$$

Utilizando a mudança de coordenadas na meta, que é um difeomorfismo, dada por

$$h_1(x, y, z) = (x, y - b_{02}x^2, z - c_{20}x^2),$$

com objetivo de remover os termos com x^2 , obtemos

$$j^2 f(\mathbf{0}) \sim_{\mathcal{A}^2} (h_1 \circ j^2 f(\mathbf{0}))(x, y) = (x, b_{11}xy + b_{02}y^2, c_{11}xy + c_{02}y^2). \quad (6)$$

A partir de (6) dividiremos em casos, inicialmente suponhamos sem perda de generalidade que $c_{02} \neq 0$ e $b_{11} \neq 0$. Considere a mudança de coordenadas na meta

$$h_2(x, y, z) = \left(x, y - \frac{b_{02}}{c_{02}}z, z - \frac{c_{11}}{b_{11}}y \right),$$

que é difeomorfismo local na origem, se, e somente se, $b_{11}c_{02} - c_{11}b_{02} \neq 0$. Assim:

$$j^2 f(\mathbf{0}) \sim_{\mathcal{A}^2} (h_2 \circ h_1 \circ j^2 f(\mathbf{0}))(x, y) = \left(x, \frac{b_{11}c_{02} - c_{11}b_{02}}{c_{02}}xy, \frac{b_{11}c_{02} - c_{11}b_{02}}{b_{11}}y^2 \right).$$

Realizando a mudança de coordenadas

$$h_3(x, y, z) = \left(x, \frac{c_{02}}{b_{11}c_{02} - c_{11}b_{02}}y, \frac{b_{11}}{b_{11}c_{02} - c_{11}b_{02}}z \right)$$

na meta, de forma a simplificar os coeficientes, temos que $j^2 f(\mathbf{0}) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, xy, y^2)$.

Por outro lado, se $b_{11}c_{02} - b_{02}c_{11} = 0$, temos que a primeira e a segunda coordenadas são linearmente dependentes, pois

$$\begin{vmatrix} b_{11} & c_{11} \\ b_{02} & c_{02} \end{vmatrix} = 0.$$

Logo, existem reais $B, C \neq 0$ tais que $B(b_{11}xy + b_{02}y^2) + C(c_{11}xy + c_{02}y^2) = 0$. Assim, tomando a mudança de coordenadas na meta

$$h_4(x, y, z) = (x, y, By + Cy),$$

que é difeomorfismo, segue de (6) que:

$$j^2 f(\mathbf{0}) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, b_{11}xy + b_{02}y^2, 0). \quad (7)$$

- Se $b_{02} \neq 0$ e $b_{11} \in \mathbb{R}$, temos que:

$$j^2 f(\mathbf{0}) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, b_{11}xy + b_{02}y^2, 0) = \left(x, \left(\frac{b_{11}x}{2\sqrt{b_{02}}} + \sqrt{b_{02}}y \right)^2 - \frac{b_{11}^2 x^2}{4b_{02}}, 0 \right).$$

Assim, considerando a mudança de coordenadas $h_5(x, y, z) = \left(x, y + \frac{b_{11}^2 x^2}{4b_{02}}, z\right)$, que é difeomorfismo, obtemos que:

$$j^2 f(\mathbf{0}) \sim_{\mathcal{A}^2} \left(x, \left(\frac{b_{11}x}{2\sqrt{b_{02}}} + \sqrt{b_{02}}y\right)^2, 0\right).$$

Considere agora a mudança de coordenadas na fonte

$$h_6(x, y) = \left(x, \frac{b_{11}x}{2\sqrt{b_{02}}} + \sqrt{b_{02}}y\right),$$

que é um difeomorfismo local na origem, renomeando a coordenada y , temos que $j^2 f(\mathbf{0}) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, y^2, 0)$.

- Se $b_{02} = 0$ e $b_{11} \neq 0$, tomando a mudança de coordenadas

$$h_6(x, y, z) = \left(x, \frac{y}{b_{11}}, z\right)$$

na meta, temos que $j^2 f(\mathbf{0}) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, xy, 0)$.

- Se $b_{02} = b_{11} = 0$, $j^2 f(\mathbf{0}) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, 0, 0)$

Portanto, a depender dos coeficientes da segunda e terceira coordenadas do 2-jato de f , temos que $j^2 f(\mathbf{0})$ é $\mathcal{A}^2$ -equivalente a uma das quatro órbitas encontradas. $\square$

Observação 4.27. Denominamos as órbitas obtidas na Proposição 4.26 como $\mathcal{A}^2$ -formas normais. A partir de sua demonstração, temos que dado o 2-jato

$$j^2 f(\mathbf{0}) = (x, b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2, c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2),$$

de um germe de coposto 1, $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$, as condições sobre seus coeficientes para que ele seja equivalente a uma das quatro formas normais obtidas estão listadas na Tabela 1.

Tabela 1: Condições sobre os coeficientes do 2-jato para a $\mathcal{A}^2$ -classificação.

$\mathcal{A}^2$ -forma normal	Condições
(x, y^2, xy)	$b_{11}c_{02} - b_{02}c_{11} \neq 0$
$(x, y^2, 0)$	$b_{11}c_{02} - b_{02}c_{11} = 0$ e $b_{02}^2 + c_{02}^2 > 0$
$(x, xy, 0)$	$b_{02} = c_{02} = 0$ e $b_{11}^2 + c_{11}^2 > 0$
$(x, 0, 0)$	$b_{02} = c_{02} = b_{11} = c_{11} = 0$

Exemplo 4.28. Considere o germe de aplicação $f(x, y) = (x^3y^2 + 2x, 5x^2 + xy^3, x^5y + xy)$, cujo 2-jato é dado por $j^2 f(\mathbf{0}) = (2x, 5x^2, xy)$. Segue que $f \sim_{\mathcal{A}^2} (x, xy, 0)$.

O próximo teorema mostra que a parábola de curvatura Δ_p é um invariante completo para a classificação da Proposição 4.26, ou seja, a parábola de curvatura pode facilmente ser utilizada para distinguir entre os quatro tipos de $\mathcal{A}^2$ -singularidades de coposto 1, apenas por analisar o tipo de degeneração da parábola.

Teorema 4.29. Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície com uma singularidade de coposto 1 em $p \in M$. Assumindo por simplicidade que $p = \mathbf{0}$ e denotando por $j^2 f(\mathbf{0})$ o 2-jato de uma parametrização local $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ de M , são válidas as seguintes equivalências:

- (i) Δ_p é parábola não degenerada $\Leftrightarrow j^2 f(\mathbf{0}) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, y^2, xy)$;
- (ii) Δ_p é uma semirreta $\Leftrightarrow j^2 f(\mathbf{0}) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, y^2, 0)$;
- (iii) Δ_p é uma reta $\Leftrightarrow j^2 f(\mathbf{0}) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, xy, 0)$;
- (iv) Δ_p é um ponto $\Leftrightarrow j^2 f(\mathbf{0}) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, 0, 0)$.

Demonstração: Sem perda de generalidade, pelo Lema 4.23 podemos assumir que

$$j^2 f(\mathbf{0}) = \left(x, \frac{1}{2}(b_{20}x^2 + 2b_{11}xy + b_{02}y^2), \frac{1}{2}(c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2) \right).$$

Denotando a base canônica de $\mathbb{R}^3$ por $\{e_1, e_2, e_3\}$. Então $T_p M$ é gerado por e_1 e $\{e_2, e_3\}$ é um referencial ortonormal de $N_p M$. Assim,

$$j^2 f(\mathbf{0})_{xx} = (0, b_{20}, c_{20}), \quad j^2 f(\mathbf{0})_{xy} = (0, b_{11}, c_{11}), \quad j^2 f(\mathbf{0})_{yy} = (0, b_{02}, c_{02}).$$

Então, a matriz dos coeficientes da segunda forma fundamental referentes a essas coordenadas e esse referencial ortonormal é

$$\begin{pmatrix} b_{20} & b_{11} & b_{02} \\ c_{20} & c_{11} & c_{02} \end{pmatrix}.$$

Segundo (5), a parábola de curvatura Δ_p é parametrizada por

$$\begin{aligned} \eta(y) &= (b_{20} + 2b_{11}y + b_{02}y^2)e_2 + (c_{20} + 2c_{11}y + c_{02}y^2)e_2 \\ &= (0, b_{20} + 2b_{11}y + b_{02}y^2, c_{20} + 2c_{11}y + c_{02}y^2). \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \eta'(y) &= (0, 2b_{11} + 2b_{02}y, 2c_{11} + 2c_{02}y); \\ \eta''(y) &= (0, 2b_{02}, 2c_{02}). \end{aligned}$$

Note que, como $\Delta_p \subset N_p M$, podemos tratá-la como uma curva plana. Da teoria de curvas planas temos que a curvatura de η é dada por

$$k(y) = \frac{(2b_{11} + 2b_{02}y)2c_{02} - 2b_{02}(2c_{11} + 2c_{02}y)}{[(2b_{11} + 2b_{02}y)^2 + (2c_{11} + 2c_{02}y)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{b_{11}c_{02} - b_{02}c_{11}}{2[(b_{11} + b_{02}y)^2 + (c_{11} + c_{02}y)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Assim, a curvatura de η é constante nula se, e somente se, $b_{11}c_{02} - b_{02}c_{11} = 0$. Pela Tabela 1 temos os seguintes casos:

A parábola não se degenera, isto é, não está contida em uma reta, se, e somente se, $b_{11}c_{02} - b_{02}c_{11} \neq 0$, e isto ocorre se, e somente se, $j^2 f(\mathbf{0}) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, y^2, xy)$.

A parábola se degenera, se, e somente se, $(b_{11}c_{02} - b_{02}c_{11}) = 0$. Daí segue que

- $j^2 f(\mathbf{0}) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, y^2, 0)$ se, e somente se, $b_{02}^2 + c_{02}^2 > 0$. Suponha que $b_{02} \neq 0$, assim

$$\eta(y) = \left(0, b_{02} \left(y + \frac{b_{11}}{b_{02}} \right)^2 + \frac{b_{20}b_{02} - b_{11}^2}{b_{02}}, c_{20} + 2c_{11}y + c_{02}y^2 \right),$$

ou seja, a segunda coordenada mantém o sinal para todo $y \in \mathbb{R}$ e portanto, $\eta(y)$ é uma semirreta. Se $b_{02} = 0$, então $c_{02} \neq 0$ e o argumento é o mesmo.

- $j^2 f(\mathbf{0}) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, xy, 0)$ se, e somente se, $b_{02} = c_{02} = 0$ e $b_{11}^2 + c_{11}^2 > 0$ então

$$\eta(y) = (0, b_{20} + b_{11}y, c_{20} + c_{11}y) = (0, b_{20}, c_{20}) + y(0, b_{11}, c_{11}),$$

e dessa forma, $\eta(y)$ é uma reta.

- $j^2 f(\mathbf{0}) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, xy, 0)$ se, e somente se, $b_{02} = c_{02} = b_{11} = c_{11}$ então $\eta(y) = (0, b_{20}, c_{20})$ é um ponto.

□

Exemplo 4.30. Considere M o toro pinçado (Figura 42) conforme Exemplo 4.11. Sendo p a origem, temos que $f_x(q) = (1/2, -2, 0)$ e $f_y(q) = (0, 0, 0)$. Assim, os coeficientes da primeira forma são dados por

$$E(q) = \frac{17}{4}, \quad F(q) = G(q) = 0.$$

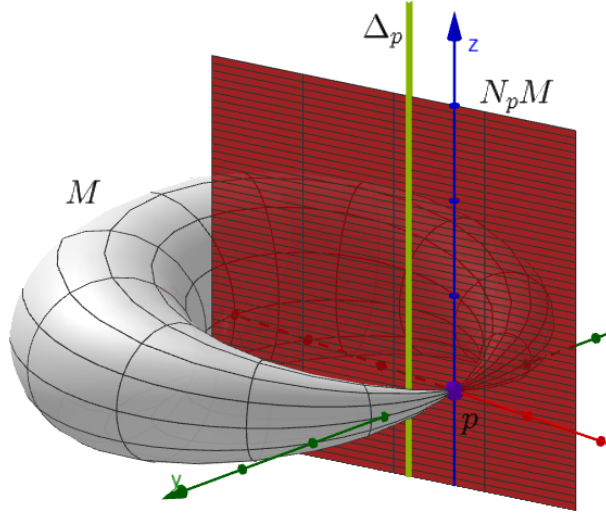
Desta forma, temos que $C_q = \left\{ \mathbf{u} \in T_q \tilde{M} \mid \mathbf{u} = \pm \frac{2\sqrt{17}}{17} \partial_x + y \partial_y; y \in \mathbb{R} \right\}$.

