UFSJ
Universidade Federal
de São João del-Rei

Anerrize Cintia Gonçalves

Produto Tensorial: um breve estudo teórico

São João del-Rei - MG

Outubro de 2021

Anerrize Cintia Gonçalves

Produto Tensorial: um breve estudo teórico.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenadoria do Curso de Matemática, da Universidade Federal de São João del-Rei, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Rafaela Neves Bonfim

São João del-Rei, 13 de outubro de 2021.

Banca Examinadora

Orientadora: Profª. Dra. Rafaela Neves Bonfim

Profª. Dra. Gheyza Ferreira da Silva

Prof. Dr. Wilman Rodas Huarcaya

Agradecimentos

Inicialmente agradeço a Deus que por vezes apoiei na minha fé para que não desistisse do curso e por sempre me guiar em todas as circunstâncias e momentos da vida até aqui. A minha família, em especial minha avó Maria das Graças que sempre me inspirou com sua simplicidade e por ter sido tão necessária na minha vida pessoal e acadêmica. A minha mãe Izabel por ter me ensinado sobre os valores éticos e morais da vida, as minhas tias e primos, em especial a Inglad por ser tão presente na minha vida. Ficam aqui meus agradecimentos.

As minhas amigas de Cristais, especialmente Eniany e Paula. As amizades que tive a oportunidade de fazer em São João del-Rei, as meninas da "República 4x4", Yasmin, Kellen, Anna, e as minhas amigas de faculdade, Maíra, Tainara e Simone que serão sempre lembradas com muito carinho. Ao meu namorado Tomás fica aqui registrado meus agradecimentos.

Aos meus professores minha eterna gratidão. Destaco aqui alguns deles que foram essenciais durante minha vida acadêmica: Viviane C. A. de Oliveira, Romélia, Flávia, Carlos e, claro, a minha orientadora Rafaela que desempenhou com maestria sua orientação, seu empenho e dedicação quanto ao trabalho e toda paciência que teve comigo em todos os momentos. Serei eternamente grata a você "Rafa". Aproveito para agradecer a Gheyza e Wilman por terem aceitado o convite de compor a banca examinadora. De um modo geral todos os professores aqui citados são minha fonte de inspiração quanto a profissão.

" Que nada nos defina, que nada nos sujeite. Que a liberdade seja a nossa própria substância, já que viver é ser livre. "

— SIMONE DE BEAUVOIR

Resumo

No presente trabalho estudaremos o Produto Tensorial entre espaços vetoriais. O assunto será abordado em três capítulos. No primeiro deles estudaremos alguns conceitos básicos de Álgebra Linear que serão necessários no estudo do tema central do trabalho. Em seguida abordaremos alguns resultados dentro de Álgebra Bilinear que serão essenciais na fundamentação dos conceitos que vão ser apresentados no último capítulo. No terceiro capítulo estudaremos de fato o Produto Tensorial entre espaços vetoriais. Inicialmente veremos sua definição, exemplos abstratos, suas propriedades e por fim estudaremos alguns resultados importantes.

Palavras-chave: espaços vetoriais, transformações lineares, dimensão de espaços vetoriais, aplicações bilineares, produtos tensoriais, tensores de segunda ordem, isomorfismos.

Sumário

Introdução

Ao longo do desenvolvimento histórico da matemática, por volta do século XIX se deu as primeiras concepções sobre Análise Tensorial, sendo introduzidas pelo matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Finalmente, em 1890 o cálculo tensorial começou a se desenvolver em definitivo com base nos trabalhos de Woldemar Voigt e dos matemáticos Elwin Bruno Christoffel (1829-1900), Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) e Tullio Levi-Civita (1873-1941). O termo *tensor* dentro do contexto da Análise Tensorial, foi introduzido em 1898 pelo físico Woldemar Voigt (1850-1919). Já o conceito de Produto Tensorial entre espaços vetoriais se desenvolveu posteriormente, por volta da década de 1930 e foi introduzido através de um trabalho dos matemáticos Francis Joseph Murray e Jonh von Neumann ([10]).

Existem muitas aplicações práticas envolvento o cálculo tensorial. Essa teoria está presente, por exemplo, no estudo da Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein ([3]), na Mecânica Quântica ([1]) e na Geometria Diferencial ([8]). O presente trabalho têm como objetivo fazer um estudo teórico do Produto Tensorial entre espaços vetoriais. Não apresentaremos aqui qualquer aplicação relacionada ao Produto Tensorial.

O trabalho prossegue da seguinte forma. No capítulo 1 apresentaremos de maneira sucinta alguns conceitos básicos de Álgebra Linear. No capítulo 2 estudaremos alguns resultados dentro de Álgebra Bilinear que serão apresentados deste modo: inicialmente caracterizaremos as aplicações bilineares, bem como, suas propriedades e por fim veremos alguns resultados importantes. Os resultados estudados no capítulo 1 e 2 são na verdade pré-requisitos para o estudo do tema central do nosso trabalho que é o Produto Tensorial entre espaços vetoriais. Esse estudo será feito no capítulo 3. Primeiramente será apresentada a definição de Produto Tensorial entre espaços vetoriais e em seguida faremos à construção de alguns exemplos teóricos. Finalizaremos o trabalho com o estudo de vários isomorfismos importantes.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo estudamos alguns conceitos básicos de Álgebra Linear que são fundamentais para o estudo dos principais resultados do trabalho. Faremos isso de maneira sucinta, pois a maioria dos conceitos citados aqui são facilmente encontrados em diversas bibliografias, inclusive em algumas que foram usadas no trabalho. Inicialmente vamos tratar de algumas definições como: espaço vetorial, transformação linear, base de um espaço vetorial, núcleo e imagem de uma transformação linear. Em seguida estudamos alguns resultados como o Teorema do Núcleo e da Imagem e alguns isomorfismos entre espaços vetoriais. Finalizamos o capítulo com um breve estudo sobre o espaço dual de um espaço vetorial.

1.1 Espaço vetorial e transformações lineares

No início desta seção iremos apresentar brevemente uma série de definições e vamos estudar alguns resultados que nos serão necessários nos próximos capítulos.

Definição 1.1.1. Um *espaço vetorial real* é um conjunto V, não vazio, com duas operações: soma $+ : V \times V \to V$, e multiplicação por escalar $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$, tais que, para quaisquer $u, v, w \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, as propriedades são satisfeitas:

(i) $(u + v) + w = u + (v + w)$;

(ii) $u + v = v + u$;

(iii) Existe $0 \in V$ tal que $u + 0 = u$. (onde 0 é o vetor nulo);

(iv) Existe $(-u) \in V$ tal que $u + (-u) = 0$.

(i) $\alpha\beta(u) = \alpha(\beta u)$;

(ii) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$;

(iii) $1u = u$;

(iv) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.

Definição 1.1.2. Sejam V um espaço vetorial real, $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ e $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ números reais. Então, o vetor

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$$

é um elemento de V que é chamado de *combinação linear* de $v_1, v_2, ..., v_n$.

Definição 1.1.3. Um conjunto de vetores $\mathcal{S} = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$ gera o espaço vetorial V, quando todo elemento $v \in V$ pode ser escrito como combinação linear dos elementos de $\mathcal{S}$.

Definição 1.1.4. Sejam V um espaço vetorial e $v_1, ..., v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, ..., v_n\}$ é *linearmente independente* (ou que os vetores $v_1, ..., v_n$ são linearmente independente) se a equação

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0$$

implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Se existe algum $\alpha_i \neq 0$ dizemos que o conjunto $\{v_1, ..., v_n\}$ é *linearmente dependente* (ou que os vetores $v_1, ..., v_n$ são linearemente dependente).

Algumas vezes, para simplificar, vamos usar LI para nos referir a um conjunto de vetores linearmente independente.

Definição 1.1.5. Um conjunto $\mathcal{S} = \{v_1, ..., v_n\}$ de vetores de V será uma *base* de V se:

(i) $\mathcal{S}$ é linearmente independente;

(ii) $\mathcal{S}$ gera V.

Um espaço vetorial V pode admitir mais de uma base porém, prova-se que qualquer base deste espaço vai ter sempre o mesmo número de elementos. Isso nos leva à seguinte definição.

Definição 1.1.6. Seja V um espaço vetorial, tal que uma base de V possui n vetores. Então dizemos que *dimensão* de V é igual a n e escrevemos $dimV = n$.

Quando a base $\mathcal{S}$ de um espaço vetorial V possui uma quantidade finita de vetores, dizemos que este espaço é de *dimensão finita*. Neste trabalho iremos sempre considerar que os espaços vetoriais tem dimensão finita.

Em relação a denotação do conjunto de todas as transformações lineares de V em W, iremos indicar por $\mathcal{L}(V, W)$. Quando $W = \mathbb{R}$ usaremos apenas $\mathcal{L}(V)$.

O próximo resultado nos conta que o espaço vetorial das aplicações lineares de V em W é um espaço vetorial de dimensão finita.

Teorema 1.1.1. *Seja V um espaço vetorial dimensão n e W um espaço vetorial de dimensão m. Então o espaço vetorial $\mathcal{L}(V, W)$ das aplicações lineares de V em W tem dimensão igual a mn.*

Demonstração: Vide páginas 74 e 75 da bibliografia [6].

Definição 1.1.7. Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma *transformação linear* (ou aplicação linear) é uma função de V em W, $T : V \to W$, que satisfaz as seguintes condições:

(i) Quaisquer que sejam v e $v' \in V$,

$$T(v + v') = T(v) + T(v').$$

(ii) Quaisquer que sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in V$,

$$T(\alpha v) = \alpha T(v).$$

Se na definição acima $W = \mathbb{R}$ a transformação linear $T : V \to \mathbb{R}$ recebe um nome especial, ela é chamada de *funcional linear*.

Definição 1.1.8. Sejam V um espaço vetorial e $\mathcal{S}$ um subconjunto não-vazio de V. O subconjunto $\mathcal{S}$ é um *subespaço vetorial* de V se $\mathcal{S}$ é um espaço vetorial em relação à adição e à multiplicação por escalar definidas em V.

A próxima definição relaciona a soma de subespaços vetoriais.

Definição 1.1.9. Sejam U e V dois subespaços de um espaço vetorial Z. Dizemos que Z é a *soma direta* de U e V e escrevemos $Z = U \oplus V$ quando

1) todo vetor $z \in Z$ se exprime como soma de um vetor $u \in U$ com um vetor $v \in V$, isto é $z = u + v$;

2) esta maneira de exprimir z é única, isto é, se $z = u + v = u' + v'$, com $u, u' \in U$ e $v, v' \in V$ então $u = u'$ e $v = v'$.

Esta segunda condição, em presença de 1), equivale a dizer que

2') $U \cap V = \{0\}$.

A toda transformação linear $T : V \to W$ estão associados dois subespaços vetoriais importantes do domínio V e do contradomínio W: o núcleo e a imagem da transformação linear T, respectivamente.

Definição 1.1.10. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. O conjunto de todos os vetores $v \in V$ tais que $T(v) = 0$, onde 0 é vetor nulo de W, é chamado de *núcleo* de T e é denotado por $Ker(T)$.

Em termos de conjuntos temos que

$$Ker(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}$$

O próximo resultado nos mostra como podemos caracterizar uma aplicação linear injetora a partir do núcleo da transformação linear.

Teorema 1.1.2. *Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear. Então $Ker(T) = 0$ se, e somente se, T é injetora.*

Demonstração: Vide página 154, da bibliografia [2].□

Definição 1.1.11. Como sabemos, a *imagem* de uma transformação linear $T : V \to W$ que é denotada por $Im(T)$, é o conjunto:

$$Im(T) = \{w \in W : T(v) = w \text{ para algum } v \in V\}.$$

Claramente a $Im(T) \subseteq W$. Quando a $Im(T) = W$ dizemos que a transformação linear T é *sobrejetora*, isto é, para todo $w \in W$ existe pelo menos um $v \in V$ tal que $T(v) = w$.

Proposição 1.1.1. *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear, então $T(0) = 0$.*

Demostração: Por *ii)* da Definição 1.1.7 temos que, para $\alpha = 0$

$$T(0) = T(0 \cdot v) = 0T(v) = 0$$

Portanto $T(0) = 0$ $\square$

A seguir enunciaremos o famoso Teorema do Núcleo e da Imagem que relaciona a dimensão do domínio de uma transformação linear com as dimensões do núcleo e da imagem desta transformação.

