



Universidade Federal de São João del-Rei
Coordenadoria do Curso de Matemática

Vanessa Coelho dos Santos

T-ideal da Álgebra de Grassmann

São João del-Rei - MG
Agosto de 2024

Universidade Federal de São João del-Rei
Coordenadoria do Curso de Matemática

T-ideal da Álgebra de Grassmann

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenadoria do Curso de Matemática como parte necessária da Instrução Normativa COMAT N07 de 14 de Dezembro de 2021.

Orientadora: Profa. Dra. Lorena Mara Costa Oliveira
UFSJ - DEMAT

Banca Examinadora:

Orientadora: Profa. Dra. Lorena Mara Costa Oliveira - UFSJ

Prof. Dr. Rafael Bezerra dos Santos - UFMG

Prof. Dr. Wilker Thiago Resende Fernandes - UFSJ

São João del-Rei - MG
Agosto de 2024

À memória de meus avós Orlando Coelho de Andrade e Maria José de Sousa Coelho.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por tudo.

Aos meus avós, que sempre foram a luz da minha vida e nunca mediram esforços para me fazer feliz. Vocês são e sempre serão minha maior inspiração.

À minha mãe, Maristela, e aos meus tios Clairto, Claudinéia, Edivaldo, Lúcia, Luís Antônio e Mara, sou profundamente grata por terem feito parte dessa jornada, compartilhando comigo valiosos ensinamentos sobre a vida.

Às minhas colegas de curso, a querida Alcatéia: Ana, Brenda, Fabiana e Maria, obrigada por terem trazido leveza e alegria a essa caminhada. Vocês fizeram toda a diferença nesse processo.

Às minhas colegas do Grupo de Estudo em PI-Teoria: Ana Cristina, Maria, Maria Luísa e Vanessa Lopes, obrigada pela companhia nessa trajetória com a álgebra.

Aos meus colegas do ônibus, a Tropa do Fundão: Arthur, Diego, Felipe, Gabrielle, Hugo, João Pedro, Júnia, Laura, Leandro e Taliane, obrigada pela companhia e pelos momentos de descontração que tornaram meus dias mais divertidos.

À banca examinadora: Rafael Santos e Wilker Fernandes, agradeço por sua valiosa contribuição na avaliação deste trabalho.

Aos professores do Departamento de Matemática e Estatística da UFSJ, agradeço imensamente por todo o conhecimento transmitido ao longo dessa trajetória. Em especial, meu sincero agradecimento a Fabíola Miranda, Flávia Coura, Francinildo Ferreira, Patrícia Tempesta, Romélia Souto, Viviane Pardini, Viviane Oliveira e Wilker Fernandes, por serem tão presentes e fundamentais em minha formação.

À minha orientadora, Lorena Oliveira, agradeço profundamente por acreditar em mim, mesmo nos momentos em que eu mesma duvidei. Sua confiança e apoio foram essenciais para que eu chegasse até aqui.

Agradeço a mim mesma, por ter enfrentado todos os obstáculos com coragem e por não ter desistido, mesmo nos momentos mais desafiadores.

Por fim, meu sincero agradecimento a todos que fizeram e fazem parte da minha história. Cada um de vocês contribuiu de forma única para que eu chegasse até aqui.

*"Se você quer entender o universo, precisa pensar em termos de energia, frequência e vibração.
E, claro, matemática é a música dos cosmos."
(Sheldon Cooper, The Big Bang Theory)*

Resumo

Uma álgebra A é uma PI-álgebra se existe um polinômio f não nulo que satisfaz $f(a) = 0$, para todo $a \in A$. Nesse caso o polinômio f é chamado de identidade polinomial de A . Neste trabalho nós vamos nos ater à álgebra de Grassmann, definida como o quociente $\mathcal{G} = F\langle X \rangle / I$, onde $I = \langle x_i x_j + x_j x_i \rangle$ é um ideal da álgebra livre $F\langle X \rangle$ em F de característica zero. É natural representar esta álgebra da seguinte forma: $\mathcal{G} = \langle 1, e_1, e_2, \dots \mid e_i e_j = -e_j e_i \rangle$. Sendo assim, o objetivo desse trabalho é mostrar que $f(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3]$ é uma identidade polinomial para a álgebra $\mathcal{G}$ e que $\text{Id}(\mathcal{G}) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle_T$.