Consequentemente, a segunda forma fundamental restrita aos vetores unitários é dada por

$$II(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \left(\frac{144}{289}, \frac{36}{289}, \pm \frac{2}{17}y \right).$$

Portanto, Δ_p é uma reta e, pelo Teorema 4.29, temos que $j^2 f(\mathbf{0}) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, xy, 0)$.

Figura 42: Toro pinçado e sua parábola de curvatura na origem.



Fonte: Elaboração própria (2025).

Como visto no Exemplo 3.28, o grupo $\mathcal{A}$ não é bom em preservar a geometria de superfícies. Para contornar esse problema, consideraremos o grupo de 2-jatos de difeomorfismos na fonte, denotado por $\mathcal{R}^2$, e o grupo de isometrias lineares na meta, denotado por $\mathcal{O}(3)$. Então, $\mathcal{R}^2 \times \mathcal{O}(3)$ é um subgrupo de $\mathcal{A}^2$ que também age em $\Sigma^1 J^2(2, 3)$.

O seguinte resultado nos dá um caminho para classificar os germes segundo a ação deste subgrupo.

Proposição 4.31. Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ um germe de aplicação de coposto 1. Então, após usar mudanças de coordenadas suaves na fonte e isometrias na meta, podemos reduzir f a forma:

- (i) $(x, y) \mapsto (x, ax^2 + bxy + cy^2 + p(x, y), xy + q(x, y)) \Leftrightarrow j^2 f(\mathbf{0}) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, y^2, xy)$;
- (ii) $(x, y) \mapsto (x, ax^2 + y^2 + p(x, y), dx^2 + q(x, y)) \Leftrightarrow j^2 f(\mathbf{0}) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, y^2, 0)$;
- (iii) $(x, y) \mapsto (x, xy + p(x, y), dx^2 + q(x, y)) \Leftrightarrow j^2 f(\mathbf{0}) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, xy, 0)$;
- (iv) $(x, y) \mapsto (x, p(x, y), dx^2 + q(x, y)) \Leftrightarrow j^2 f(\mathbf{0}) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, 0, 0)$,

onde a, b, c, d são constantes, com $c > 0$, e $p, q \in \mathcal{M}_2^3 = \langle x^3, x^2y, xy^2, y^3 \rangle$.

Demonstração: Desde que f tenha coposto 1 na origem, então como já visto anteriormente, existe uma rotação em $(\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ e um difeomorfismo em $(\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ de forma que tenhamos

$$j^2 f(\mathbf{0}) = (x, b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2, c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2).$$

A ida dessa demonstração é direta e segue das condições da Tabela 1. Para a volta precisamos dividir em casos. Suponha inicialmente que $j^2 f(\mathbf{0}) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, y^2, xy)$. Logo,

temos a condição $b_{02}c_{11} - c_{02}b_{11} \neq 0$. Com objetivo de retirar y^2 da terceira coordenada, considere a rotação

$$R(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

com $\theta = \arctan\left(-\frac{c_{02}}{b_{02}}\right)$. Assim, $R \circ j^2 f(\mathbf{0}) = (x, \tilde{f}_2(x, y), \tilde{f}_3(x, y))$, onde

$$\begin{aligned} \tilde{f}_2(x, y) &= \frac{b_{02}b_{20} + c_{02}c_{20}}{\sqrt{b_{02}^2 + c_{02}^2}}x^2 + \frac{b_{02}b_{11} + c_{02}c_{11}}{\sqrt{b_{02}^2 + c_{02}^2}}xy + \frac{b_{02}^2 + c_{02}^2}{\sqrt{b_{02}^2 + c_{02}^2}}y^2; \\ \tilde{f}_3(x, y) &= \frac{b_{02}c_{20} - c_{02}b_{20}}{\sqrt{b_{02}^2 + c_{02}^2}}x^2 + \frac{b_{02}c_{11} - c_{02}b_{11}}{\sqrt{b_{02}^2 + c_{02}^2}}y^2 = \alpha x^2 + \beta y^2. \end{aligned}$$

Note que $\beta \neq 0$. Logo, com objetivo de remover x^2 da terceira coordenada e tornar unitário o coeficiente de xy , considere a mudança de coordenadas na fonte

$$\psi(x, y) = (x, y) = \left(x, \frac{1}{\alpha}(-\beta x + y)\right).$$

Obtemos então

$$((R \circ j^2 f(\mathbf{0})) \circ \psi)(x, y) = (x, \tilde{b}_{20}x^2 + \tilde{b}_{11}xy + \tilde{b}_{02}y^2, xy),$$

com $\tilde{b}_{02} = \frac{b_{02}^2 + c_{02}^2}{\alpha^2 \sqrt{b_{02}^2 + c_{02}^2}} \neq 0$. Logo, f preserva sua imagem ao assumir as coordenadas

$$(x, y) \mapsto (x, \tilde{b}_{20}x^2 + \tilde{b}_{11}xy + \tilde{b}_{02}y^2 + p(x, y), xy + q(x, y))$$

com $p, q \in \mathcal{M}_2^3$ como queríamos demonstrar. Os demais casos são análogos. $\square$

O próximo teorema mostra que a parábola de curvatura contém toda a informação de segunda ordem da superfície em uma vizinhança do ponto singular, pois garante que duas superfícies têm a mesma geometria de segunda ordem se, e somente se, existe uma isometria linear que mapeia a parábola de curvatura de uma na parábola de curvatura da outra.

Teorema 4.32. Sejam $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^3$ duas superfícies com singularidades de coposto 1 nos pontos $p_1 \in M_1$ e $p_2 \in M_2$, localmente parametrizadas por f e g , respectivamente. Os 2-jatos $j^2 f(\mathbf{0}), j^2 g(\mathbf{0}) \in \Sigma^1 J^2(2, 3)$ são equivalentes via ação de $\mathcal{R}^2 \times \mathcal{O}(3)$ se, e somente se, existe uma isometria linear $\phi : N_{p_1} M_1 \rightarrow N_{p_2} M_2$ tal que $\phi(\Delta_{p_1}) = \Delta_{p_2}$.

Demonstração: A demonstração é feita em casos. Inicialmente, assuma que $j^2 f(\mathbf{0}), j^2 g(\mathbf{0})$ sejam $\mathcal{A}^2$ -equivalentes a (x, y^2, xy) . Então, pela Proposição 4.31 elas podem ser reduzidas

às formas:

$$j^2 f(\mathbf{0}) = (x, ax^2 + 2bxy + cy^2, xy); \quad j^2 g(\mathbf{0}) = (x, \bar{a}x^2 + 2\bar{b}xy + \bar{c}y^2, xy),$$

com $c, \bar{c} > 0$. Assim, os planos normais $N_{p_1}M$ e $N_{p_2}M$ são iguais ao plano- yz . De (5), as parábolas de curvatura Δ_{p_1} e Δ_{p_2} podem ser parametrizadas, respectivamente, por

$$\eta_1(y) = (0, 2a + 4by + 2cy^2, 2y) \quad \text{e} \quad \eta_2(y) = (0, 2\bar{a} + 4\bar{b}y + 2\bar{c}y^2, 2y).$$

Suponha que $j^2 f(\mathbf{0}) \sim j^2 g(\mathbf{0})$ via ação de $\mathcal{R}^2 \times \mathcal{O}(3)$, ou seja, existem $(\psi, \phi) \in \mathcal{R}^2 \times \mathcal{O}(3)$ tais que $\phi \circ j^2 f(\mathbf{0}) \circ \psi = j^2 g(\mathbf{0})$. Como $j^2 f(\mathbf{0})$ e $j^2 g(\mathbf{0})$ são ambas homogêneas, de forma a manter o grau do 2-jato de f , podemos assumir que ψ é uma aplicação linear. Tome as matrizes de ψ e ϕ , respectivamente, como

$$P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Do fato de ψ ser invertível e ϕ isometria linear, temos que $\det(P) \neq 0$ e $AA^t = Id_3$. Observe que $\phi \circ j^2 f(\mathbf{0}) \circ \psi = (h_1(x, y), h_2(x, y), h_3(x, y))$, com

$$\begin{aligned} h_i(x, y) = & (a_{i1}p)x + (a_{i1}q)y + (a_{i2}ap^2 + 2a_{i2}bpr + a_{i2}cr^2 + a_{i3}pr)x^2 \\ & + (2a_{i2}apq + 2a_{i2}bps + 2a_{i2}bqr + 2a_{i2}crs + a_{i3}ps + a_{i3}qr)xy \\ & + (a_{i2}aq^2 + 2a_{i2}bqs + a_{i2}cs^2 + a_{i3}qs)y^2, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Comparando os termos de $\phi \circ j^2 f(\mathbf{0}) \circ \psi$ e $j^2 g(\mathbf{0})$, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} a_{11}p &= 1, \quad a_{21}p = 0, \quad a_{31}p = 0, \quad a_{11}q = 0, \quad a_{21}q = 0, \quad a_{31}q = 0 \\ a_{12}ap^2 + a_{13}rp + a_{12}bpr + a_{12}cr^2 &= 0 \\ a_{22}ap^2 + a_{23}rp + a_{22}bpr + a_{22}cr^2 &= \bar{a} \\ a_{32}ap^2 + a_{33}rp + a_{32}bpr + a_{32}cr^2 &= 0 \\ 2a_{12}apq + 2a_{12}bps + 2a_{12}bqr + 2a_{12}crs + a_{13}ps + a_{13}qr &= 0 \\ 2a_{22}apq + 2a_{22}bps + 2a_{22}bqr + 2a_{22}crs + a_{23}ps + a_{23}qr &= \bar{b} \\ 2a_{32}apq + 2a_{32}bps + 2a_{32}bqr + 2a_{32}crs + a_{33}ps + a_{33}qr &= 1 \\ a_{12}aq^2 + 2a_{12}bqs + a_{12}cs^2 + a_{13}qs &= 0 \\ a_{22}aq^2 + 2a_{22}bqs + a_{22}cs^2 + a_{23}qs &= \bar{c} \\ a_{32}aq^2 + 2a_{32}bqs + a_{32}cs^2 + a_{33}qs &= 0. \end{aligned}$$

Do sistema obtido acima e com as condições $\det(P) = ps - qr \neq 0$ e $AA^t = Id_3$, obtemos

que

$$p, s \neq 0, q = r = 0, \\ a_{ij} = 0, \forall i \neq j \text{ e } a_{11} = \pm 1, a_{22} = 1, a_{33} = \pm 1.$$

Assim, temos quatro possíveis soluções para o sistema:

- (i) $p = s = 1, a_{11} = a_{33} = 1$ com $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (a, b, c)$;
- (ii) $p = 1, s = -1, a_{11} = 1, a_{33} = 1$ com $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (a, -b, c)$;
- (iii) $p = -1, s = 1, a_{11} = a_{33} = -1$ com $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (a, -b, c)$;
- (iv) $p = s = -1, a_{11} = -1, a_{33} = 1$ com $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (a, b, c)$.

Em todos os casos, temos que ϕ é a isometria linear procurada, ou seja, $\phi \circ \eta_1(y) = \eta_2(y)$ e assim, $\phi(\Delta_{p_1}) = \Delta_{p_2}$, como queríamos provar.

Por outro lado, suponha que exista uma isometria linear $\phi : N_{p_1}M_1 \rightarrow N_{p_2}M_2$ tal que $\phi(\Delta_{p_1}) = \Delta_{p_2}$. Podemos escrever a matriz de ϕ como:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Analogamente, comparando $\phi \circ \eta_1$ e η_2 , obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= b_{11}a \\ 2\bar{b} &= 2b_{11}b + b_{12} \\ \bar{c} &= b_{11}c \\ 1 &= 2b_{21}b + b_{22} \\ 0 &= b_{21}. \end{aligned}$$

Como ϕ é isometria linear então $BB^t = Id_2$ e assim, obtemos que $b_{11} = \pm 1, b_{22} = 1$ e $b_{12} = 0$, o que nos deixa com os seguintes casos:

- (i) $b_{11} = 1$ e assim, $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (a, b, c)$;
- (ii) $b_{11} = -1$ e assim, $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (-a, -b, -c)$.

Em ambos os casos, estendendo ϕ a uma isometria linear em $\mathbb{R}^3$, da forma intuitiva, isto é,

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

encontramos que $\phi \circ j^2 f(\mathbf{0}) = j^2 g(\mathbf{0})$ e assim, $j^2 f(\mathbf{0})$ e $j^2 g(\mathbf{0})$ são equivalentes via ação de $\mathcal{R}^2 \times \mathcal{O}(3)$.

