Universidade Federal
de São João del-Rei

Isabela Cristina da Silva

Um estudo sobre as Equações Diferenciais Ordinárias e suas aplicações

São João del-Rei
Dezembro de 2022

Isabela Cristina da Silva

Um estudo sobre as Equações Diferenciais Ordinárias e suas aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenadoria do Curso de Matemática, da Universidade Federal de São João del-Rei, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Wilker Thiago Resende Fernandes
São João del-Rei, 20 de dezembro de 2022

Banca Examinadora

gov.br Documento assinado digitalmente
WILKER THIAGO RESENDE FERNANDES
Data: 31/05/2023 15:22:45-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Orientador: Prof. Dr. Wilker Thiago Resende Fernandes

gov.br Documento assinado digitalmente
PATRICIA TEMPESTA
Data: 31/05/2023 16:04:01-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Patrícia Tempesta

gov.br Documento assinado digitalmente
VIVIANE PARDINI VALERIO
Data: 01/06/2023 17:28:49-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Viviane Pardini Valério

São João del-Rei
Dezembro de 2022

Agradecimentos

Agradeço imensamente a Deus, que ao longo desta trajetória se fez presente em todos os momentos, me tornando forte o suficiente para superar os limites e desafios.

À minha família, que sempre esteve ao meu lado nos momentos felizes e tristes, sempre me mostrando que sou capaz de realizar meus sonhos. Agradeço especialmente, meus pais Sandro e Nikele, por me mostrarem a importância do conhecimento. À minha amada filha, por ser meu porto seguro, ser minha alegria e força!

Aos professores que contribuiram com o conhecimento adquirido ao longo destes anos, em especial ao meu orientador Wilker, por sua tamanha dedicação, paciência, serenidade e humanidade; e as professoras Patrícia Tempesta e Viviane Pardini Valério por aceitarem participar da banca avaliadora deste trabalho.

Ao longo destes anos, surgiram dificuldades mas agradeço também a elas, pois me trouxeram grandes aprendizados.

“A verdadeira coragem é ir atrás de seu sonho
quando todos dizem que ele é impossível”.
CORA CORALINA

Resumo

Este Trabalho de Conclusão de Curso contém uma introdução às Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Inicialmente, com o objetivo de situar o leitor sobre o assunto, fazemos uma breve introdução histórica, apontando alguns fatos e destacando pessoas importantes para o surgimento, desenvolvimento e consolidação das EDOs. Em seguida, apresentamos alguns conceitos básicos necessários para o entendimento do tema e os principais métodos de resolução para EDOs de primeira ordem e de ordens superiores. Por fim, apresentamos algumas das diversas aplicações das EDOs de primeira e segunda ordem.

Palavras chave: Equações diferenciais ordinárias. Métodos de resolução. Aplicações.

Abstract

This Final Paper contains an introduction to Ordinary Differential Equations (ODEs). Firstly, with the aim of situating the reader on the subject, we make a brief historical introduction, pointing out some facts and highlighting important people for the emergence, development and consolidation of ODEs. Next, we present some basic concepts that are necessary for understanding the subject and the main resolution methods for first order and higher order ODEs. Finally, we present some of the different applications of first and second order ODEs.

Key words: Ordinary differential equations. Resolution methods, Applications.

Sumário

Introdução

Segundo (BOYCE; DIPRIMA, 2010), o estudo das equações diferenciais teve seu início no Século XVII, por meio do cálculo idealizado por Isaac Newton (1642 - 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716). Inicialmente, elas sugiram como soluções para problemas associados a geometria e mecânica. Após o avanço inicial, a atenção foi voltada à procura de técnicas de solução de certos casos específicos de equações diferenciais.

De acordo com (BOYCE; DIPRIMA, 2010), as descobertas de Newton sobre o cálculo e as leis da mecânica datam de 1665. Apesar delas terem circulado entre seus amigos, Newton só as publicou a partir de 1687. Mesmo com sua pequena atuação em equações diferenciais, mas por meio do seu conhecimento de cálculo e das leis básicas da mecânica, Newton proporcionou a base para a aplicação de equações diferenciais e estabeleceu uma classificação para elas, de acordo com as formas abaixo,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \ \frac{dy}{dx} = f(x), \ \frac{dy}{dx} = f(y).$$

Foi por meio de seu conhecimento em escrever funções em termos de séries infinitas, que Newton conseguiu desenvolver um método de resolução utilizando dessas séries para solucionar uma equação de primeira ordem, $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, no caso em que $f(x, y)$ é um polinômio em x e y.

Leibniz dedicou sua vida acadêmica em diversos campos. Chegou de modo independente aos resultados fundamentais do cálculo e em 1684 os publicou, antes mesmo de Newton. Foi o responsável pela criação da notação de derivada, $\frac{dy}{dx}$, e o sinal de integral. Em 1691, criou o método de separação de variáveis e a redução de equações homogêneas em separáveis. Em 1694, desenvolveu o método de resolução de equações lineares de primeira ordem. Leibniz juntamente com os irmãos Bernoulli, puderam colaborar expressivamente para o avanço de métodos resolutivos de equações diferenciais (BOYCE; DIPRIMA, 2010).

Segundo Zill e Cullen (2001, p.79), "os Bernoulli foram acadêmicos cujas contribuições à matemática, física, astronomia e história datam do Século XVI ao XX". Os irmãos, Jakob Bernoulli (1654 – 1705) e Johann Bernoulli (1667 – 1748), por meio do cálculo, solucionaram problemas em mecânica os formulando como equações diferenciais. Jakob escreveu equações para o movimento planetário utilizando dos princípios de Newton, além de utilizar da expressão “integral” pela primeira vez em seu sentido moderno. Em 1696, Johann propôs o problema da braquistócrona, um problema que foi solucionado por ambos os irmãos, além de Leibniz, Newton e L' Hôspital. Outro nome envolvido nos estudos de equações diferenciais foi Daniel Bernoulli (1700 – 1782), filho de Johann Bernoulli, que se interessava principalmente por equações diferenciais e suas aplicações. Seu nome ficou atrelado à famosa equação de Bernoulli em mecânica dos fluídos. Foi também, o primeiro a encontrar as funções que seriam conhecidas um século mais tarde como funções de Bessel (BOYCE; DIPRIMA, 2010).

Leonhard Euler (1707 – 1783) foi considerado um gênio do Século XVIII. Seu trabalho nessa área abarcou estudos em álgebra, trigonometria, geometria analítica, cálculo, cálculo das variações, equações diferenciais, variável complexa, teoria dos números e topologia (ZILL; CULLEN, 2001). Euler formulou problemas de mecânica e desenvolveu métodos de resolução para estes. Entre 1734 e 1735, encontrou a condição para que as equações diferenciais de primeira ordem se tornem exatas e desenvolveu a teoria dos fatores integrantes. Em 1743 encontrou a solução geral para equações lineares homogêneas com coeficientes constantes e em 1750 expandiu esse resultado para equações não homogêneas. Euler usou séries de potências para resolver equações diferenciais. O uso de aproximações numéricas para a aproximação de soluções também se deve ao seu trabalho. Euler trouxe contribuições importantes em equações diferenciais parciais e deu o primeiro tratamento sistemático do cálculo de variações (BOYCE; DIPRIMA, 2010).

Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813) é conhecido pelo seu trabalho sobre mecânica newtoniana, equações diferenciais parciais e cálculo de variações. Ele introduziu equações gerais de movimento para sistemas dinâmicos, hoje conhecidas como equações de Lagrange. Em relação a equações diferenciais, Lagrange mostrou que a solução geral de uma equação diferencial linear homogênea de ordem n é uma combinação linear de n soluções independentes. Foi ele quem também desenvolveu o método de variação dos parâmetros (BOYCE; DIPRIMA, 2010).

Pierre-Simon de Laplace (1749 – 1827) foi matemático, físico e astrônomo. Ficou conhecido como “o Newton da França” e se destacou no campo da mecânica celeste (ZILL; CULLEN, 2001). A equação de Laplace, estudada em conexão com a atração gravitacional, é de suma importância em muitos ramos da física matemática. Embora reconhecida mais tarde, a transformada de Laplace, homenageada com seu nome, permite que seja solucionada uma equação diferencial ordinária de coeficientes constantes através da solução de uma equação algébrica (BOYCE; DIPRIMA, 2010).

O Século XVIII foi uma época de intenso desenvolvimento da teoria das equações diferenciais. Foi desenvolvido uma variedade de técnicas e métodos sistemáticos para determinar soluções de equações diferenciais em termos de funções elementares, resultados que ainda hoje fazem parte da teoria qualitativa das equações diferenciais. No fim deste século, ficou evidente que poucas equações diferenciais podiam ser resolvidas por métodos elementares o que levou a questionamentos sobre como encontrar condições de existência e unicidade de soluções e deduzir propriedades da solução através da análise da própria equação diferencial, foi a partir daí que surgiu a Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais e os trabalhos de Henri Poincaré (1854 - 1912).

A partir do Século XX, com o desenvolvimento da computação houve um progressivo aumento da capacidade de realização de cálculos laboriosos, tornando possível resolver uma gama de problemas por métodos numéricos.

Atualmente, as equações diferenciais constituem uma das áreas mais fecundas da Matemática, sendo fonte intensa de estudos e pesquisas, tanto por suas aplicações ao mundo moderno como por sua contribuição à criação e ao desenvolvimento de várias outras áreas como, por exemplo, Álgebra Linear, Análise Funcional, Análise Numérica, Cálculo de Variações, Dinâmica de Fluídos e Mecânica Quântica.

O trabalho está dividido em quatro capítulos. No Capítulo 1 apresentamos conceitos iniciais, definições importantes e classificações relacionadas às equações diferenciais. Os Capítulos 2 e 3 trazem os principais métodos de resolução para equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e de ordem superior. No Capítulo 4 algumas das diversas aplicações das EDOs de primeira e segunda ordem são apresentadas e, finalizando o texto, no Capítulo 5, apresentamos as considerações finais acerca do trabalho desenvolvido e em seguida as referências bibliográficas utilizadas.

Capítulo 1

Conceitos preliminares

Partindo da ideia de que em uma equação procuramos definir as incógnitas que, se substituídas por certos valores ou termos, tornam a igualdade verdadeira e de que a palavra *diferencial* se refere à derivada de uma função, obtemos de maneira intuitiva o significado para a expressão *equação diferencial*.

DEFINIÇÃO 1.1. *Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes é chamada de equação diferencial (ZILL; CULLEN, 2001).*

Equações diferenciais podem ser classificadas conforme o tipo, ordem e a linearidade.

(i) Classificação pelo tipo: uma equação diferencial que contém apenas derivadas de uma única variável independente é chamada de *equação diferencial ordinária (EDO)*, enquanto a que apresenta derivadas parciais de duas ou mais variáveis independentes é nomeada de *equação diferencial parcial (EDP)*.

EXEMPLO 1.1. *A equação diferencial* $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$, *é uma EDO, pois envolve derivadas de uma variável dependente,* y, *em relação a uma única variável independente,* x. *A equação diferencial* $\dfrac{du}{dx} - \dfrac{dv}{dx} = x$, *também é uma EDO, pois apesar de apresentar duas variáveis dependentes,* u *e* v, *ela envolve derivadas em relação a uma única variável independente,* x. *A equação diferencial* $\dfrac{\partial \mu(x,y)}{\partial x} + \dfrac{\partial \mu(x,y)}{\partial y} = \mu(x,y)$, *é uma EDP, pois apresenta uma única variável dependente,* μ, *e envolve derivadas parciais em relação a duas variáveis independentes,* x *e* y. ■

(ii) Classificação pela ordem: a ordem de uma equação diferencial é o valor da maior ordem entre as derivadas da equação.

EXEMPLO 1.2. *A equação diferencial* $y''' + 2e^t y'' + yy' = t^4$, *é uma EDO de terceira ordem, pois envolve as derivadas de uma única variável independente,* t, *e a derivada de maior ordem é 3. A equação diferencial* $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u$, *é uma EDP de segunda ordem,* *pois possui uma variável dependente, u, envolvendo derivadas parciais em relação a duas variáveis dependentes, x e y, e a derivada de maior é 2.* ■

Observação 1.1. *De modo geral, uma EDO pode ser representada na forma,*

$$F(x, y', y'', ...y^n) = 0, \tag{1.1}$$

onde F é uma função de x, y e das derivadas de y.

(iii) Classificação pela linearidade: uma EDO (1.1) é dita ser *linear* se a função F é linear em relação às variáveis $y, y', y'', ..., y^n$, isto é, se pode ser escrita na forma,

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \tag{1.2}$$

ou ainda, em uma equação diferencial linear a variável dependente, y, e todas as suas derivadas são de primeiro grau e cada coeficiente, a_1, $a_2, ...,$ a_n, depende apenas da variável independente, x. Uma equação diferencial que não é linear é chamada de *equação diferencial não-linear*, ou seja, não pode ser escrita na forma (1.2).

Exemplo 1.3. *A equação diferencial $\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} - 5y = e^x$, é linear, pois os coeficientes da variável dependente, y, e de suas derivadas são de grau 1 e são em relação a uma única variável independente x. A equação diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} + \sin y = 0$, é não-linear, pois a função $\sin y$ é não-linear. A equação diferencial $(1-y)y' + 2y = 3x$, é não-linear, pois o coeficiente que multiplica y', $(1-y)$, não depende apenas da variável independente, x.* ■

Definição 1.2. *Uma solução para uma EDO, $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, é uma função f que possui pelo menos n derivadas e satisfaz a equação, isto é, $F(x, f(x), f'(x), ..., f^n(x)) = 0$, para todo x no intervalo I.*

Exemplo 1.4. *Verifique se a função dada é uma solução para equação diferencial*

a) $y = e^x$; $y'' - 2y' + y = 0$.

b) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{x}}$; $y = (\sqrt{x} + c_1)^2$ *com* $x > 0, c_1 > 0$.

Solução:

a) Se $y = xe^x$ então $y' = e^x + xe^x$ e $y'' = 2e^x + xe^x$.

Assim, $y'' - 2y' + y = 2e^x + xe^x - 2(e^x + xe^x) + xe^x = 0$. Logo, y é solução para equação.

b) Se $y = (\sqrt{x} + c_1)^2$ então $y' = \frac{\sqrt{x} + c_1}{\sqrt{x}}$.

Logo, $\frac{dy}{dx} - \sqrt{\frac{(\sqrt{x} + c_1)^2}{x}} = \frac{\sqrt{x} + c_1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} + c_1}{\sqrt{x}} = 0$. Portanto, y é solução para equação. ■

Definição 1.3. *Uma solução para uma ED que é identicamente nula em um intervalo I é chamada de solução trivial.*

Definição 1.4. *Se a solução de uma EDO pode ser escrita na forma $y = f(x)$, ela é chamada de solução explícita e, se é escrita na forma $g(x, y) = 0$, ela é chamada de solução implícita.*

Exemplo 1.5. *Mostre que a relação $x^2 + y^2 - 4 = 0$ é uma solução implícita para a ED $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$ no intervalo $-2 < x < 2$.*

Solução: A relação $x^2 + y^2 - 4 = 0$ define duas funções diferenciais explícitas, $h(x) = y = \sqrt{4 - x^2}$ e $k(x) = y = -\sqrt{4 - x^2}$, no intervalo $(-2, 2)$. Como $h'(x) = -\dfrac{x}{y}$, então,

$$F(x, h(x), h'(x)) = \frac{dy}{dx} + \frac{x}{y} = -\frac{x}{y} + \frac{x}{y} = 0.$$

Isto mostra que a função $x^2 + y^2 - 4 = 0$, satisfaz a equação diferencial $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{x}{y}$, sendo assim uma solução da mesma no intervalo $(-2, 2)$. ■

Quando resolvemos uma EDO de 1ª ordem, $F(x, y, y') = 0$, normalmente obtemos uma família de curvas ou funções $G(x, y, c) = 0$ contendo um parâmetro arbitrário tal que cada membro da família é uma solução da EDO. Assim, quando resolvemos uma equação de n-ésima ordem, $F(x, y, y', ..., y^n) = 0$, em que $y^{(n)}$ significa $\dfrac{d^n y}{dx^n}$, esperamos uma família a n-parâmetros de soluções $G(x, y, c_1, ..., c_n) = 0$.

Exemplo 1.6. *Considere a EDO, $\dfrac{dy}{dx} = \sin x$. Para quaisquer valores de $c \in \mathbb{R}$, a função $y(x) = -\cos x + c$ é solução da EDO. Ou seja, escrevendo $G(x, y, c) = y + \cos x - c$, $G(x, y, c) = 0$ é uma família de soluções para a EDO considerada. A Figura 1.1 mostra o gráfico de algumas curvas da família de soluções $G(x, y, c) = 0$, para alguns valores de c.*

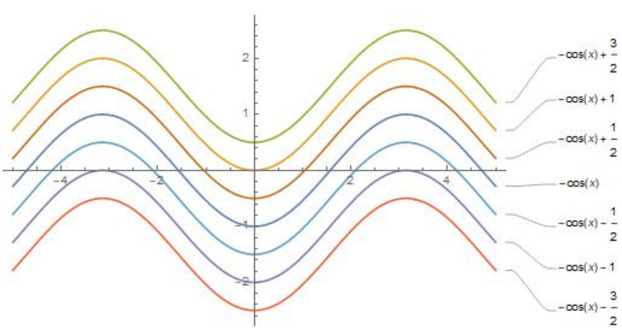

Figura 1.1: Gráfico de algumas soluções da EDO $y' = \sin x$.

Definição 1.5. • *A solução geral de uma EDO de n-ésima ordem é uma família a n-parâmetros de soluções que contém todas as soluções possíveis num intervalo I.*

- *Uma solução particular é uma função que pode ser obtida da solução geral por determinação do valor das n constantes arbitrárias. Neste caso, a determinação das n constantes depende de algumas condições dadas.*
- *Uma solução singular é uma função que é solução da EDO e que não pode ser obtida a partir da solução geral.*

Capítulo 2

Equações Diferenciais Ordinárias de 1^a ordem

Definição 2.1. *Uma EDO que contenha somente a primeira derivada* $y' = \dfrac{dy}{dx}$*, possivelmente* y *e alguma função de* x*, isto é, uma equação do tipo,* $y' = f(x, y)$ *é chamada de equação diferencial ordinária de 1ª ordem.*

2.1 Problema de valor inicial para EDOs de 1ª ordem

Estamos interessados em obter a solução para,

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}. \tag{2.1}$$

onde $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$. A este problema damos o nome de *Problema de valor inicial (PVI)* ou *Problema de Cauchy*. Normalmente, a condição inicial é usada para determinar o valor da constante c da solução geral. A solução de um PVI é, geometricamente, a solução da EDO cujo gráfico passa pelo ponto (x_0, y_0).