Palavras-chave: Identidade Polinomial, PI-álgebra, Álgebra de Grassmann, T-ideal.

Abstract

An algebra A is a PI-algebra if it possesses a nonzero polynomial f that satisfies $f(a) = 0$, for all $a \in A$. In this case, the polynomial f is called a polynomial identity of A . In this work, we will focus on the Grassmann algebra, defined as the quotient $\mathcal{G} = F\langle X \rangle / I$ where $I = \langle x_i x_j + x_j x_i \rangle$ is an ideal of the free algebra $F\langle X \rangle$ over a field F of characteristic zero. It is natural to represent this algebra as follows: $\mathcal{G} = \langle 1, e_1, e_2, \dots \mid e_i e_j = -e_j e_i \rangle$. Thus, the objective of this work is to show that $f(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3]$ is a polynomial identity for the algebra $\mathcal{G}$ and that $\text{Id}(\mathcal{G}) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle_T$.

Keywords: Polynomial Identity, PI-algebra, Grassmann Algebra, T-ideal.

Sumário

Introdução	9
1 Conceitos Básicos	11
1.1 Grupos	11
1.2 Anéis	14
1.3 Álgebras	18
2 Álgebras com Identidades Polinomiais	22
2.1 Polinômios	22
2.2 PI - álgebras	27
2.3 Álgebra de Grassmann	29
3 T-ideais	31
3.1 Identidades Polinomiais	31
3.2 Processo de Multilinearização	33
3.3 T-ideal da Álgebra de Grassmann	36
Considerações Finais	38

Introdução

Sejam F um corpo de característica zero, A uma F -álgebra associativa e $F\langle X \rangle$ a álgebra livre associativa unitária, onde $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ é um conjunto enumerável das variáveis. Dizemos que um polinômio $f = f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle$ é uma identidade polinomial de A se f se anula sob quaisquer substituições de elementos em A . Se A possui uma identidade polinomial não nula, então chamamos A de álgebra com identidade polinomial, ou somente, PI-álgebra. Por exemplo, se A é uma álgebra comutativa, então A é uma PI-álgebra cuja identidade polinomial é dada por $[x_1, x_2] := x_1x_2 - x_2x_1$.

As pesquisas relacionadas às PI-álgebras são conhecidas como PI-teoria. Essas investigações se iniciaram pelos estudiosos Max Dehn [3], Václav Wagner [12] e Marshall Hall [5] publicados em 1922, 1936 e 1943, respectivamente. Max Dehn fez contribuições fundamentais à teoria dos grupos abordando a relação com o problema das palavras e suas conexões com a PI-teoria, estabelecendo bases para o estudo de classes de grupos definidos por identidades. Václav Wagner colaborou com estudos sobre as álgebras de Lie e suas identidades polinomiais, contribuindo para a compreensão das condições necessárias para que uma álgebra satisfaça determinadas identidades.

Em 1950, o estudo das PI-álgebras foi influenciado pelo trabalho de Amitsur e Levitzki [1]. Este teorema afirma que a álgebra de matrizes $M_n(F)$ satisfaz o polinômio standard de grau $2n$, ou seja, o standard de grau $2n$ é uma identidade polinomial de $M_n(F)$. Além disso, esses pesquisadores mostraram que essa é a identidade de menor grau de $M_n(F)$ em um corpo F de característica zero.

Assim, considere $\text{Id}(A)$ o conjunto de todas as identidades polinomiais de A . Se $\text{Id}(A)$ é um ideal de A e é fechado para todos endomorfismos de $F\langle X \rangle$, dizemos que $\text{Id}(A)$ é um T-ideal de A . Nesse sentido, a partir de um T-ideal podemos descrever um conjunto gerador para $\text{Id}(A)$. Em 1950, Wilhelm Specht [10] conjecturou que para um corpo F de característica zero, todo T-ideal é finitamente gerado, ou seja, existe um conjunto finito de identidades polinomiais que geram qualquer T-ideal. Mais tarde, em 1987, Alexander Kemer ([6, 7]) confirmou a conjectura de Specht.

Por exemplo, a álgebra de Grassmann de dimensão infinita sobre um corpo F de caracte-

rística diferente de 2 representada por

$$\mathcal{G} = \langle 1, e_1, e_2, \dots \mid e_i e_j = -e_j e_i \rangle.$$

A álgebra de Grassmann possui aplicação em algoritmos para operações envolvendo formas multilineares e produtos exteriores. Essas técnicas são usadas em software de álgebra computacional para resolver problemas complexos envolvendo álgebra e geometria. Ademais, há aplicações na física e em outras áreas da matemática que utilizam dessa estrutura para diversos estudos, por exemplo, modelagem de espaços com dimensões superiores.