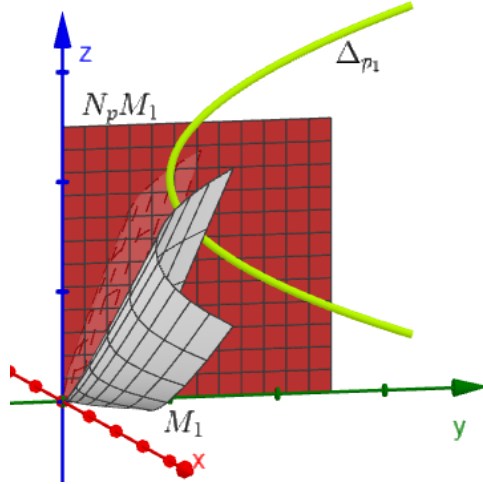
Os casos restantes em que os 2-jatos são do $\mathcal{A}^2$ -tipo $(x, y^2, 0)$, $(x, xy, 0)$ e $(x, 0, 0)$ são feitos de forma análoga e suas demonstrações serão omitidas aqui. $\square$

Exemplo 4.33. Considere M_1 a superfície singular de coposto 1 em $p_1 = \mathbf{0}$, dada pela imagem de $g(x, y) = (x, x^2 + y^2, 2x^2 + xy)$. Cálculos nos mostram que

$$\Delta_{p_1} = \{(0, 2 + 2y^2, 4 + 2y) \mid y \in \mathbb{R}\},$$

conforme Figura 43.

Figura 43: Δ_p de $f(x, y) = (x, x^2 + y^2, 2x^2 + xy)$ em $p_1 = \mathbf{0}$.



Fonte: Elaboração própria (2025).

Assim, g é do $\mathcal{A}^2$ -tipo (x, y^2, xy) . Entretanto, escrevendo $f(x, y) = (x, y^2, xy)$, temos que f e g não são equivalentes segundo a ação do subgrupo $\mathcal{R}^2 \times \mathcal{O}(3)$. Isto pois para $p_2 = \mathbf{0}$, temos que $\Delta_{p_2} = \{(0, 2y^2, 2y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ e não há isometria linear ϕ tal que $\phi(\Delta_{p_1}) = \Delta_{p_2}$, visto que isometrias lineares conservam tamanho de vetores e não há vetor nulo em Δ_{p_2} , mas há em Δ_{p_1} .

4.3 | Direções assintóticas e binormais

A seguir definiremos direção assintótica, de forma análoga ao caso regular, quando a segunda forma fundamental se anula. Entretanto, devido à infinitude de direções normais, é necessária uma adaptação.

Definição 4.34. Dizemos que uma direção tangente não nula $\mathbf{u} \in T_q \tilde{M}$ é **assintótica** se existe um vetor normal não nulo $\nu \in N_p M$ tal que $II_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$, para todo $\mathbf{v} \in T_q \tilde{M}$. Nesse caso, dizemos que ν é uma **direção binormal**.

Exemplo 4.35. Sendo M a *cuspidal edge* definida pela imagem de $f(x, y) = (x, y^2, y^3)$. Segue do Exemplo 4.12 que todo ponto $p = (x_0, 0, 0) \in M$ é uma singularidade de coposto 1 e vale que $N_p M = \{\text{plano-}yz\}$.

Considere a direção tangente não nula $\mathbf{u} = x\partial_x + y\partial_y \in T_q \tilde{M}$ e a direção normal $\nu = (0, 0, 1) \in N_p M$. Então, para todo $\mathbf{v} = u\partial_x + v\partial_y \in T_q \tilde{M}$, vale que:

$$II_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle II(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \nu \rangle = \langle (0, 2yv, 0), (0, 0, 1) \rangle = 0.$$

Portanto, toda direção tangente não nula de $T_q \tilde{M}$ é assintótica associada à direção binormal $\nu = (0, 0, 1)$.

Lema 4.36. Uma direção tangente $\mathbf{u} = x\partial_x + y\partial_y \in T_q \tilde{M}$ é assintótica se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} y^2 & -xy & x^2 \\ l_{\nu_1} & m_{\nu_1} & n_{\nu_1} \\ l_{\nu_2} & m_{\nu_2} & n_{\nu_2} \end{vmatrix} = 0.$$

Chamamos o determinante acima de **equação das direções assintóticas**.

Demonstração: Dado um vetor tangente $\mathbf{v} = u\partial_x + v\partial_y \in T_q \tilde{M}$ e um vetor normal $\nu = \alpha\nu_1 + \beta\nu_2 \in N_p M$,

$$\begin{aligned} II_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \langle II(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \alpha\nu_1 + \beta\nu_2 \rangle = \alpha II_{\nu_1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \beta II_{\nu_2}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ &= \alpha(l_{\nu_1}xu + m_{\nu_1}(xv + yu) + n_{\nu_1}yv) + \beta(l_{\nu_2}xu + m_{\nu_2}(xv + yu) + n_{\nu_2}yv). \end{aligned}$$

Consequentemente, $\mathbf{u}$ é assintótica se, e somente se, existe $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tal que a expressão acima é nula, para todo (u, v) . Reescrevendo a expressão acima, temos que isto ocorre, se e somente se,

$$u(l_{\nu_1}\alpha x + m_{\nu_1}\alpha y + l_{\nu_2}\beta x + m_{\nu_1}\beta y) + v(m_{\nu_1}\alpha x + n_{\nu_1}\alpha y + m_{\nu_2}\beta x + n_{\nu_1}\beta y) = 0. \quad (8)$$

Como (8) tem que ser válida para todo (u, v) , então, a equação é verdadeira se, e só se, cada componente é nulo, isto é, quando

$$\begin{cases} (l_{\nu_1}x + m_{\nu_1}y)\alpha + (l_{\nu_2}x + m_{\nu_2}y)\beta = 0 \\ (m_{\nu_1}x + n_{\nu_1}y)\alpha + (m_{\nu_2}x + n_{\nu_2}y)\beta = 0 \end{cases}$$

e como $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, pela Regra de Cramer, isto ocorre quando

$$\begin{vmatrix} l_{\nu_1}x + m_{\nu_1}y & l_{\nu_2}x + m_{\nu_2}y \\ m_{\nu_1}x + n_{\nu_1}y & m_{\nu_2}x + n_{\nu_2}y \end{vmatrix} = 0,$$

cuja expressão é a mesma que queremos obter. □

Observação 4.37. Se $\mathbf{u} \in T_q\tilde{M}$ é uma direção assintótica, então todo múltiplo escalar de $\mathbf{u}$ também é assintótica, o mesmo vale para as direções binormais. De fato, considere $\alpha \in \mathbb{R}^*$, assim:

- (i) Seja $\mathbf{u} = (x, y)$ uma direção assintótica, então $\alpha\mathbf{u} = (\alpha x, \alpha y)$, e segue do Lema 4.36 que

$$\begin{vmatrix} y^2 & -xy & x^2 \\ l_{\nu_1} & m_{\nu_1} & n_{\nu_1} \\ l_{\nu_2} & m_{\nu_2} & n_{\nu_2} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \alpha^2 y^2 & -\alpha^2 xy & \alpha^2 x^2 \\ l_{\nu_1} & m_{\nu_1} & n_{\nu_1} \\ l_{\nu_2} & m_{\nu_2} & n_{\nu_2} \end{vmatrix} = 0.$$

E, novamente pelo Lema 4.36, temos que $\alpha\mathbf{u} \in T_q\tilde{M}$ é uma direção assintótica.

- (ii) Seja ν uma direção binormal, logo, pela definição, existe uma direção assintótica $\mathbf{u} \in T_q\tilde{M}$, tal que, para todo $\mathbf{v} \in T_q\tilde{M}$, segue que

$$II_{\alpha\nu}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle II(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \alpha\nu \rangle = \alpha \langle II(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \nu \rangle = \alpha II_{\nu}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0.$$

Consequentemente, $\alpha\nu \in N_pM$ é binormal.

Exemplo 4.38. Seja M o *cross-cap* dado pela imagem de $f(x, y) = (x, y^2, xy)$. Segue do Exemplo 4.19 que $p = \mathbf{0}$ é uma singularidade de coposto 1. Considerando $\{e_2, e_3\}$, base canônica, como referencial ortonormal de N_pM , assim a matriz dos coeficientes da segunda forma fundamental é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daí, segue do Lema anterior que uma direção $\mathbf{u} = x\partial_x + y\partial_y \in T_q\tilde{M}$ é assintótica se, e somente se, $x \neq 0$ e $y = 0$. Desta forma, ∂_x é uma direção assintótica associada à direção binormal e_2 . De fato, para todo $\mathbf{v} = u\partial_x + v\partial_y \in T_q\tilde{M}$, temos que:

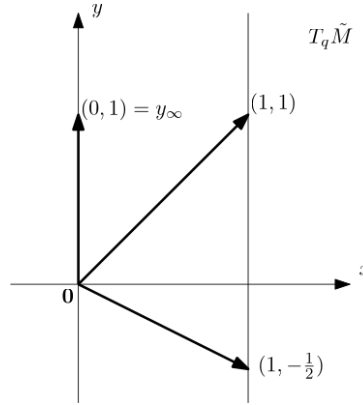
$$II_{e_2}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle II(\mathbf{u}, \mathbf{v}), e_2 \rangle = \langle (0, 0, v), (0, 1, 0) \rangle = 0.$$

Exemplo 4.39. Considere agora a superfície M com singularidade em $p = \mathbf{0}$ definida localmente pela imagem de $f(x, y) = (x, xy^2 - y^3, -xy)$. Segue diretamente do Exemplo 4.16 e do Lema 4.36 que toda direção não nula de $T_q\tilde{M}$ é uma direção assintótica, associada a direção binormal $\nu = (0, 1, 0)$.

Seja M dada na forma de Monge, assim, consideraremos p como a origem de $\mathbb{R}^3$, os vetores tangentes unitários em $T_q\tilde{M}$ dados por $C_q = \{(\pm 1, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ e a parábola de curvatura sendo parametrizada no plano normal por η como em (5). Dizemos que o parâmetro $y \in \mathbb{R}$ corresponde a uma direção tangente unitária $\mathbf{u} = \pm\partial_x + y\partial_y \in C_q$. Note que, qualquer direção de $T_q\tilde{M}$, exceto a correspondente a $\mathbf{u}_\infty = (0, 1)$, pode ser escrita

como acima. Denotaremos por y_∞ o parâmetro correspondente à direção tangente infinita $\mathbf{u}_\infty = \partial_y$, conforme Figura 44.

Figura 44: Representação de y_∞ em $T_q\tilde{M}$.



Fonte: Elaboração própria (2025).

(i) No caso em que Δ_p degenera em uma reta ou semirreta, definimos

$$\eta(y_\infty) = \eta'(y_\infty) = \frac{\eta'(y)}{\|\eta'(y)\|},$$

onde $y > 0$ é qualquer valor tal que $\eta'(y) \neq 0$.

(ii) No caso em que Δ_p degenera em um ponto ν , então definimos

$$\eta(y_\infty) = \nu \text{ e } \eta'(y_\infty) = 0.$$

(iii) No caso em que Δ_p é uma parábola não degenerada, $\eta(y_\infty)$ e $\eta'(y_\infty)$ não estão definidos.

Lema 4.40. Uma direção tangente em $T_q\tilde{M}$ dada por um parâmetro $y \in \mathbb{R} \cup \{y_\infty\}$ é assintótica se, e somente se, $\eta(y)$ e $\eta'(y)$ são colineares, desde que estejam definidos.

Demonstração: Considerando f em forma de Monge, dado $y \in \mathbb{R}$ temos de (5) que

$$\eta(y) = (l_{\nu_1} + 2m_{\nu_1}y + n_{\nu_1}y^2)\nu_1 + (l_{\nu_2} + 2m_{\nu_2}y + n_{\nu_2}y^2)\nu_2.$$

e conseqüentemente,

$$\eta'(y) = (2m_{\nu_1} + 2n_{\nu_1}y)\nu_1 + (2m_{\nu_2} + 2n_{\nu_2}y)\nu_2.$$

Assim, $\eta(y)$ e $\eta'(y)$ são colineares se, e só se,

$$\det(\eta(y), \eta'(y)) = \begin{vmatrix} l_{\nu_1} + 2m_{\nu_1}y + n_{\nu_1}y^2 & l_{\nu_2} + 2m_{\nu_2}y + n_{\nu_2}y^2 \\ 2m_{\nu_1} + 2n_{\nu_1}y & 2m_{\nu_2} + 2n_{\nu_2}y \end{vmatrix} = 0;$$

que coincide com a equação das direções assintóticas para $x = 1$.