Antes de buscarmos soluções para um PVI, nos perguntamos se tal solução existe e, se existir, se é a única para o problema dado. Desse modo, utilizamos o teorema abaixo afim de garantir condições suficientes para a existência e unicidade da solução de um PVI.

Teorema 2.1 (Existência e unicidade de uma solução). *Seja* R *uma região retangular no plano* xy *definida por* $a \leq x \leq b$ *e* $c \leq y \leq d$ *que contém o ponto* (x_0, y_0) *em seu interior. Se* $f(x, y)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ *são contínuas em* R *então existe um intervalo* I *centrado em* x_0 *e uma única função* $y(x)$ *definida em* I *que satisfaz o PVI* (2.1).

A demonstração do Teorema 2.1 será omitida neste trabalho, o leitor pode encontrá-la em (DOERING; LOPES, 2007).

Exemplo 2.1. *Considere o PVI* $\begin{cases} (y+1)\dfrac{dy}{dx} = \cos x \\ y(0) = 2 \end{cases}$. *Verifique se as condições para a existência e unicidade de soluções são satisfeitas.*

Solução: Escrevendo a equação diferencial na forma explícita temos, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos x}{y+1}$. Note que $f(x,y) = \dfrac{\cos x}{y+1}$ e sua derivada, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\cos x}{(y+1)^2}$, são contínuas exceto quando $y = -1$, ou seja, essas funções são contínuas em qualquer retângulo centrado $(0,2)$ que não corte a reta $y = -1$. Logo, pelo Teorema 2.1, existe um intervalo I centrado em $x = 0$ no qual a equação diferencial dada possui uma única solução tal que $y(0) = 2$. ■

Exemplo 2.2. *Considere o PVI* $\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$. *É fácil verificar que* $y(x) = 0$ *e* $y(x) = \dfrac{x^4}{16}$ *são soluções do PVI no intervalo* $(-\infty, \infty)$*, ou seja, o PVI não possui solução única no intervalo* $(-\infty, \infty)$*. Por que este fato não contradiz o Teorema 2.1?*

Solução: Aqui temos $f(x,y) = x\sqrt{y}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x}{2\sqrt{y}}$. Logo, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ não é contínua em qualquer que seja a região contendo o ponto $(0,0)$ e assim as condições do Teorema 2.1 não são satisfeitas, ou seja, o Teorema 2.1 não pode ser aplicado. ■

A seguir, descrevemos alguns métodos para encontrar a solução de uma EDO de primeira ordem. É importante destacar que não há um único método que resolva todas as EDOs de primeira ordem e que métodos eficientes para a resolução de um determinado tipo de EDO podem não ser aplicáveis em um outro tipo (ZILL; CULLEN, 2001).

2.2 Soluções para EDOs de 1^a ordem

2.2.1 Equações separáveis

Uma EDO da forma $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{g(x)}{h(y)}$ é chamada separável pois suas variáveis x e y podem ser separadas de modo que y apareça somente no lado esquerdo da equação e x apenas no lado direito, ou vice-versa. Desse modo, podemos reescrevê-la na forma,

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x). \tag{2.2}$$

Observe que:

- (2.2) se reduz a $\dfrac{dy}{dx} = g(x)$ quando $h(y) = 1$.
- se $y = f(x)$ é uma solução para (2.2), então $h(f(x)) \cdot f'(x) = g(x)$.

Método de solução

Para resolver a equação integramos ambos os lados da igualdade com relação a x. Logo,

$$\int h(f(x)) \cdot f'(x)dx = \int g(x)dx + c. \tag{2.3}$$

Mas, se $y = f(x)$ então $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$, ou seja, $dy = f'(x)dx$. Substituindo este resultado em (2.3), chegamos ao método de solução para EDOs separáveis,

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c.$$

Exemplo 2.3. *Encontre a solução do PVI,* $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y} \\ y(4) = 3 \end{cases}$.

Solução: Primeiro separamos as variáveis, $ydy = -xdx$.
Em seguida, integramos ambos os lados da equação em relação a x,

$$\int ydy = \int -xdx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c_1 \Rightarrow x^2 + y^2 = c^2,$$

onde $c^2 = 2c_1$. Assim, encontramos a solução geral da equação: $x^2 + y^2 = c^2$, que neste caso representa uma família de círculos concêntricos.

Utilizando a condição inicial dada no problema encontramos o valor de c^2,

$$4^2 + 3^2 = c^2 \Rightarrow c^2 = 25.$$

Logo a solução do PVI é dada por $x^2 + y^2 = 25$.

Podemos verificar que a solução encontrada é única usando o Teorema 2.1. Note que,

- $f(x, y)$ é contínua em todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tais que $y \neq 0$. Logo, é continua em $(4, 3)$.
- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{y^2}$ é também contínua em todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tais que $y \neq 0$. Logo, é continua em $(4, 3)$.

Portanto, pelo Teorema 2.1 a EDO possui uma única solução passando pelo ponto $(4, 3)$, dada por $x^2 + y^2 = 25$. ■

2.2.2 Equações homogêneas

Definição 2.2. *Uma função f é homogênea de grau n, se $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ para algum número real n.*

Exemplo 2.4. *Verique que as funções abaixo são homogêneas.*

a) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2+y^2}$. *b)* $f(x,y) = x^3+y^3+1$.

Solução: a) $f(tx,ty) = \sqrt[3]{(tx)^2+(ty)^2} = \sqrt[3]{t^2(x^2+y^2)} = t^{\frac{2}{3}} f(x,y)$. Logo, a função dada é homogênea de grau $n = \dfrac{2}{3}$.

b) $f(tx,ty) = (tx)^3+(ty)^3+1 = t^3(x^3+y^3)+1 \neq t^3 f(x,y)$. Portanto, a função não é homogênea.

■

Observação 2.1. *Podemos analisar a homogeneidade de uma função polinomial examinando o grau de cada monômio que a compõe, se todos os termos forem do mesmo grau a função será homogênea. Caso contrário, a função será não homogênea.*

Observação 2.2. *Se $f(x,y)$ for uma função homogênea de grau n, podemos escrever: $f(x,y) = x^n f\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$ e $f(x,y) = y^n f\left(\dfrac{x}{y}, 1\right)$, em que $f\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$ e $f\left(\dfrac{x}{y}, 1\right)$ são ambas homogêneas de grau zero.*

Definição 2.3. *Chamamos de equação diferencial homogênea a equação da forma,*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

em que os coeficientes M e N são funções homogêneas do mesmo grau, ou seja, $M(tx,ty) = t^n M(x,y)$ e $N(tx,ty) = t^n N(x,y)$.

Método de solução: Podemos resolver uma EDO homogênea através da substituição algébrica, $y = ux$ ou $x = vy$, onde u e v são novas variáveis independentes. Assim, temos $dy = udx + xdu$ no primeiro caso e $dx = vdy + ydv$ no segundo caso. Dessa maneira, obtemos uma EDO de 1ª ordem separável. Substituindo y por ux, temos, $M(x,ux)dx + N(x,ux)[udx+xdu] = 0$.

Pela propriedade da homogeneidade, observação (2.2), podemos escrever,

$$\begin{aligned}
& M(x,ux)dx + N(x,ux)[udx+xdu] = 0 \\
\Rightarrow & x^n M\left(1, \frac{ux}{x}\right)dx + x^n N\left(1, \frac{ux}{x}\right)[udx+xdu] = 0 \\
\Rightarrow & x^n M(1,u)dx + x^n N(1,u)[udx+xdu] = 0 \\
\Rightarrow & [x^n M(1,u)]dx + [x^n N(1,u)u]dx + [x^n N(1,u)x]du = 0 \\
\Rightarrow & M(1,u)dx + uN(1,u)dx + xN(1,u)du = 0 \\
\Rightarrow & [M(1,u) + uN(1,u)]dx + xN(1,u)du = 0 \\
\Rightarrow & \frac{dx}{x} + \frac{N(1,u)du}{M(1,u)+uN(1,u)} = 0.
\end{aligned}$$

A última equação acima é uma EDO separável e pode ser resolvida de acordo com o método da Seção 2.2.1.

Exemplo 2.5. *Encontre a solução da EDO* $(x^2+y^2)dx+(x^2-xy)dy=0$.

Solução: Observe que ambos os termos $M(x,y)=(x^2+y^2)$ e $N(x,y)=(x^2-xy)$ são de grau 2, logo a equação é homogênea. Utilizaremos o método das equações separáveis para encontrar a solução da EDO. Inicialmente, faremos a mudança de variável de y por ux.

Aplicando a mudança sugerida acima, obtemos,

$$(x^2+u^2x^2)dx+(x^2-x^2u)[xdu+udx]=0.$$

Pela propriedade da homogeneidade, podemos escrever,

$$\begin{aligned}
&x^2M(1,u)dx+x^2N(1,u)[xdu+udx]=0\\
\Rightarrow &x^2(1+u^2)dx+x^2(1-u)[xdu+udx]=0\\
\Rightarrow &(x^2+x^2u^2)dx+[x^2(1-u)x]du+[x^2u(1-u)]dx=0\\
\Rightarrow &(x^2+x^2u^2+x^2u-x^2u^2)dx+[x^3(1-u)]du=0\\
\Rightarrow &(x^2+x^2u)dx+[x^3(1-u)]du=0\\
\Rightarrow &[x^2(1+u)]dx+[x^3(1-u)]du=0\\
\Rightarrow &\frac{x^2}{x^3}dx+\frac{1-u}{1+u}du=0\\
\Rightarrow &\frac{1}{x}dx+\frac{1-u}{1+u}du=0\\
\Rightarrow &\left[-1+\frac{2}{1+u}\right]du+\frac{1}{x}dx=0.
\end{aligned}$$

Integrando a última linha, temos,

$$\int\left(-1+\frac{2}{1+u}\right)du+\int\frac{1}{x}dx=0\Rightarrow -u+2ln|1+u|+ln|x|=ln|c|.$$

Como $y=ux$, então $u=\dfrac{y}{x}$. Assim obtemos,

$$\begin{aligned}
-\frac{y}{x}+ln\left|\left(1+\frac{y}{x}\right)^2\right|+\ln|x|=ln|c| &\Rightarrow -\frac{y}{x}+ln\left|\left(1+\frac{y}{x}\right)^2x\right|=ln|c|\\
&\Rightarrow -\frac{y}{x}=\ln\left|\left(1+\frac{y}{x}\right)^2x\right|-\ln|c|=0\\
&\Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{\ln\left|\left(1+2\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}\right)x\right|}{ln|c|}\\
&\Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{\ln\left|\left(\frac{x^2+2xy+y^2}{x}\right)\right|}{ln|c|}\\
&\Rightarrow \frac{y}{x}=\ln\left|\frac{(x+y)^2}{cx}\right|.
\end{aligned}$$

Aplicando exponencial de ambos os lados da igualdade e considerando o intervalo de solução com $x > 0$, encontramos, $e^{\frac{y}{x}} = \frac{(x+y)^2}{cx} \Rightarrow (x+y)^2 = cxe^{\frac{y}{x}}$.

Portanto, a solução da EDO é dada pela função implícita $g(x,y) = 0$, onde $g(x,y) = (x+y)^2 - cxe^{\frac{y}{x}}$. ■

2.2.3 Equações exatas

Seja $f(x,y) = c$ uma família de curvas, onde c é uma constante e f uma função diferenciável. Lembramos que a diferencial total de f é dada por,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Segue que se $f(x,y) = c$, então $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy = 0$. Em outras palavras, dada uma família de curvas $f(x,y) = c$, podemos gerar uma EDO de 1^a ordem calculando sua diferencial total. Além disso, é claro que $f(x,y) = c$ é uma solução para a EDO $df = 0$.

Exemplo 2.6. *Calcule a diferencial total da função $f(x,y) = x^2 - 5xy + y^3 = c$.*

Solução: $\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2 - 5xy + y^3) + \dfrac{\partial}{\partial y}(x^2 - 5xy + y^3) = 0 \Rightarrow (2x - 5y)dx + (-5x + 3y^2)dy = 0$. Reescrevendo a equação acima, temos, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x+5}{-5x+3y^2}$, isto é, a equação diferencial de 1^a ordem gerada pela diferencial total de f é dada por, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x+5}{-5x+3y^2}$. ■

Definição 2.4. *Uma equação diferencial da forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é chamada de equação exata se a expressão do lado esquerdo é uma diferencial exata, ou seja, $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ corresponde à diferencial total de alguma função $f(x,y)$, isto é, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$.*

Exemplo 2.7. *A equação diferencial $x^2y^3dx + x^3y^2dy = 0$ é uma equação exata.*

Solução: De fato, tomando $f(x,y) = \dfrac{x^3y^3}{3}$, temos $\dfrac{\partial f}{\partial x} = x^2y^3$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^3y^2$. Portanto, a equação $x^2y^3dx + x^3y^2dy = 0$, é exata pois corresponde à derivada total da função $f(x,y) = \dfrac{x^3y^3}{3}$. ■

Teorema 2.2. *Sejam $M(x,y)$ e $N(x,y)$ funções contínuas com derivadas parciais contínuas em uma região retangular $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; a < x < b \text{ e } c < y < d\}$. Então, $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ é uma diferencial exata se, e somente se, $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Se a expressão diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ é exata, existe uma função f tal que para todo (x,y) em R,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Daí, $M(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $N(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}$. Logo, $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ e $\dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Como, por hipótese, $M(x,y)$ e $N(x,y)$ possuem derivadas parciais de primeira ordem contínuas em R, f possui derivadas parciais de segunda ordem contínuas em R. Assim, pelo Teorema de Schwarz, temos $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Portanto, $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

($\Leftarrow$) Precisamos mostrar que $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ é uma diferencial exata, isto é, mostrar que existe uma função f tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$.

Primeramente, integramos $M(x,y)$ em relação a x (ou $N(x,y)$ em relação a y), obtendo,

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y). \tag{2.4}$$

Derivando parcialmente a equação (2.4) em relação a y e supondo $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$, obtemos,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + g'(y) = N(x,y),$$

daí,

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx.$$

Integrando em relação a y encontramos,

$$g(y) = \int \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right) dy + c. \tag{2.5}$$

Substituindo (2.5) em (2.4), obtemos a função f,

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + \int \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right) dy + c.$$

É claro que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$, pois,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} =& \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx + \int \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right) dy + c\right] \\
=& \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx \\
=& N(x,y);
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} =& \frac{\partial}{\partial x}\left[\int M(x,y)dx + \int \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right) dy + c\right] \\
=& M(x,y) + \frac{\partial}{\partial x}\int \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right) dy,
\end{aligned}
$$

note que $\left(N(x,y) - \dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int M(x,y)dx\right)$ não depende de x, de fato,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right] &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right) \\
&= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.
\end{aligned}
$$

Daí, $\displaystyle\int \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right) dy$, também não depende de x. Assim,

$$
\frac{\partial}{\partial x}\int \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right) dy = 0.
$$

Portanto, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$. ■

Observação 2.3. *Segue da demonstração do Teorema 2.2 um método para encontrar solução para equações exatas. Dada a equação $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$,*

1. *Mostre que $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$;*

2. *Supondo que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$, encontramos $f(x,y) = \displaystyle\int M(x,y)dx + g(y)$;*

3. *Derivando f em relação a y e supondo $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$, obtemos,*

$$
\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + g'(y) = N(x,y) \Longrightarrow g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx;
$$

4. *Integrando $g'(y)$ em relação a y e substituindo na expressão de $f(x,y)$, encontramos a solução para equação,*

$$
f(x,y) = \int M(x,y)dx + \int \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right) dy = c.
$$

EXEMPLO 2.8. *Encontre a solução para equação, $(2xy)dx + (x^2-1)dy = 0$.*

Solução: Sejam $M(x,y) = 2xy$ e $N(x,y) = x^2 - 1$, logo, $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2x = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

Note que M e N possuem derivadas parciais contínuas em todo $\mathbb{R}^2$. Assim, segue do Teorema 2.2 que a equação diferencial é exata e portanto existe uma função $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1.$$

.

Integrando a primeira equação em relação a x obtemos,

$$\int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int 2xydx \Rightarrow f(x,y) = x^2y + g(y).$$

Derivando o resultado em relação a y e supondo que $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1$, temos,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2y + g'(y) = x^2 - 1.$$

Assim, $g'(y) = -1 \Rightarrow g(y) = -y$, logo $f(x,y) = x^2y - y$. Portanto, $x^2y - y = c$ é solução para a EDO. ■

2.2.4 Equações lineares

Conforme definido anteriormente, uma EDO linear pode ser escrita na forma (1.2),

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

Assim, para uma EDO linear de primeira ordem temos,

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0y = g(x).$$

Esta equação pode ser reescrita como,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x), \tag{2.6}$$

onde, $P(x) = \dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}$ e $f(x) = \dfrac{g(x)}{a_1(x)}$.

Note que, se $P(x) = 0$, a EDO (2.6) torna-se, $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$, cuja solução é $y(x) = \displaystyle\int f(x)dx + c$, chamemos esse caso de *particular*. Para encontrarmos a solução de (2.6), onde $P(x)$ não é, necessariamente, identicamente nula vamos definir uma função auxiliar $\mu(x)$ de forma que, ao multiplicarmos (2.6) por $\mu(x)$, a nova equação é como a do caso particular, isto é, com $P(x) \equiv 0$, cuja solução pode ser obtida integrando a função do lado direito da igualdade. Uma função $\mu(x)$ com a propriedade descrita acima é chamada de *fator integrante* da EDO (2.6).

TEOREMA 2.3. *A função* $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$, *é um fator integrante da EDO* (2.6).

Demonstração: Multiplicando a EDO (2.6) por $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$, obtemos,

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)f(x). \tag{2.7}$$

Agora, note que,

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int P(x)dx\right)e^{\int P(x)dx} = P(x)e^{\int P(x)dx} = P(x)\mu(x).$$

Substituindo este resultado em (2.7), temos,

$$\mu\frac{dy}{dx} + \frac{d\mu}{dx}y = \mu(x)f(x). \tag{2.8}$$

Segue da derivada do produto de duas funções que,

$$\frac{d}{dx}(\mu y) = \frac{d\mu}{dx}y + \mu\frac{dy}{dx}.$$

Logo, substituindo no lado esquerdo da equação (2.8) obtemos,

$$\frac{d(\mu y)}{dx} = \mu(x)f(x). \tag{2.9}$$

Escrevendo $\mu y = Y$ e $\mu f = F$, obtemos a EDO, $\dfrac{dY}{dx} = F(x)$, que é da forma do caso particular com $P(x) \equiv 0$.