Teorema 1.1.3. *(Teorema do Núcleo e da Imagem) Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear. Então $dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) = dimV$.*

Demonstração: Seja $v_1, ..., v_n$ uma base de $Ker(T)$. Como $Ker(T) \subset V$ é subespaço de V, podemos completar este conjunto de modo a obter uma base de V. Seja $\{v_1, ..., v_n, ..., w_1, ..., w_m\}$ a base de V. Vamos mostrar que $T(w_1), ..., T(w_m)$ é uma base de $Im(T)$. Vamos mostrar que o conjunto $\{T(w_1), ..., T(w_m)\}$ gera $Im(T)$. Dado $w \in Im(T)$, existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$. Se $v \in V$, então existem escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n$ e $\beta_1, ...\beta_m$ tal que $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n + \beta_1 w_1 + ... + \beta_m w_m$. Mas,

$$\begin{aligned} w &= T(v) = T(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n + \beta_1 w_1 + ... + \beta_m w_m) \\ &= \alpha_1 T(v_1) + ... + \alpha_n T(v_n) + \beta_1 T(w_1) + ... + \beta_m T(w_m) \end{aligned}$$

Como os vetores $v_1, ..., v_n \in Ker(T)$, $T(v_i) = 0$ para $i = 1, ..., n$. Assim,

$$w = \beta_1 T(w_1) + ... + \beta_m T(w_m),$$

e a imagem de T é gerada pelos vetores $T(w_1), ..., T(w_m)$. Agora vamos mostrar que o conjunto $\{T(w_1), ..., T(w_m)\}$ é linearmente independente. Considere a combinação linear $\alpha_1 T(w_1) + \alpha_2 T(w_2) + ... + \alpha_m T(w_m) = 0$ vamos verificar que os escalares α_i são nulos. Como T é linear, $T(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + ... + \alpha_m w_m) = 0$. Logo $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + ... + \alpha_m w_m \in Ker(T)$, então $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + ... + \alpha_m w_m$ pode ser escrito como combinação linear da base $\{v_1, ..., v_n\}$ de $Ker(T)$, isto é, existem escalares $\beta_1, ..., \beta_n$ tais que

$$\begin{aligned} \alpha_1 w_1 + ... + \alpha_m w_m &= \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n, \text{ ou ainda,} \\ &= \alpha_1 w_1 + ... + \alpha_m w_m - \beta_1 v_1 - ... - \beta_n v_n = 0. \end{aligned}$$

Mas $\{v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_m\}$ é uma base de V, e temos então

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = \beta_1 = ... = \beta_n = 0.$$

Portanto o conjunto $\{T(w_1), ..., T(w_m)\}$ é linearmente independente. Logo a $dim(Ker(T)) = 0$, $dim(Im(T)) = m$ e a $dimV = m$, então

$$dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) = dimV.$$

Como queríamos demonstrar. □

Usando o Teorema acima, vamos provar a proposição a seguir que será muito útil para demonstrarmos os resultados centrais do trabalho.

Proposição 1.1.2. *Sejam V e W espaços vetoriais de mesma dimensão e seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) T é sobrejetora:

(ii) T é bijetora;

(iii) T é injetora;

(iv) T transforma base de V em base de W.

Demonstração: Vamos mostrar primeiramente que *(i)* implica *(ii)*. Para isso basta provar que T é injetora. Como por hipótese T é sobrejetora, temos que $Im(T) = W$ e logo $dim(Im(T)) = dim(W)$. Assim, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que

$$dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) = dim(W)$$

ou seja,

$$dim(Ker(T)) + dim(W) = dim(W).$$

Logo $dim(Ker(T)) = 0$. Assim, como a $dim(Ker(T)) = 0$ temos que $Ker(T) = \{0\}$. Logo pelo Teorema 1.1.2 temos que T injetora.

É óbvio que *(ii)* implica *(iii)*, provemos então que *(iii)* implica *(*iv). Seja $\mathcal{S} = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base para V. Vejamos que $\mathcal{S}' = \{T(v_1), ..., T(v_n)\}$ forma uma base para W. Para isso, como por hipótese $dim(V) = dim(W)$ e os conjuntos $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ tem o mesmo número de elementos, basta verificarmos que o conjunto $\mathcal{S}'$ é linearmente independente. Considere a combinação linear nula dos elementos de $\mathcal{S}'$:

$$\alpha_1 T(v_1) + ... + \alpha_n T(v_n) = 0.$$

Como T é uma transformação linear, temos do conjunto $\mathcal{S}'$:

$$T(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) = 0,$$

e logo, $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$ pertence ao núcleo de T. Mas, por *(iii)* temos que T é injetora e logo $Ker(T) = \{0\}$. Se $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0$, mas $\{v_1, ..., v_n\}$ é linearmente independente, então $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Portanto $\mathcal{S}'$ é linearmente independente. Concluímos que $\mathcal{S}'$ forma uma base para W.

Por fim, falta provar que *(iv)* implica *(i)*. Seja $w \in W$. Por *(iv)* temos que se $\mathcal{S} = \{v_1, ..., v_n\}$ é base de V, então $\mathcal{S}' = \{T(v_1), ..., T(v_n)\}$ é base de W . Assim, o elemento w pode ser escrito como combinação linear dos elementos de $\mathcal{S}'$, ou seja, existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, tais que

$$w = \alpha_1 T(v_1) + ... + \alpha_n T(v_n).$$

Mas como T é transformação linear, temos que

$$w = T(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n).$$

Logo $w = T(v)$, onde $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n \in V$. Concluímos então que T é sobrejetora. $\square$

1.2 Espaço dual

Nesta seção vamos estudar alguns resultados importantes sobre o conjunto dos funcionais lineares sobre o espaço vetorial V. Denotaremos tal conjunto por V^*.

É fácil verificar que se $f, g \in V^*$ e α é um escalar, então $f + g \in V^*$, $\alpha f \in V^*$, onde a operação de soma e multiplicação por escalar são definidas da seguinte maneira:

(i) $(f + g)(u) = f(u) + g(u)$, para toda f e $g \in V^*$

(ii) $(\alpha f)(u) = \alpha f(u)$, para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in V^*$.

Com estas operações, V^* constitui um espaço vetorial denominado *espaço dual* de V.

Seja $\mathcal{S} = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base do espaço vetorial V. Um funcional linear $f \in V^*$ fica determinado quando conhecemos o valor deste funcional nos elementos da base de V, ou seja, quando sabemos os n números:

$$f(v_1) = \alpha_1, ..., f(v_n) = \alpha_n.$$

De fato, dado $v \in V$ como $\mathcal{S}$ é uma base de V, existem escalares $\beta_1, ..., \beta_n$ tais que se $v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$. Então

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i$$

Por outro lado, uma n-upla arbitrária de números $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ também determina um funcional linear f, definido por

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i,$$

onde os β_i são as coordenadas do vetor v na base S.

A cada base $\mathcal{S} = \{v_1, ..., v_n\}$ do espaço vetorial V corresponde uma base $\mathcal{S}^* = \{f_1, ..., f_n\}$ do espaço vetorial V^*, chamada de *base dual* de V.

Os funcionais lineares da base $\mathcal{S}^*$ são definidos da seguinte maneira: se $v \in V$ é tal que $v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$ então

$$f_i(v) = f_i\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i\right) = \beta_i, \text{ para } i = 1, ..., n,$$

isto é, f_i é o funcional linear que ao vetor v associa sua i-ésima coordenada na base $\mathcal{S}$.

Vamos verificar que $\mathcal{S}^*$ é de fato uma base. Considere a combinação linear nula $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$. Então

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right)(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(v) = 0$$

qualquer que seja o vetor $v \in V$. Assim, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(v_j) = 0$ onde v_j é um elemento da base $\mathcal{S}$. Mas $v_j = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + ... + 1 \cdot v_j + ... + 0 \cdot v_n$ e logo, como

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \ , \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

temos que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_i f_i(v_j) = \lambda_j = 0$, para cada $j \in \{1, ..., n\}$. Concluímos então que conjunto $\{f_1, ..., f_n\}$ é linearmente independente.

Considere agora um funcional linear $g \in V^*$ e $v \in V$. Assim, temos que $v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$, para escalares $\beta_1, ..., \beta_n$. Vamos mostrar que $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$, onde $\alpha_i = g(v_i)$, para $i = 1, ..., n$. De fato, dado $v \in V$ temos que:

$$g(v) = g\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i g(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i.$$

Mas, pela definição dos funcionais lineares f_i, temos que $\beta_i = f_i(v)$. Logo

$$g(v) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} f_i(v) \alpha_i = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\right)(v),$$

ou seja, $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$. Provamos então que o conjunto $\mathcal{S}^* = \{f_1, ..., f_n\}$ é LI e gera, logo $\mathcal{S}^*$ é base.

Note que $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}^*$ tem o mesmo número de elementos, portanto a $dim(V) = dim(V^*)$.

Definição 1.2.1. Quando uma transformação linear $T : V \to W$ for bijetora dizemos que T é um *isomorfismo*. Neste caso temos que os espaços V e W são *isomorfos*.

Sob o ponto de vista de Álgebra Linear, espaços vetoriais isomorfos são idênticos.

O próximo resultado nos mostra a relação entre a dimensão do espaço vetorial V e do seu dual V^*.

Teorema 1.2.1. *Se V é um espaço vetorial de dimensão finita então V e V^* são isomorfos.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{S} = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base para V e $\mathcal{S}^* = \{f_1, ..., f_n\}$ uma base para V^*. Considere a aplicação $T : V \to V^*$ que ao vetor $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ associa o funcional

$T(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$. Vejamos que T é linear. Sejam $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ e $v' = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i \in V$, temos que

$$\begin{aligned} T(v+v') &= T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i\right) = T\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) f_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i \\ &= T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) + T\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i\right) = T(v) + T(v'). \end{aligned}$$

Agora se λ é um escalar, então

$$\begin{aligned} T(\lambda v) &= T\left(\lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda \alpha_i f_i \\ &= \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\right) = \lambda T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \lambda T(v). \end{aligned}$$

Portanto T é linear. Como $dim(V) = dim(V^*)$ usando a Proposição 1.1.2 temos que, para mostrar que T é isomorfismo é suficiente verificar que T é injetora. Considere então $v \in Ker(T)$. Logo $T(v) = 0$. Então,

$$0 = T(v) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i.$$

Como os elementos $f_i \in \mathcal{S}^*$ e $\mathcal{S}^*$ é base, temos que o conjunto $\{f_1, ..., f_n\}$ é LI e logo $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Segue portanto que $v = 0$. Concluímos então que T é injetora. $\square$.

Como vimos V^* é um espaço vetorial e logo podemos calcular o dual de V^*. O espaço vetorial assim obtido é chamado de *bidual* de V e é denotado por V^{**}. Como a $dim(V) = dim(V^*)$ segue também que $dim((V^*)^*) = dim(V^{**})$.

Teorema 1.2.2. *Existe um isomorfismo T entre V e V^{**}.*

Demonstração: Considere a aplicação

$$\begin{array}{rcccl} T & : & V & \rightarrow & (V^*)^* \\ & & v & \mapsto & T(v) \end{array}$$

onde $T(v) : V^* \to \mathbb{R}$ é definida por $T(v)(\phi) = \phi(v)$. Vejamos que T está bem definida. Para isso vamos provar que $T(v)$ é linear. Dadas $\phi, \tilde{\phi} \in V^*$, temos que

$$T(v)(\phi + \tilde{\phi}) \quad = (\phi + \tilde{\phi})(v) = \phi(v) + \tilde{\phi}(v) = T(v)(\phi) + T(v)(\tilde{\phi})$$

Agora dado λ um escalar temos que

$$T(v)(\lambda\phi) = (\lambda\phi)(v) = \lambda(\phi)(v) = \lambda T(v)$$

Logo $T(v)$ é linear e portanto T está bem definida. Agora vamos verificar que T é linear. Dados $v, v' \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, devemos provar que $T(v + v') = T(v) + T(v')$ e $T(\lambda v) = \lambda T(v)$, ou seja, $T(v + v')(\phi) = T(v)(\phi) + T(v')(\phi)$ e $T(\lambda v)(\phi) = \lambda T(v)(\phi)$, para toda $\phi \in V^*$. De fato,

$$T(v + v')(\phi) = \phi(v + v') = \phi(v) + \phi(v') = T(v)(\phi) + T(v')(\phi) = (T(v) + T(v'))\,(\phi)$$

$$T(\lambda v)(\phi) = (\phi)(\lambda v) = (\lambda\phi)(v) = \lambda(\phi)(v) = \lambda T(v)(\phi) = (\lambda T(v))\,(\phi).$$

Logo T é linear. Como a $dim(V) = dim(V^{**})$ segue da Proposição 1.1.2 que é suficiente provar que T é injetora. Seja $v \in Ker(T)$. Então $T(v) = 0$, ou seja, $T(v)(\phi) = 0$, para toda $\phi \in V^*$. Assim, se $\mathcal{S} = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base de V e $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in V$ temos que

$$0 = T(v)(\phi) = \phi(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi(v_i),$$

para toda $\phi \in V^*$. Considerando $\mathcal{S}^* = \{f_1, ..., f_n\}$ a base dual e tomando sucessivamente $\phi = f_1,\ \phi = f_2, ...,\ \phi = f_n$, segue que $0 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_j(v_i) = \alpha_j$, $j = 1, ..., n$. Deste modo temos que os $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ e logo concluímos então que $v = 0$. Portanto v é o vetor nulo, como queríamos demonstrar. $\square$

Capítulo 2

Álgebra Bilinear

Estudaremos neste capítulo alguns resultados fundamentais dentro da Álgebra Bilinear, mais especificamente estudaremos as aplicações bilineares. Primeiramente apresentaremos a definição de uma aplicação bilinear, uma vez que tais aplicações são essenciais no estudo de Produto Tensorial entre espaços vetoriais. Depois estudaremos dois resultados essenciais para o desenvolvimento do trabalho. O primeiro deles nos fornece uma base para o espaço vetorial das aplicações bilineares e o segundo mostra que existe um isomorfismo entre o espaço das aplicações bilineares e o espaço $\mathcal{L}(U, \mathcal{L}(V, W))$, conforme notação definida no Capítulo 1.