Consiste em mostrar que a álgebra de Grassmann é gerada, como T-ideal, por $\langle [x_1, x_2, x_3] \rangle_T$ o objetivo central desse trabalho. Desse modo, ao longo desse texto, apresentaremos resultados matemáticos importantes para demonstrar que $\text{Id}(\mathcal{G}) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle_T$.

Para isso, partiremos de conceitos básicos relacionados à álgebra abstrata. O texto está organizado da seguinte forma. No Capítulo 1 definiremos grupos, anéis e álgebras - estruturas importantes para os estudos em PI-teoria, pois representam a base dos estudos desencadeados nessa teoria. As definições abordadas são diretamente ligadas a ideia de munirmos um conjunto com determinadas operações e, em seguida, observarmos propriedades segundo as quais foram geradas pelo comportamento desses conjuntos sob as condições das operações.

No Capítulo 2 partiremos para as definições e resultados propriamente conectados aos estudos em PI-teoria. Os polinômios serão destacados pela importância sobre as PI-álgebras para descrição das identidades polinomiais das mesmas. Em seguida, a álgebra de Grassmann será definida acompanhada de importantes resultados e observações que nortearão os resultados finais desse trabalho. Em especial, mostraremos que o polinômio é $[x_1, x_2, x_3]$ uma identidade polinomial de $\mathcal{G}$. Por fim, no Capítulo 3 apresentaremos resultados que serão capazes de nortear a demonstração que $\text{Id}(\mathcal{G})$ é gerado, como T-ideal, por $\langle [x_1, x_2, x_3] \rangle_T$.

Por fim, podemos nos perguntar o que acontece com o T-ideal da álgebra de Grassmann ao considerá-la de dimensão finita. Ou seja, consideraremos subálgebras finitas de $\mathcal{G}$. Assim, nas Considerações Finais veremos que $\text{Id}\mathcal{G}_\infty$ é gerado como T-ideal por $[x_1, x_2, x_3]$ e $[x_1, x_2][x_3, x_4]$. De maneira geral,

$$\text{Id}(\mathcal{G}_{2k}) = \langle [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2] \dots [x_{2k+1}, x_{2k}] \rangle.$$

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Este capítulo dedica-se à apresentação de conceitos fundamentais para o entendimento da PI-Teoria, a área central de estudo deste trabalho. Definiremos conceitos de grupos, anéis e álgebras. Além disso, apresentaremos exemplos e resultados importantes para a compreensão dessa teoria.

1.1 Grupos

Nesta seção será feita uma abordagem sobre alguns aspectos importantes de uma estrutura matemática chamada grupo. Nesse sentido, as definições de grupo e subgrupo serão colocadas; e, também, exemplos e resultados importantes.

Definição 1.1.1. Denotamos por $(G, *)$ um sistema matemático chamado de *grupo* que é constituído por um conjunto não vazio G e uma operação $*$ sobre os elementos de G que está sujeita às seguintes propriedades:

- i. Associatividade: $(a * b) * c = a * (b * c)$, para todos $a, b, c \in G$;
- ii. Existência única de elemento neutro: existe $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a$, para todo $a \in G$;
- iii. Existência única de elemento simétrico: Para todo $a \in G$, existe $a^{-1} \in G$ tal que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Ainda, se essa operação cumprir propriedade comutativa: $a * b = b * a$, para todos $a, b \in G$, o grupo é dito *grupo abeliano*.

Exemplo 1. O conjunto dos números inteiros munido com a adição usual é um grupo aditivo abeliano.

Exemplo 2. O conjunto das classes de resto módulo m , ou seja, $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}$ munido com a adição usual é um grupo abeliano.

Proposição 1.1.2. O conjunto $\mathbb{Z}_m^* = \mathbb{Z}_m - \{\bar{0}\}$ munido com a multiplicação usual é um grupo se, e somente se, m é um número primo.

Demonstração. Considere que $\mathbb{Z}_m^*$ é um grupo munido com a multiplicação usual. Suponha que m não é um número primo, então $m = ab$, para certos $a, b \in \mathbb{Z}$. Vendo ab módulo m temos que $\bar{0} = \overline{ab} = \bar{a} \cdot \bar{b} \in \mathbb{Z}_m^*$. Uma contradição, pois não preserva o fechamento do produto.