Portanto $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$, é um fator integrante da EDO (2.6). ■

Observação 2.4. *Integrando* (2.9)*, obtemos,* $\mu(x)y(x) = \displaystyle\int \mu(x)f(x) + c$*. Como* $\mu(x) \neq 0$*, para todo* x*, encontramos a solução geral da EDO* (2.6)*,*

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)f(x) + c\right] = \frac{1}{e^{\int P(x)dx}}\left[\int e^{\int P(x)dx}f(x) + c\right].$$

Observação 2.5. *Segue da Observação 2.4 o método para encontrar solução para equações lineares de primeira ordem.*

1. *Coloque a equação na forma* $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$*;*

2. *Identifique* $P(x)$ *e encontre o fator de integração* $e^{\int P(x)dx}$*;*

3. *Multiplique a equação pelo fator de integração,*

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)dx}P(x)y = e^{\int P(x)dx}f(x).$$

4. *O lado esquerdo da equação obtida acima é exatamente a derivada do produto do*

fator integrante pela variável dependente y, isto é,

$$\frac{d}{dx}[e^{\int P(x)dx}y] = e^{\int P(x)dx}f(x).$$

5. *Por fim, integre ambos os lados dessa última equação para encontrar a solução,*

$$y(x) = \frac{1}{e^{\int P(x)dx}}\left[\int e^{\int P(x)dx}f(x) + c\right].$$

Exemplo 2.9. *Encontre a solução do PVI* $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - 3y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}.$

Solução: Como na EDO $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$, $P(x) = -3$, o fator integrante é $\mu(x) = e^{\int -3dx} = e^{-3x}$. Multiplicando a equação pelo fator integrante, obtemos,

$$e^{-3x}\frac{dy}{dx} - 3ye^{-3x} = 0.$$

Como $\frac{d}{dx}[e^{-3x}y] = e^{-3x}\frac{dy}{dx} - 3ye^{-3x}$, temos $\frac{d}{dx}[e^{-3x}y] = 0$. Integrando essa última equação,

$$\int \frac{d}{dx}[e^{-3x}y] = \int 0 \Rightarrow e^{-3x}y = c \Rightarrow y(x) = ce^{3x}.$$

Logo a solução geral da EDO, $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$, é dada por $y(x) = ce^{3x}$.

Agora, como a condição inicial é $y(0) = 1$, segue que, $c = 1$. Portanto, a solução para o PVI é $y(x) = e^{3x}$. ■

2.2.5 Equação de Bernoulli

Definição 2.5. *Chamamos de equação de Bernoulli a equação diferencial,*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n, \tag{2.10}$$

em que n é um número real.

Observe que para $n = 0$ e $n = 1$, a equação (2.10) é linear em y.

Se $y \neq 0$, podemos reescrever (2.10) como,

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = f(x). \tag{2.11}$$

Através de uma substituição reduziremos esta equação em uma equação diferencial linear. Assim, se, $w = y^{1-n}, (n \neq 0, n \neq 1)$ então $\frac{dw}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$. Substituindo em

(2.11), temos,

$$\frac{dw}{dx} + (1-n)P(x)w = (1-n)f(x). \tag{2.12}$$

Como $P(x)$ aparece precedido do termo $(1-n)$, o fator integrante de (2.12) é,

$$e^{(1-n)\int P(x)dx}.$$

Conforme o método proposto para resolver equações lineares, multiplicamos a equação pelo fator integrante, assim obtemos,

$$e^{(1-n)\int P(x)dx}\frac{dw}{dx} + e^{(1-n)\int P(x)dx}(1-n)P(x)w = e^{(1-n)\int P(x)dx}(1-n)f(x).$$

Já que o lado esquerdo da equação acima é exatamente igual a derivada do produto do fator integrante $e^{(1-n)\int P(x)dx}$ pela variável independente w, podemos reescrever a equação acima como,

$$\frac{d}{dx}[e^{(1-n)\int P(x)dx}w] = e^{(1-n)\int P(x)dx}(1-n)f(x).$$

Integrando ambos os lados desta equação, temos,

$$\int\left(\frac{d}{dx}[e^{(1-n)\int P(x)dx}w]\right)dx = \int[e^{(1-n)\int P(x)dx}(1-n)f(x)]dx.$$

Logo,

$$e^{(1-n)\int P(x)dx}w = \int[e^{(1-n)\int P(x)dx}(1-n)f(x)]dx + c.$$

Assim,

$$w = e^{-(1-n)\int P(x)dx}c + e^{-(1-n)\int P(x)dx}\int[e^{(1-n)\int P(x)dx}(1-n)f(x)]dx.$$

Portanto, para encontrarmos a solução y, basta fazermos $w = y^{1-n}$.

EXEMPLO 2.10. *Encontre a solução para equação* $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2$.

Solução: Podemos reescrever a equação como,

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{xy} = x. \tag{2.13}$$

Aqui temos $n = 2$. Assim, $w = y^{1-n} = y^{-1} \Rightarrow w' = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$. Substituindo w e w' em (2.13), obtemos,

$$\frac{dw}{dx} - \frac{1}{x}w = -x.$$

Esta equação é uma EDO linear, assim utilizaremos o método do fator integrante para encontrar a solução. Como $P(x) = -\dfrac{1}{x}$, o fator integrante é, $\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln|x|} = e^{\ln|x|^{-1}} = |x|^{-1}$. Sendo o intervalo máximo de existência de soluções $(0, +\infty)$, temos $x > 0$. Daí, $\mu(x) = x^{-1}$.

Multiplicando a equação, $\dfrac{dw}{dx} - \dfrac{1}{x}w = -x$, por x^{-1}, temos,

$$x^{-1}\frac{dw}{dx} - x^{-1}\frac{1}{x}w = x^{-1}(-x) \Rightarrow x^{-1}\frac{dw}{dx} - \frac{1}{x^2}w = -1.$$

Como $x^{-1}\dfrac{dw}{dx} - \dfrac{1}{x^2}w = \dfrac{d}{dx}[x^{-1}w]$, segue que,

$$\frac{d}{dx}[x^{-1}w] = -1.$$

Integrando ambos os lados da equação acima obtemos,

$$\int \frac{d}{dx}[x^{-1}w]dx = \int -1dx \Rightarrow x^{-1}w = -x + c \Rightarrow w = -x^2 + cx.$$

Agora, como $w = y^{-1}$ temos $y = w^{-1}$. Portanto, a solução geral para a EDO é, $y = \dfrac{1}{-x^2 + cx}$. ■

2.2.6 Equação de Ricatti

DEFINIÇÃO 2.6. *A equação diferencial não linear,*

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2, \tag{2.14}$$

é chamada de equação de Ricatti.

Para resolver essa equação, inicialmente precisamos encontrar uma solução particular, y_1. Façamos agora a substituição, $y = y_1 + u \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy_1}{dx} + \dfrac{du}{dx}$. Substituindo em (2.14) obtemos,

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx} &= P(x) + Q(x)(y_1 + u) + R(x)(y_1 + u)^2 \\
&= P(x) + Q(x)y_1 + Q(x)u + R(x){y_1}^2 + 2R(x)y_1u + R(x)u^2 \\
&= [P(x) + Q(x)y_1 + R(x){y_1}^2] + [Q(x)u + 2R(x)y_1u + R(x)u^2].
\end{aligned}$$

Já que y_1 é uma solução particular para (2.14), temos,

$$\frac{dy_1}{dx} = P(x) + Q(x)y_1 + R{y_1}^2,$$

daí,

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + [Q(x)u + 2R(x)y_1u + R(x)u^2].$$

Assim, encontramos a seguinte equação diferencial para u,

$$\frac{du}{dx} = [Q(x) + 2R(x)y_1]u + R(x)u^2. \tag{2.15}$$

Observe que (2.15) é uma equação de Bernoulli com $n = 2$, onde $P(x) = Q(x) + 2R(x)y_1$ e $f(x) = R(x)$.

Reescrevendo (2.15) na forma $u^{-2}\frac{du}{dx} - [Q(x) + 2R(x)y_1]u^{-1} = R(x)$, e fazendo a substituição $w = u^{-1} \Rightarrow \frac{dw}{dx} = -u^{-2}\frac{du}{dx} \Rightarrow -\frac{dw}{dx} = u^{-2}\frac{du}{dx}$, em (2.15), obtemos a equação,

$$-\frac{dw}{dx} - [Q(x) + 2R(x)y_1]w = R(x) \Rightarrow \frac{dw}{dx} + [Q(x) + 2R(x)y_1]w = -R(x).$$

Esta última equação é uma EDO linear onde $P(x) = Q(x) + 2R(x)y_1$. Assim, o fator integrante é $\mu(x) = e^{\int [Q(x)+2R(x)y_1]dx}$, e a solução da equação é,

$$w = -ce^{-\int [Q(x)+2R(x)y_1]dx} - e^{-\int [Q(x)+2R(x)y_1]dx} \int [e^{\int [Q(x)+2R(x)y_1]dx} R(x)]dx.$$

Como $w = u^{-1}$, temos,

$$u = \frac{1}{ce^{-\int [Q(x)+2R(x)y_1]dx} + e^{-\int [Q(x)+2R(x)y_1]dx} \int [e^{\int [Q(x)+2R(x)y_1]dx} R(x)]dx}.$$

Portanto, a solução geral para equação (2.14) é,

$$\begin{aligned} y &= y_1 + u \\ &= y_1 + \frac{1}{ce^{-\int [Q(x)+2R(x)y_1]dx} + e^{-\int [Q(x)+2R(x)y_1]dx} \int [e^{\int [Q(x)+2R(x)y_1]dx} R(x)]dx}. \end{aligned}$$

EXEMPLO 2.11. *Verifique que $y_1 = 2x$ é uma solução para a equação $\frac{dy}{dx} = 2 - 2xy + y^2$ e encontre sua solução geral.*

Solução: Primeiramente, note que a EDO acima é de Ricatti. $y_1 = 2x$ é solução da EDO, pois,

$$\frac{d}{dx}[2x] - 2 + 2x \cdot 2x - (2x)^2 = 0.$$

Fazendo a substituição, $y = y_1 + u = 2x + u$, obtemos,

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx} = 2 - 2x(y_1 + u) + (y_1 + u)^2.$$

Como $y_1 = 2x$, $y_1' = 2$. Reescrevendo a equação acima,

$$2 + \frac{du}{dx} = 2 - 2x(2x + u) + (2x + u)^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2xu + u^2.$$

Note que esta última equação é uma EDO de Bernoulli com $n = 2$. Assim, reescrevendo-a na forma $u^{-2}\dfrac{du}{dx} - 2xu^{-1} = 1$, e fazendo a substituição $w = u^{-1} \Rightarrow -\dfrac{dw}{dx} = u^{-2}\dfrac{du}{dx}$, obtemos a EDO linear,

$$-\frac{dw}{dx} - 2xw = 1 \Rightarrow \frac{dw}{dx} + 2xw = -1, \tag{2.16}$$

onde $P(x) = 2x$ e portanto, o fator integrante é $\mu(x) = e^{\int 2xdx} = e^{x^2}$.

Assim, a solução de (2.16) é,

$$w = ce^{-x^2} - e^{-x^2}\int e^{x^2}dx.$$

Como a integral $\displaystyle\int e^{x^2}dx$ não pode ser expressa em termos de funções elementares, a reescrevemos como $\displaystyle\int_{x_0}^{x} e^{x^2}dt$, em que x_0 é uma constante. Daí,

$$w = ce^{-x^2} - e^{-x^2}\int_{x_0}^{x} e^{t^2}dt.$$

Finalmente, como $w = u^{-1}$, temos $u = \dfrac{1}{ce^{-x^2} - e^{-x^2}\int_{x_0}^{x} e^{t^2}dt}$ e portanto, a solução geral para equação é,

$$y = y_1 + u = 2x + \frac{1}{ce^{-x^2} - e^{-x^2}\int_{x_0}^{x} e^{t^2}dt}.$$

■

2.2.7 Equação de Clairaut

DEFINIÇÃO 2.7. *Uma equação diferencial de primeira ordem escrita como,*

$$y = xy' + f(y'), \tag{2.17}$$

é chamada de equação diferencial de Clairaut.

Vemos que a família de retas $y = cx + f(c)$, em que c é uma constante arbitrária, são soluções de (2.17). De fato, $y = cx + f(c) \Rightarrow y' = c$. Substituindo este resultado em (2.17), obtemos: $y = cx + f(c)$.

A equação (2.17) pode ainda possuir um outro grupo de soluções que é dado na forma paramétrica,

$$x = -f'(t), y = f(t) - tf'(t).$$

Esta equação é singular pois se $f'(t) \neq 0$ ela não pode ser obtida da família de soluções

$y = cx + f(c)$.

Exemplo 2.12. *Encontre a solução para equação* $y = xy' + \frac{1}{2}(y')^2$.

Solução: Note que a EDO acima é uma equação de Clairaut. Assim, $f(y') = \frac{1}{2}(y')^2$. Logo, temos, $f(t) = \frac{1}{2}t^2$.

Segue que uma família de soluções para equação é $y = cx + f(c) \Rightarrow y = cx + \frac{1}{2}c^2$.

Como $f'(t) = t$, podemos ainda obter uma solução singular,

$$x = -f'(t), y = f(t) - tf'(t) \Rightarrow x = -t, y = \frac{1}{2}t^2 - t^2 = -\frac{1}{2}t^2.$$

Eliminando o parâmetro obtemos como solução $y = -\frac{1}{2}x^2$. Percebemos que esta função não faz parte da família de soluções $y = cx + \frac{1}{2}c^2$. ■

Capítulo 3

Equações Diferenciais Ordinárias de ordem superior

Neste capítulo estudaremos métodos para resolução de EDOs lineares de ordem maior que um. Inicialmente, vejamos algumas definições preliminares.

3.1 Problema de valor inicial para EDOs de ordem superior

Considere um sistema formado por uma EDO linear de n-ésima ordem e n condições complementares que a determinam. Se o valor da função incógnita e de suas derivadas até a ordem $n-1$ são especificadas em um mesmo ponto, então temos um *problema de valor inicial (PVI).*

$$\begin{cases} a_n(x)\dfrac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\dfrac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ \qquad \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = {y_0}^{(n-1)} \end{cases} . \tag{3.1}$$

As condições $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, são chamadas de *condições iniciais da EDO* (3.1). Uma solução para o PVI (3.1) é uma função $y = f(x)$, n vezes derivável, que satisfaz as condições iniciais dadas e a equação diferencial em um intervalo I.

Teorema 3.1 (Existência e unicidade de soluções). *Sejam $a_n(x), a_{n-1}(x), ..., a_1(x), a_0(x)$ e $g(x)$ contínuas em um intervalo I, com $a_n(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Então, dado $x_0 \in I$, existe uma única solução $y(x)$ para o PVI* (3.1) *no intervalo I.*

A demonstração do Teorema 3.1 será omitida neste trabalho, o leitor pode encontrá-la em (DOERING; LOPES, 2007).

EXEMPLO 3.1. *Mostre que a função* $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ *é a única solução para o PVI,*

$$\begin{cases} y'' - 4y = 12x \\ y(0) = 4 \\ y'(0) = 1 \end{cases},$$

no intervalo $(-\infty, \infty)$.

Solução: Como $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$, temos que $y'' = 12e^{2x} + 4e^{-2x}$. Assim,

$$\begin{aligned} y'' - 4y - 12x &= 12e^{2x} + 4e^{-2x} - 4(3e^{2x} + e^{-2x} - 3x) - 12x \\ &= 12e^{2x} + 4e^{-2x} - 12e^{2x} - 4e^{-2x} + 12x - 12x = 0. \end{aligned}$$

Logo, y é de fato solução para EDO em questão.

Agora, note que a equação diferencial $y'' - 4y = 12x$ é linear. Seus coeficientes, $a_2(x) = 1$, $a_1(x) = 4$ e $g(x) = 12x$, são contínuos em $\mathbb{R}$ e, além disso, $a_2(x) = 1 \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, pelo Teorema 3.1, $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ é a única solução do PVI definida em $I = (-\infty, \infty)$. ■

EXEMPLO 3.2. *Verifique que a função* $y = cx^2 + x + 3$*, onde* $c \in \mathbb{R}$*, é solução para o PVI,*

$$\begin{cases} x^2y'' - 2xy' + 2y = 6 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 1 \end{cases},$$

no intervalo $(-\infty, \infty)$ *para qualquer* c*. Explique porque não há contradição com o Teorema 3.1.*

Solução: Como $y = cx^2 + x + 3$, temos: $y' = 2cx + x + 3$ e $y'' = 2c$. Assim,

$$\begin{aligned} x^2y'' - 2xy' + 2y &= x^2 \cdot 2c - 2x \cdot (2cx + 1) + 2 \cdot (cx^2 + x + 3) \\ &= 2cx^2 - 4cx^2 - 2x + 2cx^2 + 2x + 6 = 6. \end{aligned}$$

Além disso, $y(0) = c \cdot 0^2 + 0 + 3 = 3$ e $y'(0) = 2 \cdot 0 \cdot c + 1 = 1$. Assim, y é solução para o PVI para qualquer valor de c, ou seja, existem infinitas soluções para o PVI. Esse fato não contradiz o Teorema 3.1, pois embora a EDO seja linear e os coeficientes, $a_2(x) = x^2, a_1(x) = -2x, a_0(x) = 2$ e $g(x) = 6$, sejam contínuos em toda a reta, $a_2(x) = x^2$ se anula quando $x = 0$, logo as condições não são satisfeitas. ■

3.1.1 Dependência e independência linear

DEFINIÇÃO 3.1. *Dizemos que as funções $f_1, f_2, ..., f_n$ são linearmente dependentes (LD) em um intervalo I se existem constantes $c_1, c_2, ..., c_n$, não todas nulas, tais que,*

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n = 0,$$

para todo $x \in I$. Se $f_1, f_2, ..., f_n$ não são LD dizemos que elas são linearmente independentes (LI),ou seja, se para as únicas constantes não todas nulas,

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n = 0,$$

para todo $x \in I$.

Observação 3.1. *Seja f_1 a função identicamente nula em um intervalo I, isto é, $f_1(x) = 0$ para todo $x \in I$. Então qualquer que seja a função f_2 definida em I, tem-se que f_1 e f_2 são LD.*

Observação 3.2. *Note que, se duas funções f_1 e f_2 são linearmente dependentes em um intervalo I, então existem constantes c_1 e c_2, não nulas, tais que, para todo $x \in I$,*

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0.$$

Assim, se supormos $c_1 \neq 0$ teremos,

$$f_1(x) = -\frac{c_2}{c_1} f_2(x),$$

isto é, se duas funções são LD, então uma é múltipla escalar da outra. Reciprocamente, se $f_1(x) = c f_2(x)$ para alguma constante c, então $(-1)f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$ para todo x em algum intervalo. Logo, as funções são LD, pois pelo menos umas das constantes $(c_1 = -1)$ é não nula.