2.1 Aplicações Bilineares

Definição 2.1.1. Sejam U, V e W espaços vetoriais. Dizemos que uma aplicação $\phi : U \times V \to W$ do produto cartesiano de U por V em W, é uma *aplicação bilinear* quando satisfaz as seguintes condições:

(C1) $\phi(u + u', v) = \phi(u, v) + \phi(u', v)$

(C2) $\phi(u, v + v') = \phi(u, v) + \phi(u, v')$

(C3) $\phi(\lambda u, v) = \phi(u, \lambda v) = \lambda\phi(u, v)$

quaisquer que sejam $u, u' \in U, v, v' \in V$ e λ escalar.

Observe que a definição anterior diz que uma aplicação é bilinear quando ela é linear em cada entrada.

Definição 2.1.2. Uma aplicação bilinear $\phi : U \times V \to \mathbb{R}$, do par U, V no espaço vetorial $\mathbb{R}$ dos números reais é chamada de *funcional bilinear*, ou uma *forma bilinear*.

Vejamos a seguir um exemplo simples de funcional bilinear.

Exemplo 2.1.1. *A multiplicação de números reais* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, tal que* $f(x, y) = xy$ *é bilinear. De fato, dados* x, x', y *e* $y' \in \mathbb{R}$*, temos que*

(i) $f(x + x', y) = (x + x')y = xy + x'y = f(x, y) + f(x', y)$.

(ii) $f(x, y + y') = x(y + y') = xy + xy' = f(x, y) + f(x, y')$.

(iii) Seja λ *um escalar, então* $f(\lambda x, y) = (\lambda x)y = \lambda(xy) = \lambda f(x, y)$

Por outro lado, temos $f(x, \lambda y) = x(\lambda y) = \lambda(xy) = \lambda f(x, y)$.

Logo f *é bilinear.*

Fixemos agora algumas notações sobre os conjuntos formados pelas aplicações bilineares. Indicaremos com $\mathcal{L}(U, V; W)$ o conjunto das aplicações bilineares $\phi : U \times V \to W$ do par U, V no espaço vetorial W. Em $\mathcal{L}(U, V; W)$ defina as operações de soma e multiplicação por escalar como segue:

(i) $(\phi + \gamma)(u, v) = \phi(u, v) + \gamma(u, v), \phi, \gamma \in \mathcal{L}(U, V; W)$.

(ii) $(\lambda\phi)(u, v) = \lambda\phi(u, v), \lambda \in \mathbb{R}$, para todo $u \in U$ e $v \in V$.

É fácil verificar que $\mathcal{L}(U, V; W)$ munido destas operações constituem um espaço vetorial. Quando o espaço vetorial $W = \mathbb{R}$, definimos como $\mathcal{B}(U, V)$, em vez de $\mathcal{L}(U, V; \mathbb{R})$, para indicar o espaço das formas bilineares sobre o par U, V. E, quando o espaço vetorial $U= V$, definimos como $\mathcal{B}(U)$, em vez de $\mathcal{B}(U, U)$ para indicar o espaço das formas bilineares sobre U.

Proposição 2.1.1. *Sejam* U*,* V *e* W *espaços vetoriais,* $\mathcal{E} = \{u_1, ..., u_m\}$ *uma base de* U *e* $\mathcal{S} = \{v_1, ..., v_n\}$ *uma base de* V*. Dada arbitrariamente uma mn-upla de vetores* $w_{ij} \in W$*,* $i = 1, ..., m; j = 1, ..., n$*, existe uma única aplicação bilinear* $\phi : U \times V \to W$ *tal que* $\phi(u_i, v_j) = w_{ij}$*, para todo* $u_i \in \mathcal{E}$ *e todo* $v_j \in \mathcal{S}$*.*

Demonstração: Vamos primeiramente verificar que aplicação ϕ é única. Seja

$$g : U \times V \to W$$

uma aplicação bilinear que satisfaça $g(u_i, v_j) = w_{ij}$.

Dados $u \in U$ e $v \in V$, existem escalares $\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ..., \beta_n$, tais que

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_m u_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i$$
$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_n v_n = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j$$

Assim,

$$\begin{aligned} g(u,v) &= g\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j\right) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j g(u_i, v_j) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j w_{ij} \\ &= \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \phi(u_i, v_j) = \phi\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j\right) = \phi(u,v) \end{aligned}$$

Isso prova que $g = \phi$, e logo temos que existe uma única aplicação bilinear de $\phi : U \times V \to W$ tal que $\phi(u_i, v_j) = w_{ij}$. Note que ϕ está bem definida pois como $\mathcal{E}$ é base, os escalares α_m são únicos e por motivo análogo, os β_n também são únicos.

Provemos agora que ϕ é bilinear. Para isso, considere $u \in U$ e $v \in V$ como anteriormente e tome $u' \in U$ e $v' \in V$. Assim, existem escalares $\lambda_1, ..., \lambda_m, \zeta_1, ..., \zeta_n$, tais que

$$u' = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_m u_m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i$$
$$v' = \zeta_1 v_1 + \zeta_2 v_2 + ... + \zeta_n v_n = \sum_{j=1}^{n} \zeta_j v_j.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \phi(u+u', v) &= \phi\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j\right) = \phi\left(\sum_{i=1}^{m} (\alpha_i + \lambda_i) u_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\alpha_i + \lambda_i) \beta_j w_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\alpha_i \beta_j w_{ij} + \lambda_i \beta_j w_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j w_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \beta_j w_{ij} = \phi(u,v) + \phi(u', v) \end{aligned}$$

Analogamente se prova que $\phi(u, v+v') = \phi(u,v) + \phi(u, v')$.

Seja λ escalar. Então:

$$\begin{aligned}\phi(\lambda u, v) &= \phi\left(\lambda\sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_i, \sum_{j=1}^{n}\beta_j v_j\right) = \phi\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda\alpha_i u_i, \sum_{j=1}^{n}\beta_j v_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\lambda\alpha_i)\beta_j w_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i(\lambda\beta_j)w_{ij} = \phi(u, \lambda v)\end{aligned}$$

Analogamente se prova que $\phi(\lambda u, v) = \lambda\phi(u, v)$.

Portanto, ϕ é bilinear. $\square$

O próximo resultado exibe uma base para o espaço vetorial $\mathcal{L}(U, V; W)$ das aplicações bilineares do par U, V em W.

Proposição 2.1.2. *Sejam U, V espaços vetoriais e $\mathcal{E}$, $\mathcal{S}$ bases de U e V, como na Proposição 2.1.1. Seja ainda $\mathcal{G} = \{g_1, ..., g_p\}$ uma base do espaço vetorial W. Então:*

(i) Para cada i, j, k, com $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ e $1 \leq k \leq p$, existe uma única aplicação bilinear $\mathcal{E}_k^{ij} : U \times V \to W$ tal que $\mathcal{E}_k^{ij}(u_i, v_j) = g_k$ e $\mathcal{E}_k^{ij}(u_r, v_s) = 0$ se $r \neq i$ ou $s \neq j$;

(ii) O conjunto das aplicações bilineares $\mathcal{E}_k^{ij}$ geram o espaço vetorial $\mathcal{L}(U, V; W)$;

(iii) As aplicações $\mathcal{E}_k^{ij}$ constituem uma base do espaço vetorial $\mathcal{L}(U, V; W)$. Logo

$$dim\mathcal{L}(U, V; W) = mnp.$$

Demonstração:

(i) Sejam $1 \leq i_0 \leq m$, $1 \leq j_0 \leq n$ e $1 \leq k_0 \leq p$. Tome $i = i_0$ e $j = j_0$ e defina a mn-upla de vetores em W por

$$w_{ij} = \begin{cases} g_{k_0}, \text{ se } i = i_0 \text{ e } j = j_0 \\ 0, \text{ se } i \neq i_0 \text{ ou } j \neq j_0 \end{cases}$$

Pela Proposição 2.1.1, existe uma única aplicação bilinear $\mathcal{E}_{k_0}^{i_0 j_0} : U \times V \to W$ tal que $\mathcal{E}_{k_0}^{i_0 j_0}(u_i, v_j) = w_{ij}$. Assim, se $i = i_0$ e $j = j_0$, temos que $\mathcal{E}_{k_0}^{i_0 j_0}(u_i, v_j) = w_{ij}$, ou seja, $\mathcal{E}_{k_0}^{i_0 j_0}(u_{i_0}, v_{j_0}) = w_{i_0 j_0} = g_{k_0}$. E se $r \neq i_0$ ou $s \neq j_0$, $\mathcal{E}_k^{ij}(u_r, v_s) = w_{rs} = 0$.

(ii) Mostremos que as aplicações $\mathcal{E}_k^{ij}$ geram $\mathcal{L}(U,V;W)$. Para isso, dada $\phi \in \mathcal{L}(U,V;W)$ basta verificar que ϕ se escreve como combinação linear das aplicações $\mathcal{E}_k^{ij}$. Assim se $\phi \in \mathcal{L}(U,V;W)$, dados i e j, tais que $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ e $\mathcal{G} = \{g_1, ..., g_p\}$ base de W, existem escalares λ_{ij}^k, de modo que

$$\phi(u_i, v_j) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_{ij}^k g_k. \tag{2.1.1}$$

Vamos mostrar que $\phi = \sum_{i,j,k} \lambda_{ij}^k \mathcal{E}_k^{ij}$.

Para isto, basta mostrar que para cada $u_r \in \mathcal{E}$ e cada $v_s \in \mathcal{S}$ tanto ϕ quanto $\mathcal{E}_k^{ij}$ aplicadas no par (u_r, v_s), admitirão os mesmos valores. Sabemos de (2.1.1) que

$$\phi(u_r, v_s) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_{rs}^k g_k, \text{ onde } 1 \leq r \leq m \text{ e } 1 \leq s \leq n.$$

Por outro lado, como

$$\mathcal{E}_k^{ij}(u_r, v_s) = \begin{cases} g_k, \text{ se } i = r \text{ e } j = s \\ 0, \text{ se } i \neq r \text{ ou } j \neq s \end{cases}$$

temos,

$$\sum_{i,j,k} \lambda_{ij}^k \mathcal{E}_k^{ij}(u_r, v_s) = \sum_{k} \lambda_{rs}^k \mathcal{E}_k^{rs}(u_r, v_s) = \sum_{k} \lambda_{rs}^k g_k.$$

Portanto concluímos que $\phi = \sum_{i,j,k} \lambda_{ij}^k \mathcal{E}_k^{ij}$. Logo, o conjunto das aplicações bilineares $\mathcal{E}_k^{ij}$ geram o espaço vetorial $\mathcal{L}(U,V;W)$.