Reciprocamente, seja m um número primo. Considere $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m^*$, então a e b não são múltiplos de m . Como m é um número primo, segue que, ab não é múltiplo de m . Assim, $\overline{ab} \in \mathbb{Z}_m^*$. Daí, sendo $\text{mdc}(m, a) = 1$, pelo Teorema de Bezout, existem $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tais que $mx_0 + ay_0 = 1$. Então, módulo m , temos $\overline{mx_0} + \overline{ay_0} = \bar{1}$, ou seja, $\overline{ay_0} = \bar{a} \dots \bar{y_0} = \bar{1}$. Portanto, cada elemento possui simétrico, e assim, $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ é um grupo. $\square$

Exemplo 3. O conjunto $M_n(\mathbb{R})$ das matrizes $n \times n$ com entradas em $\mathbb{R}$ munido com a adição usual é um grupo abeliano.

Exemplo 4. O conjunto das matrizes invertíveis $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$ munido com a multiplicação usual é um grupo.

Agora, a definição de subgrupos será destacada.

Definição 1.1.3. Considere $(G, *)$ um grupo. Dizemos que o subconjunto $H \subseteq G$ é um *subgrupo* de G se, H é um grupo munido com a operação $*$.

Os subconjuntos $\{e\}$ e o próprio conjunto G são chamados *subgrupos triviais* de G .

Exemplo 5. O conjunto $H = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ é um subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$.

De fato, sejam $a, b \in H \subset \mathbb{Z}$ tais que $a = 3k, b = 3l$, para certos $k, l \in \mathbb{Z}$. Então, $a + b = 3k + 3l = 3(k + l) \in H$, e assim, H é fechado para a adição. Ainda, para $k = 0$ temos o elemento neutro dado por $0 = 3 \cdot 0 \in H$. Além disso, considere $a = 3k \in H$ então para $k = -1$ o elemento $b = 3(-k) \in H$ é o simétrico de a . Portanto, H é subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$.

Proposição 1.1.4. Considere $(G, *)$ um grupo e H um subconjunto não vazio de G . Então, H é um subgrupo de G se, e somente se, $a * h^{-1} \in H$, para todos $a, h \in H$.

Demonstração. Suponha que $(H, *)$ é um subgrupo de G . Se $h \in H$, então $h^{-1} \in H$. Assim, considerando $a \in H$, segue que $a * h^{-1} \in H$.

Reciprocamente, suponha que $a * h^{-1} \in H$, para todos $a, h \in H$. Seja $h \in H$, segue que, $h * h^{-1} = e \in H$. Além disso, $e * h^{-1} = h^{-1} \in H$. Logo, $(H, *)$ é um grupo. $\square$

Exemplo 6. Considere o grupo $(M_2(\mathbb{R}), +)$. Mostremos que $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + d = 0 \right\}$ é um subgrupo de $M_2(\mathbb{R})$.

Sejam $A, B \in H$ tais que $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & -b_{11} \end{pmatrix}$. Assim,

$$A + (-B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & +b_{11} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & -a_{11} + b_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & -(a_{11} - b_{11}) \end{pmatrix} \in H,$$

pois $(a_{11} - b_{11}) + [-(a_{11} - b_{11})] = 0$.

Portanto, pela Proposição 1.1.4, H é um subgrupo de $M_2(\mathbb{R})$.

Perceba que a Proposição 1.1.4 fornece uma forma de facilitar a verificação se um subconjunto de determinado grupo G é um subgrupo. Com esse resultado, não é necessário verificar cada uma das condições expressas na definição de subgrupo de G .

Definição 1.1.5. O conjunto simétrico é o conjunto de todas as funções bijetivas do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ sobre si mesmo.

$$S_n = \{f : 1, 2, \dots, n \rightarrow \{1, 2, \dots, n\} \mid f \text{ é bijetiva}\},$$

onde cada f é chamada de permutação

Proposição 1.1.6. O conjunto S_n das permutações bijetivas munido com a composta de funções é um grupo.