EXEMPLO 3.3. *As funções $f_1(x) = \sin 2x$ e $f_2(x) = \sin x \cos x$ são LD no intervalo $(-\infty, \infty)$.*

Solução: De fato, tomando $c_1 = \dfrac{1}{2}$ e $c_2 = -1$ temos,

$$\begin{aligned} c_1 \sin 2x + c_2 \sin x \cos x &= \frac{1}{2} \sin 2x + (-1) \sin x \cos x \\ &= \frac{1}{2}(2 \sin x \cos x) - \sin x \cos x = 0, \end{aligned}$$

para todo $x \in (-\infty, \infty)$. ■

EXEMPLO 3.4. *As funções $f_1(x) = x$ e $f_2(x) = |x|$ são LI no intervalo $(-\infty, \infty)$, porém são LD no intervalo $[0, \infty)$.*

Solução: Ao analisarmos os gráficos das duas funções, Figura 3.1, no intervalo $(-\infty, \infty)$, vemos que uma não é múltipla escalar da outra. Assim, para obter $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$ devemos ter $c_1 = c_2 = 0$. Portanto, nesse caso, as funções são LI. Já no intervalo $[0, \infty)$ essas funções são LD, pois tomando, por exemplo, $c_1 = 2$ e $c_2 = -2$, temos $c_1 x + c_2|x| = 2x + (-2)x = 0$ (note que, neste caso, os gráficos das funções coincidem). ■

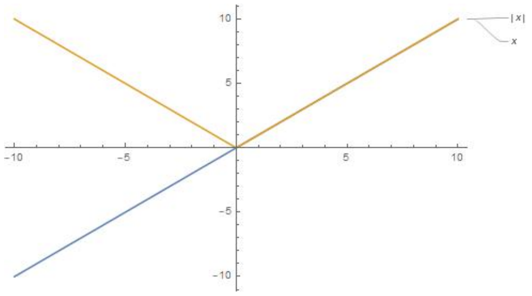

Figura 3.1: Gráfico das funções $f_1(x) = x$ e $f_2(x) = |x|$.

Observação 3.3. *Como visto no exemplo acima, para analisar a dependência ou independência linear de funções é importante levar em consideração o intervalo no qual elas estão definidas.*

Definição 3.2. *Sejam $f_1, f_2, ..., f_n$ funções diferenciáveis pelo menos $n-1$ vezes. O determinante,*

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

denotado por $W(f_1, f_2, ..., f_n)$, é chamado de Wronskiano das funções $f_1, f_2, ..., f_n$.

O teorema a seguir nos fornece uma condição suficiente para a independência linear de n funções em um intervalo. Supomos que cada função seja diferenciável pelo menos $n-1$ vezes.

Teorema 3.2. *Suponha que $f_1, f_2, ..., f_n$ sejam diferenciáveis pelo menos $n-1$ vezes. Se $W(f_1, f_2, ..., f_n)(x) \neq 0$ em pelo menos um ponto $x \in I$, então as funções $f_1, f_2, ..., f_n$ são LI no intervalo I.*

Demonstração: Provaremos este teorema para $n = 2$. O caso geral, para n qualquer, pode ser demonstrado de maneira análoga.

Faremos a validação deste resultado usando sua contrapositiva, isto é, se $f_1, f_2, ..., f_n$ são LD em I, então $W(f_1, f_2, ..., f_n)(x) = 0$ para todo $x \in I$.

Suponha que f_1 e f_2 sejam LD no intervalo I, ou seja, existem constantes c_1 e c_2, não simultanamente nulas, tais que $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$, para todo $x \in I$. Assim, supondo

$c_1 \neq 0$, temos,

$$f_1(x) = -\frac{c_2}{c_1} f_2(x) \Rightarrow f_1'(x) = -\frac{c_2}{c_1} f_2'(x).$$

Logo,

$$\begin{aligned} W(f_1, f_2)(x) = &\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = f_1(x)f_2'(x) - f_2(x)f_1'(x) \\ = &-\frac{c_2}{c_1} f_2(x) f_2'(x) + f_2(x)\frac{c_2}{c_1} f_2'(x) = 0, \end{aligned}$$

para todo $x \in I$. O que termina demonstração do resultado para $n = 2$. ∎

Observação 3.4. *A recíproca do Teorema 3.2 não é verdadeira, isto é, duas funções f e g podem ser LI mesmo quando $W(f, g)(x) = 0$ para todo x em I. Por exemplo, as funções $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = x|x|$ são LI em $\mathbb{R}$, porém,*

$$W(f_1, f_2)(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x|x| \\ 2x & 2|x| \end{vmatrix} = x^2 \cdot |x| - x|x| \cdot 2x.$$

Desse modo, se $x < 0 \Rightarrow W(f_1, f_2) = 0$ e se $x > 0 \Rightarrow W(f_1, f_2) = 0$, ou seja, $W(f_1, f_2) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.5. *Se α e β são números reais, $\beta \neq 0$, então $y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$ e $y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$ são LI em $\mathbb{R}$.*

Solução: De fato, como,

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos \beta x & e^{\alpha x} \sin \beta x \\ \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta e^{\alpha x} \sin \beta x & \alpha e^{\alpha x} \sin \beta x + e^{\alpha x} \beta \cos \beta x \end{vmatrix} = \beta e^{2\alpha x},$$

sabemos que $\beta \neq 0$. Segue que, $\beta e^{2\alpha x} \neq 0$. Portanto, as funções y_1 e y_2 são LI em $\mathbb{R}$. ∎

3.2 Soluções para EDOs lineares de ordem superior

Definição 3.3. *Uma EDO linear de n-ésima ordem,*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1(x)}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x) y = g(x), \tag{3.2}$$

é chamada de homogênea se $g(x) = 0$ para todo x. Caso contrário, isto é, se g não é a função identicamente nula, a EDO é chamada de não homogênea.

Observação 3.5. *Para os resultados a partir daqui precisaremos das condições para existência e unicidade de soluções em um intervalo I. Assim, para evitar repetições, sempre estaremos considerando que as funções a_i, $i = 0, 1, ..., n$ e g, em (3.2), são contínuas em I e que $a_n(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.*

3.2.1 Equações homogêneas

TEOREMA 3.3 (Princípio da superposição para equações homogêneas). *Sejam $y_1, y_2, ..., y_n$ soluções para a equação linear homogênea de n-ésima ordem,*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1(x)}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0, \tag{3.3}$$

em um intervalo I. Então, a combinação linear $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$, $c_i \in \mathbb{R}$, para $i = 0, 1, ..., n$, é também solução de (3.2) no intervalo I.

Demonstração: Dadas $y_1, y_2, ..., y_n$ soluções para (3.2) seja $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$. Note que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $y^{(n)} = c_1y_1^{(n)} + c_2y_2^{(n)} + \cdots + c_ny_n^{(n)}$. Assim,

$$\begin{aligned} a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_0(x)y &= a_n[c_1y_1^{(n)} + \cdots + c_ny_n^{(n)}] + \cdots + a_0[c_1y_1 + \cdots + c_ny_n] \\ &= [a_nc_1y_1^{(n)} + \cdots + a_nc_ny_n^{(n)}] + \cdots + [a_0c_1y_1 + \cdots + a_0c_ny_n] \\ &= c_1[a_ny_1^{(n)} + \cdots + a_0y_1] + \cdots + c_n[a_ny_n^{(n)} + \cdots + a_0y_n] \\ &= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \cdots + c_n \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, y é solução de (3.2). ■

COROLÁRIO 3.1. *Seja y_1 uma solução de uma EDO linear homogênea. Então $y = cy_1$ é também uma solução para a mesma EDO, para todo $c \in \mathbb{R}$.*

EXEMPLO 3.6. *A função $y = x^2$ é uma solução para a EDO linear homogênea $x^2y - 3xy' + 4y = 0$ em $(-\infty, \infty)$. Pelo Corolário 3.1, outras soluções para a EDO seriam, $y = cx^2$, $c \in \mathbb{R}$.*

TEOREMA 3.4. *Sejam $y_1, y_2, ..., y_n$ soluções para equação homogênea (3.2) em um intervalo I. As soluções $y_1, y_2, ..., y_n$ são LI em I se, e somente se, $W(y_1, y_2, ..., y_n)(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.*

Demonstração: Provaremos para o caso $n = 2$. O caso geral pode ser demonstrado de maneira análoga.

($\Leftarrow$) Se $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, então pelo Teorema 3.2 segue que y_1 e y_2 são LI.

($\Rightarrow$) Vamos demonstrar pela contrapositiva, isto é, supor que existe um ponto $x_0 \in I$ tal que $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$ e mostrar que y_1 e y_2 são soluções LD.

Se $W(y_1, y_2)(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = 0$, para algum $x_0 \in I$, então as colunas da matriz são múltiplas escalares, isto é, existe $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ tal que $(y_2(x_0), y_2'(x_0)) = c(f_1(x_0), y_1'(x_0)) = (cy_1(x_0), cy_1'(x_0))$. Logo, $y_2(x_0) = cy_1(x_0)$ e $y_2'(x_0) = cy_1'(x_0)$, ou seja, $cy_1(x_0) - y_2(x_0) = 0$ e $cy_1'(x_0) - y_2'(x_0) = 0$. Tomando, $c_1 = c$ e $c_2 = -1$, temos $c_1 \neq 0$ e

$c_2 \neq 0$, tais que,

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = 0.$$

Agora, defina $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. Assim, $y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0$ e $y'(x_0) = c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = 0$. Ou seja, y é solução do PVI,

$$\begin{cases} a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases}.$$

Por outro lado, a função identicamente nula também satisfaz o PVI acima. Logo, pelo Teorema 3.1, $y(x) = 0$, para todo $x \in I$, isto é, $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$, para todo $x \in I$. Portanto, y_1 e y_2 são LD em I. ■

Definição 3.4. *Qualquer conjunto contendo n soluções LI da equação* (3.3) *em um intervalo I é chamado de conjunto fundamental de soluções em I.*

Teorema 3.5. *Existe um conjunto fundamental de soluções para a equação* (3.3) *em um intervalo I.*

Demonstração: Provaremos para o caso $n = 2$. O caso geral pode ser demonstrado de maneira análoga.

Considere a equação $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$. Escolha um ponto x_0 em I. Sejam y_1 e y_2 soluções da equação, com y_1 satisfazendo as condições iniciais $y_1(x_0) = 1$, $y_1'(x_0) = 0$ e y_2 satisfazendo as condições iniciais $y_2(x_0) = 0, y_2'(x_0) = 1$. Note que, a existência de y_1 e y_2 é garantida pelo Teorema 3.1, pois na equação acima a_0, a_1, a_2, são contínuos em I.

Vamos agora mostrar que y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções. Calculando o Wronskiano em x_0, temos,

$$W(y_1, y_2)(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Logo, pelo Teorema 3.2 as funções são LI e portanto formam um conjunto fundamental de soluções para equação em I. ■

Teorema 3.6. *Sejam $y_1, y_2, ..., y_n$ soluções LI para a equação* (3.3) *em um intervalo I. Então, toda solução Y de* (3.3) *é uma combinação linear de $y_1, y_2, ..., y_n$, ou seja, podemos encontrar constantes $c_1, c_2, ..., c_n$ tais que, $Y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$.*

Demonstração: Provaremos para o caso $n = 2$. O caso geral pode ser demonstrado de maneira análoga.

Sejam Y uma solução qualquer e y_1, y_2 soluções LI de $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ em I. Vamos mostrar que existem $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tais que $Y = c_1y_1 + c_2y_2$.

Sejam $Y(x_0) = k_1$ e $Y'(x_0) = k_2$, assim Y é solução do PVI,

$$\begin{cases} a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \\ y(x_0) = k_1 \\ y'(x_0) = k_2 \end{cases}.$$

Defina $G = c_1y_1 + c_2y_2$, onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema 3.3, G também é solução para a equação. Além disso, $G' = c_1y_1' + c_2y_2'$. Vamos determinar c_1 e c_2 para que G seja solução do PVI acima, isto é, $G(x_0) = k_1$ e $G'(x_0) = k_2$. Note que, $c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = k_1$ e $c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = k_2$, escrevendo em forma matricial temos o sistema linear,

$$\begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}.$$

O sistema linear acima possui solução se, e somente se, o determinante da matriz dos coeficientes for diferente de zero. Esse determinante é exatamente $W(y_1, y_2)(x_0)$, que é diferente de zero, pois y_1 e y_2 são LI. Logo, existem c_1 e c_2 tais que G é solução do PVI.

Logo, Y e G são soluções do mesmo PVI. Portanto, pelo Teorema 3.1, $Y = G = c_1y_1 + c_2y_2$. ■

Definição 3.5. *Sejam $y_1, y_2, ..., y_n$ soluções LI da equação* (3.3) *em um intervalo I. A solução geral de* (3.3) *em I é definida por $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$, onde c_i, $i = 1, 2, ..., n$ são constantes arbitrárias.*

Exemplo 3.7. *Verique que $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = e^{3x}$, são soluções da equação $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 6\dfrac{d^2y}{dx^2} + 11\dfrac{dy}{dx} - 6y = 0$, em $\mathbb{R}$, e encontre sua solução geral.*

Solução: Substituindo y_1, y_2, y_3 e suas derivadas na equação, temos,

- $\dfrac{d^3y_1}{dx^3} - 6\dfrac{d^2y_1}{dx^2} + 11\dfrac{dy_1}{dx} - 6y_1 = e^x - 6e^x + 11e^x - 6e^x = 0,$
- $\dfrac{d^3y_2}{dx^3} - 6\dfrac{d^2y_2}{dx^2} + 11\dfrac{dy_2}{dx} - 6y_2 = 8e^{2x} - 6(4e^{2x}) + 11(2e^{2x}) - 6e^{2x} = 0,$
- $\dfrac{d^3y_3}{dx^3} - 6\dfrac{d^2y_3}{dx^2} + 11\dfrac{dy_3}{dx} - 6y_3 = 27e^{3x} - 6(9e^{3x}) + 11(3e^{3x}) - 6e^{3x} = 0.$

Assim, y_1, y_2, y_3 são soluções. Agora, devemos verificar se elas são LI. Para isso, calculamos seu Wronskiano. Temos,

$$W(y_1, y_2, y_3)(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{2x} \end{vmatrix} = 25e^{6x} - 23e^{6x} = 2e^{6x} \neq 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, a solução geral da equação em $\mathbb{R}$ é $y = c_1e^x + c_2e^2x + c_3e^3x$. ■

3.2.2 Redução de ordem

Conforme visto anteriormente, para descobrir a solução geral de uma equação de segunda ordem precisamos encontrar duas soluções que sejam LI. Entretanto, se apenas uma solução da equação é conhecida, é possível construir uma segunda solução y_2 da forma $y_2 = u \cdot y_1$, onde $u = u(x)$ é a função a determinar.

Consideremos a equação $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$. Inicialmente a dividimos por $a_2(x)$, note que, pela Observação 3.5 estamos assumindo $a_2(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, assim ela pode ser reescrita na forma,

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{3.4}$$

onde $P(x) = \dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}$ e $Q(x) = \dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}$ são contínuas para todo $x \in I$. Suponha que y_1 seja uma solução conhecida, não nula, para equação. Vamos encontar $u = u(x)$, para que $y_2 = uy_1$ seja solução da equação. Calculando as derivadas de y_2, temos $y_2' = uy_1' + u'y_1$ e $y_2'' = uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1$. Substituindo em (3.4), obtemos,

$$\begin{aligned}
y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 &= uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1 + P(x)uy_1' + P(x)u'y_1 + Q(x)uy_1 \\
&= [y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1]u + [2y_1' + P(x)y_1]u' + y_1u'' \\
&= 0 \cdot u + [2y_1' + P(x)y_1]u' + y_1u'' \\
&= [2y_1' + P(x)y_1]u' + y_1u'' = 0.
\end{aligned}$$

Tomando $w = u'$, temos, $[2y_1' + P(x)y_1]w + y_1w' = 0$. Dividindo a equação por y_1, temos,

$$w' + \left[2\frac{y_1'}{y_1} + P(x)\right] w = 0,$$

reescrevendo na forma padrão, $\dfrac{dw}{dx} = -\left[2\dfrac{y_1'}{y_1} + P(x)\right] w$ assim, $\dfrac{dw}{w} = -\left[2\dfrac{y_1'}{y_1} + P(x)\right] dx$.