(iii) Considere os escalares λ_{ij}^k tais que $\sum_{i,j,k} \lambda_{ij}^k \mathcal{E}_k^{ij} = 0$. Então,

$$0 = \left(\sum_{i,j,k} \lambda_{ij}^k \mathcal{E}_k^{ij} \right) (u_r, v_s) = \sum_{i,j,k} \lambda_{ij}^k \mathcal{E}_k^{ij}(u_r, v_s) = \sum_{k} \lambda_{ij}^k g_k, \text{ com } (u_r, v_s) \in U \times V,$$

para quaisquer r, s tais que $1 \leq r \leq m$ e $1 \leq s \leq n$.

Como os g_k são linearmente independentes, temos que $\lambda_{ij}^k = 0$ para quaisquer i, j e k o que nos garante a independência das aplicações $\mathcal{E}_k^{ij}$. $\square$

Mostraremos a seguir que uma aplicação bilinear depende linearmente de um parâmetro fixo.

Proposição 2.1.3. *Seja $\phi : U \times V \to W$ uma aplicação bilinear. Para cada $u \in U$ fixo, a aplicação linear $T_u : V \to W$, dada por $T_u(v) = \phi(u, v)$ é linear, ou seja, um elemento de $\mathcal{L}(V, W)$, o qual depende linearmente do parâmetro $u \in U$.*

Demonstração: Temos que

$$\begin{array}{rccl} T_u & : & V & \to & W \\ & & v & \mapsto & T_u(v) = \phi(u, v) \end{array}$$

Mostremos que T_u é linear. Sejam v_1 e $v_2 \in V$, então:

$$T_u(v_1 + v_2) = \phi(u, v_1 + v_2) = \phi(u, v_1) + \phi(u, v_2) = T_u(v_1) + T_u(v_2)$$

$$T_u(\lambda v) = \phi(u, \lambda v) = \lambda\phi(u, v) = \lambda T_u(v)$$

Portanto, T_u é linear. $\square$

Antes de prosseguirmos para o próximo resultado fixemos a seguinte notação: o espaço $\mathcal{L}(V, W)$, denotará o conjunto de todas as transformações lineares de V em W que, de modo geral, constitui um espaço vetorial.

Proposição 2.1.4. *Sejam U, V, W espaços vetoriais. Considere*

$$K : \mathcal{L}(U, V; W) \to \mathcal{L}(U, \mathcal{L}(V, W))$$

a aplicação que associa a cada elemento $\phi \in \mathcal{L}(U, V; W)$ o elemento $T = K(\phi) \in \mathcal{L}(U, \mathcal{L}(V, W))$ assim definido: para $u \in U$, $T_u \in \mathcal{L}(V, W)$ é tal que $[T_u](v) = \phi(u, v)$, $v \in V$. Então K é um isomorfismo.

Demonstração: Vejamos que K está bem definida. Para isso devemos provar que, se $\phi : U \times V \to W$ é uma aplicação bilinear então $K(\phi) \in \mathcal{L}(U, \mathcal{L}(V, W))$.

Para ficar mais claro considere o esquema abaixo:

$$\begin{array}{rcrcl} K & : & \mathcal{L}(U,V;W) & \to & \mathcal{L}(U,\mathcal{L}(V,W)) \\ & & \phi & \mapsto & K(\phi) \end{array}$$

onde

$$\begin{array}{rcrcl} K(\phi) & : & U & \to & \mathcal{L}(V,W) \\ & & u & \mapsto & K(\phi)(u) = T_u \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcrcl} T_u & : & V & \to & W \\ & & v & \mapsto & T_u(v) = \phi(u,v) \end{array}$$

Verificaremos que $K(\phi)$ é linear, ou seja, que $K(\phi)(u_1 + u_2) = K(\phi)(u_1) + K(\phi)(u_2)$ e $K(\phi)(\lambda u) = \lambda K(\phi)(u)$.

(i) Observe que $K(\phi)(u_1+u_2) = K(\phi)(u_1)+K(\phi)(u_2)$ se, e somente se, $T_{u_1+u_2} = T_{u_1}+T_{u_2}$. Note que, dado $u \in U$, $T_u \in \mathcal{L}(V,W)$.

Então,

$$\begin{aligned} T_{u_1+u_2}(v) &= \phi(u_1+u_2, v) = \phi(u_1, v) + \phi(u_2, v) \\ &= T_{u_1}(v) + T_{u_2}(v) = (T_{u_1} + T_{u_2})(v) \end{aligned}$$

ou seja, $T_{u_1+u_2} = T_{u_1} + T_{u_2}$

Portanto a primeira condição foi satisfeita.

(ii) Note que $K(\phi)(\lambda u) = \lambda K(\phi)(u)$ se, e somente se, $T_{\lambda u} = \lambda T_u$, $u \in U$.

Então

$$\lambda T_u(v) = \lambda\phi(u,v) = \phi(\lambda u, v) = T_{\lambda u}(v)$$

Sendo satisfeitas as duas condições, concluímos que $K(\phi)$ é linear e portanto K está bem definida.

Provemos agora que $K : \mathcal{L}(U,V;W) \to \mathcal{L}(U,\mathcal{L}(V,W))$ é linear.

(i) $K(\phi+\gamma) = K(\phi) + K(\gamma)$

Devemos então provar que $K(\phi+\gamma)(u) = (K(\phi) + K(\gamma))(u)$, para todo $u \in U$. Mas observe que $K(\phi+\gamma)(u) \in \mathcal{L}(V,W)$ e $(K(\phi) + K(\gamma))(u) \in \mathcal{L}(V,W)$. Então devemos provar que $K(\phi+\gamma)(u)(v) = (K(\phi)+K(\gamma))(u)(v)$, para todo $v \in V$.

De fato,

$$\begin{aligned} K(\phi+\gamma)(u)(v) &= (\phi+\gamma)(u,v) = \phi(u,v)+\gamma(u,v) \\ &= K(\phi)(u)(v) + K(\gamma)(u)(v) = (K(\phi)+K(\gamma))(u)(v) \end{aligned}$$

Assim, temos que a primeira condição foi satisfeita.

(ii) $K(\lambda\phi) = \lambda K(\phi)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$

Devemos provar que, $K(\lambda\phi)(u) = \lambda K(\phi)(u)$, para todo $u \in U$. Como $K(\phi)(u) \in \mathcal{L}(V,W)$ devemos provar que $K(\lambda\phi)(u)(v) = \lambda K(\phi)(u)(v)$, para todo $v \in V$. De fato,

$$K(\lambda\phi)(u)(v) = (\lambda\phi)(u,v) = \lambda\phi(u,v) = \lambda K(\phi)(u)(v).$$

Portanto, concluímos que K é linear.

Só resta mostrar que K é bijetora. Verificaremos inicialmente que K é injetora.

Seja $\phi \in \mathcal{L}(U,V;W)$, tal que $K(\phi) = 0$. Assim:

$$\begin{aligned} K(\phi) &= 0 \Rightarrow [K(\phi)](u) = 0 \Rightarrow [K(\phi)](u)(v) = 0 \\ &\Rightarrow \phi(u,v) = 0, \end{aligned}$$

para todo $u \in U$ e $v \in V$, para $\phi = 0$. Logo, como o núcleo de K contém apenas a aplicação nula, pelo Teorema 1.1.2 temos que K é injetora.

Vamos verificar que K é sobrejetora. Pela Proposição 1.1.2 devemos mostrar que a $dim(Im(K)) = dim\mathcal{L}(U,\mathcal{L}(V,W))$. Pela Proposição 2.1.2, temos que $dim\mathcal{L}(U,V;W) = mnp$. Como K é injetora temos que $dim(Ker(K)) = 0$. Assim, pelo Teorema 1.1.3, temos:

$$\begin{aligned} dim\mathcal{L}(U,\mathcal{L}(V,W)) &= dim(Ker(K)) + dim(Im(K)) \\ &= 0 + mnp \\ &= mnp \end{aligned}$$

Logo, K é sobrejetora.

Como K é bijetora e linear, concluímos que K é um isomorfismo. $\square$

Observe que K não depende da escolha da base, pois tanto $\mathcal{L}(U,V;W)$ e $\mathcal{L}(U,\mathcal{L}(V,W))$ são isomorfos.

Capítulo 3

Produto Tensorial entre espaços vetoriais

Neste capítulo será apresentado o objeto de estudo central do trabalho, o Produto Tensorial entre espaços vetoriais. Inicialmente apresentaremos a definição formal do Produto Tensorial entre espaços vetoriais. Vale ressaltar que sempre consideraremos aqui espaços vetoriais de dimensão finita. Em seguida faremos algumas construções de exemplos abstratos e finalizamos o capítulo estudando alguns isomorfismos entre determinados espaços vetoriais.

3.1 Produto Tensorial entre dois espaços vetoriais

Nesta seção iremos apresentar a definição de Produto Tensorial e alguns exemplos.

Definição 3.1.1. Dados os espaços vetoriais U e V de dimensões m e n respectivamente, chamamos de *Produto Tensorial* de U por V, todo par (Z, ϕ) que satisfaça os seguintes axiomas:

(1) Z é um espaço vetorial e $\phi : U \times V \to Z$ é uma aplicação bilinear do par U, V em Z;

(2) $dimZ = dimU \cdot dimV$;

(3) $\phi(U \times V)$ gera o espaço vetorial Z, ou seja, todo elemento de Z é escrito como combinação linear dos elementos de $\phi(U \times V)$.

Supondo o axioma (1), os axiomas (2) e (3) são equivalentes ao axioma (2'), enunciado abaixo:

(2') Se $\mathcal{E} = \{u_1, ..., u_m\}$ e $\mathcal{S} = \{v_1, ..., v_n\}$ são bases de U e V respectivamente, então a mn-upla $\phi(u_i, v_j)$, onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, forma uma base de Z.

De fato, suponha válido os axiomas (1), (2), (3) e vamos mostrar (2'), ou seja, que $\phi(u_i, v_j)$ forma uma base de Z. Inicialmente vejamos que $\phi(u_i, v_j)$ gera Z.
Note que dados $u \in U$ e $v \in V$, existem escalares $\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ..., \beta_n$, tais que

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_m u_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i$$
$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_n v_n = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j$$

Assim,

$$\phi(u,v) \;\; = \phi\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j\right) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \phi(u_i, v_j). \tag{3.1.1}$$

Logo para cada $u \in U$ e $v \in V$ temos que $\phi(u,v)$ se escreve como combinação linear dos $\phi(u_i, v_j)$. Assim como pelo axioma (3) sabemos que $\phi(U \times V)$ gera Z e por (3.1.1) temos que $\phi(u,v)$ se escreve como combinação linear dos $\phi(u_i, v_j)$, concluímos que de fato, $\phi(u_i, v_j)$ também gera Z.

Pelo axioma (2), temos que $dim(Z) = dim(U) \cdot dim(V) = mn$. Como o número de elementos de $\mathcal{P} = \{\phi(u_i, v_j) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ também é mn e o conjunto gera o espaço vetorial Z, concluímos que $\mathcal{P}$ forma uma base para Z.

Suponha agora os axiomas (1) e (2'). Provemos que são válidos os axiomas (2) e (3). Sejam $\mathcal{E} = \{u_1, ..., u_m\}$ e $\mathcal{S} = \{v_1, ..., v_n\}$ bases de U e V, respectivamente.

Do axioma (2') sabemos que o conjunto $\mathcal{P}$ forma uma base para Z e portanto temos que a $dim(Z) = mn = dim(U) \cdot dim(V)$, o que prova o axioma (2).

Agora dado $z \in Z$, temos que existem escalares λ_{ij} tais que

$$z = \sum_{i,j} \lambda_{ij} \phi(u_i, v_j), \text{ onde } \; 1 \leq i \leq m \text{ e } \; 1 \leq j \leq n.$$

Mas, para cada i e j temos que $\phi(u_i, v_j) \in \phi(U \times V)$ e logo concluímos que z se escreve como combinação linear dos elementos de $\phi(U \times V)$. Portanto $\phi(U \times V)$ gera Z, satisfazendo assim o axioma (3).

A seguir apresentaremos três exemplos abstratos do Produto Tensorial entre os espaços vetoriais U e V quaisquer.

Exemplo 3.1.1. *Considere $\mathcal{E} = \{u_1, ..., u_m\}$ e $\mathcal{S} = \{v_1, ..., v_n\}$ bases de U e V, respectivamente. Seja Z um espaço vetorial qualquer de dimensão mn. Tome*

$$\mathcal{G} = \{g_{11}, ..., g_{ij}, ..., g_{mn}\}$$

uma base de Z e defina $\phi : U \times V \to Z$ nos pares $\phi(u_i, v_j)$, onde $u_i \in \mathcal{E}$ e $v_j \in \mathcal{S}$, por $\phi(u_i, v_j) = g_{ij}$. Nos pares (u, v), onde $u \in U$ e $v \in V$, ϕ será estendida por bilinearidade. Pela própria construção de Z é evidente que (Z, ϕ) é Produto Tensorial.