Demonstração. Sejam f, g e h permutações em S_n . Observe que $f \circ g$ é uma nova permutação em S_n , ou seja, S_n é fechada para a composição. Ainda, observe que a permutação e que deixa todos os elementos nas posições originais é o elemento neutro em S_n . O elemento f^{-1} é a permutação inversa de f que retorna cada elemento a sua posição original. Além disso, a composição de funções é associativa, pois $((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ (g \circ h))(x)$, para todo $x \in \{1, 2, \dots, n\}$. Portanto, S_n é um grupo. $\square$

Considere σ uma permutação em S_n , então podemos representá-la da seguinte forma:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Exemplo 7. A permutação identidade é dada por:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Exemplo 8. O grupo simétrico S_3 é o grupo de todas as permutações de três elementos $\{1, 2, 3\}$. Assim, se $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3$ e $\sigma(3) = 1$, podemos representar essa permutação da seguinte forma:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definição 1.1.7. Considere $\sigma \in S_n$, onde

$$\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_{j-1}) = i_j, \sigma(i_j) = i_1, \sigma(i_m) = i_m, \quad m \notin \{i_1, \dots, i_j\}.$$

Dizemos que σ é um *ciclo de comprimento j* e usamos a notação cíclica de σ dada por $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_j)$.

Proposição 1.1.8. ([4], Proposição 28) Se $n > 1$, então toda permutação de S_n pode ser escrita como um produto de transposições.

Demonstração. De fato, considere o ciclo de comprimento k dado por:

$$(a_1 a_2 a_3 \dots a_k) = (a_1 a_k) \circ (a_1 a_{k-1}) \circ (a_1 a_{k-2}) \dots (a_1 a_2).$$

Com isso, cada ciclo de ordem k pode ser escrito como composição de $k - 1$ transposições. $\square$

Definição 1.1.9. Se σ é uma permutação par, ou seja, pode ser decomposta em um número par de transposições, definimos o *sinal da permutação σ* , denotado por $sgn(\sigma)$, sendo igual a 1. De maneira análoga, definimos permutação ímpar e $sgn(\sigma) = -1$.

Exemplo 9. Seja $S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$. Note que (123) é uma permutação par, pois $(123) = (13)(12)$. Então, $sgn(123) = 1$.

1.2 Anéis

Nesta seção, será feito um tratamento sobre o sistema matemático chamado anel. Esse sistema se difere dos grupos, principalmente, por obter um par de operações sobre um conjunto. Com isso, nesta seção iremos definir os anéis, mostrar alguns exemplos e trazer os conceitos de subanel e ideal, extremamente necessários ao longo desse trabalho.

Definição 1.2.1. Denotamos por $(A, +, \cdot)$ um sistema matemático chamado de *anel* que é constituído por um conjunto não vazio A e um par de operações $+$ e $\cdot$ que estão sujeitas as seguintes propriedades:

- i. $(A, +)$ é um grupo abeliano;
- ii. A multiplicação é associativa, ou seja, $(ab)c = a(bc)$, para todos $a, b, c \in A$;

iii. A multiplicação é distributiva em relação à adição, ou seja, $a(b+c) = ab+ac = ba+ca = (b+c)a$, para todos $a, b, c \in A$.

Exemplo 10. Os conjuntos $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ são exemplos de anéis.

Exemplo 11. O conjunto $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}$ é um anel quando está munido com as operações de adição e multiplicação usuais.

Exemplo 12. Os anéis $(M_n(\mathbb{Z}), +, \cdot)$, $(M_n(\mathbb{Q}), +, \cdot)$, $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ e $(M_n(\mathbb{C}), +, \cdot)$ são chamados, respectivamente, anel das matrizes inteiras, racionais, reais e complexas, com as operações usuais de adição e multiplicação de matrizes.

Definição 1.2.2. Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que $L \subseteq A$ é um *subanel* de A se $(L, +, \cdot)$ tem estrutura de anel.

Exemplo 13. O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é um subanel dos anéis $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ com as operações de adição e multiplicação usuais.

Exemplo 14. $(M_n(\mathbb{Z}), +, \cdot)$ é um subanel dos anéis de matrizes $(M_n(\mathbb{Q}), +, \cdot)$, $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ e $(M_n(\mathbb{C}), +, \cdot)$, com as operações usuais de adição e multiplicação de matrizes.

Para facilitar a identificação de subanéis usamos o seguinte resultado.

Proposição 1.2.3. Sejam A um anel e L um subconjunto não vazio de A . Então, L é um subanel de A se, e somente se, $a-b, ab \in L$, para todos $a, b \in L$.