Integrando ambos os lados, obtemos,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{w}dw = \int -\left[2\frac{y_1'}{y_1} + P(x)\right]dx &\Rightarrow \ln|w| = -2\int \frac{y_1'}{y_1}dx - \int P(x)dx\\
&\Rightarrow \ln|w| = -2\ln|y_1| - \int P(x)dx + c\\
&\Rightarrow \ln|w| + 2\ln|y_1| = -\int P(x)dx + c\\
&\Rightarrow \ln|w{y_1}^2| = -\int P(x)dx + c\\
&\Rightarrow e^{\ln|w{y_1}^2|} = e^{-\int P(x)dx}\cdot e^c\\
&\Rightarrow w{y_1}^2 = c_1 e^{-\int P(x)dx}\\
&\Rightarrow w = c_1\frac{e^{-\int P(x)dx}}{{y_1}^2}.
\end{aligned}$$

Como $w = u'$, então $u' = c_1\dfrac{e^{-\int P(x)dx}}{{y_1}^2}$. Assim, $u = c_1\displaystyle\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{{y_1}^2}dx + c_2$. Escolhendo $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$ e substituindo em u, temos $y_2 = y_1\displaystyle\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{{y_1}^2}dx$, e consequentemente $y_2' = y_1'\int \dfrac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}dx + \dfrac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1}$. Calculando o Wroskiano, temos,

$$\begin{aligned}
W(y_1, y_2)(x) &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_1\displaystyle\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}dx \\ y_1'(x) & y_1'\displaystyle\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}dx + \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1} \end{vmatrix}\\
&= y_1\left(y_1'\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}dx + \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1}\right) - y_1'y_1\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}dx\\
&= e^{\int -P(x)dx}.
\end{aligned}$$

Como o Wrosnkiano é não nulo, temos que as soluções são LI em qualquer intervalo onde $y_1 \neq 0$. Portanto, y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções de (3.4) e a solução geral dessa equação é $y = c_1y_1 + c_2y_1\displaystyle\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{{y_1}^2}dx$. ■

Exemplo 3.8. *Sabendo que $y_1 = e^{m_1x}$ é uma solução da equação $ay'' + by' + c = 0$, use o método de redução de ordem para determinar uma segunda solução y_2.*

Solução: Seja $y_2 = uy_1$, onde $u = u(x)$. Calculando as derivadas de y_2, obtemos $y_2' = e^{m_1x}u' + m_1e^{m_1x}u$ e $y_2'' = e^{m_1x}u'' + 2m_1e^{m_1x}u' + m_1^2e^{m_1x}u$. Como queremos que y_2 seja solução, ela deve satisfazer a equação acima. Assim,

$$\begin{aligned}
ay_2'' + by_2' + cy_2 &= a(e^{m_1x}u'' + 2m_1e^{m_1x}u' + m_1^2e^{m_1x}u) + b(e^{m_1x}u' + m_1e^{m_1x}u) + ce^{m_1x}u \\
&= (am_1^2e^{m_1x} + bm_1e^{m_1x} + ce^{m_1x})u + (2am_1e^{m_1x} + be^{m_1x})u' + ae^{m_1x}u'' \\
&= 0 \cdot u + (2am_1e^{m_1x} + be^{m_1x})u' + ae^{m_1x}u'' \\
&= (2am_1e^{m_1x} + be^{m_1x})u' + ae^{m_1x}u'' = 0.
\end{aligned}$$

Dividindo a equação por ae^{m_1x}, temos $\left(2m_1 + \frac{b}{a}\right)u' + u'' = 0$. Tomando $w = u'$, obtemos uma equação de primeira ordem separável,

$$\left(2m_1 + \frac{b}{a}\right)w + w' = 0,$$

reescrevendo na forma padrão, $\frac{dw}{dx} = -\left(2m_1 + \frac{b}{a}\right)w$, assim $\frac{dw}{w} = -\left(2m_1 + \frac{b}{a}\right)dx$. Integrando ambos os lados, obtemos,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{w}dw = \int -\left(2m_1 + \frac{b}{a}\right)dx &\Rightarrow \ln|w| = -2\int m_1dx - \int \frac{b}{a}dx \\
&\Rightarrow \ln|w| = -2m_1x - \frac{b}{a}x \\
&\Rightarrow e^{\ln|w|} = e^{-2m_1x - \frac{b}{a}x} \\
&\Rightarrow w = \frac{e^{-\frac{bx}{a}}}{e^{2m_1x}}.
\end{aligned}$$

Como $w = u'$, então $u' = \frac{e^{-\frac{bx}{a}}}{e^{2m_1x}}$. Assim, $u = \int \frac{e^{-\frac{bx}{a}}}{e^{2m_1x}}dx$. Portanto, $y_2 = e^{m_1x}\int \frac{e^{-\frac{bx}{a}}}{e^{2m_1x}}dx$.
■

3.2.3 Equações homogêneas com coeficientes constantes

Estudaremos agora EDO's lineares homogêneas em que os coeficientes são constantes, isto é, equações que podem ser escritas da forma,

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0, \tag{3.5}$$

com $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$. Sabemos que para determinar a solução geral para equação acima, basta achar n soluções LI. Observe que se fizermos $a_n = \cdots = a_2 = 0$, teremos uma EDO linear de primeira ordem que, como vimos no Capítulo 2, possui solução da forma $y = e^{\alpha x}$ em $(-\infty, \infty)$. Assim, vamos procurar soluções dessa mesma forma para EDO

(3.5). Iniciaremos com o caso $n = 2$, ou seja, com a equação,

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{3.6}$$

Tentaremos encontrar uma solução da forma $y = e^{mx}$, onde m é um parâmetro a determinar. Calculando as derivadas de y, temos $y' = me^{mx}$ e $y'' = m^2e^{mx}$. Substituindo em (3.6), temos,

$$am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0 \Rightarrow (e^{mx})(am^2 + bm + c) = 0.$$

Como $e^{mx} \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, para que y seja solução de (3.6) é preciso que o expoente m seja igual a uma das raízes da equação quadrática,

$$am^2 + bm + c = 0. \tag{3.7}$$

DEFINIÇÃO 3.6. *A equação* (3.7) *é chamada de equação característica ou equação auxiliar de* (3.6).

Dependendo do valor do discriminante, $\triangle = b^2 - 4ac$, existem três possibilidades a considerar para as raízes da equação quadrática (3.7).

Caso I: $\triangle \neq 0$. Neste caso, (3.7) possui duas raízes reais e distintas,

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a} \quad \text{e} \quad m_2 = \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a}.$$

Assim, encontramos duas soluções $y_1 = e^{m_1x}$ e $y_2 = e^{m_2x}$. Calculando o Wronskiano, temos,

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{m_1x} & e^{m_2x} \\ m_1e^{m_1x} & m_2e^{m_2x} \end{vmatrix} = m_2e^{(m_2+m_1)x} - m_1e^{(m_1+m_2)x} = e^{(m_1+m_2)x}(m_2 - m_1).$$

Como $m_1 \neq m_2$ e $e^{(m_1+m_2)x} > 0$ para todo x, segue que $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ para todo x. Assim, y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções para a equação. Portanto, a solução geral para este caso é $y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}$.

Caso II: $\triangle = 0$. Neste caso, (3.7) possui duas raízes reais iguais $m_1 = m_2 = -\dfrac{b}{2a}$. Assim, temos apenas uma solução $y_1 = e^{m_1x}$. Como visto no Exemplo 3.8, utilizando o método de redução de ordem encontramos uma segunda solução,

$$y_2 = e^{m_1x} \int \frac{e^{-\frac{bx}{a}}}{e^{2m_1x}} dx.$$

Como $m_1 = -\dfrac{b}{2a}$, então $2m_1 = -\dfrac{b}{a}$. Substituindo em y_2, temos,

$$y_2 = e^{m_1x}\int \frac{e^{-\frac{bx}{a}}}{e^{2m_1x}}dx = e^{m_1x}\int \frac{e^{2m_1x}}{e^{2m_1x}}dx = e^{m_1x}\int 1dx = xe^{m_1x}.$$

Calculando o Wronskiano das funções, obtemos,

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{m_1x} & xe^{m_1x} \\ m_1e^{m_1x} & e^{m_1x} + xm_1e^{m_1x} \end{vmatrix} = e^{2m_1x} + xm_1e^{2m_1x} - xm_1e^{2m_1x} = e^{2m_1x}.$$

Como $e^{2m_1x} > 0$ para todo x, segue $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ para todo x. Assim, y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções para este caso. Portanto, a solução geral é $y = c_1e^{m_1x} + c_2xe^{m_1x}$.

Caso III: $\Delta < 0$. Neste caso, (3.7) possui duas raízes complexas conjugadas distintas $m_1 = \alpha + i\beta$ e $m_2 = \alpha - i\beta$, em que $\alpha = -\frac{b}{2a}$ e $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$. Logo, a solução geral para (3.6) é $y = c_1e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2e^{(\alpha-i\beta)x}$.

No entanto, na prática, optamos em trabalhar com funções reais em vez de exponenciais complexas. Assim, vamos buscar uma solução real utilizando a Fórmula de Euler,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \tag{3.8}$$

Segue de (3.8) que,

$$\begin{aligned} e^{i\beta x} &= \cos\beta x + i\sin\beta x, \\ e^{-i\beta x} &= \cos(-\beta x) + i\sin(-\beta x) = \cos\beta x - i\sin\beta x. \end{aligned}$$

Daí, temos,

$$\begin{aligned} e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} &= \cos\beta x + i\sin\beta x + \cos\beta x - i\sin\beta x = 2\cos\beta x, \\ e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} &= \cos\beta x + i\sin\beta x - \cos\beta x + i\sin\beta x = 2i\sin\beta x. \end{aligned}$$

Como $y = c_1e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2e^{(\alpha-i\beta)x}$ é uma solução para (3.6), escolhendo $c_1 = c_2 = 1$ e $c_1 = 1, c_2 = -1$, temos, nesta ordem, duas soluções:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x} + e^{\alpha x}\cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) = 2e^{\alpha x}\cos\beta x. \\ y_2 &= e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x} - e^{\alpha x}\cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) = 2e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{aligned}$$

Assim, pelo Corolário 3.1 e Teorema 3.3, as funções $e^{\alpha x}\cos\beta x$ e $e^{\alpha x}\sin\beta x$ são soluções para (3.6). Ainda, do Exemplo 3.5, temos que,

$$W(e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0, \beta > 0,$$

logo as funções são LI. Portanto, $e^{\alpha x}\cos\beta x$ e $e^{\alpha x}\sin\beta x$ formam o conjunto fundamental de soluções para equação (3.6) e assim a solução geral para este caso é $y = c_1e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Exemplo 3.9. *Encontre a solução do PVI,*

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 13 = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}.$$

Solução: A equação característica do problema é $m^2 - 4m + 13 = 0$. Resolvendo-a encontramos duas raízes complexas distintas $m_1 = 2 + 3i$ e $m_2 = 2 - 3i$. Portanto, pelo Caso III, duas soluções LI para EDO são $y_1 = e^{2x}\cos 3x$ e $y_2 = e^{2x}\sin 3x$. Assim, a solução geral é $y = e^{2x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x)$.

A solução para o PVI é encontrada escolhendo c_1 e c_2 de modo que a função y encontrada acima satisfaça as condições iniciais. Impondo essas condições, temos,

$$\begin{aligned} y(0) = -1 &\Rightarrow e^{2\cdot 0}(c_1\cos(3\cdot 0) + c_2\sin(3\cdot 0)) = -1 \\ &\Rightarrow 1(c_1\cdot 1 + c_2\cdot 0) = -1 \\ &\Rightarrow c_1 = -1. \end{aligned}$$

Derivando y, temos, $y' = e^{2x}(-2\cos 3x - 3\sin 3x + 2c_2\sin 3x + 3c_2\cos 3x)$. Assim,

$$\begin{aligned} y'(0) = 2 &\Rightarrow e^{2\cdot 0}(-2\cos(3\cdot 0) - 3\sin(3\cdot 0) + 2c_2\sin(3\cdot 0) + 3c_2\cos(3\cdot 0)) = 2 \\ &\Rightarrow 1(-2\cdot 1 + 3c_2\cdot 1) = 2 \\ &\Rightarrow -2 + 3c_2 = 2 \\ &\Rightarrow c_2 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Portanto, a solução para o PVI é $y = e^{2x}\left(-\cos 3x + \frac{4}{3}\sin 3x\right)$. ■

Na resolução de equações com coeficientes constantes a maior dificuldade é encontrar as raízes para as equações características de grau maior que dois. Uma maneira de resolver a equação é encontrando uma solução m_1. Daí, pelo Teorema da decomposição de polinômios temos que $m - m_1$ é um fator. Dividindo o polinômio por $m - m_1$, obtemos a fatoração $(m - m_1)\cdot Q(m)$. Por fim, tentamos encontrar as raízes do quociente $Q(m)$. Outro método usado para encontrar raízes racionais de equações polinomiais é o Algoritmo de Briot Ruffini. Dado o polinômio,

$$a_nm^n + \cdots + a_1m + a_0 = 0,$$

com coeficientes inteiros. Se $m_1 = \dfrac{p}{q}$ é uma raiz racional deste polinômio característico, onde $p, q \in \mathbb{Z}$ são primos entre si, então p é um fator de a_0 e q um fator de a_n. Assim, para determinar se uma equação polinomial possui raízes racionais, precisamos analisar as razões entre cada fator de a_0 e cada fator a_n. Desse modo, teremos todas as possíveis raízes racionais da equação que serão testadas pelo algoritmo.

No caso geral, para resolver uma equação de n-ésima ordem (3.5), precisamos resolver uma equação característica de grau n. Se todas as raízes da equação característica são reais e distintas, então pelo Caso I a solução geral é,

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \cdots + c_n e^{m_n x}. \tag{3.9}$$

Se as raízes da equação forem complexas distintas, elas sempre aparecerão em pares conjugados, $\alpha \pm i\beta$, já que os coeficientes são reais. Assim, a solução geral ainda é da forma (3.9). No entanto, mesmo que algumas das soluções da equação característica sejam complexas, ainda podemos expressar a solução geral de (3.5) como combinação de soluções reais, como feito para o caso da equação de segunda ordem.

Se alguma das raízes da equação característica forem repetidas então a solução de (3.5) não será (3.9).

Se m_1 é uma raiz de multiplicidade k de uma equação auxiliar de grau n então as soluções LI são: $e^{m_1 x}, xe^{m_1 x}, x^2 e^{m_1 x}, ..., x^{k-1} e^{m_1 x}$ e a solução geral contém a combinação linear $c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x} + \cdots + c_k x^{k-1} e^{m_1 x}$.

Se $m_1 = \alpha + i\beta$ é uma raiz de multiplicidade k então a raiz complexa conjugada $m_2 = \alpha - i\beta$ também se repete k vezes. Logo, das $2k$ soluções complexas,

$$\begin{gathered} e^{(\alpha+i\beta)x}, xe^{(\alpha+i\beta)x}, x^2 e^{(\alpha+i\beta)x} +, \cdots, + x^{k-1} e^{(\alpha+i\beta)x} \\ e^{(\alpha-i\beta)x}, xe^{(\alpha-i\beta)x}, x^2 e^{(\alpha-i\beta)x} +, \cdots, + x^{k-1} e^{(\alpha+i\beta)x}, \end{gathered}$$

podemos encontrar, com auxílio da Fórmula de Euler (3.8), $2k$ soluções reais LI,

$$\begin{gathered} e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, x^2 e^{\alpha x} \cos \beta x, ..., x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x \\ e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, x^2 e^{\alpha x} \sin \beta x, ..., x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x. \end{gathered}$$

Assim, nesse caso, a solução geral de (3.5) contém a combinação linear das $2k$ soluções reais acima.

3.2.4 Equações não homogêneas

Definição 3.7. *Qualquer função y_p que satisfaça a EDO,*

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1(x)} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = g(x), \tag{3.10}$$

com $g(x) \neq 0$, é chamada solução particular para da EDO.

Exemplo 3.10. *Verifique que $y_p = x^3 - x$ é uma solução particular da EDO $x^2y'' + 2xy' - 8y = 4x^3 + 6x$.*

Solução: De fato, se $y_p = x^3 - x$ então $y_p' = 3x^2 - 1$ e $y_p'' = 6x$. Substituindo na EDO, temos,

$$\begin{aligned} x^2y_p'' + 2xy_p' - 8y_p - 4x^3 - 6x &= x^2(6x) + 2x(3x^2 - 1) - 8(x^3 - x) - 4x^3 - 6x \\ &= 6x^32 + 6x^3 - 2x - 8x^3 + 8x - 4x^3 - 6x = 0. \end{aligned}$$

Portanto, y_p é solução da EDO. ■

Teorema 3.7. *Sejam $y_1, y_2, ..., y_n$ soluções da EDO homogênea para a equação (3.3) em um intervalo I e y_p uma solução particular qualquer da EDO não homogênea (3.10) no mesmo intervalo. Então, $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ky_k + y_p$, onde $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$, é também solução para equação não homogênea em I.*

Demonstração: Para cada $k \in \mathbb{N}$, segue que, $y^{(k)} = c_1y_1^{(k)} + c_2y_2^{(k)} + \cdots + c_ny_n^{(k)} + y_p^{(k)}$. Assim,

$$\begin{aligned} a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_0(x)y =& a_n[c_1y_1^{(k)} + \cdots + c_ny_n^{(k)} + y_p^{(k)}] + \cdots + a_0[c_1y_1 + \cdots + c_ny_n + y_p] \\ =&[a_nc_1y_1^{(k)} + \cdots + a_n{y_p}^{(k)}] + \cdots + [a_0c_1y_1 + \cdots + a_0y_p] \\ =&c_1[a_ny_1^{(k)} + \cdots + a_0y_1] + \cdots + [a_ny_p^{(k)} + \cdots + a_0y_p] \\ =&c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \cdots + c_k \cdot 0 + g(x) = g(x). \end{aligned}$$

Portanto, y é solução para equação linear não homogênea. ■

Teorema 3.8. *Seja y_p uma solução particular da EDO não homogênea (3.10) em I e $y_1, y_2, ..., y_n$ soluções LI para a EDO homogênea (3.3) associada no mesmo intervalo. Então, qualquer solução $Y(x)$ de (3.10) em I, pode ser escrita na forma, $Y = c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n + y_p$, onde $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Provaremos para o caso $n = 2$. O caso geral pode ser demonstrado de maneira análoga.

Sejam $Y(x)$ e $y_p(x)$ soluções da EDO $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$. Note que, a função $u(x) = Y(x) - y_p(x)$ é solução para a EDO homogênea associada. De fato, temos,

$$\begin{aligned} a_2(x)u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u &= a_2(x)[Y'' - y_p''] + a_1(x)[Y' - y_p'] + a_0(x)[Y - y_p] \\ &= a_2(x)Y'' - a_2(x)y_p'' + a_1(x)Y' - a_1(x)y_p' + a_0(x)Y - a_0(x)y_p \\ &= [a_2(x)Y'' + a_1(x)Y' + a_0(x)Y] - [a_2(x)y_p'' + a_1(x)y_p' + a_0(x)y_p] \\ &= g(x) - g(x) = 0. \end{aligned}$$

Além disso, como y_1 e y_2 são soluções LI da EDO homogênea associada, segue do Teorema 3.3, que qualquer solução da equação pode ser expressa como combinação linear dessas duas soluções. Assim,

$$\begin{aligned}
&u(x) = c_1y_1 + c_2y_2\\
\Rightarrow &Y(x) - y_p(x) = c_1y_1 + c_2y_2\\
\Rightarrow &Y(x) = c_1y_1 + c_2y_2 + y_p(x).
\end{aligned}$$

■

DEFINIÇÃO 3.8. *Seja y_p uma solução particular da EDO não homogênea* (3.10) *e y_h a solução geral da equação homogênea associada* (3.3). *A solução geral da EDO não homogênea* (3.10) *é definida por,*

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n + y_p = y_h + y_p.$$

TEOREMA 3.9 (Princípio da superposição para equações não homogêneas). *Sejam $y_{p_1}, ..., y_{p_k}$ soluções particulares para a equação não homogênea* (3.10) *em I, correspondendo a k funções distintas $g_1, g_2, ..., g_k$. Então, $y_p = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \cdots + y_{p_k}(x)$ é uma solução particular para a EDO $a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_1(x) + \cdots + g_k(x)$.*

Demonstração: Temos,

$$\begin{aligned}
&a_n(x)y_p^{(n)} + \cdots + a_1(x)y_p' + a_0(x)y_p\\
\Rightarrow &a_n(x)[y_{p_1}^{(n)} + \cdots + y_{p_k}^{(n)}] + \cdots + a_0(x)[y_{p_1} + \cdots + y_{p_k}]\\
\Rightarrow &a_n(x)y_{p_1}^{(n)} + \cdots + a_n(x)y_{p_k}^{(n)} + \cdots + a_0(x)y_{p_1} + \cdots + a_0(x)y_{p_k}\\
\Rightarrow &[a_n(x)y_{p_1}^{(n)} + \cdots + a_0(x)y_{p_1}] + \cdots + [a_0(x)y_{p_k}^{(n)} + \cdots + a_0(x)y_{p_k}]\\
\Rightarrow &g_1(x) + \cdots + g_k(x).
\end{aligned}$$

Portanto, y_p é uma solução particular da EDO $a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_1(x) + \cdots + g_k(x)$. ■

Adiante apresentaremos alguns métodos para encontrar a solução de equações não homogêneas.