Exemplo 3.1.2. *Tome o espaço vetorial Z como sendo o dual das formas bilineares $\mathcal{B}(U, V)$ sobre o par U, V, ou seja, $Z = \mathcal{B}(U, V)^*$. Defina $\phi : U \times V \to Z$, como sendo a aplicação que ao par (u, v) associa o elemento $F \in \mathcal{B}(U, V)^* = Z$, tal que*

$$F(w) = w(u, v), \forall\ w \in \mathcal{B}(U, V)$$

De modo esquemático temos:

$$\begin{aligned} \phi \ :\ & U \times V \to Z = \mathcal{B}(U, V)^* \\ & (u, v) \mapsto \phi(u, v) = F. \end{aligned}$$

onde

$$\begin{array}{cccl} F & : & \mathcal{B}(U, V) & \to & \mathbb{R} \\ & & w & \mapsto & F(w) = [\phi(u, v)](w) = w(u, v). \end{array} \tag{3.1.2}$$

Vejamos que ϕ é de fato bilinear:

(i)

$$\begin{aligned} [\phi(u + u', v)](w) &= w(u + u', v) = w(u, v) + w(u', v) \\ &= [\phi(u, v)](w) + [\phi(u', v)](w) \\ &= [\phi(u, v) + \phi(u', v)](w), \forall\ w \in \mathcal{B}(U, V), \end{aligned}$$

ou seja,

$\phi(u + u', v) = \phi(u, v) + \phi(u', v)$.

De modo análogo, temos que $\phi(u, v + v') = \phi(u, v) + \phi(u, v')$.

(ii) Seja λ escalar. Então

$$\begin{aligned} [\phi(\lambda u, v)](w) &= w(\lambda u, v) \\ &= \lambda w(u, v) = \lambda[\phi(u, v)](w), \forall\ w \in \mathcal{B}(U, V), \end{aligned}$$

ou seja, $\phi(\lambda u, v) = \lambda \phi(u, v)$.

Da mesma forma prova-se que $\phi(u, \lambda v) = \lambda \phi(u, v)$.

Portanto, de (i) e (ii) temos que ϕ é bilinear.

Agora vamos verificar o axioma (2'). Para isso será necessário considerarmos $\mathcal{E} = \{u_1, ..., u_m\}$ e $\mathcal{S} = \{v_1, ..., v_n\}$ bases de U e V respectivamente. Mostremos que o conjunto $\mathcal{P} = \{\phi(u_i, v_j) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ é uma base para Z.

Suponha que

$$\sum_{i,j} \lambda_{ij}\phi(u_i, v_j) = 0, \ \ onde \ \lambda_{ij} \in \mathbb{R}$$

então,

$$\left[\sum_{i,j} \lambda_{ij}\phi(u_i, v_j)\right](w) = 0, \ \ para \ todo \ \ w \in \mathcal{B}(U, V). \tag{3.1.3}$$

Assim de (3.1.3) temos que

$$\sum_{i,j} \lambda_{ij} w(u_i, v_j) = 0, \ \forall \ w \in \mathcal{B}(U, V). \tag{3.1.4}$$

Para cada $u_r \in \mathcal{E}$ e cada $v_s \in S$, podemos definir o elemento $w = w_{rs} \in \mathcal{B}(U, V)$, tal que $w_{rs}(u_r, v_s) = 1$ e $w_{rs}(u_i, v_j) = 0$, se $r \neq i$ ou $s \neq j$. Substituindo w_{rs} em (3.1.4) obtemos

$$0 = \sum_{i,j} \lambda_{ij} w_{rs}(u_i, v_j) = \lambda_{rs}.$$

Provamos então que $\lambda_{rs} = 0,$ para cada $1 \leq r \leq m$ e $1 \leq s \leq n$ e portanto o conjunto $\{\phi(u_i, v_j) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ é linearmente independente. Pelo Teorema 1.2.1 temos que $dim\mathcal{B}(U, V)^* = dim\mathcal{B}(U, V)$. Logo a

$$dim(Z) = dim\mathcal{B}(U, V)^* = dim\mathcal{B}(U, V) = dim(U) \cdot dim(V) = mn.$$

Como o conjunto $\mathcal{P} = \{\phi(u_i, v_j) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ é linearmente independente e possui mn elementos que é igual a $dim(Z)$, concluímos que o conjunto $\mathcal{P}$ é uma base para Z e logo o axioma (2') foi satisfeito. Portanto, Z é Produto Tensorial de U por V.

O exemplo acima nos mostra que dados dois espaços vetoriais U e V o produto tensorial entre eles é dual das formas bilineares $\mathcal{B}(U, V)$.

Exemplo 3.1.3. *Considere o espaço vetorial* $Z = \mathcal{L}(U^*, V)$ *das aplicações lineares do dual de* U *em* V*. Defina a aplicação* $\phi : U \times V \to Z$*, que relaciona o par* (u, v) *à aplicação linear* $T \in \mathcal{L}(U^*, V)$*, definida por:*

$$T(w) = w(u)v, \text{ para } w \in U^*, u \in U \text{ e } v \in V$$

De modo esquemático, temos:

$$\begin{array}{rcccl} \phi & : & U \times V & \to & \mathcal{L}(U^*, V) \\ & & (u, v) & \mapsto & \phi(u, v) = T \end{array}$$

onde

$$\begin{array}{rcccl} T & : & U^* & \to & V \\ & & w & \mapsto & T(w) = \phi(u, v)(w) = w(u)v. \end{array}$$

Agora vamos verificar que ϕ *está bem definida. Para isso, devemos mostrar que* T *é linear. De fato, dados* $w_1, w_2 \in U^*$*, temos*

$$\begin{aligned} T(w_1 + w_2) &= \phi(u, v)(w_1 + w_2) = (w_1 + w_2)(u)v \\ &= w_1(u)v + w_2(u)v = \phi(u, v)(w_1) + \phi(u, v)(w_2) \\ &= T(w_1) + T(w_2) \end{aligned}$$

Seja λ *um escalar, temos*

$$T(\lambda w) = \phi(u, v)(\lambda w) = (\lambda w)(u)v = \lambda(w)(u)v = \lambda\phi(u, v)(w) = \lambda T(w).$$

Portanto T *é linear.*

Agora vamos verificar que ϕ *é bilinear. Dados* $u, u' \in U$ *e* $v, v' \in V$*, temos*

(i)

$$\begin{aligned} \phi(u + u', v)(w) &= w(u + u')v = (w(u) + w(u'))v = w(u)v + w(u')v \\ &= \phi(u, v)(w) + \phi(u', v)(w), \text{ para todo } w \in U^* \end{aligned}$$

e logo concluímos que $\phi(u + u', v) = \phi(u, v) + \phi(u', v)$*.*

Analogamente se prova que $\phi(u, v + v') = \phi(u, v) + \phi(u, v')$.

(ii) Seja λ *escalar, temos*

$$\begin{aligned}\phi(\lambda u, v)(w) &= w(\lambda u)v = w(u)\lambda v\\ &= \phi(u, \lambda v)(w),\ \textit{para todo } w \in U^* \textit{ e logo } \phi(\lambda u, v) = \phi(u, \lambda v).\end{aligned}$$

Portanto, $\phi(\lambda u, v) = \phi(u, \lambda v)$.

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}\phi(\lambda u, v)(w) &= w(\lambda u)v = \lambda[w(u)v]\\ &= \lambda\phi(u, v)(w),\ \textit{para todo } w \in U^* \textit{ e logo } \phi(\lambda u, v) = \lambda\phi(u, v).\end{aligned}$$

Concluímos que $\phi(\lambda u, v) = \lambda\phi(u, v)$.

Portanto ϕ *é uma aplicação bilinear do par* U, V *em* $\mathcal{L}(U^*, V)$. *Resta provar o axioma (2') da definição de Produto Tensorial. Para isso dada* $\mathcal{E} = \{u_1, ..., u_m\}$ *uma base de* U *e* $\mathcal{S} = \{v_1, ..., v_n\}$ *uma base de* V, *vamos mostrar que o conjunto*

$$\mathcal{P} = \{\phi(u_i, v_j) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

forma uma base para Z. *Como*

$$dim(Z) = dim(\mathcal{L}(U^*, V)) = dim(U^*) \cdot dim(V) = dim(U) \cdot dim(V) = mn$$

e o conjunto $\mathcal{P}$ *possui mn elementos, basta provar que os elementos da mn-upla são linearmente independentes.*

Sejam escalares λ_{ij} *tais que,* $\displaystyle\sum_{i,j} \lambda_{ij}\phi(u_i, v_j) = 0$. *Então*

$$\left[\sum_{i,j} \lambda_{ij}\phi(u_i, v_j)\right](w) = 0,\ \textit{para todo elemento } w \in U^*.$$

Considerando $w = f_k$, *onde* f_k *é o k-ésimo elemento da base dual* $\mathcal{E}^* = \{f_1, ..., f_m\}$

definido na seção 1.2, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\sum_{i,j} \lambda_{ij}\phi(u_i, v_j)\right](w) = \sum_{i,j} \lambda_{ij}\phi(u_i, v_j)(w) = \sum_{i,j} \lambda_{ij} w(u_i) \cdot v_j \\ &= \sum_{i,j} \lambda_{ij} f_k(u_i) \cdot v_j = \sum_{j} \lambda_{kj} v_j, \ \textit{para todo } k = 1, ..., m. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{S}$ é uma base, temos que os v_j são linearmente independentes, logo $\lambda_{kj} = 0$, para todo k e todo j. Portanto, o conjunto $\mathcal{P}$ é linearmente independente. Com isso, concluímos que o espaço vetorial $\mathcal{L}(U^*, V)$, munido da aplicação bilinear ϕ como foi definida acima é um Produto Tensorial de U por V.

De agora por diante, indicaremos o Produto Tensorial de U por V por $U \otimes V$; assim, $\phi(u, v)$ será substituído por $u \otimes v$ (que se lê "u tensor v").
Da definição de Produto Tensorial sabemos que $\phi(U \times V)$ gera $Z = U \otimes V$. Porém não temos que $\phi(U \times V) = Z$, ou seja, nem todo elemento de $U \otimes V$ é do tipo $u \otimes v$, por mais que todo elemento $z \in U \otimes V$ se escreva como combinação linear $z = \sum u_k \otimes v_k$.

Definição 3.1.2. Os elementos do espaço vetorial $U \otimes V$ são chamados de *tensores* (de segunda ordem). Os *tensores* da forma $u \otimes v$, onde $u \in U$ e $v \in V$, são chamados *decomponíveis*.

Mostraremos a seguir que a forma de representar um elemento $z \in U \otimes V$ como soma de *tensores decomponíveis* não é única.

De fato, veja que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u \otimes 2v &= \phi\left(\frac{u}{2}, 2v\right) = \frac{1}{2}.2\phi(u, v) \\ &= 1\phi(u, v) = \phi(u, v) = u \otimes v. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} (u + u') \otimes v + u' \otimes (v' - v) - u' \otimes v' &= \phi(u + u', v) + \phi(u', v' - v) - \phi(u', v') \\ &= [\phi(u, v) + \phi(u', v)] + [\phi(u', v') - \phi(u', v)] - \phi(u', v') \\ &= \phi(u, v) = u \otimes v, \text{ onde } u, u' \in U \text{ e } v, v' \in V. \end{aligned}$$

A partir de agora vamos apresentar alguns resultados que mostram propriedades importantes do Produto Tensorial entre dois espaços vetoriais.

Por questão de notação, nos próximos resultados vamos denotar as bases dos espaços vetoriais U e V por $\mathcal{E} = \{e_1, ..., e_m\}$ e $\mathcal{S} = \{t_1, ..., t_n\}$, respectivamente.

Teorema 3.1.1. *Sejam $U \otimes V$ o Produto Tensorial de U por V, e W um espaço vetorial qualquer. Se $g : U \times V \to W$ é uma aplicação bilinear, então existe uma única aplicação linear $\tilde{g} : U \otimes V \to W$ tal que $\tilde{g}(u \otimes v) = g(u, v)$, para todo $u \in U$ e todo $v \in V$.*

Demonstração: Seja $g : U \times V \to W$ uma aplicação bilinear. Dado $z \in U \otimes V$ sabemos que $z = \sum_k u_k \otimes v_k$. Defina $\tilde{g} : U \otimes V \to W$ do seguinte modo $\tilde{g}(z) = \sum_k g(u_k, v_k)$. Note que, quando se trata de um tensor decomponível obtemos a propriedade acima requerida, ou seja, $\tilde{g}(u \otimes v) = g(u, v)$.