Quando $y = y_\infty$, então $\eta(y)$ e $\eta'(y)$ são colineares, desde que estejam definidos. Assim, $\eta(y)$ e $\eta'(y)$ são colineares se, e somente se, Δ_p é uma parábola degenerada. Mas, pela demonstração do Teorema 4.29, temos que isto ocorre, se e só se,

$$m_{\nu_1}n_{\nu_2} - m_{\nu_2}n_{\nu_1} = 0;$$

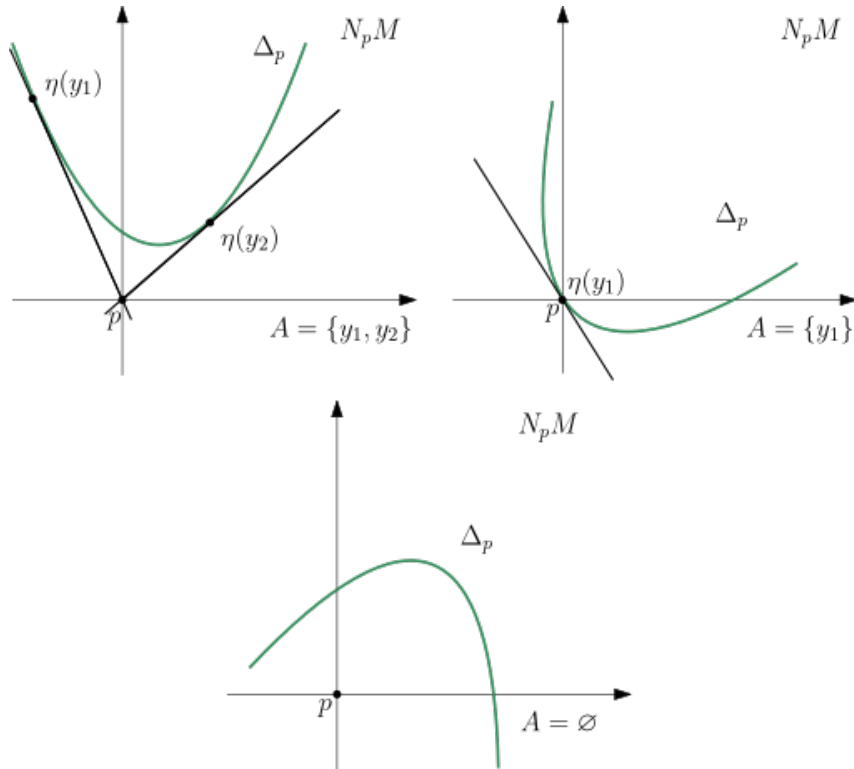
que é o caso da equação de direções assintóticas para $\mathbf{u}_\infty = (0, 1)$. $\square$

Por abuso de notação, o parâmetro $y \in \mathbb{R} \cup \{y_\infty\}$ correspondente à direção assintótica $\mathbf{u} \in T_q\tilde{M}$ é também chamado de direção assintótica.

Observação 4.41. Utilizando o Lema 4.40 e analisando geometricamente as diferentes possibilidades para as direções assintóticas $y \in \mathbb{R} \cup \{y_\infty\}$ em cada tipo de parábola de curvatura, temos que

- (i) Se Δ_p é uma parábola não degenerada então podem existir 2, 1 ou 0 direções assintóticas de acordo com a posição de p em relação a parábola, isto é, se p está no exterior, sobre a fronteira ou no interior da parábola, respectivamente (Figura 45).

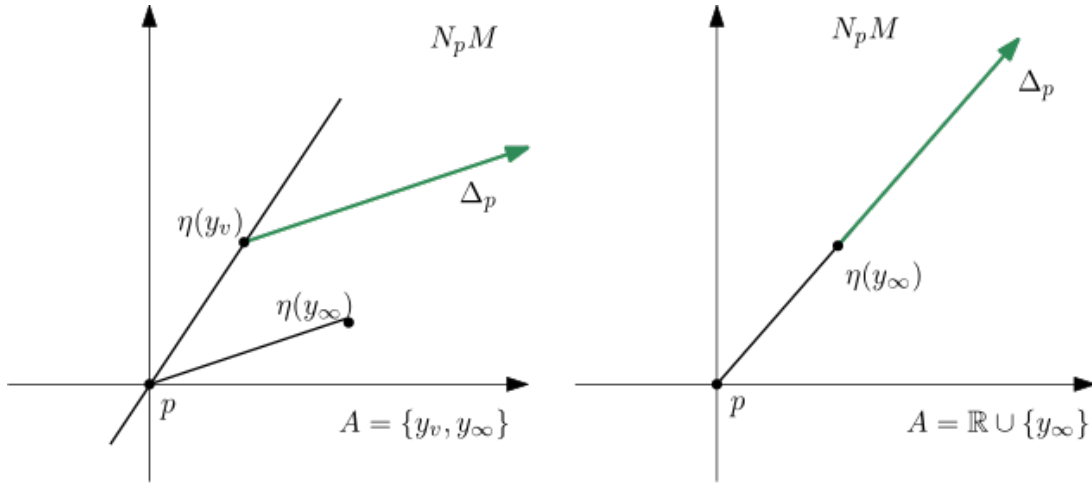
Figura 45: Possibilidades para Δ_p sendo uma parábola não degenerada e A o conjunto de direções assintóticas de M em p .



Fonte: Elaboração própria (2025).

- (ii) Se Δ_p é uma semirreta, então qualquer $y \in \mathbb{R} \cup \{y_\infty\}$ é uma direção assintótica ou existem duas direções assintóticas $\{y_v, y_\infty\}$, com $\eta(y_v)$ sendo o vértice de Δ_p , de acordo com que a reta contendo Δ_p seja radial ou não, isto é, se ela passa ou não por p , respectivamente (Figura 46).

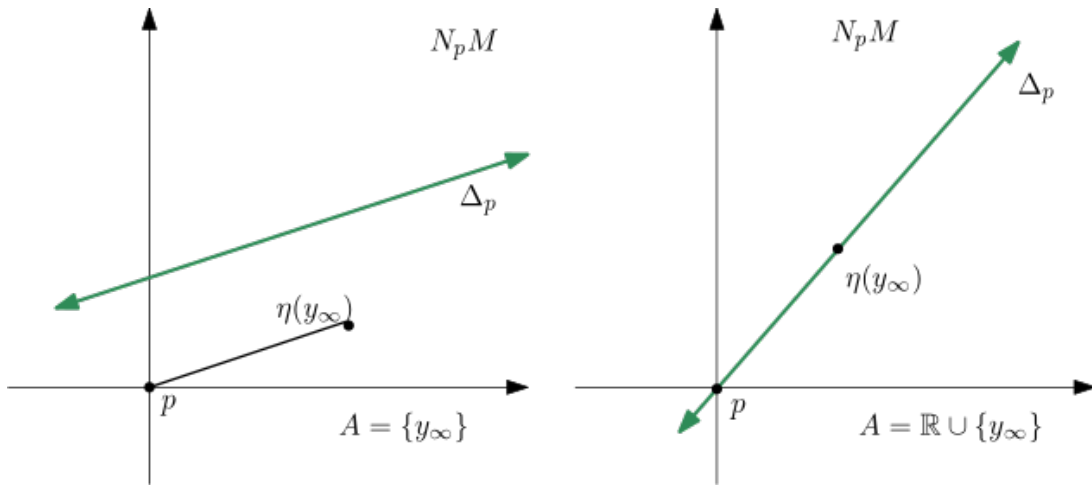
Figura 46: Possibilidades para Δ_p sendo uma semirreta e o conjunto A de direções assintóticas de M em p .



Fonte: Elaboração própria (2025).

- (iii) Se Δ_p é uma reta, então ou y_∞ é a única direção assintótica ou todo $y \in \mathbb{R} \cup \{y_\infty\}$ é uma direção assintótica, de acordo com que Δ_p não contém p ou contém, respectivamente (Figura 47).

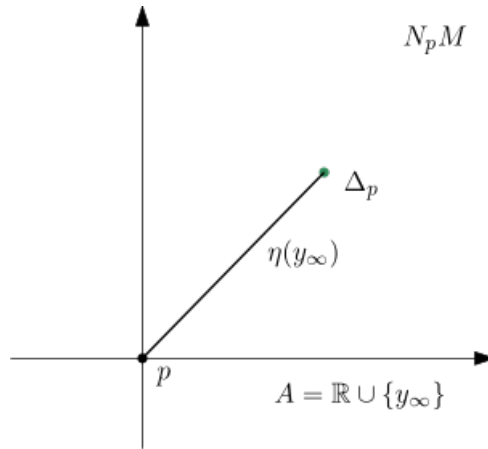
Figura 47: Possibilidades para Δ_p sendo uma reta e o conjunto A de direções assintóticas de M em p .



Fonte: Elaboração própria (2025).

- (iv) Se Δ_p é um ponto, então todo $y \in \mathbb{R} \cup \{y_\infty\}$ é uma direção assintótica (Figura 48).

Figura 48: Possibilidades para Δ_p sendo um ponto e o conjunto A de direções assintóticas de M em p .



Fonte: Elaboração própria (2025).

Lema 4.42. Uma direção normal $\nu \in N_p M$ é binormal se, e somente se, existe uma direção assintótica $y \in \mathbb{R} \cup \{y_\infty\}$ tal que ν é ortogonal ao subespaço gerado por $\eta(y)$ e $\eta'(y)$.

Demonstração: Segue da Definição 4.34, que se ν é binormal, então existe $y \in \mathbb{R} \cup \{y_\infty\}$ tal que ν é ortogonal a $\eta(y)$ e segue do Lema 4.40 que ν é também ortogonal a $\eta'(y)$, ou seja, ν é ortogonal ao subespaço gerado por $\eta(y)$ e $\eta'(y)$.

Suponha $y \in \mathbb{R} \cup \{y_\infty\}$ uma direção assintótica, associada à direção binormal ν_1 , de forma que exista uma direção normal ν ortogonal ao gerado por $\eta(y)$ e $\eta'(y)$. Logo, pelo passo anterior, ν_1 é também ortogonal a este subespaço e desta forma, ν é paralelo a ν_1 e assim, ν é binormal. $\square$

O número de direções binormais também depende das diferentes possibilidades para a parábola de curvatura. Segue da Observação 4.41 e do Lema 4.42 que:

- (i) Se Δ_p é uma parábola não degenerada, então podem existir duas, uma ou nenhuma direção binormal, uma para cada direção assintótica.
- (ii) Se Δ_p é uma semirreta, então há três possibilidades: se Δ_p não está contida em uma reta radial, então existem duas direções binormais; se está contida mas o vértice da parábola não é a origem p , então existe uma direção binormal; se o vértice é a origem então todas direções são binormais.
- (iii) Se Δ_p é uma reta ou um ponto diferente da origem p , então existe uma única direção binormal.
- (iv) Se Δ_p é a origem p , então qualquer direção normal é binormal.

Além disso, inspirados na Definição 2.46 e na Observação 2.51, [Benedini Riul e Sinha \(2019, p. 395\)](#) classificam os pontos singulares de coposto 1 de superfícies em $\mathbb{R}^3$.

Definição 4.43. Dada M uma superfície com singularidade de coposto 1 em $p \in M$, o ponto p é chamado

- (i) **Elíptico**, se não há nenhuma direção assintótica em p ;
- (ii) **Hiperbólico**, se há duas direções assintóticas em p ;
- (iii) **Parabólico**, se existe uma direção assintótica em p ;
- (iv) **Ponto de inflexão**, se existem infinitas direções assintóticas em p .

Exemplo 4.44. Segue da interpretação geométrica que se Δ_p é uma parábola não degenerada, então p nunca é ponto de inflexão; se Δ_p é uma semirreta, p nunca é elíptico e nem parabólico; se Δ_p é uma reta, p nunca é elíptico e nem hiperbólico; e se Δ_p é um ponto, então p é de inflexão.

Exemplo 4.45. Considere, para os seguintes casos, $p = \mathbf{0} \in M$. Desta maneira, vale que:

- (i) Sendo M o *cross-cap* definido pela imagem de $f(x, y) = (x, y^2, xy)$, conforme Exemplo 4.19, como a parábola de curvatura passa pela origem, temos que p é um ponto parabólico.
- (ii) Sendo M a *swallowtail* do Exemplo 4.20, então como a parábola de curvatura é o eixo- y , ou seja, uma reta radial, segue que p é um ponto de inflexão;
- (iii) A origem do toro pinçado do Exemplo 4.30 é um ponto parabólico, visto que Δ_p é uma reta que não passa pela origem.

Além disso, podemos generalizar o item (i). Considere M uma superfície com singularidade de coposto 1 em $p = \mathbf{0}$, de forma que Δ_p seja uma parábola não degenerada. Segue da Proposição 4.31 que podemos escrever uma parametrização local de M como

$$g(x, y) = (x, ax^2 + bxy + cy^2 + p(x, y), xy + q(x, y)), \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } c > 0.$$

E segue do Lema 4.36 que uma direção $(x, y) \in N_p M$ é assintótica se, e só se, $ax^2 - cy^2 = 0$.