3.2.5 Equações não homogêneas com coeficientes constantes

Para obter a solução geral de uma equação não homogênea precisamos encontrar uma solução particular para equação dada e uma solução para equação homogênea associada, chamada função complementar. Vamos considerar EDO's não homogêneas com coeficientes constantes,

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = g(x),$$

onde $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$ e $g(x)$ é uma função: constante, polinomial, exponencial, seno, cosseno ou somas e produtos dessas funções, para encontrar uma solução particular utilizaremos o método dos *coeficientes indeterminados*.

Como a combinação linear das derivadas $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y$ deve ser igual a $g(x)$, o método busca determinar uma solução particular y_p que tenha a mesma forma de $g(x)$, com os coeficientes A_i a determinar conforme os casos abaixo:

1º Caso: Quando $g(x)$ for uma função constante admitiremos como solução particular $y_p = A$.

2º Caso: Quando $g(x)$ for um polinômio de grau m a solução particular será da forma $y_p = A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m$.

3º Caso: Quando $g(x)$ for uma função exponencial da forma e^{ax} admitiremos como solução particular $y_p = Ae^{ax}$.

4º Caso: Quando $g(x)$ for da forma $g(x) = \sin \beta x$ ou $g(x) = \cos \beta x$ admitiremos como solução $y_p = A_1 \sin \alpha x + A_2 \cos \alpha x$.

Exemplo 3.11. *Determine a solução geral da EDO $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$.*

Solução: Passo 1: Inicialmente buscamos a solução geral da equação homogênea associada. Como a equação caracteríca é $m^2 + 4m - 2 = 0$, ao resolvermos encontramos duas raízes reais distintas $m_1 = -2 + \sqrt{6}$ e $m_2 = -2 - \sqrt{6}$. Logo, $y_h = c_1 e^{(-2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x}$.
Passo 2: Como $g(x)$ é um polinômio quadrático, o método dos coeficientes indeterminados sugere que procuremos uma solução da forma $y_p = Ax^2 + Bx + C$. Devemos determinar os coeficientes A, B e C para os quais y_p é uma solução para equação.

Substituindo y_p e suas derivadas $y_p' = 2Ax + B$ e $y_p'' = 2A$ na equação, temos,

$$\begin{aligned} y'' + 4y' - 2y &= 2A + 4(2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) \\ &= 2A + 8Ax + 4B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C \\ &= -2Ax^2 + (8A - 2B)x + 2A + 4B - 2C = 2x^2 - 3x + 6. \end{aligned}$$

Como esta última igualdade é supostamente uma identidade, os coeficientes de potências iguais de x devem ser iguais. Assim, obtemos o sistema,

$$\begin{cases} -2A = 2 \\ 8A - 2B = -3 \\ 2A + 4B - 2C = 6 \end{cases}.$$

A solução deste é $A = -1, B = -\dfrac{5}{2}$ e $C = -9$. Logo, $y_p = -x^2 - \dfrac{5}{2}x - 9$.
Passo 3: Portanto, a solução geral da EDO é

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{(-2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9.$$

■

Exemplo 3.12. *Encontre a solução geral para* $y'' - 2y' - 3y = 4x - 5 + 6xe^{2x}$.

Solução: Passo 1: Encontrar a solução para equação homogênea associada.
A equação auxiliar é $m^2 - 2m - 3 = 0$, e suas raízes $m_1 = 3$ e $m_2 = -1$. Logo, a solução da EDO homogênea correspondente é, $y_h = c_1e^{3x} + c_2e^{-x}$.

Passo 2: A presença de $4x - 5$ e de $6xe^{2x}$ em $g(x)$ sugere que a solução particular contenha um polinômio de primeiro grau e e^{2x} multiplicado por um outro polinômio de primeiro grau, ou seja, y_p deve ser uma soma de duas funções. Assim, temos $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$, onde $y_{p_1} = Ax + B$ e $y_{p_2} = (Cx + D)e^{2x}$. Logo, $y_p = Ax + B + Cxe^{2x} + De^{2x}$.

Substituindo y_p e suas derivadas $y_p' = A + Ce^{2x} + 2Cxe^{2x} + 2De^{2x}$ e $y_p'' = 4Ce^{2x} + 4Cxe^{2x} + 4De^{2x}$ na EDO, temos,

$$\begin{aligned} &y_p'' - 2y_p' - 3y_p = 4x - 5 + 6xe^{2x} \\ \Rightarrow &-3Ax - 2A - 3B - 3Cxe^{2x} + (2C - 3D)e^{2x} = 4x - 5 + 6xe^{2x}. \end{aligned}$$

Da equação acima, obtemos o sistema,

$$\begin{cases} -3A = 4 \\ -2A - 3B = -5 \\ -3C = 6 \\ 2C - 3D = 0 \end{cases}.$$

cuja solução é, $A = -\dfrac{4}{3}, B = \dfrac{23}{9}, C = -2, D = -\dfrac{4}{3}$. Logo, $y_p = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{23}{9} - 2xe^{2x} - \dfrac{4}{3}e^{2x}$.

Passo 3: Portanto, conforme definição, a solução geral da EDO é,

$$y = y_h + y_p = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} - \frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - 2xe^{2x} - \frac{4}{3}e^{2x}.$$

■

Capítulo 4

Aplicações de Equações Diferenciais Ordinárias

Neste capítulo, utilizando as técnicas de resolução de EDOs desenvolvidas nos capítulos anteriores, apresentamos algumas das diversas aplicações das equações diferenciais ordinárias em diferentes áreas do conhecimento.

4.1 Crescimento e decrescimento populacional

Modelos matemáticos que descrevem a evolução do número de indivíduos de uma determinada população são objeto constante de estudos e pesquisas. A seguir apresentamos dois simples modelos que descrevem o crescimento/decrescimento de uma população, os chamados *crescimento exponencial* e *crescimento logístico*.

4.1.1 Crescimento exponencial

Em 1798 o matemático Thomas Robert Malthus criou um modelo que descrevia o crescimento de populações pequenas onde a taxa de crescimento era proporcional à própria população (BOYER, 1996). Este modelo ficou conhecido como modelo de crescimento exponencial. Trata-se do modelo matemático mais simples sobre o crescimento populacional de algumas espécies.

Seja $P = P(t)$, a população de uma espécie em um dado instante t. No modelo tratado, a taxa de variação da população em relação ao tempo é proporcional ao valor atual de P, isto é,

$$\frac{dP}{dt} = kP, \tag{4.1}$$

onde k é uma constante de proporcionalidade chamada de taxa de crescimento ou decrescimento.

Resolvendo a EDO (4.1), sujeita a condição inicial $P(0) = P_0$ encontramos como solução $P = P_0e^{kt}$. Assim, podemos concluir que,

- se $k > 0$, a população cresce e continua a se expandir no decorrer do tempo;
- se $k < 0$, a população se reduzirá e no decorrer do tempo poderá ser extinta.

A solução para este modelo de crescimento pode não representar a realidade de uma população, pois existem inibidores próprios do ambiente que impedem esse crescimento ilimitado.

Exemplo 4.1. *Em uma cultura há inicialmente N_0 bactérias. Uma hora depois, isto é, no instante $t = 1$, o número de bactérias passa a ser $\frac{3}{2}N_0$. Se a taxa de crescimento é proporcional ao número de bactérias presentes, determine o tempo necessário para que o números de bactérias triplique.*

Solução: Seja $N = N(t)$, a população de bactérias no instante t. Assim, obtemos a equação diferencial,

$$\frac{dN}{dt} = kN,$$

sujeita a condição inicial $N(0) = N_0$. Podemos reescrever a equação acima como,

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = k.$$

Integrando ambos os lados obtemos,

$$\ln|N| = kt + c_1.$$

Aplicando exponencial encontramos,

$$e^{\ln|N|} = e^{kt+c_1} \Rightarrow |N| = e^{kt}e^{c_1} \Rightarrow N = ce^{kt},$$

onde $c = \pm e^{c_1}$.

No instante $t = 0$, temos $N(0) = ce^{k\cdot 0} \Rightarrow N_0 = c$. Logo, $N(t) = N_0e^{kt}$.

Agora, determinamos a constante de proporcionalidade k usando a condição empírica $N(1) = \frac{3}{2}N_0$. Temos,

$$N(1) = N_0e^{k\cdot 1} \Rightarrow \frac{3}{2}N_0 = N_0e^k \Rightarrow e^k = \frac{3}{2}.$$

Aplicando logaritmo no dois lados dessa última equação, encontramos,

$$\ln e^k = \ln\frac{3}{2} \Rightarrow k\ln e = \ln\frac{3}{2} \Rightarrow k \approx 0,4055.$$

Assim, a solução para o PVI acima é $N(t) = N_0e^{0,4055t}$.

Para encontrar o tempo necessário para que o número de bactérias triplique, buscamos o valor de t para o qual $N(t) = 3N_0$, isto é, $N_0 e^{0,4055t} = 3N_0$. Dividindo ambos os lados dessa equação por N_0, obtemos,

$$3 = e^{0,4055t}.$$

Aplicando o logaritmo em ambos os lados encontramos,

$$\ln 3 = \ln e^{0,4055t} \Rightarrow 0,4055t \cdot \ln e = \ln 3 \Rightarrow 0,4055t = \ln 3 \Rightarrow t \approx 2,71.$$

Portanto, para que o número de bactérias triplique, são necessárias, aproximadamente, 2,71 horas. ■

4.1.2 Crescimento logístico

Como uma tentativa de correção para o modelo de Maltus o matemático belga Pierre-François Verhulst propôs um novo modelo,

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP), \tag{4.2}$$

onde a e b são constantes positivas. A constante a representa a taxa de crescimento da população P no instante t e o parâmetro bP corresponde a taxa de inibição de crescimento desta população.

A ideia por trás da substituição de k por $a - bP$ se dá devido ao fato de que a população não pode crescer de forma ilimitada, como proposto no modelo de Malthus, pois haveriam problemas como falta de alimento para todos. Logo, seria necessário algo para conter este crescimento. Para isso, Pierre François Verhulst criou um modelo onde há uma diminuição da taxa de crescimento à medida que a população cresce. Matematicamente dizendo, podemos obter esta diminuição subtraindo da constante de proporcionalidade um termo que aumenta à medida que a população aumenta. Assim, o termo $-bP$ é a maneira mais simples de implementar tal ideia.

Como visto no Capítulo 2, a equação diferencial (4.2) pode ser classificada como uma EDO separável, assim podemos rescrevê-la como,

$$\frac{1}{P(a - bP)} dP = dt.$$

Agora integramos a equação acima,

$$\int \left(\frac{1}{P(a - bP)} \right) dP = \int dt. \tag{4.3}$$

Usando o método de frações parciais podemos rescrever $\dfrac{1}{P(a-bP)}$ como,

$$\frac{\frac{1}{a}}{P}+\frac{\frac{b}{a}}{(a-bP)}.$$

Substituindo este resultado em (4.3) obtemos,

$$\int\left(\frac{\frac{1}{a}}{P}+\frac{\frac{b}{a}}{a-bP}\right)dP=\int dt.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a}\int\frac{1}{P}dP+\frac{b}{a}\int\frac{1}{a-bP}dP=\int dt\\
\Rightarrow&\frac{1}{a}\ln|P|+\frac{b}{a}\left(-\frac{1}{b}\ln|a-bP|\right)=t+c\\
\Rightarrow&\frac{1}{a}\ln|P|-\frac{1}{a}\ln|a-bP|=t+c.
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da última equação por a, obtemos,

$$\ln|P|-\ln|a-bP|=at+ac.$$

Utilizando a propriedade do logaritmo de um quociente, podemos reescrever a equação acima como,

$$\ln\left|\frac{P}{a-bP}\right|=at+ac.$$

Aplicando exponencial em ambos os lados da igualdade temos,

$$e^{\ln\left|\frac{P}{a-bP}\right|}=e^{at+ac}\Rightarrow\left|\frac{P}{a-bP}\right|=e^{at}e^{ac}\Rightarrow\frac{P}{a-bP}=c_1e^{at}, \tag{4.4}$$

onde $c_1=\pm e^{ac}$. Daí, podemos deduzir que,

$$\begin{aligned}
P=(a-bP)c_1e^{at}&\Rightarrow P=ac_1e^{at}-bPc_1e^{at}\\
&\Rightarrow P+bPc_1e^{at}=ac_1e^{at}\\
&\Rightarrow P(1+bc_1e^{at})=ac_1e^{at}\\
&\Rightarrow P=\frac{ac_1e^{at}}{e^{at}(e^{-at}+bc_1)}=\frac{ac_1}{(e^{-at}+bc_1)}.
\end{aligned}$$

Considerando a condição $P(0)=P_0$ tal que $P_0\neq\dfrac{a}{b}$, temos a partir da equação (4.4) que,

$$\frac{P_0}{a-bP_0}=c_1e^0\Rightarrow c_1=\frac{P_0}{a-bP_0}.$$

Substituindo o resultado acima na solução da EDO, obtemos a solução do PVI,

$$P(t) = \frac{a\left(\dfrac{P_0}{a - bP_0}\right)}{e^{-at} + b\left(\dfrac{P_0}{a - bP_0}\right)} = \frac{\dfrac{aP_0}{a - bP_0}}{\dfrac{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at}}{a - bP_0}} = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at}}.$$

Exemplo 4.2. *Suponha que um estudante infectado com um vírus da gripe retorne a uma faculdade isolada no campus onde se encontram* 1000 *estudantes. Presumindo que a taxa na qual o vírus se espalha é proporcional à quantidade x de alunos infectados e também à quantidade de alunos não infectados,* $1000 - x$*, determine o número de alunos infectados após 6 dias sabendo que depois de 4 dias haviam 50 estudantes infectados.*

Solução: Temos os seguintes dados:

- total de estudantes: 1000;
- quantidade de estudantes infectados: x;
- quantidade de estudantes não infectados: $1000 - x$;
- taxa na qual o vírus se espalha (ou taxa de estudantes infectados): $\dfrac{dx}{dt}$.

Supondo que ninguém saia do campus enquanto durar a epidemia, podemos escrever o seguinte PVI,

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = kx(1000 - x) \\ x(0) = 1 \end{cases}.$$

Reescrevendo a EDO acima temos,

$$\frac{dx}{dt} = 1000kx - kx^2 \Rightarrow \frac{1}{x(1000k - kx)}dx = dt.$$

Integrando ambos os seus lados, obtemos,

$$\int \left(\frac{1}{x(1000k - kx)}\right) = \int dt. \tag{4.5}$$

Usando o método de frações parciais podemos reescrever (4.5) como,

$$\int \left(\frac{\frac{1}{1000k}}{x} + \frac{\frac{1}{1000}}{1000k - kx}\right) dx = \int dt$$

daí,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{1000k}\int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{1000}\int \frac{1}{1000k-kx}dx = \int dt\\
\Rightarrow &\frac{1}{1000k}\ln|x| + \frac{1}{1000}\left(-\frac{1}{k}\ln|1000k-kx|\right) = t+c\\
\Rightarrow &\ln|x| - \ln|1000k-kx| = 1000kt + 1000kc.
\end{aligned}
$$

Usando a propriedade da divisão de logaritmos, podemos escrever a última equação acima como,

$$\ln\left|\frac{x}{1000k-kx}\right| = 1000kt + 1000kc.$$

Aplicando exponencial em ambos os termos obtemos,

$$e^{\ln\left|\frac{x}{1000k-kx}\right|} = e^{1000kt+1000kc} \Rightarrow \frac{x}{1000k-kx} = c_1e^{1000kt},$$

onde $c_1 = \pm e^{1000kc}$. Logo,

$$
\begin{aligned}
&x = (1000k-kx)c_1e^{1000kt} = 1000kc_1e^{1000kt} - kxc_1e^{1000kt}\\
\Rightarrow &x(1+kc_1e^{1000kt}) = 1000kc_1e^{1000kt}\\
\Rightarrow &x = \frac{1000kc_1e^{1000kt}}{1+kc_1e^{1000kt}}\\
\Rightarrow &x(t) = \frac{1000kc_1}{e^{-1000kt}+kc_1}.
\end{aligned}
$$

Pela condição inicial sabemos que quando $t=0, x(0)=1$. Então,

$$
\begin{aligned}
x(0) = \frac{1000kc_1}{e^{-1000\cdot k\cdot 0}+kc_1} &\Rightarrow 1 = \frac{1000kc_1}{1+kc_1}\\
&\Rightarrow 1+kc_1 = 1000kc_1\\
&\Rightarrow c_1 = \frac{1}{999k}.
\end{aligned}
$$

Portanto, a solução do PVI é $x(t) = \dfrac{1000k\frac{1}{999k}}{e^{-1000kt}+k\frac{1}{999k}} = \dfrac{1000}{999e^{-1000kt}+1}$. Agora, usando a informação de que se $t=4$ então $x(4)=50$, encontramos o valor de k,

$$
\begin{aligned}
x(4) = \frac{1000}{999e^{-1000\cdot 4\cdot k}+1} &\Rightarrow 50 = \frac{1000}{999e^{-4000k}+1}\\
&\Rightarrow 49950e^{-4000k} + 50 = 1000\\
&\Rightarrow e^{-4000k} = \frac{950}{49950}\\
&\Rightarrow e^{-4000k} = \frac{95}{4995}.
\end{aligned}
$$

Aplicando logaritmo em ambos os termos da última equação, obtemos,

$$\ln\left(e^{-4000k}\right) = \ln\left(\frac{95}{4995}\right) \Rightarrow -4000k = \ln\left(\frac{95}{4995}\right) \Rightarrow k = 0,0009906.$$

Enfim, obtemos a solução do problema,

$$x(t) = \frac{1000}{999e^{-1000\cdot 0,0009906t} + 1} = \frac{1000}{999e^{-0,9906t} + 1}.$$

Agora, como queremos saber o número de alunos infectados após 6 dias fazemos,

$$x(6) = \frac{1000}{999e^{-0,9906\cdot 6} + 1} = 276.$$

Portanto, após 6 dias, 276 alunos estarão infectados.

Note que, quando $t \to \infty, x(t) \to 1000$, ou seja, com o passar do tempo, a quantidade de alunos infectados aumentará, chegando o momento em que todos os estudantes do campus estarão contaminados. ■

4.2 Meia-vida

A meia-vida de um elemento radioativo corresponde ao intervalo de tempo necessário para que metade dos núcleos radioativos se desintegre ou transmute em átomos de outro elemento. Por exemplo, a meia-vida do fósforo-32 é 32 dias. Considere uma amostra de 8g desse elemento. Assim, passados 32 dias a massa dessa amostra é 4g. O período de semidesintegração varia para cada elemento, podendo ir desde frações de segundos até bilhões de anos.