Vamos verificar que $\tilde{g}$ está bem definida, ou seja, não depende da particular maneira de escrever o tensor z como soma de tensores decomponíveis. Seja $\mathcal{E} = \{e_1, ..., e_m\}$, $\mathcal{S} = \{t_1, ..., t_n\}$ bases de U e V, respectivamente. Se

$$u_k = \sum_{i=1}^{m} \alpha_k^i e_i \quad \text{e} \quad v_k = \sum_{j=1}^{n} \beta_k^j t_j,$$

então,

$$\begin{aligned} z &= \sum_k u_k \otimes v_k = \sum_k \left[\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_k^i e_i \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_k^j t_j \right) \right] \\ &= \sum_{i,j,k} \alpha_k^i \beta_k^j e_i \otimes t_j, \ 1 \le i \le m, \ 1 \le j \le n. \end{aligned}$$

Tomando $\xi^{ij} = \sum_k \alpha_k^i \beta_k^j$, podemos escrever $z = \sum_k u_k \otimes v_k = \sum_{i,j} \xi^{ij} e_i \otimes t_j$. Logo, os escalares ξ^{ij} são as coordenadas do tensor z relativamente à base formada pelos tensores $e_i \otimes t_j$ e como tal não dependem da particular maneira de representar $z = \sum_k u_k \otimes v_k$ como soma de tensores decomponíveis. Logo, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{g}(z) &= \sum_k g(u_k, v_k) = \sum_k g\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_k^i e_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_k^j t_j \right) \\ &= \sum_{i,j,k} \alpha_k^i \beta_k^j g(e_i, t_j) = \sum_{i,j} \xi^{ij} g(e_i, t_j), \end{aligned}$$

pela bilinearidade de g. Concluímos que a aplicação $\tilde{g}$ tem sua definição independente da maneira de representar z como soma de tensores decomponíveis.

Vamos verificar que $\tilde{g}$ é linear.

Sejam z_1 e $z_2 \in U \otimes V$. Assim $z_1 = \sum_{i,j} \gamma^{ij} e_i \otimes t_j$ e $z_2 = \sum_{i,j} \alpha^{ij} e_i \otimes t_j$. Então:

(i)

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(z_1 + z_2) &= \tilde{g}\left(\sum_{i,j} \gamma^{ij} e_i \otimes t_j + \sum_{i,j} \alpha^{ij} e_i \otimes t_j\right) \\
&= \tilde{g}\left(\sum_{i,j} (\gamma^{ij} + \alpha^{ij}) e_i \otimes t_j\right) = \sum_{i,j} (\gamma^{ij} + \alpha^{ij}) g(e_i, t_j) \\
&= \sum_{i,j} \left(\gamma^{ij} g(e_i, t_j) + \alpha^{ij} g(e_i, t_j)\right) = \sum_{i,j} \gamma^{ij} g(e_i, t_j) + \sum_{i,j} \alpha^{ij} g(e_i, t_j) \\
&= \tilde{g}\left(\sum_{i,j} \gamma^{ij} e_i \otimes t_j\right) + \tilde{g}\left(\sum_{i,j} \alpha^{ij} e_i \otimes t_j\right) \\
&= \tilde{g}(z_1) + \tilde{g}(z_2).
\end{aligned}$$

(ii) Dado λ um escalar e $z = \sum_{i,j} \xi^{ij} e_i \otimes t_j \in Z$, temos

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\lambda z) &= \tilde{g}\left(\lambda \sum_{i,j} \xi^{ij} e_i \otimes t_j\right) = \left(\sum_{i,j} \lambda \xi^{ij} g(e_i, t_j)\right) \\
&= \lambda \left(\sum_{i,j} \xi^{ij} g(e_i, t_j)\right) = \lambda \tilde{g}\left(\sum_{i,j} \xi^{ij} e_i \otimes t_j\right) \\
&= \lambda \tilde{g}(z).
\end{aligned}$$

Logo, $\tilde{g}$ é linear.

Provemos agora a unicidade da aplicação linear $\tilde{g}$. Suponha que $\hat{g} : U \otimes V \to W$ é uma aplicação linear tal que $\hat{g}(u \otimes v) = g(u, v)$, para todo $u \in U$ e $v \in V$. Assim, dado $z \in U \otimes V$, temos

$$\begin{aligned}
\hat{g}(z) &= \hat{g}\left(\sum_{k} u_k \otimes v_k\right) = \sum_{k} \hat{g}(u_k \otimes v_k) \\
&= \sum_{k} g(u_k, v_k) = \sum_{k} \tilde{g}(u_k \otimes v_k) = \tilde{g}\left(\sum_{k} u_k \otimes v_k\right) = \tilde{g}(z).
\end{aligned}$$

Logo $\hat{g} = \tilde{g}$.

Portanto, provamos que existe uma única aplicação linear $\tilde{g}$ em $U \otimes V$. $\square$

Como consequência deste Teorema temos o próximo resultado.

Corolário 3.1.1. *A correspondência $g \to \tilde{g}$ constitui um isomorfismo do espaço $\mathcal{L}(U, V; W)$ das aplicações bilineares do par U, V em W sobre o espaço $\mathcal{L}(U \otimes V, W)$ das aplicações lineares do produto $U \otimes V$ em W. Isto é:*

$$\mathcal{L}(U, V; W) \approx \mathcal{L}(U \otimes V, W).$$

Demonstração: Seja $\phi : \mathcal{L}(U, V; W) \to \mathcal{L}(U \otimes V, W)$ dada por $\phi(g) = \tilde{g}$, onde $\tilde{g} : U \otimes V \to W$ é definida por $\tilde{g}(z) = \sum_k g(u_k, v_k)$.

Vamos verificar que ϕ é linear. Dados $f, g \in \mathcal{L}(U, V; W)$, vejamos que $\phi(f+g) = \phi(f)+\phi(g)$, ou seja, $\widetilde{f+g} = \tilde{f} + \tilde{g}$.

De fato, se $z \in U \otimes V$ então

$$\begin{aligned}
(\widetilde{f+g})(z) &= (\widetilde{f+g})\left(\sum_k u_k \otimes v_k\right) = \sum_k (f+g)(u_k, v_k) \\
&= \sum_k \left(f(u_k, v_k) + g(u_k, v_k)\right) = \sum_k f(u_k, v_k) + \sum_k g(u_k, v_k) \\
&= \tilde{f}(z) + \tilde{g}(z) = (\tilde{f} + \tilde{g})(z) \\
&\Rightarrow (\widetilde{f+g}) = \tilde{f} + \tilde{g}
\end{aligned}$$

logo, $\phi(f+g) = \phi(f) + \phi(g)$.

Agora se λ é um escalar, devemos provar que $\phi(\lambda g) = \lambda\phi(g)$, ou seja, $\widetilde{\lambda g} = \lambda\tilde{g}$.

Dado $z \in U \otimes V$, temos que

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\lambda g})(z) &= (\widetilde{\lambda g})\left(\sum_k u_k \otimes v_k\right) = \sum_k (\lambda g)(u_k, v_k) \\
&= \sum_k (\lambda g)(u_k, v_k) = \sum_k \lambda g(u_k, v_k) \\
&= \lambda \sum_k g(u_k, v_k) = \lambda\tilde{g}(z) \\
&\Rightarrow \widetilde{\lambda g} = \lambda\tilde{g}.
\end{aligned}$$

Logo, $\phi(\lambda g) = \lambda\phi(g)$.

Portanto ϕ é linear. Para concluir a demonstração resta provar que ϕ é bijetora, mas como $dim\mathcal{L}(U,V;W) = dim\mathcal{L}(U\otimes V, W)$, segue da Proposição 1.1.2 que é suficiente provar que ϕ é injetora.

Se $g \in Ker(\phi)$, então $\phi(g) = 0$, ou seja, $\tilde{g} = 0$. Assim, se $u \in U$ e $v \in V$ segue que $u\otimes v \in U\otimes V$, e logo $0 = \tilde{g}(u\otimes v) = g(u,v)$. Concluímos então que g é aplicação nula e logo ϕ é injetora, como queríamos demonstrar. Portanto, o espaço das aplicações lineares $\mathcal{L}(U,V;W)$ é isomorfo a $\mathcal{L}(U\otimes V, W)$. $\square$

O próximo resultado mostra que a propriedade do Produto Tensorial vista no Teorema 3.1.1 serve para caracterizá-lo.

Teorema 3.1.2. *(Unicidade do Produto Tensorial.) Sejam $U\otimes V$ e $U\boxtimes V$ dois produtos tensoriais de U por V. Existe um único isomorfismo de $U\otimes V$ sobre $U\boxtimes V$ que leva $u\otimes v$ em $u\boxtimes v$, para todo $u\in U$ e $v\in V$.*

Demonstração: Seja $g : U\times V \to U\boxtimes V$ definida por $g(u,v) = u\boxtimes v$. Vejamos que g é bilinear. Dados $u,u'\in U$ e $v,v'\in V$, temos:

$$\begin{aligned} g(u+u',v) &= (u+u')\boxtimes v = u\boxtimes v + u'\boxtimes v \\ &= g(u,v) + g(u',v) \end{aligned}$$

Analogamente se prova que $g(u,v+v') = g(u,v) + g(u,v')$.

Agora dado λ escalar, segue que

$$g(\lambda u, v) = (\lambda u)\boxtimes v = \lambda(u\boxtimes v) = \lambda g(u,v),$$

logo $g(\lambda u, v) = \lambda g(u,v)$.

Por outro lado,

$$g(u,\lambda v) = u\boxtimes(\lambda v) = (\lambda u)\boxtimes v = \lambda(u\boxtimes v) = \lambda g(u,v)$$

Portanto concluímos que g é uma aplicação bilinear. Assim do Teorema 3.1.1 temos que existe uma única aplicação linear $\tilde{g} : U\otimes V \to U\boxtimes V$, tal que, $\tilde{g}(u\otimes v) = g(u,v) = u\boxtimes v$.

Considere agora a aplicação $h : U \times V \to U \otimes V$ definida por $h(u, v) = u \otimes v$. É fácil verificar que h é bilinear. Usando novamente o Teorema 3.1.1 temos que existe uma única aplicação linear $\tilde{h} : U \boxtimes V \to U \otimes V$, tal que $\tilde{h}(u \boxtimes v) = u \otimes v$.

Vejamos que as aplicações $\tilde{h}$ e $\tilde{g}$ é inversa uma da outra. De fato, a aplicação linear $\tilde{h} \circ \tilde{g} : U \otimes V \to U \otimes V$ é tal que $(\tilde{h} \circ \tilde{g})(u \otimes v) = \tilde{h}(u \boxtimes v) = u \otimes v$, isto é, a aplicação $\tilde{h} \circ \tilde{g}$ coincide com a aplicação identidade no conjunto dos tensores decomponíveis de $U \otimes V$. Como tal conjunto gera $U \otimes V$, concluímos que de fato $\tilde{h} \circ \tilde{g}$ é igual aplicação identidade.

Por outro lado, a aplicação linear $\tilde{g} \circ \tilde{h} : U \boxtimes V \to U \boxtimes V$ é tal que $(\tilde{g} \circ \tilde{h})(u \boxtimes v) = \tilde{g}(u \otimes v) = u \boxtimes v$, ou seja, a aplicação $\tilde{g} \circ \tilde{h}$ coincide com a aplicação identidade no conjunto dos tensores decomponíveis de $U \boxtimes V$. Como tal conjunto gera $U \boxtimes V$, concluímos que $\tilde{g} \circ \tilde{h}$ é igual aplicação identidade.

Como $\tilde{g} \circ \tilde{h}$ e $\tilde{h} \circ \tilde{g}$ resultam na aplicação identidade segue que são inversas uma da outra.

Provemos agora a unicidade da aplicação $\tilde{g}$. Para isso, suponha que $\tilde{f} : U \otimes V \to U \boxtimes V$ seja um outro isomorfismo tal que $\tilde{f}(u \otimes v) = u \boxtimes v$.