Daí, temos que, para $a = 0$ há uma única direção assintótica e assim, p é um ponto parabólico. Caso $a > 0$, então há duas direções assintóticas e assim, p é um ponto hiperbólico. E por último, se $a < 0$, não há nenhuma direção assintótica e, desta forma, p é elíptico.

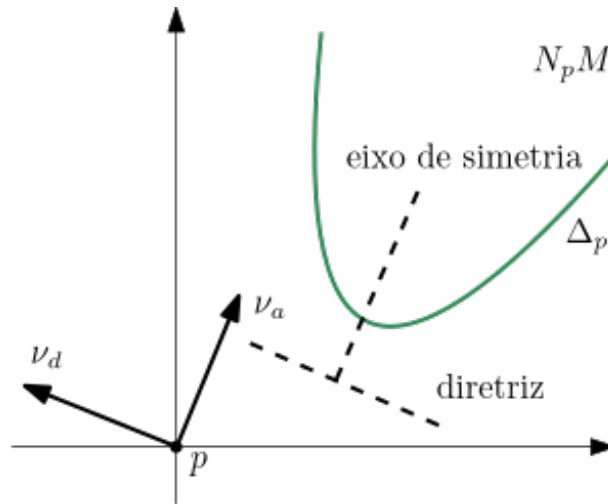
4.4 | As curvaturas no ponto singular

Nesta seção serão definidas duas curvaturas para superfícies singulares de coposto 1. Tais curvaturas são invariantes de segunda ordem da superfície e podem ser utilizadas para o estudo da geometria de tais singularidades, aparecendo, por exemplo, no estudo de contato de superfícies de coposto 1 com planos e esferas em [Martins e Nuño-Ballesteros \(2015\)](#) e [Sinha e Saji \(2022\)](#).

De forma a definir as curvaturas axial e umbílica, consideraremos um referencial ortonormal especial de N_pM , o qual nas próximas subseções, denotaremos apenas por $\{\nu_a, \nu_2\}$ e chamaremos ν_a de **vetor axial**. Entretanto, cada diferente tipo de parábola de curvatura receberá um referencial ortonormal específico, os quais denominaremos **referencial adaptado** de N_pM .

Suponha primeiramente que Δ_p é uma parábola não degenerada. Considere $\nu_a \in N_pM$ o vetor unitário que compartilha a direção do eixo de simetria da parábola, apontando para o interior da parábola e $\nu_d \in N_pM$ o vetor unitário que compartilha a direção da diretriz da parábola tal que $\{\nu_a, \nu_d\} = \{\nu_a, \nu_2\}$ é um referencial ortonormal positivamente orientado de N_pM (Figura 49).

Figura 49: Referencial adaptado para o caso em que Δ_p é uma parábola não degenerada.

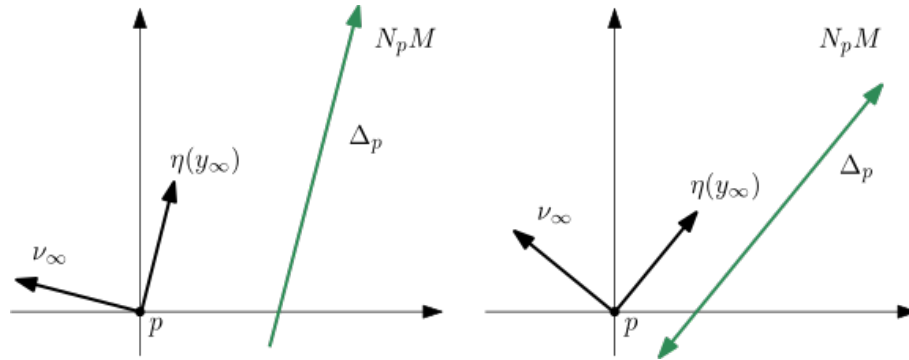


Fonte: Elaboração própria (2025).

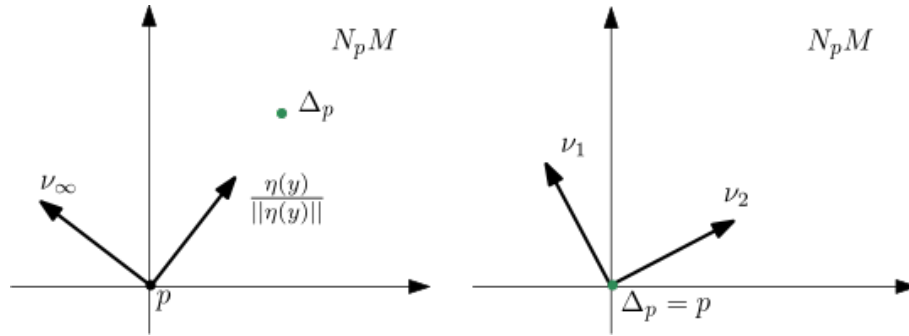
Quando Δ_p é uma reta ou semirreta, tome $\nu_a = \eta(y_\infty)$ e considere ν_∞ a **direção binormal infinita** associada à direção assintótica y_∞ , de tal forma que $\{\eta(y_\infty), \nu_\infty\} = \{\nu_a, \nu_2\}$ é um referencial ortonormal positivamente orientado de N_pM (Figura 50).

Se Δ_p é um ponto que não é a origem p , então $\eta(y)$ é uma constante não nula, sendo assim, tome o referencial ortonormal $\left\{ \nu, \frac{\eta(y)}{\|\eta(y)\|} \right\} = \{\nu_a, \nu_2\}$ de N_pM tal que ν é uma direção binormal (Figura 51).

Caso $\Delta_p = p$, então qualquer referencial ortonormal de N_pM pode ser tomado como referencial adaptado.

Figura 50: Referencial adaptado para o caso em que Δ_p é uma reta ou semirreta.

Fonte: Elaboração própria (2025).

Figura 51: Referencial adaptado para o caso em que Δ_p é um ponto.

Fonte: Elaboração própria (2025).

Em [Martins e Nuño-Ballesteros \(2015\)](#), os autores definem a curvatura umbílica para quando a parábola de curvatura é uma reta, semirreta ou ponto. Já em [Sinha e Saji \(2022\)](#) e [Benedini Riul, Deolindo-Silva e Sinha \(2023\)](#), os autores definem a curvatura axial para os casos em que Δ_p é parábola não degenerada, semirreta ou ponto. Todos os trabalhos consideram para tais curvaturas, referenciais adaptados como acima. Apresentamos a seguir tais definições e resultados.

4.4.1 | A curvatura umbílica

Para a definição da curvatura umbílica, considere M uma superfície singular de coposto 1 em $p \in M$ tal que Δ_p é uma parábola degenerada.

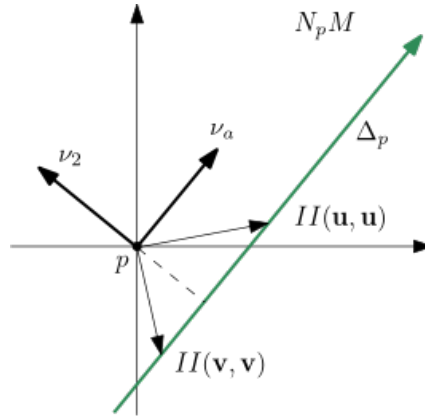
Relembremos que, em um referencial ortonormal de $N_p M$, em particular no adaptado, podemos escrever a segunda forma fundamental como a seguir:

$$II(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = II_{\nu_a}(\mathbf{u}, \mathbf{u})\nu_a + II_{\nu_2}(\mathbf{u}, \mathbf{u})\nu_2.$$

Note que, desta maneira, dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C_q$, a segunda forma fundamental na direção normal ν_2 é constante, a menos do sinal. Veja a representação geométrica na Figura 52.

Esta invariância sugere a seguinte definição:

Figura 52: Representação geométrica da segunda forma fundamental na direção ν_2 .



Fonte: Elaboração própria (2025).

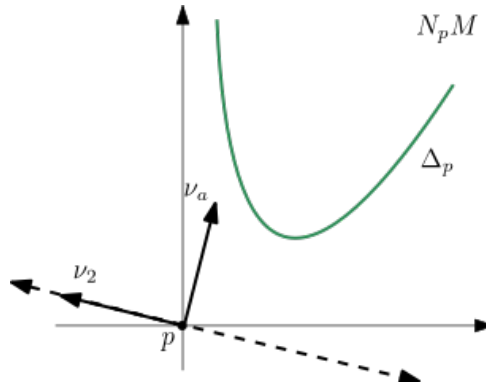
Definição 4.46. Seja M uma superfície singular em p tal que Δ_p é uma parábola degenerada. Dado um vetor unitário $\mathbf{u} \in T_q \tilde{M}$ e um referencial adaptado $\{\nu_a, \nu_2\}$ de $N_p M$, chamamos o número positivo

$$\kappa_u(p) = |\langle II(\mathbf{u}, \mathbf{u}), \nu_2 \rangle| = |II_{\nu_2}(\mathbf{u}, \mathbf{u})|$$

de **curvatura umbílica** de M em p .

Perceba que a curvatura umbílica não está definida para singularidades $\mathcal{A}^2$ -equivalentes ao *cross-cap*, isto é, quando Δ_p é uma parábola não degenerada. Isto pois a projeção no sentido da diretriz de uma parábola não degenerada é uma reta, isto é, é infinita. Veja na Figura 53.

Figura 53: Projeção de uma parábola não degenerada no sentido de sua diretriz.



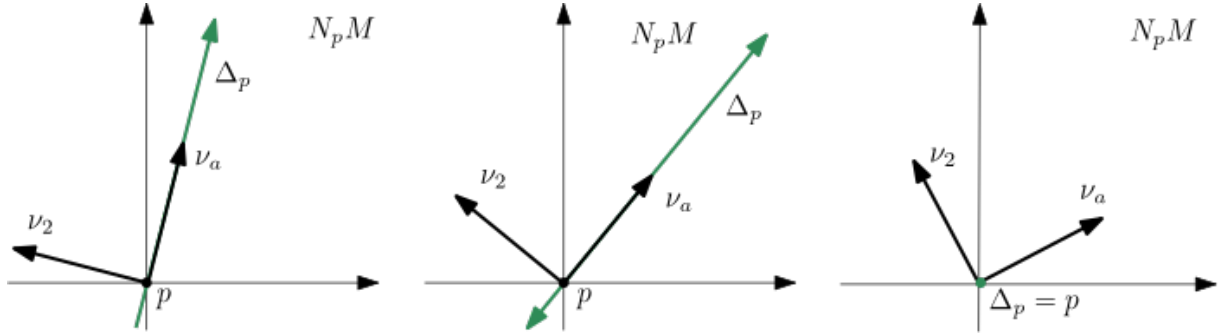
Fonte: Elaboração própria (2025).

Observação 4.47. Interpretação geométrica para a curvatura umbílica:

- (i) Segue da definição que se Δ_p é um ponto, então $\kappa_u(p)$ é a distância entre Δ_p e p e se Δ_p é uma reta ou semirreta então $\kappa_u(p)$ é o comprimento da projeção de Δ_p na direção binormal infinita, isto é, a distância entre p e a reta contendo Δ_p .

- (ii) A partir do item anterior temos que $\kappa_u(p) = 0$ se, e somente se, $\Delta_p = \{p\}$ ou Δ_p está contida em uma reta radial quando a parábola de curvatura é uma reta ou semirreta. Ilustramos estes casos na Figura 54.

Figura 54: Casos em que a curvatura umbílica se anula.



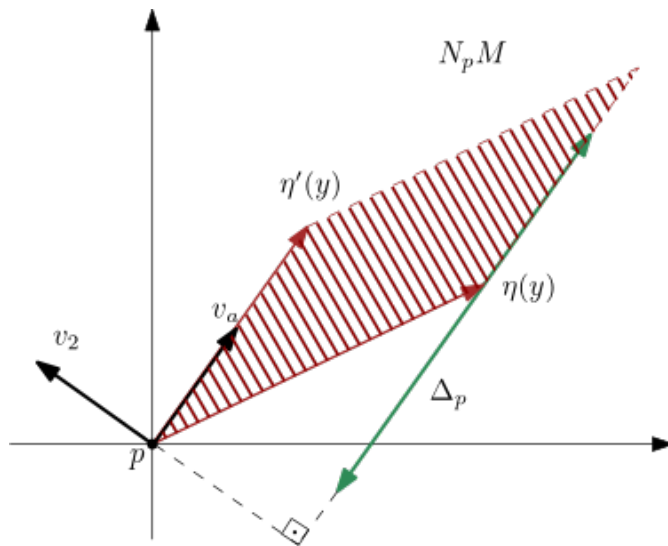
Fonte: Elaboração própria (2025).