Demonstração. Seja L um subanel de A . Se $a, b \in L$, então $a-b = a+(-b)$, $ab \in L$, pois L é fechado para as operações do anel A .

Reciprocamente, se $a-b, ab \in L$, para todos $a, b \in L$, então L é fechado para as duas operações e, pela Proposição 1.1.4, $(L, +)$ é um grupo abeliano. Além disso, se $a, b, c \in L$, segue que, $a, b, c \in A$, e assim, $(ab)c = a(bc)$ e $a(b+c) = ab+ac$. Portanto, L é um subanel de A . $\square$

Exemplo 15. Seja $L = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}$. Mostraremos que L é um subanel de $\mathbb{R}$.

De fato, considere $a + b\sqrt{3}, c + d\sqrt{3} \in L$ então:

$$(a + b\sqrt{3}) - (c + d\sqrt{3}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{3} \in L$$

e,

$$(a + b\sqrt{3})(c + d\sqrt{3}) = (ac + 3bd) + (ad + bc)\sqrt{3} \in L.$$

Portanto, pela Proposição 1.2.3, L é um subanel de $\mathbb{R}$.

Da mesma forma que definimos anteriormente os grupos abelianos, poderemos definir os *anéis comutativos*, ou seja, anéis em que a multiplicação goza da propriedade comutativa. Por exemplo, os anéis numéricos e os anéis das classes de resto, módulo m são exemplos de anéis comutativos. Entretanto, um exemplo de anel não comutativo é o anel das matrizes $M_n(A)$, pois as matrizes não comutam com multiplicação usual.

Um outro tipo de anel são os *anéis com unidade*. Esses anéis possuem elemento neutro para a multiplicação, isto é, existe um elemento $1_A \in A$ tal que $1_A \cdot a = a \cdot 1_A = a$, para todo $a \in A$. Um anel comutativo com unidade que satisfaz a propriedade: $ab = 0_A$, $a, b \in A$, então $a = 0_A$ ou $b = 0_A$, é chamado de *anel de integridade*. Além do mais, quando isso acontece, dizemos que a e b , $a, b \neq 0_A$, são divisores de zero.

Exemplo 16. Os anéis $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ são anéis de integridade.

Exemplo 17. O anel $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ não é anel de integridade. De fato, se $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, então $A \cdot B = 0$. De modo geral, $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ não é anel de integridade.

Definição 1.2.4. Seja A um anel e $n \in \mathbb{Z}, n > 0$. Dizemos que A é:

1. *anel nil* se para cada $a \in A$ tem-se $a^n = 0$;
2. *anel nilpotente* se para qualquer conjunto de n elementos em A tem-se o produto deles igual a 0.
3. *anel de divisão* se possui unidade e todos elementos não nulos tem inverso multiplicativo.

Exemplo 18. Considere o anel $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$. Observe que A é um anel nil, pois para cada $a \in A$ tem-se $a^n = 0$. Além disso, ao efetuarmos o produto de n elementos de A tem-se que $n \cdot a = a + a + \dots + a = 0$.

Exemplo 19. O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é um anel de divisão.

Definição 1.2.5. Seja A um anel. Se existe um menor inteiro n tal que $n \cdot a = a + a + \dots + a = 0$, para todo $a \in A$, então chamamos n de *característica de A* e denotamos por $c(A) = n$.

Exemplo 20. Os anéis $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ possuem característica zero.

Definição 1.2.6. Considere F um anel comutativo com unidade e $U(F)$ o conjunto dos elementos invertíveis do anel F . Se $U(F) = F^*$, onde F^* é o anel F sem o elemento 0_A , então F recebe o nome de *corpo*.

Exemplo 21. São exemplos de corpos os conjuntos dos números racionais, reais e complexos.

Exemplo 22. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ é um anel de integridade mas não é um corpo, pois $U(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$.

Observe que, como os corpos são anéis de integridade, então podemos identificar a característica de um corpo pela Definição 1.2.5.

Definição 1.2.7. Sejam A um anel e I um subanel de A . Dizemos que:

- i. I é um *ideal à direita* de A se $a \cdot r \in I$, para todos $a \in A$ e $r \in I$;
- ii. I é um *ideal à esquerda* de A se $r \cdot a \in I$, para todos $a \in A$ e $r \in I$;
- iii. I é um *ideal* de A se ele for um ideal à direita e à esquerda simultaneamente, ou seja, $a \cdot r, r \cdot a \in I$, para todos $a \in A$ e $r \in I$.