Exemplo 4.3. *Um reator converte urânio* 238 *em isótopo de plutônio* 239*. Após* 15 *anos, foi observado que* $0,043\%$ *da quantidade inicial* A_0 *de plutônio se desintegrou. Encontre a meia-vida desse isótopo supondo que a taxa de desintegração é proporcional à quantidade remanescente.*

Solução: Seja $A(t)$ a quantidade de plutônio remanescente no instante t. Assim, como já visto nos exemplos anteriores, temos $A(t) = A_0e^{kt}$ como solução para o problema de valor inicial abaixo,

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dt} = kA \\ A(0) = A_0 \end{cases}.$$

Se $0,043\%$ da quantidade inicial A_0 de plutônio se desintegrou, então $99,957\%$ da substância permaneceu. Assim, para encontrar o valor de k, usamos a igualdade,

$$0,99957A_0 = A(15) \Rightarrow 0,99957A_0 = A_0e^{15k} \Rightarrow 0,99957 = e^{15k}.$$

Aplicando logaritmo em ambos os lados da última equação acima, obtemos,

$$\ln 0,99957 = \ln e^{15k} \Rightarrow 15k = \ln 0,99957 \Rightarrow k = \frac{\ln 0,99957}{15} \Rightarrow k \approx -0,00002867.$$

Portanto, $A(t) = A_0 e^{-0,00002867t}$.

Para encontrar a meia-vida, basta encontrar o valor de t tal que $A(t) = \frac{A_0}{2}$. Isto é,

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{-0,00002867t} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-0,00002867t}.$$

Aplicando logaritmo em ambos os lados da última equação, temos,

$$\ln \frac{1}{2} = \ln e^{-0,00002867t} \Rightarrow -0,00002867t = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow t \approx 24176,74.$$

Portanto, a meia-vida do plutônio é aproximadamente 24000 anos. ■

4.3 Decaimento Radioativo ou Cronologia do Carbono

O carbono-14 (C-14) é um isótopo radioativo do carbono. Ele é produzido na atmosfera pela colisão entre os raios cósmicos e o nitrogênio 14. É um dos principais elementos que compõem os seres vivos.

A datação por C-14 é uma ferramenta de grande importância para a arqueologia. Trata-se de um dos métodos de datação histórica mais conhecidos. Enquanto um organismo está vivo a quantidade de C-14 permanece constante, mas a partir de sua morte a absorção de C-14 cessa. Assim, através das quantidades residuais desse elemento é possível obter uma estimativa da idade da amostra em estudo. Esta estimativa se relaciona com a meia-vida do C-14, que é aproximandamente 5730 anos.

Mesmo quando há uma pequena quantidade R de C-14 em uma amostra, ainda é possível descobrir a quantidade inicial, R_0, por meio da proporcionalidade R/R_0.

Segundo Beltrão (2009), "a desintegração (variação) desse átomo que ocorre por unidade de tempo é proporcional à quantidade de átomos radioativos presente em cada instante. Assim, se $R = R(t)$ representa o número de átomos radioativos em cada instante t, uma equação matemática, que pode representar o fenômeno, é dada pela equação diferencial,

$$\frac{dR}{dt} = -kR, \tag{4.6}$$

onde k, chamado de constante de desintegração, é uma constante que na equação apresenta-se como coeficiente de proporcionalidade".

Como a equação (4.6) possui estrutura semelhante a (4.1) sua solução é da forma

$R(t) = R_0 e^{-kt}$.

Consideremos que para o instante inicial $t = 0$, a quantidade de C-14 é R_0. Para determinar o valor de k usamos o fato de que a meia-vida do carbono 14 é 5730 anos. Ou seja, $R(5730) = \dfrac{R_0}{2}$. Temos então,

$$\frac{R_0}{2} = R_0 e^{5730k} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{5730k}.$$

Aplicando logaritmo em ambos os lados da equação obtemos,

$$\ln\frac{1}{2} = \ln e^{5730k} \Rightarrow k = -\frac{\ln 2}{5730} = -0,00012097.$$

Como $k < 0$, o modelo é de decrescimento, ou seja, k representa a taxa de proporção no qual C-14 diminui ao longo do tempo.

Portanto, a solução da EDO é $R(t) = R_0 e^{-0,00012097t}$.

EXEMPLO 4.4. *Em 1988, o Vaticano autorizou o Museu Britânico a datar a relíquia conhecida como Sudário de Turim ou Santo Sudário. Trata-se de um tecido que contém o negativo da imagem de um corpo humano, até então, acreditava-se ser o pano que cobriu Jesus Cristo após sua morte. O relatório do Museu Britânico mostrou, a partir de três testes feitos, que a quantidade de carbono 14 do tecido estaria próximo a 92% da quantidade encontrada em um tecido novo equivalente. Como podemos usar esses dados para estimar a idade do Santo Sudário? (YARTEY; RIBEIRO, 2017)*

Solução: Considere $R_0 = R(0)$ a quantidade inicial de C-14 no sudário. Como visto acima, se tratando do carbono 14 a constante de proporcionalidade é $k = 0,00012097$. Assim, a equação diferencial que modela este problema pode ser escrita como,

$$\frac{dR}{dt} = -0,00012097R.$$

Sabemos que a solução para esta EDO é $R = ce^{-0,00012097t}$.

Agora, usando a condição inicial $R(0) = R_0$ encontramos o valor de c,

$$R(0) = ce^{-0,00012097\cdot 0} \Rightarrow R_0 = c \cdot e^0 \Rightarrow c = R_0.$$

Logo, podemos reescrever a solução como $R = R_0 e^{-0,00012097t}$.

Pelas informações do problema temos que a quantidade de C-14 em 1988 era, aproximadamente, 92% da quantidade inicial R_0. Nosso interesse é encontrar tempo necessário para a quantidade de C-14 decair de R_0 para $0,92R_0$. Substituindo estes dados na equação temos,

$$\begin{aligned} 0,92R_0 = R_0 e^{-0,00012097t} &\Rightarrow e^{-0,00012097t} = 0,92 \\ &\Rightarrow \ln e^{-0,00012097t} = \ln 0,92 \\ &\Rightarrow -0,00012097t = -0,08338161 \\ &\Rightarrow t \approx 689,27. \end{aligned}$$

Como a descoberta foi em 1988, estima-se que o tecido tenha sido confeccionado 689 anos antes, ou seja, por volta do ano de 1299 d.C. Portanto, se aceita a validade de datar por carbono-14, o Sudário de Turim não pode ser o tecido que cobriu Jesus. ■

4.4 Velocidade de escape

Quando um objeto é lançado para cima, a partir da superfície de um corpo massivo (planeta, satélite, etc.), uma pergunta que surge naturalmente é qual deve ser o valor mínimo de sua velocidade para que escape da atração gravitacional desse corpo. Tal velocidade é chamada de *velocidade de escape*.

A equação diferencial de um objeto em queda livre próximo à superfície da Terra é,

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -g,$$

onde g é a constante de gravitação universal e r representa a distância da superfície da Terra ao objeto, sendo a direção positiva considerada para cima. Neste caso, consideramos que a distância r é pequena quando comparada com o raio da Terra, R. Caso essa distância r for grande quando comparada com R, então combinamos a segunda Lei de Newton sobre o movimento com a Lei universal de gravitação para encontrar uma equação diferencial na variável r. Assim, a solução dessa equação pode ser usada para determinar a velocidade de escape que um objeto precisa para se livrar da atração gravitacional de um corpo massivo.

Considere que um corpo de massa m é lançado verticalmente a partir da superfície da Terra. Considerando a direção positiva para cima e desprezando o efeito da resistência do ar, então pela lei da gravitação universal, a força gravitacional é,

$$F = -\frac{GMm}{r^2}, \tag{4.7}$$

onde G é a constante universal de gravitação, M é a massa da Terra e r é a distância do corpo até o centro da Terra.

Pela segunda Lei de Newton, temos,

$$F = ma.$$

Como a aceleração é a derivada da velocidade, que por sua vez é a derivada da distância

r, podemos reescrever a equação acima como,

$$F = m\frac{d^2r}{dt^2}. \tag{4.8}$$

Igualando as equações (4.7) e (4.8), obtemos a seguinte equação diferencial,

$$-\frac{GMm}{r^2} = m\frac{d^2r}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}. \tag{4.9}$$

Na equação (4.8) procuramos r como função do tempo. Mas para encontrar a solução desta equação vamos considerar $v = \dfrac{dr}{dt}$ como uma função da distância r, já que para cada altura r temos uma respectiva velocidade v. Fazendo isso e associando à regra da cadeia temos,

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = v\frac{dv}{dr}. \tag{4.10}$$

Substitindo o resultado de (4.10) em (4.9), obtemos,

$$v\frac{dv}{dr} = -\frac{GM}{r^2}.$$

Note que a equação acima é uma EDO de 1^a ordem que pode ser resolvida por separação de variáveis. Assim,

$$\begin{aligned} v\frac{dv}{dr} = -\frac{GM}{r^2} &\Rightarrow vdv = -\frac{GM}{r^2}dr \\ &\Rightarrow \int vdv = -GM\int \frac{1}{r^2}dr \\ &\Rightarrow \frac{v^2}{2} = -GM\left(-\frac{1}{r}\right) + c \\ &\Rightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{GM}{r} + c. \end{aligned}$$

Agora, supondo que a velocidade inicial é $v = v_0$ e que $r \approx R$, obtemos o valor de c,

$$\frac{{v_0}^2}{2} = \frac{GM}{R} + c \Rightarrow c = \frac{{v_0}^2}{2} - \frac{GM}{R}.$$

Substituindo o valor de c na solução geral, obtemos,

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{r} + \frac{{v_0}^2}{2} - \frac{GM}{R}$$

ou

$$v^2 = \frac{2GM}{r} + {v_0}^2 - \frac{2GM}{R}.$$

Fazendo $r \to \infty$, temos que $\dfrac{2GM}{r} \to 0$. Portanto, $\lim\limits_{r\to\infty} v(r) = \sqrt{{v_0}^2 - \dfrac{2GM}{R}}$. Temos três situações:

1. Se ${v_0}^2 - \dfrac{2GM}{R} < 0$, então há algum valor de r para o qual $v = 0$ e assim o corpo atinge uma altura máxima e depois cai.

2. Se ${v_0}^2 - \dfrac{2GM}{R} = 0$ então $\lim\limits_{r\to\infty} v(r) = 0$, ou seja, o corpo escapa da atração gravitacional da Terra e chega em pontos infinitamente distantes com velocidade tendendo a 0.

3. Se ${v_0}^2 - \dfrac{2GM}{R} > 0$ então $\lim\limits_{r\to\infty} v(r) = \sqrt{{v_0}^2 - \dfrac{2GM}{R}} > 0$. Ou seja, o corpo escapa da atração gravitacional da Terra e chega no infinito com velocidade positiva.

Por fim, podemos dizer que a velocidade de escape pode ser calculada por meio da expressão,

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Exemplo 4.5. *Determine a velocidade de escape da Terra, sabendo que $R = 6350km$.*

Solução: No instante inicial $t_0 = 0$, sobre a superfície da Terra, sabemos experimentalmente que a aceleração é $9,8m/s^2$.

Pela equação (4.9), podemos escrever: $\dfrac{d^2r}{dt^2}(0) = -g = -\dfrac{GM}{R^2}$, ou seja, $g = \dfrac{GM}{R^2}$.

Substituindo o resultado acima na fórmula da velocidade de escape encontramos,

$$v_e = \sqrt{2gR}.$$

Fazendo as substituições, descobrimos o valor aproximado da velocidade de escape da Terra,

$$v_e = \sqrt{2 \cdot 0,0098 \cdot 6350} = \sqrt{124,46} = 11,2km/s.$$

■

4.5 Movimento vibratório

No movimento vibratório ou oscilatório o corpo se move periodicamente em torno de uma posição de equilíbrio e o sentido do movimento é invertido em intervalos de tempo regulares. Como exemplos, podemos citar o movimento de um pêndulo, de uma mola ou de uma corda de violão.

4.5.1 Movimento harmônico simples

O movimento harmônico simples (MHS) é o mais importante de todos os movimentos vibratórios, pois descreve de forma precisa muitas oscilações encontradas na natureza.

Além disso, é o movimento mais simples para se descrever matematicamente. Nesse tipo de movimento, o sistema oscila periodicamente sem atuação de forças externas dependentes do tempo. Um exemplo de sistema em MHS é o sistema massa-mola, sem forças externas. Nele, a única força atuante sobre o sistema é uma força restauradora.

Considere uma mola em posição de equilíbrio, com uma de suas extremidades presa a um suporte rígido e a outra livre. Pela Lei de Hooke, a mola exerce uma força restauradora F_s oposta à direção do alongamento e proporcional a distensão s, assim podemos denotá-la como,

$$F_s = -ks,$$

onde k é a constante elástica da mola. Por convenção, adotamos que deslocamentos medidos abaixo da posição de equilíbrio são positivos. Como a força restauradora da mola age em direção oposta ao movimento, isto é, no sentido negativo, adotamos o sinal de menos.

Ao aplicar uma massa m na extremidade livre da mola, até então em posição de equilíbrio, ela provoca uma distensão neste objeto. Para que o equilíbrio seja novamente restabelecido, a força restauradora deve ser igual a força peso que age sobre o corpo, e é dada como,

$$P = mg,$$

onde $g = 9,8m/s^2$. Assim, pela condição de equilíbrio, podemos escrever,

$$\begin{aligned} &|P| = |F_s| \\ \Rightarrow &mg = ks \\ \Rightarrow &mg - ks = 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Se a mola for esticada ou comprimida por uma quantidade x a partir da sua posição de equilíbrio e depois for solta, a força resultante é pela segunda Lei de Newton,

$$F = ma,$$

onde $a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$. Neste caso, podemos denotar a nova distensão como: $(s + x)$.

Supondo que não haja forças de retardamento agindo sobre o sistema e que a massa esteja em movimento livre, ou seja, vibre sem influência de outras forças externas, podemos igualar F à força resultante do peso e da força restauradora, assim temos,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(s + x) + mg = mg - ks - kx.$$

Substituindo (4.11) na equação acima, temos,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

Dividindo a igualdade acima por m, obtemos,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Fazendo $w^2 = \dfrac{k}{m}$, encontramos,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0. \tag{4.12}$$

Agora, precisamos encontrar a solução da EDO acima, ou seja, a função $x(t)$ que descreve o movimento de um sistema massa-mola executando MHS.

Fazendo $\dfrac{dx}{dt} = m$, encontramos a equação auxiliar associada a (4.12). Assim, temos,

$$m^2 + w^2 = 0$$

cujas raízes são os números complexos $m_1 = wi$ e $m_2 = -wi$

Portanto, como já visto na seção 3.2.3 (caso III), uma solução para EDO (4.12) pode ser escrita como

$$x(t) = c_1 \cos wt + c_2 \sin wt. \tag{4.13}$$

Podemos reescrever (4.13) na forma alternativa,

$$x(t) = A\cos(wt + \phi), A = \sqrt{{c_1}^2 + {c_2}^2}. \tag{4.14}$$

Como a função, cos, varia entre -1 e 1, os valores máximos do deslocamento e os valores mínimos do deslocamento variam entre A e $-A$, o que nos indica que A é a amplitude do movimento. O termo, $wt + \phi$, é chamado de fase do movimento harmônico simples.

Para verificar que as soluções (4.13) e (4.14) são equivalentes, inicialmente desenvolvemos a expressão (4.14). Assim,

$$A\cos(wt + \phi) \Rightarrow A\cos wt \cos\phi - A\sin wt \sin\phi. \tag{4.15}$$

Agora, comparando (4.13) e (4.15) vemos que elas são iguais, desde que,

$$c_1 = A\cos\phi$$
$$c_2 = -A\sin\phi.$$

Observe que, dados A e ϕ, podemos determinar os valores de c_1 e c_2. Ou ainda, com c_1 e

c_2 podemos calcular os valores de A e ϕ,

$$\cos\phi = \frac{c_1}{\sqrt{{c_1}^2 + {c_2}^2}} = \frac{c_1}{A}$$
$$\sin\phi = \frac{c_2}{\sqrt{{c_1}^2 + {c_2}^2}} = \frac{c_2}{A}.$$

Por fim, se ϕ é definido como descrito acima então (4.15) torna-se,

$$A\frac{c_1}{A}\cos wt - A\frac{c_2}{A}\sin wt = c_1\cos wt + c_2\sin wt = x(t).$$

O período de vibrações livres, T, descrito por (4.13) é definido como o tempo de duração de uma única oscilação e é dado por,

$$T = \frac{2\pi}{w}.$$

A frequência por sua vez é definida pelo número de oscilações por unidade de tempo e é obtida através da equação abaixo,

$$f = \frac{1}{T} = \frac{w}{2\pi}.$$

4.5.2 Movimento harmônico Amortecido

Consideremos um sistema composto por uma massa m presa a uma mola com constante elástica k, imerso em um fluído viscoso. As oscilações neste sistema são amortecidas pela presença do fluído, caracterizando assim o movimento como oscilatório amortecido. Se o amortecimento for pequeno, a amplitude das oscilações diminui lentamente com o tempo. Consideramos que o fator de amortecimento é uma força F_A proporcional à velocidade do corpo, isto é,

$$F_A = -bv \Rightarrow F_A = -b\frac{dx}{dt}, \tag{4.16}$$

onde b é a constante de amortecimento. O sinal de menos indica que a força de amortecimento age em direção oposta ao movimento.

Pela segunda Lei de Newton, temos,

$$F = ma \Rightarrow F = m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Considerando que não há outras forças agindo sobre o sistema, podemos igualar F à força restauradora e a força de amortecimento dada pela equação (4.16). Assim,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + \left(-b\frac{dx}{dt}\right) \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

Dividindo ambos os lados da equação acima por m, encontramos a EDO que descreve o sistema massa-mola em movimento amortecido,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0. \tag{4.17}$$

Por conveniência, fazemos as seguintes identificações,

$$\frac{b}{m} = 2\lambda, \frac{k}{m} = w^2.$$

Substituindo estas igualdades em (4.17), obtemos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + w^2x = 0, \tag{4.18}$$

que é uma EDO de coeficientes constantes cuja equação auxiliar a associada é obtida fazendo $\dfrac{dx}{dt} = m$. Assim, temos,

$$m^2 + 2\lambda m + w^2 = 0.$$

Podemos obter três tipos de solução para (4.18), a depender do valor do discriminante. Assim,

- se $\lambda^2 - w^2 < 0$, a equação possui duas raízes complexas distintas. Assim, pela seção 3.2.3 (Caso III), a solução geral pode ser escrita como,

  $$x(t) = e^{-\lambda t}[c_1 \cos(\sqrt{w^2 + \lambda^2}t) + c_2 \sin(\sqrt{w^2 + \lambda^2}t)].$$

  A amplitude diminui com o passar do tempo. Assim, para grandes intervalos de tempo o sistema pára de oscilar,ou seja, $A \to 0$ quando $t \to \infty$. Neste caso, o amortecimento do sistema é fraco de modo que a oscilação tem sua amplitude reduzida aos poucos conforme o tempo passa. Nessa situação o sistema é chamado de subamortecido.