- (iii) Se Δ_p é uma reta ou semirreta, considere η uma parametrização da parábola de curvatura. Assim, para todo $y \in \mathbb{R}$, tal que $\eta'(y) \neq 0$, podemos escrever

$$\kappa_u(p) = \frac{\|\eta(y) \times \eta'(y)\|}{\|\eta'(y)\|}.$$

Basta tomar o paralelogramo formado pelos vetores $\eta(y)$ e $\eta'(y)$. Assim, sua área é dada por $\|\eta(y) \times \eta'(y)\|$ e a projeção na direção de ν_2 é exatamente a altura em relação a $\eta'(y)$, conforme Figura 55, o que nos dá a relação desejada.

Figura 55: Paralelogramo formado pelos vetores $\eta(y)$ e $\eta'(y)$.



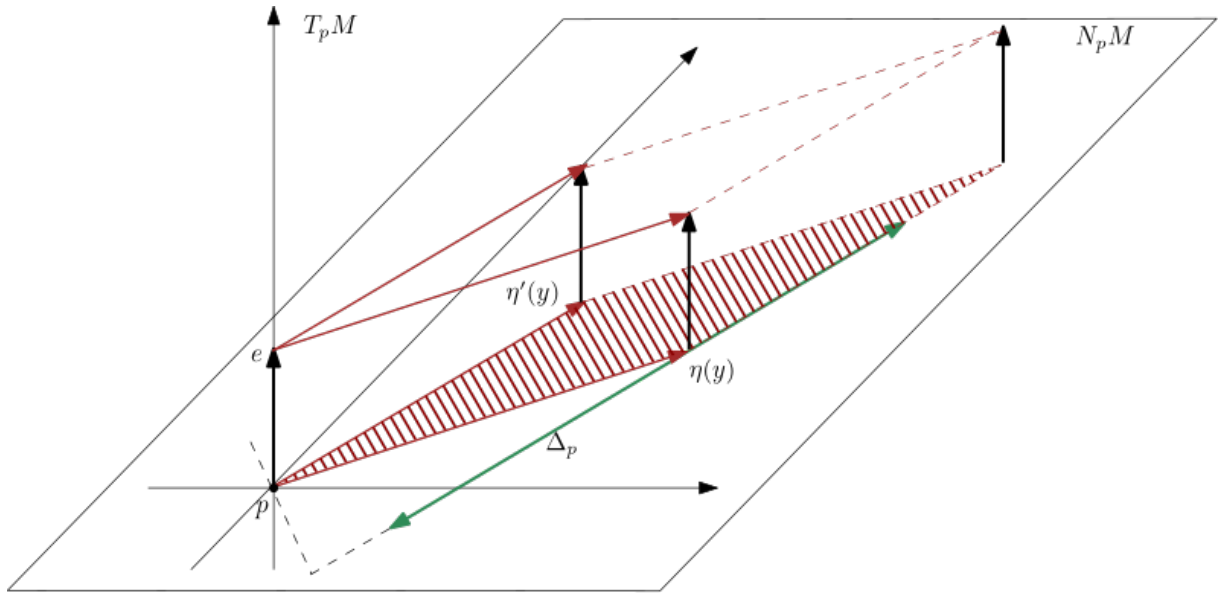
Fonte: Elaboração própria (2025).

Podemos estender essa ideia a três dimensões, onde temos que

$$\kappa_u(p) = \left| \left\langle n(y), \frac{\eta'(y) \times e}{\|\eta'(y)\|} \right\rangle \right| = \frac{1}{\|\eta'(y)\|} |\det(\eta(y), \eta'(y), e)|.$$

Sendo e um vetor unitário em $T_p M$, basta considerar o volume do paralelepípedo formado pelos vetores e , $\eta(y)$ e $\eta'(y)$, ou seja, de altura 1 e base η e η' . Desta forma, o argumento é análogo (Figura 56).

Figura 56: Paralelepípedo formado pelos vetores $\eta(y)$, $\eta'(y)$ e e .



Fonte: Elaboração própria (2025).

Exemplo 4.48. Considere M a *swallowtail* definida pela imagem de

$$f(x, y) = (x, 2xy + 4y^3, 3y^4 + xy^2),$$

conforme Exemplo 4.20. Como a parábola de curvatura é uma reta que passa por p , segue da interpretação geométrica que $\kappa_u(p) = 0$.

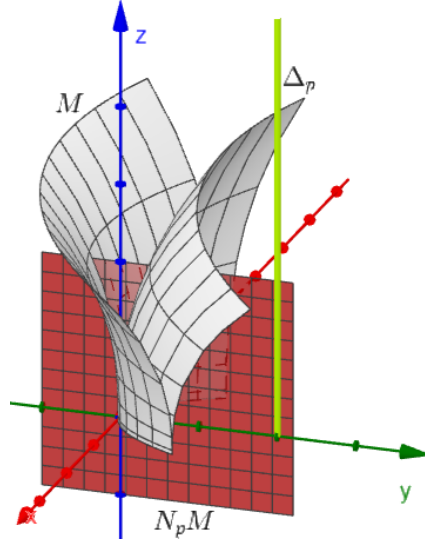
Exemplo 4.49. Seja M o toro pinçado dado por

$$f(x, y) = \left(\left(2 + \cos y \cos \frac{x}{2} \right) \cos x, \left(2 + \cos y \cos \frac{x}{2} \right) \sin x, \sin y \cos \frac{x}{2} \right).$$

Segue do Exemplo 4.30 que $\kappa_u(p) = \sqrt{\frac{144^2}{289^2} + \frac{36^2}{289^2}} \approx 0,51360$.

Exemplo 4.50. Seja M a superfície dada pela imagem de $f(x, y) = (x, x^2 + y^5, 3y^2 - xy^2)$, note que $p = \mathbf{0}$ é uma singularidade de coposto 1 e, além disso, Δ_p pode ser parametrizado por $\eta(y) = (0, 2, 6y^2)$, conforme Figura 57. Segue que $\kappa_u(p) = 2$.

Figura 57: Parábola de curvatura em p de $f(x, y) = (x, x^2 + y^5, 3y^2 - xy^2)$.



Fonte: Elaboração própria (2025).

Observação 4.51. Perceba pela Observação 4.47 que a definição da curvatura umbílica não depende da escolha de um referencial adaptado de $N_p M$, nem da parametrização de Δ_p , nem da escolha de coordenadas locais em $\tilde{M}$. Porém, depende da aplicação $g : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ que parametriza M . O próximo exemplo ilustra esta afirmação.

Exemplo 4.52. Considere M a *cuspidal edge* como no Exemplo 4.22. Note que, considerando $p = \mathbf{0}$ e a parametrização local $f(x, y) = (x, y^2, y^3)$ temos que $\kappa_u(p) = 0$, pois Δ_p é uma semirreta que passa por p . Entretanto, considerando a parametrização $g(x, y) = (x, (y^3 + x)^2, (y^3 + x)^3)$, a parábola de curvatura é o ponto $(0, 2, 0)$ e assim $\kappa_u(p) = 2$.

O seguinte resultado nos traz uma semelhança com a curvatura normal para o caso de superfícies regulares, em que a curvatura é escrita como o quociente da segunda forma fundamental pela primeira.

Proposição 4.53. Para todo $\mathbf{u} \in T_q \tilde{M}$ com $I(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \neq 0$ e $\{\nu_a, \nu_2\}$ referencial adaptado de $N_p M$, vale que

$$\kappa_u(p) = \frac{|II_{\nu_2}(\mathbf{u}, \mathbf{u})|}{I(\mathbf{u}, \mathbf{u})}.$$

Demonstração: Considerando em $T_q \tilde{M}$ a pseudo-métrica induzida pela primeira forma fundamental, temos pela bilinearidade de II que

$$|II_{\nu_2}(\mathbf{u}, \mathbf{u})| = \|\mathbf{u}\|^2 \left| II_{\nu_2} \left(\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}, \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \right) \right| = I(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \kappa_u(p)$$

e segue o resultado. $\square$

Considere duas superfícies $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^3$ com singularidades de coposto 1 nos pontos $p_1 \in M_1$ e $p_2 \in M_2$, cujas parametrizações locais f e g , respectivamente, sejam $\mathcal{A}^2$ -equivalentes e que suas parábolas de curvatura sejam degeneradas. Assim, suas respectivas parábolas de curvatura podem ser uma semirreta, reta ou um ponto.

Perceba que, como a curvatura umbílica pode ser entendida como distância. Seguem-se os seguintes casos:

- Se Δ_{p_1} e Δ_{p_2} são pontos, então existe uma isometria linear $\phi : N_{p_1}M_1 \rightarrow N_{p_2}M_2$ tal que $\phi(\Delta_{p_1}) = \Delta_{p_2}$ se, e somente se, $\kappa_u(p_1) = \kappa_u(p_2)$. Assim, podemos afirmar pelo Teorema 4.32 que f e g são $\mathcal{R}^2 \times \mathcal{O}(3)$ -equivalentes se, e somente se, $\kappa_u(p_1) = \kappa_u(p_2)$.
- Se Δ_{p_1} e Δ_{p_2} são pares de retas ou de semirretas, então, se tal isometria existe, temos que $\kappa_u(p_1) = \kappa_u(p_2)$. E assim, a igualdade da curvatura umbílica é uma condição necessária para a $\mathcal{R}^2 \times \mathcal{O}(3)$ -equivalência de suas parametrizações locais.

Tais fatos além de demonstrarem a importância da curvatura umbílica no estudo da geometria local de segunda ordem de superfícies singulares de coposto 1, nos permitem concluir que a **curvatura umbílica é um invariante por isometrias**.

4.4.2 | A curvatura axial

Para a definição da curvatura axial, consideraremos M uma superfície singular de coposto 1 em $p \in M$ e analisaremos sua projeção no sentido do vetor axial do referencial adaptado.

Definição 4.54. Dado um referencial adaptado $\{v_a, v_2\}$ de N_pM e $\mathbf{u} \in T_q\tilde{M}$, definimos a **função de curvatura normal axial** como

$$K_{\nu_a}(\mathbf{u}) = \langle II(\mathbf{u}, \mathbf{u}), \nu_a \rangle = II_{\nu_a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}).$$

Se $\mathbf{u} \in C_q$, podemos escrever $\mathbf{u} = \partial_x + y\partial_y$, então podemos considerar $K_{\nu_a}(\mathbf{u})$ como uma função no parâmetro y .

Definição 4.55. Quando existe, nós chamamos o número

$$\kappa_a(p) = \min\{K_{\nu_a}(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in C_q\} = \min\{\langle \eta(y), v_a \rangle \mid y \in \mathbb{R}\}$$

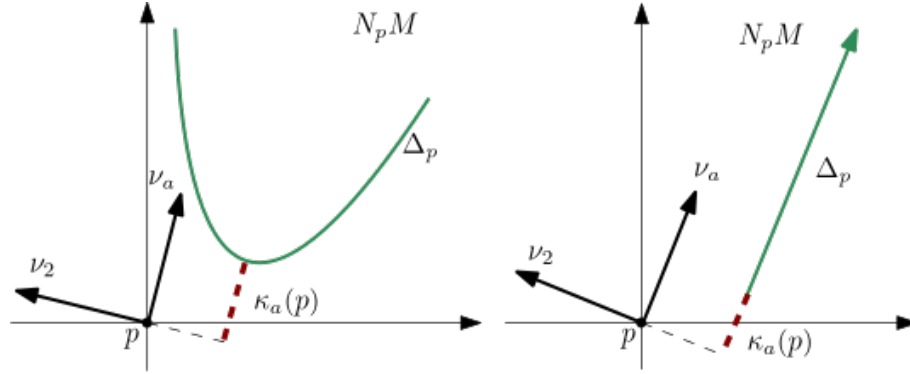
de **curvatura axial** de M em p .

Observação 4.56. Interpretação geométrica da curvatura axial: Segue da definição da curvatura axial que:

- Se Δ_p é uma parábola não degenerada ou uma semirreta, então $\kappa_a(p)$ é o comprimento da projeção do vértice de Δ_p na direção ν_a . Se Δ_p é uma semirreta radial,

podemos interpretar $\kappa_a(p)$ como a distância entre p e o vértice da parábola de curvatura (Figura 58).

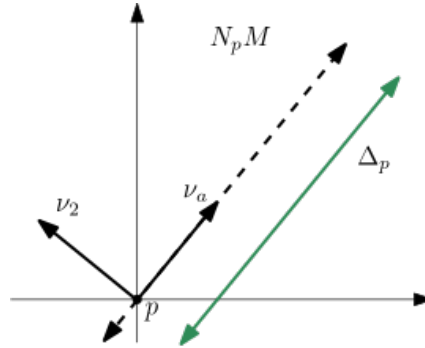
Figura 58: Representação da curvatura axial para os casos em que Δ_p é uma parábola não degenerada ou semirreta.