Observe que A e $\{e\}$, e o elemento neutro da soma em A , são ideais de A chamados de *ideais triviais* de A .

Exemplo 23. Considere o anel dos números inteiros $\mathbb{Z}$. Então $I = n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$ é um ideal de $\mathbb{Z}$.

De fato, observe que, para todos $a \in \mathbb{Z}$ e $r \in I$, temos que $a \cdot r = a \cdot nk = (na)k \in \mathbb{Z}$. De maneira análoga, $r \cdot a = nk \cdot a = n(ka) = (nk)a \in I$. Portanto, I é um ideal de $\mathbb{Z}$.

Definição 1.2.8. Considere A um conjunto não-vazio e $\sim$ uma relação que acontece de A em A . Dizemos que $\sim$ é uma relação de equivalência se, e somente se,

- i. se $x \sim x$, para todo $x \in A$ (reflexiva);
- ii. se $x \sim y$, então $y \sim x$, para todos $x, y \in A$ (simétrica);
- iii. se $x \sim y$ e $y \sim z$, então $x \sim z$, para todos $x, y, z \in A$ (transitiva).

Exemplo 24. Considere A um anel e I um ideal de A . A relação $\sim$ em A é definida por $x - y \in I$, para todos $x, y \in A$ é uma relação de equivalência.

De fato, observe que $x \sim x$ já que $x - x = 0_A \in I$, pois o elemento neutro aditivo está em I . Se $x \sim y$, então $x - y \in I$, logo $-(x - y) = y - x \in I$, ou seja, $y \sim x$. Ainda, se $x \sim y$ e $y \sim z$ temos que $(x - y), (y - z) \in I$. Portanto, $(x - y) + (y - z) = x - z \in I$, e assim, $x \sim z$.

Definição 1.2.9. Sejam A um anel e I um ideal de A . Definimos uma relação $\sim$ em A como

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in I,$$

para todo $x, y \in A$. Esta relação é uma equivalência em A e, portanto, é simétrica, transitiva e reflexiva. Definimos ainda que, para todo $a \in A$, temos $\bar{a} = \{x \in A \mid x - a \in I\} = a + I$ chamada *classe de equivalência*.

Observação 1. Seja A/I o conjunto das classes de equivalência $\sim$ dado por $A/I = \{a + I \mid a \in R\}$. Temos que $a + I = b + I$ se, e somente se, $a - b \in I$.

Definição 1.2.10. Definimos as operações soma e produto em A/I por:

- $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$,
- $(a + I) \cdot (b + I) = (a \cdot b) + I$,

para todos $a, b \in A$.

Observação 2. Seja o conjunto A/I . Mostraremos que este conjunto é um anel, chamado de *anel quociente*. Sejam $a + I, b + I \in A/I$. Então, $(a + I) - (b + I) = (a - b) + I \in A/I$ e $(a + I) \cdot (b + I) = (a \cdot b) + I \in A/I$.

Definição 1.2.11. Sejam A um anel e I um ideal de A . Dizemos que $A/I = \{a + I \mid a \in A\}$ é o *conjunto das classes de equivalência* da relação $\sim$ em A/I .

Chamamos $(A/I, +, \cdot)$ de *anel quociente*.

Exemplo 25. Como visto no Exemplo 23, $n\mathbb{Z}$ é um ideal de $\mathbb{Z}$. Assim, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ é um anel quociente.

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I \in A/I \text{ e } (a + I) \cdot (b + I) = (a \cdot b) + I \in R/I. \text{ Pela}$$

1.3 Álgebras

O objetivo desta seção é fazer um estudo acerca das *álgebras associativas* - importante sistema matemático para esse trabalho. Dessa maneira, vamos definir o conceito de álgebras sobre um corpo F e, além disso, serão apresentados exemplos, observações sobre algumas álgebras especiais e alguns resultados importantes.

Definição 1.3.1. Chamamos de *espaço vetorial* um conjunto não vazio, denotado por V , sobre um corpo F que satisfaz as seguintes condições, para todos $u, v \in V$ e $\alpha, \beta \in F$.