  Podemos, reescrever a solução acima como,

  $$x(t) = Ae^{-\lambda t}\sin(\sqrt{w^2 - \lambda^2 t} + \phi), \tag{4.19}$$

  onde $A = \sqrt{{c_1}^2 + {c_2}^2}$, w a frequência angular do sistema e ϕ é o ângulo de fase do movimento, determinado pelas equações,

  $$\sin\phi = \frac{c_1}{A}, \cos\phi = \frac{c_2}{A}, \tan\phi = \frac{c_1}{c_2}.$$

Como, (4.19) não é uma função periódica, o número $\dfrac{2\pi}{\sqrt{w^2-\lambda^2}}$ é chamado de *quasi* período e $\dfrac{\sqrt{w^2-\lambda^2}}{2\pi}$ é a *quasi* frequência.

- se $\lambda^2 - w^2 = 0$, dizemos que o sistema é criticamente amortecido. De acordo com a seção 3.2.3 (Caso II), a solução para (4.18) é dada por,

$$x(t) = c_1 e^{-\lambda t} + c_2 e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}(c_1 + c_2).$$

Neste caso, não temos uma oscilação completa, antes de a oscilação se completar a massa pára.

- se $\lambda^2 - w^2 > 0$, dizemos que o sistema é superamortecido, pois há um amortecimento intenso. Neste caso, de acordo com a seção 3.2.3 (caso I), a solução para (4.18) é dada por,

$$\begin{aligned} &x(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t} \\ \Rightarrow &x(t) = c_1 e^{-\lambda t + t\sqrt{\lambda^2 - w^2}} + c_2 e^{-\lambda t - t\sqrt{\lambda^2 - w^2}} \\ \Rightarrow &x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 e^{t\sqrt{\lambda^2 - w^2}} + c_2 e^{t\sqrt{\lambda^2 - w^2}}). \end{aligned}$$

O fator $(\sqrt{\lambda^2 - w^2})$ reduz o decaimento pois aparece subtraindo o fator λ. Assim, nota-se que a equação representa um sistema com movimentos suaves, sem oscilações, apenas relaxa para o estado de equilíbrio.

4.6 Circuitos elétricos

Um circuito elétrico é descrito como uma ligação entre elementos, de modo que forme pelo menos um caminho fechado para a passagem de cargas elétricas. Para o desenvolvimento de nossas análises utilizamos alguns conceitos básicos descritos abaixo,

Corrente elétrica: é taxa de variação da carga elétrica por unidade de tempo e é dada por,

$$i = \frac{dq}{dt},$$

onde q representa a carga elétrica.

Diferença de potencial ou tensão elétrica: a tensão elétrica entre dois pontos em um circuito elétrico é a energia necessária para deslocar uma carga de um ponto a outro e é dada pela expressão,

$$v = \frac{dw}{dq}.$$

2^a *Lei de Kirchhoff:* também chamada de lei das malhas ou lei das tensões foi desenvolvida pelo físico Gustav Robert Kirchhoff (1824 - 1887) para descrever o comportamento de circuitos elétricos. A lei estabele que em um circuito em série, a soma das quedas de tensões nos elementos dependentes (resistor e capacitor ou resistor e indutor) é igual à voltagem.

1^a *Lei de Ohm:* Desenvolvida pelo físico e matemático Georg Simon Ohm (1789 - 1854), estabelece que a razão entre a tensão (V) e a corrente elétrica (i) em dois pontos distintos do condutor é definida como resistência elétrica (R). Assim, podemos escrevê-la como,

$$R = \frac{V}{i}.$$

Elementos de um circuito elétrico: Os circuitos elétricos podem ser formados por diversos elementos a depender da função a ser exercida. Abaixo descrevemos os elementos necessários para nosso estudo seguido de algumas de suas características.

Resistor: é um dispositivo elétrico, de resistência R, que tem como finalidade básica transformar energia elétrica em energia térmica. Outra função é dificultar a passagem de corrente elétrica pelo circuito. Produz uma queda de tensão dada pela Lei de Ohm,

$$R = \frac{V}{i} \Rightarrow E_R = Ri. \tag{4.20}$$

Capacitor: é um componente que armazena energia elétrica na forma de campo elétrico. A queda de tensão em um capacitor, de capacitância C, é proporcional à sua carga elétrica. Assim, podemos escrever,

$$E_C = \frac{q}{C}.$$

Indutor: é um dispositivo, de indutância L, que quando recebe uma corrente elétrica cria um campo magnético que faz com que a corrente varie em todos os pontos em relação ao tempo e tal variação é igual à queda de tensão neste indutor. Assim, a queda de tensão neste dispositivo pode ser descrita pela expressão,

$$E_L = Li' = L\frac{di}{dt}, \tag{4.21}$$

Os elementos que os compõem um circuito determinam sua classificação. Os constituídos por resistores e indutores são chamados circuitos RL, os formados por resistores e capacitores são os circuitos RC e os compostos pelos três dispositivos recebem o nome de circuitos RLC. Os circuitos podem ainda receber uma outra classificação, dada de acordo com a disposiçãao de seus componentes, que podem ser em série ou paralelos.

Os circuitos em série podem ser modelados por uma EDO enquanto os circuitos paralelos são modelados por um sistema de equações lineares. Neste trabalho abordamos apenas problemas envolvendo circuitos elétricos em série dos tipos RL, RC e RCL, Figuras 4.1, 4.2 e 4.3, respectivamente.

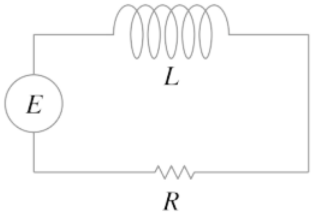

Figura 4.1: Circuito em série RL.

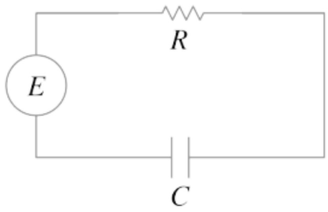

Figura 4.2: Circuito em série RC.

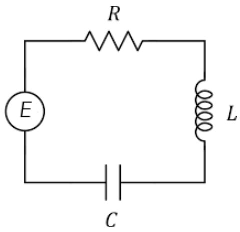

Figura 4.3: Circuito em série RLC.

4.6.1 Circuito elétrico de 1^a ordem

Um circuito é dito de primeira ordem quando possui um único elemento armazenador de energia (capacitor/indutor) e é descrito por uma equação diferencial ordinária de primeira ordem. Aqui, podemos citar como exemplos os circuitos RC e RL que associados às leis de Kirchhoff resultam em equações diferenciais de primeira ordem.

Circuito em série RL

Considere um circuito ligado em série a um resistor, a uma fonte de tensão contínua que possui um indutor desenergizado. Aplicando neste circuito a 2ª lei de Kirchhoff, a qual estabelece que a soma entre a queda de tensão no indutor e a queda de tensão no resistor devem ser iguais à voltagem $E(t)$, temos,

$$E_L + E_R = E.$$

Substituindo as equações (4.21) e (4.20) na expressão acima, obtemos a equação,

$$L\frac{di}{dt} + R_i = E(t).$$

Dividindo ambos os lados da equação acima por L, obtemos:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E(t)}{L}. \tag{4.22}$$

Observe que a equação (4.22) é uma EDO linear de 1ª ordem, assim $P(x) = \dfrac{R}{L}$ e portanto o fator integrante é,

$$e^{\int \frac{R}{L}dt} = e^{\frac{R}{L}t}.$$

Segue da parte de resolução da EDO via fator integrante, a solução geral da EDO, ou seja, a equação que nos permite determinar a corrente elétrica em um circuito RL é,

$$i(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \int \left(e^{\frac{R}{L}t} \frac{E(t)}{L} \right) dt + c.$$

Este resultado indica que a resposta natural de um circuito RL é uma queda exponencial da corrente inicial.

Circuito em série RC

Agora considere um circuito ligado em série a um resistor, a uma fonte de tensão contínua e que possui um capacitor descarregado. Aplicando neste circuito a segunda lei e Kirchhoff, temos,

$$E_C + E_R = E.$$

Sabendo que as tensões do capacitor e do resistor são, respectivamente, $\frac{q}{C}$ e Ri, substituindo esses dados na equação acima, temos,

$$\frac{q}{C} + Ri = E. \tag{4.23}$$

Sabemos que a intensidade de corrente é igual à variação das cargas em relação ao tempo, ou seja, $i(t) = \frac{dq}{dt}$. Substituindo esta informação em (4.23), obtemos,

$$\frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} = E.$$

Dividindo ambos os lados da equação acima por R, temos,

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{E}{R}. \tag{4.24}$$

Note que (4.24) é uma EDO de 1ª ordem linear. Assim, o fator integrante é,

$$e^{\int \frac{1}{RC} dt} = e^{\frac{t}{RC}}.$$

Segue da parte de EDO linear/fator integrante que a carga elétrica de um circuito RC é,

$$\begin{aligned}
&\int \left(\frac{d}{dt}[e^{\frac{t}{RC}} \cdot q] \right) dt = \int \left(e^{\frac{t}{RC}} \frac{E}{R} \right) dt \\
\Rightarrow &e^{\frac{t}{RC}} \cdot q = \int \left(e^{\frac{t}{RC}} \frac{E}{R} \right) dt \\
\Rightarrow &q = e^{-\frac{t}{RC}} \int \left(e^{\frac{t}{RC}} \frac{E}{R} \right) dt.
\end{aligned}$$

EXEMPLO 4.6. *Um marcapasso é constituído por uma bateria, um capacitor e o coração* *funciona como o resistor. Quando a chave S está em P o capacitor é carregado; quando S está em Q, o capacitor é descarregado, enviando um impulso elétrico ao coração (A chave é aberta e fechada periodiocamente para simular o batimento cardíaco). Durante esse tempo, a voltagem $E(t)$ aplicada ao coração é dada por,*

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{RC}E,$$

onde $t_1 < t < t_2$ e R, C são constantes. Determine $E(t)$ se $E(t_1) = E_0$.

Solução: De acordo com as informações do problema, podemos escrever o PVI abaixo,

$$\begin{cases} \dfrac{dE}{dt} + \dfrac{1}{RC}E = 0 \\ E(t_1) = E_0 \end{cases}.$$

Observe que a equação é linear. Assim, seu fator de integração é,

$$e^{\int \frac{1}{RC}dt} = e^{\frac{t}{RC}}.$$

Segue da parte de EDO de 1ª ordem a solução,

$$E = \frac{1}{e^{\frac{t}{RC}}}c.$$

Para definir o valor da constante c usamos a condição inicial dada, ou seja, em $t = t_1$ a voltagem é 0. Assim,

$$E(t_1) = c\frac{1}{e^{\frac{t_1}{RC}}} \Rightarrow E_0 = c\frac{1}{e^{\frac{t_1}{RC}}} \Rightarrow c = E_0 e^{\frac{t_1}{RC}}.$$

Portanto, a solução para o PVI acima é,

$$\begin{aligned} E(t) &= E_0 e^{\frac{t_1}{RC}} \frac{1}{e^{\frac{t}{RC}}} \\ \Rightarrow E(t) &= E_0 e^{\left(\frac{t_1}{RC} - \frac{t}{RC}\right)} \\ \Rightarrow E(t) &= E_0 e^{\left[\frac{(t_1 - t)}{RC}\right]}. \end{aligned}$$

Por meio desta última equação podemos determinar a voltagem aplicada no coração, dada a condição inicial imposta. ■

4.6.2 Circuito elétrico de 2^a ordem

Um circuito é dito de segunda ordem quando possui dois elementos que armazenam energia elétrica e é representado por uma equação diferencial de segunda ordem. Os circuitos RLC são exemplos de circuitos de ordem 2.

Circuito RLC

Considere um circuito formado por um resistor R, um indutor L e um capacitor C conectados em série com uma fonte de tensão E. Sabendo que a queda de tensão no resistor, indutor e capacitor são, respectivamente, por Ri, $L\dfrac{di}{dt}$ e $\dfrac{q}{C}$, e aplicando a segunda lei de Kirchhoff, obtemos,

$$E_L + E_R + E_C = E \Rightarrow L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = E. \tag{4.25}$$

A intensidade de corrente está relacionada à carga através da equação, $i = \dfrac{dq}{dt}$, derivando esta igualdade, temos,

$$\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}.$$

Substituindo em (4.25), obtemos a equação diferencial para a carga elétrica,

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E. \tag{4.26}$$

A equação (4.26) é uma EDO de coeficientes constantes. Assim, a equação característica a ela associada é $Lm^2 + Rm + \dfrac{1}{C} = 0$. Dessa forma, quando $R \neq 0$, podemos obter três tipos de solução para EDO, a depender do valor do discriminante. Assim, se:

1. $R^2 - \dfrac{4L}{C} < 0$, as raízes são complexas e então o circuito é chamado de subamortecido;

2. $R^2 - \dfrac{4L}{C} > 0$, as raízes da equação característica são reais e distintas e o circuito é chamado superamortecido;

3. $R^2 - \dfrac{4L}{C} = 0$, as raízes são reais e iguais e então o circuito é chamado de amortecido.

Podemos ainda obter uma equação para determinar a intensidade de corrente. Para isso, primeiro derivarmos (4.26) em relação a t. Assim, obtemos,

$$\frac{d^3q}{dt^3} + R\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{dq}{dt}\frac{1}{C} = \frac{E}{dt}.$$

Novamente, utilizando a relação $i = \dfrac{dq}{dt}$, podemos reescrever a equação acima como,

$$\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{dE}{dt}.$$

Através desta última equação podemos calcular a intensidade de corrente para um circuito RLC.

4.7 Modelo de Competição entre espécies

Um dos modelos matemáticos mais simples, conhecidos e estudados, para o estudo da dinâmica populacional entre duas espécies em competiçao, onde uma é predadora e outra presa, é o modelo de Lotka e Volterra. O modelo acaba por não descrever fielmente as relações ocorridas na natureza mas nos fornece uma ideia para compreensão de modelos mais sofisticados.

Considere $x(t)$ e $y(t)$ as populações de predador e presa, respectivamente, no tempo t. Para modelar matematicamente a interação das espécies, consideramos as seguintes hipóteses (BOYCE; DIPRIMA, 2010; ZILL; CULLEN, 2001): na ausência do predador, $x(t) = 0$, a população de presas aumenta a uma taxa proporcional à população atual, ou seja, $y\alpha$, onde α é uma constante positiva. Por outro lado, a ausência de presas, $y(t) = 0$, acarreta a extinção da população de predadores, $-\gamma x$, onde γ é uma constante positiva. Considera-se também que o número de encontros entre as duas espécies é proporcional ao produto das populações de cada espécie, ou seja, $x(t)y(t)$. Estes encontros tendem a promover o crescimento da população de predadores e a inibir o crescimento da população de presas. Assim, a taxa de crescimento da população de predadores, $\frac{dx}{dt}$, é aumentada por um termo da forma, λxy, enquanto a taxa de crescimento da população de presas, $\frac{dy}{dt}$, é diminuída por um termo da forma, $-\beta xy$, onde λ e β são constantes positivas. Em consequência dessa modelagem matemática, somos levados às equações de Lotka-Volterra,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= y(\alpha - \beta x),\\ \frac{dx}{dt} &= x(-\gamma + \lambda y),\end{aligned}$$

onde α é a taxa de crescimento da população de presas na ausência de predadores, β é a taxa de decréscimo da população de presas devido a predação, γ é a taxa de mortalidade da população de predadores na ausência de presas e λ é a taxa de crescimento da população dos predadores devido à predação.

O modelo presa-predador é um sistema não-linear de equações diferenciais ordinárias. Esse sistema não possui solução explícita, assim encontramos na literatura análises qualitativas das soluções utilizando métodos que não foram abordados nesse trabalho. Vamos descrever abaixo uma possível solução que relaciona as duas populações em qualquer instante de tempo t.

Dividindo a primeira equação pela segunda, obtemos,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(\alpha - \beta x)}{x(-\gamma + \lambda y)}. \tag{4.27}$$

A EDO acima é separável, assim usando o metodo de separaçaõ de variáveis, encontramos,

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = \frac{y(\alpha - \beta x)}{x(-\gamma + \lambda y)} &\Rightarrow \frac{(-\gamma + \lambda y)}{y} dy = \frac{(\alpha - \beta x)}{x} dx \\
&\Rightarrow \int \left[\frac{(-\gamma + \lambda y)}{y} dy \right] dy = \int \left[\frac{(\alpha - \beta x)}{x} dx \right] dx \\
&\Rightarrow \int -\frac{\gamma}{y} dy + \int \frac{\lambda y}{y} dy = \int \frac{\alpha}{x} dx - \int \frac{\beta x}{x} dx \\
&\Rightarrow -\gamma \ln|y| + \lambda y = \alpha \ln|x| - \beta x + c.
\end{aligned}
$$

Daí, $g(x, y) = 0$, onde $g(x, y) = \alpha \ln|x| + \gamma \ln|y| - \lambda y - \beta x + c$, é a solução geral da EDO (4.27), dada de forma implícita.

Capítulo 5

Considerações finais

Neste trabalho, o principal objetivo foi apresentar o estudo das equações diferencias ordinárias dando ênfase a algumas de suas vastas aplicações. Buscamos, nas bibliografias, reunir, de forma clara, os principais conceitos e resultados relacionados à teoria das equações diferenciais ordinárias a fim de auxiliar o leitor na compreensão do assunto abordado.

Durante as pesquisas, vimos que até mesmo as equações diferenciais simples são capazes de modelar matematicamente situações reais. E que em casos de sistemas mais complexos podem ser necessários métodos numéricos e computacionais para determinar a solução. Também notamos a grande importância das equações diferencias, hoje, fundamentais para o desenvolvimento de novas tecnologias e avanço dos mais diversos campos do conhecimento.

Referências Bibliográficas

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher ltda, 1996.

DOERING, C. I.; LOPES, A. O. *Equações Diferenciais Ordináirias*. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

YARTEY, J. N. A.; RIBEIRO, S. S. *Equações diferenciais*. Salvador: Instituto de Matemática e Estatística; Superintendência de Educação a Distância, 2017.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações Diferenciais, volume 1*. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.