Assim dado $z = \sum_k u_k \otimes v_k \in U \otimes V$, temos

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(z) &= \tilde{f}\left(\sum_k u_k \otimes v_k\right) = \sum_k \tilde{f}(u_k \otimes v_k) = \sum_k u_k \boxtimes v_k \\
&= \sum_k \tilde{g}(u_k \otimes v_k) = \tilde{g}\left(\sum_k u_k \otimes v_k\right) = \tilde{g}(z)
\end{aligned}
$$

e logo $\tilde{f} = \tilde{g}$. Concluímos que $\tilde{g}$ é única, logo $\tilde{g}$ é um isomorfismo. $\square$

3.2 Alguns isomorfismos

A partir de agora veremos alguns isomorfismos. Começaremos por um isomorfismo mais simples: considerando $\mathbb{R}$ como espaço vetorial sobre si próprio exibiremos um isomorfismo entre $\mathbb{R} \otimes V$ e V, onde V é um espaço vetorial qualquer.

Teorema 3.2.1. *Existe um isomorfismo entre $\mathbb{R} \otimes V$ e V, que transforma $\alpha \otimes v$ em αv, para todo escalar α e $v \in V$.*

Demonstração: Considere a aplicação $\phi : \mathbb{R} \times V \to V$, dada por $\phi(\alpha, v) = \alpha v$. Vejamos que

ϕ tem as propriedades requeridas para fazer do par (V, ϕ) um Produto Tensorial de $\mathbb{R}$ por V. É fácil verificar que ϕ é bilinear. De fato, dados $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ e $v, v' \in V$, temos que

$$\phi(\alpha + \alpha', v) = (\alpha + \alpha')v = \alpha v + \alpha' v = \phi(\alpha, v) + \phi(\alpha', v).$$

Analogamente, temos que $\phi(\alpha, v + v') = \phi(\alpha, v) + \phi(\alpha, v')$. Se λ é escalar, então $\phi(\lambda\alpha, v) = (\lambda\alpha)v = \alpha(\lambda v) = \phi(\alpha, \lambda v)$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \phi(\lambda\alpha, v) &= (\lambda\alpha)v = (\lambda\alpha)v = \lambda\phi(\alpha, v), \text{ ou seja,} \\ & \phi(\lambda\alpha, v) = \phi(\alpha, \lambda v) = \lambda\phi(\alpha, v). \end{aligned}$$

Portanto ϕ é bilinear. Agora, dado $v \in V$, se $S = \{t_1, ..., t_n\}$ é uma base de V, existem escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$, tais que

$$v = \alpha_1 t_1 + ... + \alpha_n t_n, \text{ ou seja, } v = \phi(\alpha_1, t_1) + ... + \phi(\alpha_n, t_n).$$

Isso prova que $\phi(\mathbb{R} \times V)$ gera V, satisfazendo o axioma (2') da definição de Produto Tensorial. Concluímos então que o par (V, ϕ) é um Produto Tensorial de $\mathbb{R}$ por V. Assim, do Teorema 3.1.2, segue que $\mathbb{R} \otimes V$ é isomorfo a V. $\square$

Usando os exemplos que fizemos na Seção 3 podemos exibir também alguns isomorfismos. Com base no Exemplo 3.1.3 o Produto Tensorial de U por V é a transformação linear $A : U^* \to V$ tal que $A(f) = f(u) \cdot v$ para todo $f \in U^*$. Portanto podemos obter um isomorfismo entre $U \otimes V$ e $\mathcal{L}(U^*, V)$. Tal este isomorfismo leva o tensor decomponível $u \otimes v$ na aplicação linear $A : U^* \to V$ tal que $A(f) = f(u)v$, $f \in U^*$, $u \in U$, $v \in V$. Note que a imagem de U^* pela aplicação A é um subespaço de V de dimensão 1, ou seja, os tensores decomponíveis em $U \otimes V$ correspondem às aplicações lineares "de posto 1" em $\mathcal{L}(U^*, V)$.

Pelo Exemplo 3.1.3 e pelo Exemplo 3.1.2 vimos que tanto o espaço vetorial $\mathcal{L}(U^*, V)$ das aplicações lineares do dual de U por V quanto o dual do espaço das formas bilineares $\mathcal{B}(U, V)$ são Produtos Tensoriais de U por V. Portanto, tendo em vista a Unicidade do Produto Tensorial, valem os isomorfismos

$$U \otimes V \approx \mathcal{B}(U, V)^* \approx \mathcal{L}(U, V). \tag{3.2.1}$$

Vamos agora estudar alguns isomorfismos menos elementares. No próximo resultado mostraremos que existe um isomorfismo entre o espaço das aplicações lineares de U por V e $U^* \otimes V$.

Proposição 3.2.1. *O espaço $\mathcal{L}(U, V)$ das aplicações lineares de U por V é isomorfo a $U^* \otimes V$, isto é, $\mathcal{L}(U, V) \approx U^* \otimes V$.*

Demonstração: Pelo Teorema 1.2.2 temos que existe um isomorfismo $\omega : (U^*)^* \to U$. Considere a aplicação

$$\begin{array}{rcccl} \phi & : & \mathcal{L}(U, V) & \to & \mathcal{L}((U^*)^*, V) \\ & & T & \mapsto & \phi(T) \end{array}$$

onde

$$\begin{array}{rcccl} \phi(T) & : & (U^*)^* & \to & V \\ & & f & \mapsto & \phi(T)(f) = T(\omega(f)). \end{array}$$

Vejamos que ϕ está bem definida. Para isso, devemos provar que $\phi(T)$ é linear. Dadas $f, g \in (U^*)^*$, temos que

$$\phi(T)(f+g) = T(\omega(f+g)) = T(\omega(f) + \omega(g)) = T(\omega(f)) + T(\omega(g)) = \phi(T)(f) + \phi(T)(g).$$

Agora, se λ é um escalar temos

$$\phi(T)(\lambda f) = T(\omega(\lambda f)) = T(\lambda\omega(f)) = \lambda T(\omega(f)) = \lambda\phi(T)(f).$$

Portanto $\phi(T)$ é linear. Vejamos agora que ϕ é linear. Dadas $T, Q \in \mathcal{L}(U, V)$, devemos provar que $\phi(T+Q) = \phi(T) + \phi(Q)$ e $\phi(\lambda T) = \lambda\phi(T)$, ou seja, $\phi(T+Q)(f) = (\phi(T) + \phi(Q))(f)$ e $\phi(\lambda T)(f) = \lambda\phi(T)(f)$, para toda $f \in (U^*)^*$ e λ um escalar. De fato,

$$\phi(T+Q)(f) = (T+Q)(\omega(f)) = T(\omega(f)) + Q(\omega(f)) = \phi(T)(f) + \phi(Q)(f) = (\phi(T) + \phi(Q))(f).$$

$$\phi(\lambda T)(f) = (\lambda T)(\omega(f)) = \lambda(T(\omega(f)) = \lambda\phi(T)(f).$$

Logo ϕ é linear. Para concluir a demonstração resta verificar que ϕ é bijetora, mas como $dim\mathcal{L}(U, V) = dim\mathcal{L}((U^*)^*, V)$, segue do Proposição 1.1.2 que é suficiente mostrar que ϕ é injetora. Sejam $T \in Ker(\phi)$ e $u \in U$. Então $\phi(T) = 0$, ou seja, $\phi(T)(f) = 0$, para toda $f \in (U^*)^*$, e como ω é um isomorfismo entre $(U^*)^*$ e U, existe uma aplicação $g \in (U^*)^*$ tal

que $\omega(g) = u$. Então $0 = \phi(T)(g) = T(\omega(g)) = T(u)$. Logo T é aplicação nula e portanto ϕ é injetora, como queríamos demonstrar. Concluímos que o espaço das aplicações lineares $\mathcal{L}(U, V)$ é isomorfo ao espaço $\mathcal{L}((U^*)^*, V)$. Substituindo agora U por U^* no isomorfismo $\mathcal{L}(U^*, V) \approx U \otimes V$ visto em (3.2.1), obtemos $\mathcal{L}((U^*)^*, V) \approx U^* \otimes V$. Portanto, combinando estes isomorfismos, temos que $\mathcal{L}(U, V) \approx \mathcal{L}((U^*)^*, V) \approx U^* \otimes V$, ou seja, $\mathcal{L}(U, V) \approx U^* \otimes V$.
$\square$

O isomorfismo entre $\mathcal{L}(U, V)$ e $U^* \otimes V$, dado pela Proposição 3.2.1, leva o tensor decomponível $f \otimes v \in U^* \otimes V$ na aplicação linear $A \in \mathcal{L}(U, V)$ tal que

$$A(u) = f(u)v \text{ onde } f \in U^*, u \in U, v \in V. \tag{3.2.2}$$

Logo, os tensores decomponíveis em $U^* \otimes V$ correspondem às aplicações lineares $A : U \to V$, na qual a imagem de U por A tem dimensão 1.

Observação 3.2.1. *Um caso particular do isomorfismo anterior é quando $V = U$. Logo temos que $\mathcal{L}(U) \approx U^* \otimes U$, onde $\mathcal{L}(U)$ é o espaço vetorial das transformações lineares de U em si próprio. Assim, as transformações lineares $A : U \to U$, podem ser identificadas aos elementos do espaço $U^* \otimes U$.*

Definição 3.2.1. Os elementos do espaço $U^* \otimes U$ são chamados *tensores mistos* de 2^a ordem sobre U, os elementos de $U \otimes U$ são chamados de *tensores contravariantes* de 2^a ordem e os de $U^* \otimes U^*$ são os *tensores covariantes* de 2^a ordem.

A partir de agora vamos nos referir à transformação linear $A : U \to V$ correpondente ao tensor $t = \sum_k g_k \otimes v_k \in U^* \otimes V$ como sendo a aplicação definida em (3.2.2).
No próximo resultado, se $\mathcal{E} = \{e_1, ..., e_m\}$ é uma base do espaço vetorial U, a base dual de U será denotada por $\mathcal{E}^* = \{f_1, ..., f_m\}$.

Proposição 3.2.2. *Consideremos as bases $\mathcal{E} = \{e_1, ..., e_m\}$ em U, sua dual $\mathcal{E}^* = \{f_1, ..., f_m\}$ em U^* e $\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E} = \{f_j \otimes e_i; i, j = 1, ..., m\}$ em $U^* \otimes U$. Sejam $A : U \to U$ uma aplicação linear e $(\alpha^i_j) = [A, \mathcal{E}]$ sua matriz na base $\mathcal{E}$. Então as coordenadas, na base $\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}$, do tensor $t \in U^* \otimes U$, correspondente a A no isomorfismo entre $\mathcal{L}(U)$ e $U^* \otimes U$, coincidem com os elementos da matriz (α^i_j).*

Demonstração: Lembremos inicialmente que a transformação linear $A \in \mathcal{L}(U)$, correspondente ao tensor $t = \sum_k g_k \otimes u_k$ em $U^* \otimes U$ é definida por $A(u) = \sum_k g_k(u)u_k$, onde $u \in U$. Se $u_k = \sum_i \beta^i_k e_i \in U$ e $g_k = \sum_j \gamma^k_j f_j \in U^*$ temos que

$$g_k(e_j) = \sum_i \gamma^k_i f_i(e_j) = \gamma^k_j.1 = \gamma^k_j.$$

Portanto,

$$A(e_j) = \sum_j g_k(e_j)u_k = \sum_k \gamma^k_j \left(\sum_i \beta^i_k e_i \right) = \sum_i \left(\sum_k \gamma^k_j \beta^i_k \right) e_i. \tag{3.2.3}$$

Por outro lado, como $(\alpha^i_j) = [A; \mathcal{E}]$ é a matriz da aplicação A na base $\mathcal{E}$, segue que

$$A(e_j) = \sum_i \alpha^i_j e_i \tag{3.2.4}$$

Comparando as expressões (3.2.3) e (3.2.4), temos $\alpha^i_j = \sum_k \gamma^k_j \beta^i_k$. Mas, veja que

$$\begin{aligned} t &= \sum_k g_k \otimes u_k = \sum_k \left[\left(\sum_j \gamma^k_j f_j \right) \otimes \left(\sum_i \beta^i_k e_i \right) \right] \\ &= \sum_{i,j} \left(\sum_k \gamma^k_j \beta^i_k \right) f_j \otimes e_i = \sum_{i,j} \alpha^i_j f_j \otimes e_i. \end{aligned}$$

Portanto concluímos que as coordenadas na base $\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}$ do tensor t correspondente a A no isomorfismo entre $\mathcal{L}(U)$ e $U^* \otimes U$ coincidem com os elementos da matriz (α^i_j). $\square$

Nosso próximo objetivo é definir o traço de uma aplicação linear. Para isso será necessário definir um funcional linear ϕ no espaço vetorial $U^* \otimes U$.