Fonte: Elaboração própria (2025).

- (ii) Se Δ_p é uma reta, a projeção de Δ_p na direção ν_a é toda a reta, e portanto, não limitada. Assim, a curvatura axial não está definida.

Figura 59: Projeção de Δ_p sendo uma reta na direção de ν_a .



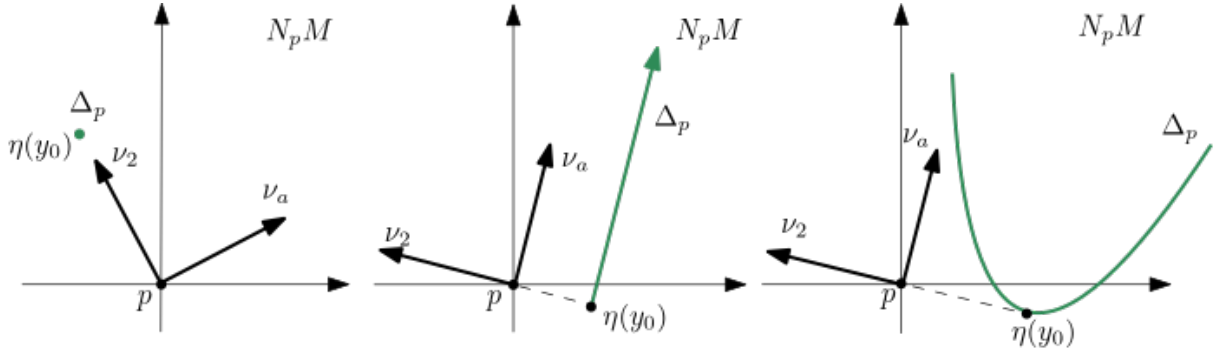
Fonte: Elaboração própria (2025).

- (iii) Se Δ_p é um ponto, a projeção na direção de ν_a é a origem e portanto, $\kappa_a(p) = 0$. Veja na Figura 60.

Na seguinte proposição, caracterizamos quando a curvatura axial é nula. Ilustramos tais casos na Figura 60.

Proposição 4.57. Temos que $\kappa_a(p) = 0$ se, e somente se Δ_p é um ponto, ou $\eta(y_0)$ é paralelo a ν_2 , onde y_0 é um ponto crítico de K_{ν_a} .

Demonstração: Suponha $\kappa_a(p) = 0$. Segue que, Δ_p é um ponto, uma semirreta ou uma parábola não degenerada. Se Δ_p é um dos últimos dois casos, então, pela definição de curvatura axial, segue que existe $y_0 \in \mathbb{R} \cup \{y_\infty\}$, ponto crítico de K_{ν_a} tal que $\langle \eta(y_0), \nu_a \rangle =$

Figura 60: Casos em que $\kappa_a(p) = 0$.

Fonte: Elaboração própria (2025).

0, logo $\eta(y_0)$ é perpendicular a ν_a e, como ν_a é perpendicular a ν_2 , segue que $\eta(y_0)$ é paralelo a ν_2 .

Suponha que Δ_p é um ponto, então $\kappa_a(p) = 0$. Caso Δ_p seja uma semirreta ou uma parábola não degenerada, então, analogamente ao item anterior temos que $\eta(y_0)$ é paralelo a ν_2 e tal fato implica que $\langle \eta(y_0), \nu_a \rangle = 0$. Segue que $\kappa_a(p) = 0$. $\square$

Exemplo 4.58. Seja M a superfície singular definida localmente pela imagem de

$$f(x, y) = \left(x, x^3 y^2 - xy + 2y^2, \frac{1}{2}xy + 3y^2 \right).$$

Assim, $p = \mathbf{0}$ é uma singularidade de coposto 1 e, calculando suas segundas derivadas temos que a parábola de curvatura pode ser parametrizada por

$$\eta(y) = \left(0, 4y^2 - y, 6y^2 + \frac{1}{2}y \right),$$

conforme Figura 61.

Segue da interpretação geométrica da curvatura axial que $\kappa_a(p) = 0$, pois o vértice da parábola é o próprio p .

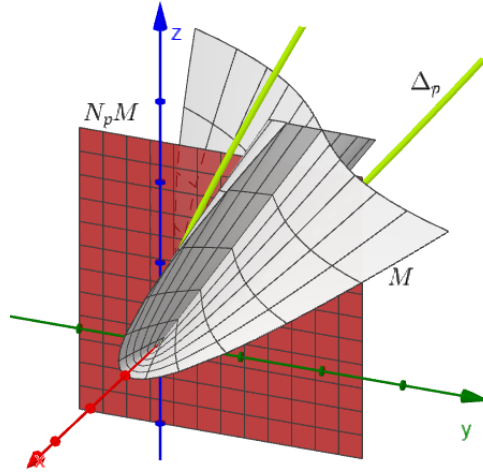
Análogo a Proposição 4.53, a curvatura axial também pode ser escrita de forma semelhante à curvatura normal para superfícies regulares, como dado na proposição a seguir.

Proposição 4.59. Para todo ponto singular de coposto 1 $p \in M$ e $\{\nu_a, \nu_2\}$ referencial adaptado de $N_p M$, podemos escrever sua curvatura axial como

$$\kappa_a(p) = \min \left\{ \frac{K_{\nu_a}(\mathbf{u})}{I(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \mid \mathbf{u} \in T_q \tilde{M}, I(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \neq 0 \right\}.$$

Demonstração: A demonstração é análoga à Proposição 4.53. Basta considerar a

Figura 61: M dada pela imagem de $f(x, y) = \left(x, x^3y^2 - xy + 2y^2, \frac{1}{2}xy + 3y^2\right)$ e Δ_p .



Fonte: Elaboração própria (2025).

pseudo-métrica induzida pela primeira forma fundamental. Assim, para $\mathbf{u} \in T_q \tilde{M}$, com $I(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \neq 0$; temos que

$$|II_{\nu_a}(\mathbf{u}, \mathbf{u})| = \|\mathbf{u}\|^2 \left| II_{\nu_a} \left(\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}, \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \right) \right| = I(\mathbf{u}, \mathbf{u}) K_{\nu_a}(p);$$

e segue o resultado. $\square$

As Proposições 4.60, 4.61 e 4.62 apresentadas a seguir caracterizarão o vetor axial ν_a e a curvatura axial a partir de uma parametrização local de M em p . Considere para tais resultados, M definida localmente pela imagem de f em forma de Monge, de forma que o seu 2-jato é dado por

$$j^2 f(\mathbf{0}) = \left(x, \frac{1}{2}(b_{20}x^2 + 2b_{11}xy + b_{02}y^2), \frac{1}{2}(c_{20}x^2 + 2c_{11}xy + c_{02}y^2) \right) \quad (9)$$

e $p \in M$ é a origem de $\mathbb{R}^3$. Desta forma, Δ_p é parametrizada por

$$\eta(y) = (0, b_{20} + 2b_{11}y + b_{02}y^2, c_{20} + 2c_{11}y + c_{02}y^2). \quad (10)$$

O seguinte resultado nos permite caracterizar o vetor axial a partir de f como acima.

Proposição 4.60. Temos que, se

- (i) Δ_p é uma parábola não degenerada ou uma semirreta, então

$$\nu_a = \frac{1}{\sqrt{b_{02}^2 + c_{02}^2}}(b_{02}, c_{02});$$

(ii) Δ_p é uma reta, então podemos tomar $\nu_a = \frac{1}{\sqrt{b_{11}^2 + c_{11}^2}}(b_{11}, c_{11})$;

(iii) Δ_p é um ponto diferente da origem, então podemos tomar

$$\nu_a = \frac{1}{\sqrt{b_{20}^2 + c_{20}^2}}(-c_{20}, b_{20}).$$

Demonstração: A demonstração é feita em casos.

(i) Suponha inicialmente que Δ_p é uma parábola não degenerada. Se $\eta(y_v)$ é o vértice da parábola, então $\eta'(y_v)$ é paralelo à diretriz de Δ_p . Basta então calcular y_v para determinar ν_a .

Da teoria de curvas sabemos que é no vértice da parábola que sua curvatura é máxima. Assim, de (10) temos que $\eta'(y) = (2b_{11} + 2b_{02}y, 2c_{11} + 2c_{02}y)$ e $\eta''(y) = (2b_{02}, 2c_{02})$. Então, a curvatura de η é dada por

$$k(y) = \frac{c_{02}(b_{11} + b_{02}y) - b_{02}(c_{11} + c_{02}y)}{2((b_{11} + b_{02}y)^2 + (c_{11} + c_{02}y)^2)^{3/2}}.$$

Derivando, encontramos que k' se anula em $y_v = \frac{b_{11}b_{02} + c_{11}c_{02}}{b_{02}^2 + c_{02}^2}$. E assim,

$$\eta'(y_v) = \left(\frac{2c_{02}(c_{11}b_{02} - b_{11}c_{02})}{b_{02}^2 + c_{02}^2}, \frac{-2b_{02}(c_{11}b_{02} - b_{11}c_{02})}{b_{02}^2 + c_{02}^2} \right).$$

Segue que

$$\nu_2 = \frac{\eta'(y_v)}{\|\eta'(y_v)\|} = \left(\frac{c_{02}\sqrt{b_{02}^2 + c_{02}^2}}{b_{02}^2 + c_{02}^2}, \frac{-b_{02}\sqrt{b_{02}^2 + c_{02}^2}}{b_{02}^2 + c_{02}^2} \right).$$

Rotacionando em $\pi/2$ no senti anti-horário, encontramos que

$$\nu_a = \left(\frac{b_{02}\sqrt{b_{02}^2 + c_{02}^2}}{b_{02}^2 + c_{02}^2}, \frac{c_{02}\sqrt{b_{02}^2 + c_{02}^2}}{b_{02}^2 + c_{02}^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{b_{02}^2 + c_{02}^2}}(b_{02}, c_{02}).$$

Seja Δ_p uma semirreta, por definição temos que $\nu_a = \eta(y_\infty)$. Além disso,

$$\eta(y_\infty) = \frac{\eta'(y)}{\|\eta'(y)\|},$$

para $y > 0$, de forma que $\eta(y) \neq 0$.

Note que, podemos escrever $\eta'(y) = \eta'(y_1) - \eta'(y_2) = (y_1 - y_2)(2b_{02}, 2c_{02})$, com $y_1, y_2 \geq 0$. Assim, temos que $\eta'(y)$ depende apenas de b_{02} e c_{02} e vale que

$$\nu_a = \frac{\eta'(y)}{\|\eta'(y)\|} = \frac{2(b_{02}, c_{02})}{\sqrt{4b_{02}^2 + 4c_{02}^2}}.$$

- (ii) Caso Δ_p seja uma reta, pela Tabela 1, segue que $b_{02} = c_{02} = 0$ e $b_{11}^2 + c_{11}^2 > 0$. Assim, $\eta(y_\infty) = \frac{\eta'(y)}{\|\eta'(y)\|} = \frac{(2b_{11}, 2c_{11})}{2\sqrt{b_{11}^2 + c_{11}^2}}$, e segue o resultado.
- (iii) Suponha que Δ_p é um ponto diferente da origem, então segue da Tabela 1 que $b_{11} = b_{02} = c_{11} = c_{02} = 0$ e assim, $\eta(y_\infty) = (0, b_{20}, c_{20})$. Daí,

$$\nu_2 = \frac{\eta(y_\infty)}{\|\eta(y_\infty)\|} = \frac{1}{\sqrt{b_{20}^2 + c_{20}^2}}(b_{20}, c_{20}).$$

Rotacionando em $\pi/2$ no sentido anti-horário, temos que

$$\nu_a = \frac{1}{\sqrt{b_{20}^2 + c_{20}^2}}(-c_{20}, b_{20}).$$

Concluimos assim a demonstração do resultado. $\square$

Proposição 4.61. Se Δ_p é uma parábola não degenerada ou semirreta. Temos que

$$\nu_a = \frac{II(\mathbf{u}_\infty, \mathbf{u}_\infty)}{\|II(\mathbf{u}_\infty, \mathbf{u}_\infty)\|}.$$

Demonstração: Dado $j^2 f(\mathbf{0})$ como (9). Então $\mathbf{u}_\infty = (0, 1)$ e calculando a segunda forma fundamental de M em p temos que

$$j^2 f(\mathbf{0})_{xx}(x, y) = (0, b_{20}, c_{20}), \quad j^2 f(\mathbf{0})_{xy}(x, y) = (0, b_{11}, c_{11}) \text{ e } j^2 f(\mathbf{0})_{yy}(x, y) = (0, b_{02}, c_{02}).$$

Assim, $II(\mathbf{u}_\infty, \mathbf{u}_\infty) = (0, b_{02}^2, c_{02}^2)$ e o resultado segue da Proposição 4.60. $\square$

Proposição 4.62. Se Δ_p é uma parábola não degenerada ou semirreta, então

$$\kappa_a(p) = \frac{1}{\sqrt{b_{02}^2 + c_{02}^2}} \left((b_{20}b_{02} + c_{20}c_{02}) - \frac{(b_{11}b_{02} + c_{11}c_{02})^2}{b_{02}^2 + c_{02}^2} \right). \quad (11)$$

Demonstração: Seja f uma parametrização local de M em p tal que seu 2-jato seja dado como em (9). Então, pela Proposição 4.60, $\nu_a = \frac{(b_{02}, c_{02})}{b_{02}^2 + c_{02}^2}$. Assim,

$$K_{\nu_a}(y) = \langle \eta(y), \nu_a \rangle = \frac{1}{\sqrt{b_{02}^2 + c_{02}^2}}((b_{20}b_{02} + c_{20}c_{02}) + (2b_{11}b_{02} + 2c_{11}c_{02})y + (b_{02}^2 + c_{02}^2)y^2).$$

Temos que $\kappa_a(p)$ é um ponto crítico de K_{ν_a} , ou seja, é o valor y_0 para o qual $K'_{\nu_a}(y_0) = 0$. Derivando, temos que

$$K'_{\nu_a}(y) = \langle \eta'(y), \nu_a \rangle = \frac{1}{\sqrt{b_{02}^2 + c_{02}^2}}(2b_{11}b_{02} + 2c_{11}c_{02} + (2b_{02}^2 + 2c_{02}^2)y) = 0.$$

Desta forma, $K'_{\nu_a}(y_0) = 0$, para $y_0 = \frac{-(b_{11}b_{02} + c_{11}c_{02})}{(b_{02}^2 + c_{02}^2)}$. Substituindo, temos que

$$\kappa_a(p) = K_{\nu_a}(y_0) = \frac{1}{\sqrt{b_{02}^2 + c_{02}^2}} \left((b_{20}b_{02} + c_{20}c_{02}) - \frac{(b_{11}b_{02} + c_{11}c_{02})^2}{(b_{02}^2 + c_{02}^2)} \right),$$

e segue o resultado. $\square$

Exemplo 4.63. Seja M definida pela imagem de $g(x, y) = (x, x^2 + y^2, 2x^2 + xy)$, como no Exemplo 4.33. Temos que sua parábola de curvatura para $p = \mathbf{0}$ pode ser parametrizada por $\eta(y) = (0, 2 + 2y^2, 4 + 2y)$. Assim, comparando com (9) temos que

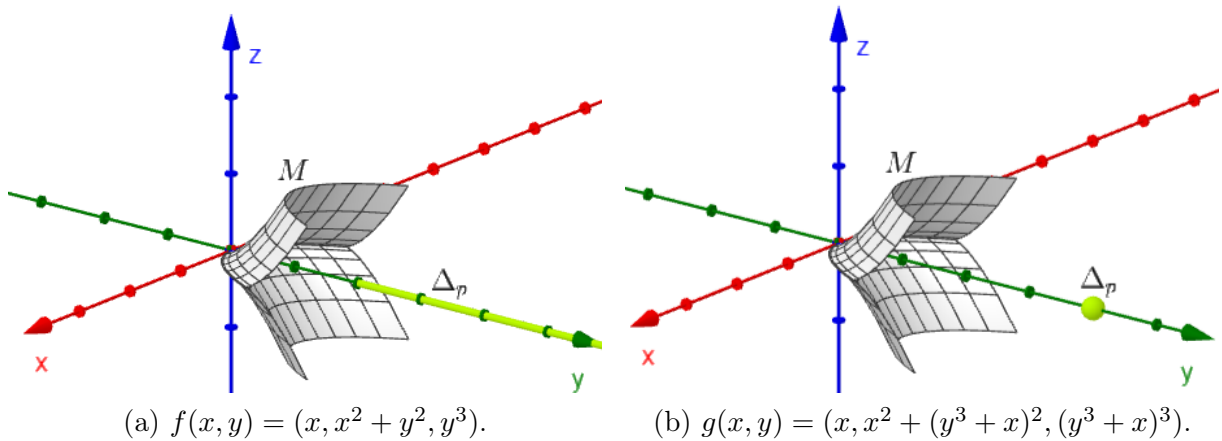
$$b_{20} = 2, b_{11} = 0, b_{20} = 2, c_{20} = 4, c_{11} = 1, c_{02} = 0.$$

Desta forma, segue da Proposição 4.60 que $\nu_a = (1, 0)$ e da Proposição 4.62 que $\kappa_a(p) = 2$.

Observação 4.64. De maneira análoga à definição da curvatura umbílica, observa-se pelas proposições acima que a definição da curvatura axial não depende da escolha de um referencial adaptado de $N_p M$, nem da parametrização de Δ_p , nem da escolha de coordenadas locais em $\tilde{M}$. Porém, depende da aplicação $g : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ que parametriza M , como visto no seguinte exemplo.

Exemplo 4.65. Seja M a superfície definida pela imagem de $f(x, y) = (x, x^2 + y^2, y^3)$, com uma singularidade em $p = \mathbf{0}$. Temos que sua parábola de curvatura é parametrizada por $\eta(y) = (0, 2 + 2y^2, 0)$, conforme representado na Figura 62a. Segue que $\kappa_u(p) = 0$ e $\kappa_a(p) = 2$.

Figura 62: Parábola de curvatura de M em $p = \mathbf{0}$ para as parametrizações locais f e g .



Fonte: Elaboração própria (2025).

Considere agora, M dada pela imagem de $g(x, y) = (x, x^2 + (y^3 + x)^2, (y^3 + x)^3)$, assim, f e g definem a mesma superfície. Calculando sua parábola de curvatura, temos que $\Delta_p = \{(4, 0)\}$, como na Figura 62b. Assim, $\kappa_u(p) = 4$ e $\kappa_a(p) = 0$.

Podemos analisar a importância da curvatura axial de forma análoga à que foi feita com a umbílica. Para tal, considere duas superfícies $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^3$ com singularidades de coposto 1 nos pontos $p_1 \in M_1$ e $p_2 \in M_2$, cujas parametrizações locais f e g , respectivamente, sejam $\mathcal{A}^2$ -equivalentes e que suas parábolas de curvatura sejam ou parábolas não degeneradas, ou semirretas.

Perceba que, como a curvatura axial pode ser entendida como distância, então, se existir uma isometria linear $\phi : N_{p_1}M_1 \rightarrow N_{p_2}M_2$ tal que $\phi(\Delta_{p_1}) = \Delta_{p_2}$, tem-se que $\kappa_a(p_1) = \kappa_a(p_2)$. E assim, pelo Teorema 4.32, a igualdade da curvatura axial é uma condição necessária para a $\mathcal{R}^2 \times \mathcal{O}(3)$ -equivalência de suas parametrizações locais.

Note que o mesmo vale para o caso em que as parábolas de curvaturas são pontos. Entretanto, como neste caso o valor da curvatura axial é sempre nulo, tal igualdade não agrega em nosso estudo.

Desta forma, podemos concluir que a **curvatura axial é um invariante por isometrias** e reforçar sua importância no estudo da geometria local de segunda ordem de superfícies singulares de coposto 1.

CAPÍTULO 5

Considerações finais

Neste trabalho exploramos as conexões e diferenças entre as superfícies regulares e as singulares de posto 1 no espaço euclidiano tridimensional de forma a entender e estudar a geometria de segunda ordem nas vizinhanças de tais pontos singulares. A união das ferramentas da Geometria Diferencial Clássica e da Teoria das Singularidades nos permitiu utilizar a parábola de curvatura para conectar superfícies singulares que possuísem mesmas informações geométricas provenientes da segunda forma fundamental. E assim, conseguir uma forma de olhar para esses diferentes objetos no espaço.

De um ponto de vista mais pessoal, este estudo foi muito importante para minha formação, visto que ampliou meus horizontes em relação à pesquisa em Matemática, me permitiu aprender as técnicas da Teoria das Singularidades, me ajudou a entender como funciona a busca de bibliografias e no entendimento de como estão os estudos atuais em Teoria das Singularidades aliados à Geometria Diferencial. Esta investigação, embora seja um Trabalho de Conclusão de Curso, se mostrou apenas como um ponto de partida no estudo da Teoria das Singularidades.

Outro ponto importante a ressaltar é a união de saberes de diferentes disciplinas. Para este trabalho, foi essencial a compreensão de Álgebra Linear, Estruturas Algébricas, Cálculo, Análise, Geometria Diferencial, entre outras. Assim, consigo afirmar que este estudo me preparou ainda mais para a pós-graduação em Matemática.

Referências Bibliográficas

ATIQUE, R.; SAIA, M. **Singularidades de Germes de Funções Diferenciáveis**. 2006. Notas de Aula, ICMC-USP.

BENEDINI RIUL, P. **Geometria diferencial de segunda ordem de variedades singulares em espaços euclidianos**. Tese (Doutorado em Ciências - Matemática) — Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação. Universidade de São Paulo, São Carlos - SP, Brasil, 2019.

BENEDINI RIUL, P.; DEOLINDO-SILVA, J. L.; SINHA, R. O. Axial curvatures for corank 1 singular n -manifolds in $\mathbb{R}^{n+k}$. **Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas**, v. 118, n. 7, p. 1–25, 2023.

BENEDINI RIUL, P.; SINHA, R. O. A relation between the curvature ellipse and the curvature parabola. **Advances in Geometry**, v. 19, n. 3, p. 389–399, 2019.

BRUCE, J. W.; KIRK, N.; PLESSIS, A. A. du. Complete transversals and the classification of singularities. **Nonlinearity**, IOP Publishing, v. 10, n. 1, p. 253, 1997.

DELGADO, J.; FRENSEL, K. Notas Didáticas. **Geometria diferencial I**. Niterói: Instituto de Matemática, Universidade Federal Fluminense, 2017. (Notas Didáticas). Material didático disponível em: <https://www.professores.uff.br/katiafrensel/wp-content/uploads/sites/115/delightful-downloads/2019/09/gdif.pdf>. Acesso em: 8 out. 2025.

DO CARMO, M. P. **Geometria Diferencial de curvas e superfícies**. 4. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010. (Textos Universitários).

FUKUI, T.; HASEGAWA, M. Fronts of whitney umbrella – a differential geometric approach via blowing up. **Journal of Singularities**, Journal of Singularities, v. 4, n. C, p. 35–67, 2012. Disponível em: <https://www.journalofsing.org/volume4/fukui-hasegawa.pdf>. Acesso em: 10 set. 2025.

GIBSON, C. G. **Singular Points of Smooth Mappings**. London, San Francisco: Pitman, 1979. v. 25. 239 p. (Research Notes in Mathematics, v. 25). ISBN 0-273-08410-0.

IZUMYA, S. et al. **Differential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint**. Hackensack; Singapore: World Scientific, 2016. v. 1. 384 p. (Series on Singularities and Their Applications, v. 1). ISBN 978-981-4740-55-7.

LITTLE, J. A. On singularities of submanifolds of higher dimensional euclidean spaces. **Annali di Matematica Pura ed Applicata**, Springer, v. 83, n. 1, p. 261–335, 1969. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02411172>. Acesso em 5. nov. 2025.

MARTINS, L. F.; NUÑO-BALLESTEROS, J. J. Contact properties of surfaces in $\mathbb{R}^3$ with corank 1 singularities. **Tohoku Mathematical Journal, Second Series**, Mathematical Institute, Tohoku University, v. 67, n. 1, p. 105–124, 2015. Disponível em: https://www.jstage.jst.go.jp/article/tmj/67/1/67_105/_pdf/-char/ja. Acesso em 5. jun. 2025.

MOND, D. On the classification of germs of maps from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^3$. **Proceedings of the London Mathematical Society**, Oxford University Press, v. 3, n. 2, p. 333–369, 1985.

SAJI, K.; UMEHARA, M.; YAMADA, K. The geometry of fronts. **Annals of mathematics**, JSTOR, p. 491–529, 2009.

SINHA, R. O.; SAJI, K. The axial curvature for corank 1 singular surfaces. **Tohoku Mathematical Journal**, v. 74, n. 3, p. 365–388, 2022. Disponível em: <https://projecteuclid.org/journals/tohoku-mathematical-journal/volume-74/issue-3/The-axial-curvature-for-corank-1-singular-surfaces/10.2748/tmj.20210322.full>. Acesso em 5. set. 2025.

TENENBLAT, K. **Introdução à geometria diferencial**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2008. ISBN 9788521204671.