Proposição 3.2.3. *Seja U um espaço vetorial. Então existe um funcional linear natural ϕ no espaço vetorial $U^* \otimes U$.*

Demonstração: Defina a aplicação $g : U^* \times U \to \mathbb{R}$ por $g(f, u) = f(u)$. Vejamos que g é bilinear. De fato, dados $f, f' \in U^*$ e $u, u' \in U$, segue que

$$g(f + f', u) = (f + f')(u) = f(u) + f'(u) = g(f, u) + g(f', u).$$

Da mesma forma tem-se que $g(f, u+u') = g(f,u) + g(f,u')$. Agora se λ é um escalar, temos $g(\lambda f, u) = (\lambda f)(u) = \lambda f(u) = \lambda g(f,u)$. Por outro lado $g(f, \lambda u) = f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda g(f,u)$. Assim $g(\lambda f, u) = g(f, \lambda u) = \lambda g(f,u)$.

Portanto g é bilinear e logo segue do Teorema 1.2.1 que existe uma única aplicação linear $\phi : U^* \otimes U \to \mathbb{R}$ e tal que $\phi(f \otimes u) = g(f,u) = f(u)$, o que conclui a demonstração. $\square$

Agora estamos em condições de definir o traço de uma aplicação linear.

Definição 3.2.2. O funcional linear $\mathcal{T} : \mathcal{L}(U) \to \mathbb{R}$ dado por $\mathcal{T} = \phi \circ \omega$, onde $\phi : U^* \otimes U \to \mathbb{R}$ é o funcional linear da Proposição 3.2.3 e $\omega : \mathcal{L}(U) \to U^* \otimes U$ é um isomorfismo, denominado traço.

Exemplo 3.2.1. *Seja $A \in \mathcal{L}(U)$ a transformação linear correspondente ao tensor t de $U^* \otimes U$. Assim $\omega(A) \in U^* \otimes U$. Digamos que $\omega(A) = \sum_k g_k \otimes u_k$. Logo:*

$$\mathcal{T}(A) = (\phi \circ \omega)(A) = \phi(\omega(A)) = \phi\left(\sum_k g_k \otimes u_k\right) = \sum_k \phi(g_k \otimes u_k) = \sum_k g_k(u_k).$$

Portanto, $\mathcal{T}(A) = \sum_k g_k(u_k)$.

Proposição 3.2.4. *Se (α^i_j) é a matriz de A numa base qualquer $\mathcal{E}$, então o traço de A é a soma dos elementos da diagonal dessa matriz, isto é,*

$$\mathcal{T}(A) = \sum_i \alpha^i_i.$$

Demonstração: Sejam $u_k = \sum_j \beta^j_k e_j \in U$ e $g_k = \sum_i \gamma^k_i f_i \in U^*$.

Então:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(A) &= \sum_k g_k(u_k) = \sum_k g_k\left(\sum_j \beta^j_k e_j\right) = \sum_k \left[\sum_i \gamma^k_i f_i \left(\sum_j \beta^j_k e_j\right)\right] \\
&= \sum_k \left[\sum_{i,j} \gamma^k_i \beta^j_k f_i(e_j)\right] = \sum_k \sum_i \gamma^k_i \beta^i_k = \sum_i \left(\sum_k \gamma^k_i \beta^i_k\right) \\
&= \sum_i \xi^i_i.
\end{aligned}$$

Como vimos na Proposição 3.2.2 temos $\xi^i_j = \sum_k \gamma^k_j \beta^i_k$ são as coordenadas do tensor

$t = \sum_k g_k \otimes u_k$ relativamente à base $\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}$. Como tais coordenadas coincidem com os elementos da matriz (α^i_j) temos que $\xi^i_i = \alpha^i_i$. Portanto $\mathcal{T}(A) = \sum_i \alpha^i_i$. □

Da Proposição anterior, podemos concluir que se (α^i_j) e (β^i_j) são matrizes da mesma aplicação linear $A : U \to U$ relativamente a duas bases distintas de U, segue que

$$\sum_i \alpha^i_i = \sum_i \beta^i_i.$$

Proposição 3.2.5. *O dual do Produto Tensorial de U por V é isomorfo ao Produto Tensorial do dual de U pelo dual de V:*

$$(U \otimes V)^* \approx U^* \otimes V^*$$

Demonstração: Tomando $W = \mathbb{R}$ no Corolário 3.1.1, temos que $\mathcal{L}(U \otimes V, \mathbb{R}) \approx \mathcal{L}(U, V; \mathbb{R})$, ou seja, $(U \otimes V)^* \approx \mathcal{B}(U, V)$. Agora, considerando também $W = \mathbb{R}$ na Proposição 2.1.4 vem que $\mathcal{L}(U, V; \mathbb{R}) \approx \mathcal{L}(U, \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$, isto é, $\mathcal{B}(U, V) \approx \mathcal{L}(U, \mathcal{L}(V, \mathbb{R})) = \mathcal{L}(U, V^*)$. Mas pela Proposição 3.2.1 sabemos que $\mathcal{L}(U, V^*) \approx U^* \otimes V^*$. Portanto, fazendo as combinações sucessivas destes isomorfismos, concluímos que $(U \otimes V)^* \approx U^* \otimes V^*$. □

Este isomorfismo associa ao tensor $f \otimes g \in U^* \otimes V^*$ o funcional linear $\psi \in (U \otimes V)^*$ definido por $\psi(u \otimes v) = f(u)g(v)$.

Corolário 3.2.1. *Os tensores covariantes de segunda ordem do espaço $U^* \otimes V^*$ identificam-se canonicamente as formas bilineares $\mathcal{B}(U, V)$, ou seja, $U^* \otimes V^* \approx \mathcal{B}(U, V)$.*

Demonstração: Segue diretamente da demonstração da Proposição anterior que o espaço $U^* \otimes V^*$ é isomorfo ao espaço da aplicações bilineares $\mathcal{B}(U, V)$.

O espaço $U^* \otimes U^*$ dos tensores covariantes de segunda ordem é isomorfo ao espaço da aplicações bilineares $\mathcal{B}(U)$. Este isomorfismo relaciona ao tensor $f \otimes g$ a forma bilinear $f \cdot g$, definida por $(f \cdot g)(u, v) = f(u) \cdot g(v)$, o qual é denominado *produto das formas lineares* f e g.

Proposição 3.2.6. *O Produto Tensorial goza das seguintes propriedades formais:*

(i) Comutativa: $U \otimes V \approx V \otimes U$;

(ii) Associativa: $(U \otimes V) \otimes W \approx U \otimes (V \otimes W)$

(iii) Distributiva em relação à soma direta: $(U \oplus V) \otimes W \approx (U \otimes W) \oplus (V \otimes W)$

Demonstração: Vamos demonstrar apenas o item (i). A ideia das demontrações dos itens (ii) e (iii) se encontram na página 63 da bibliografia [8]. Usaremos a unicidade do Produto Tensorial para verificar a propriedade comutativa do Produto Tensorial.

Considere a aplicação $\phi_1 : U \times V \to V \otimes U$ definida por $\phi_1(u, v) = v \otimes u$. É fácil verificar que ϕ_1 é bilinear. De fato, dados $u, u' \in U$ e $v, v' \in V$, temos

$$\phi_1(u + u', v) = v \otimes (u + u') = v \otimes u + v \otimes u' = \phi_1(u, v) + \phi_1(u', v).$$

Analogamente tem-se $\phi_1(u, v + v') = \phi_1(u, v) + \phi_1(u, v')$. Agora se λ é um escalar, temos $\phi_1(\lambda u, v) = v \otimes (\lambda u) = \lambda(v \otimes u) = \lambda\phi_1(u, v)$. Por outro lado, $\phi_1(u, \lambda v) = (\lambda v) \otimes u = \lambda(v \otimes u) = \lambda\phi_1(u, v)$. Portanto concluímos que ϕ_1 é bilinear. Pelo Teorema 3.1.1 temos que existe uma única aplicação linear $\tilde{\phi_1} : U \otimes V \to V \otimes U$, tal que $\tilde{\phi_1}(u \otimes v) = \phi_1(u, v) = v \otimes u$.

Considere agora a aplicação $\phi_2 : V \times U \to U \otimes V$ definida por $\phi_2(v, u) = u \otimes v$. É simples verificar que ϕ_2 é bilinear e logo, usando novamente o Teorema 3.1.1, temos que existe uma única aplicação linear $\tilde{\phi_2} : V \otimes U \to U \otimes V$ tal que $\tilde{\phi_2}(v \otimes u) = \phi_2(v, u) = u \otimes v$.

Vejamos que as aplicações $\tilde{\phi_1}$ e $\tilde{\phi_2}$ são inversas uma da outra. De fato, a aplicação $(\tilde{\phi_1} \circ \tilde{\phi_2}) : V \otimes U \to V \otimes U$ é tal que $(\tilde{\phi_1} \circ \tilde{\phi_2})(v \otimes u) = \tilde{\phi_1}(u \otimes v) = v \otimes u$, ou seja, a aplicação $(\tilde{\phi_1} \circ \tilde{\phi_2})$ equivale a aplicação identidade no conjunto dos tensores decomponíveis de $V \otimes U$. Como tal conjunto $V \otimes U$ gera $U \otimes V$, concluímos que $(\tilde{\phi_1} \circ \tilde{\phi_2})$ é igual a aplicação identidade.

Analogamente, a aplicação linear $(\tilde{\phi_2} \circ \tilde{\phi_1}) : U \otimes V \to U \otimes V$ tal que $(\tilde{\phi_2} \circ \tilde{\phi_1})(u \otimes v) = \tilde{\phi_2}(v \otimes u) = u \otimes v$, isto é, a aplicação $(\tilde{\phi_2} \circ \tilde{\phi_1})$ é equivalente a aplicação identidade dos tensores decomponíveis de $U \otimes V$. Como tal conjunto $U \otimes V$ gera $V \otimes U$, concluímos que $(\tilde{\phi_2} \circ \tilde{\phi_1})$ é igual a aplicação identidade. Logo $(\tilde{\phi_1} \circ \tilde{\phi_2})$ e $(\tilde{\phi_2} \circ \tilde{\phi_1})$ resultam na aplicação identidade, portanto $\tilde{\phi_1}$ é bijetora. $U \otimes V \approx V \otimes U$.$\square$

Conclusão

Através deste trabalho fizemos um estudo detalhado sobre o Produto Tensorial entre espaços vetoriais de dimensão finita. Com uma das construções abstratas que fizemos, podemos concluir que é relativamente simples construir o Produto Tensorial entre dois espaços vetoriais quaisquer. Vimos também que o Produto Tensorial entre dois espaços vetoriais são únicos, a menos de isomorfismo. Concluímos também que o espaço das aplicações bilineares $\mathcal{L}(U, V; W)$ e o espaço das aplicações lineares $\mathcal{L}(U \otimes V; W)$ são de certa forma idênticos, pois provamos que estes espaços são isomorfos. O mesmo podemos concluir para os espaços $(U \otimes V)^*$ e $U^* \otimes V^*$.

Referências Bibliográficas

[1] AMARAL, B.; BARAVIERA, A. T.; CUNHA, M. O. T. **Mecância Quântica para Matemáticos em Formação.** Publicações Matemáticas- Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, Rio de Janeiro, 2011.

[2] BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra Linear.** São Paulo: Harbra, 1986.

[3] EINSTEIN, A. **Os fundamentos da Teoria da Relatividade Geral.** Tradução de Alberto Ricardo Prass. Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS, 2000.

[4] FERREIRA, E. C. **Tensores e Aplicações**. Monografia (Graduação em Matemática)- Universidade Federal do Amapá - UNIFAP, 2013.

[5] GAELZER, R. **Álgebra e Análise Tensoriais.** Apostila de Física e Matemática - Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS, 2013.

[6] HOFFMAN, K.; KUNZE, R. **Álgebra Linear.** Tradução de Adalberto Panobianco Bergamasco. São Paulo: Polígono S.A., 1971.

[7] LIMA, E. L. **Álgebra Exterior.** Coleção Matemática Universitária - Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, Rio de Janeiro, 2014.

[8] LIMA, E. L. **Cálculo Tensorial.** Publicações Matemáticas - Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, Rio de Janeiro, 2012.

[9] MADRUGA, A. C. **Produto tensorial entre espaços de Banach e aplicações.** Dissertação (Mestrado em Matemática)- João Pessoa: Universidade Federal da Paraíba-UFPB, 2018.

[10] MURRAY, F. J. NEUMANN, N. V. **On rings of operators.** Annals of Math, **37** (1936), 116-229.

[11] STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Álgebra Linear.** São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.