- i. $(V, +)$ é um grupo abeliano;

Para cada $\alpha \in F, u \in V$, está associado um único elemento $\alpha u \in V$ que satisfaz:

- ii. (fechado pela multiplicação) $\alpha u \in V$;
- iii. (associatividade da multiplicação) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$;
- iv. (distributividade dos elementos de V) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$;

v. (distributividade dos elementos de F) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;

vi. (elemento neutro da multiplicação) existe $1 \in F$ tal que $1u = u1 = u$.

Definição 1.3.2. Uma *combinação linear* de um conjunto de vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ de um espaço vetorial V sobre um corpo F é dada por:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

onde $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ são escalares do corpo F .

De forma geral, um vetor $v \in V$ é dito ser uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ se existem escalares $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ tais que:

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

Se esse conjunto de vetores gera todo o espaço vetorial V , então qualquer vetor em V pode ser escrito como uma combinação linear desses vetores.

Definição 1.3.3. Vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ são ditos *linearmente independentes* se a única combinação linear desses vetores resulta no vetor nulo quando todos os coeficientes são zero. Ou seja, os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ são linearmente independentes se:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0$$

implica que $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

Definição 1.3.4. Seja V um espaço vetorial. Chamamos de *base* de V o conjunto finito $\beta = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ tal que qualquer elemento de V pode ser escrito como combinação linear dos elementos de β e os vetores $v_1, \dots, v_n$ são linearmente independentes.

Definição 1.3.5. Seja V um espaço vetorial. Dizemos que a *dimensão* de V é o número de elementos de sua base e denotamos por $\dim(V)$.

Assim, após definirmos estes conceitos básicos podemos apresentar uma estrutura importante: as álgebras associativas.

Definição 1.3.6. Seja A um espaço vetorial sobre um corpo F . Dizemos que A é uma *F-álgebra associativa*, ou simplesmente *álgebra*, se A é um anel e, para todos $a, b \in A$ e $\alpha \in F$, temos

$$\alpha(a \cdot b) = (\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b).$$

É importante notar que a forma pela qual a álgebra A foi definida acima, evidencia que essa estrutura matemática é um espaço vetorial com propriedades de anel. Dessa maneira, as álgebras poderão ser tratadas como espaços vetoriais e a base desses espaços servirão para contabilizar a dimensão da álgebra A .

Exemplo 26. O anel de polinômios munido com adição e multiplicação usuais é uma álgebra associativa.

Exemplo 27. O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ é um exemplo de álgebra de dimensão 2 sobre os números reais já que possui base $\{1, i\}$.

Exemplo 28. As matrizes $M_n(F)$ são uma álgebra de dimensão n^2 e uma base para essa álgebra é composta pelas matrizes elementares do tipo $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^n$, onde $e_{ii} = 1, i = 1, 2, \dots, n$ e $e_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

É possível dar nomes especiais para uma álgebra de acordo com o comportamento dos seus elementos. Por exemplo, se existe um elemento $1 \in A$ tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, para todo $a \in A$, chamamos essa álgebra de *álgebra unitária*. Agora, se uma álgebra satisfaz: $a * a = 0$ e $(a * b) * c + (b * c) * a + (c * a) * b = 0$, para todos $a, b, c \in A$ dizemos que essa álgebra é de *Lie*. E, chamamos de *álgebra de Jordan* se $a * b = b * a$ e $(a^2 * b) * a = a^2 * (b * a)$, para todos $a, b \in A$.

Exemplo 29. Se A é uma álgebra, com $a \cdot b = [a, b] := ab - ba$, então o comutador $[a, b]$ define um espaço subjacente a A com estrutura de álgebra de *Lie*.

De fato, tome $a, b, c \in A$, temos que

$$\begin{aligned} [a, [b, c]] + [b, [c, a]] &= a(bc - cb) - (bc - cb)a + b(ca - ac) - (ca - ac)b \\ &= abc + cba - bac - cab \\ &= (ab - ba)c - c(ab - ba) \\ &= [[a, b], c]. \end{aligned}$$

Com isso, temos que $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$. Além disso, vale que $[a, a] = aa - aa = 0$. Portanto, A é uma álgebra de *Lie*.

Exemplo 30. O espaço vetorial das matrizes triangulares superiores $n \times n$ com entradas em um corpo F , denotado por $UT_n(F)$, munido com a multiplicação usual é uma álgebra unitária.

Exemplo 31. Seja A uma álgebra associativa. Denote por A^+ o espaço vetorial equipado com o produto $\circ$, chamado produto de Jordan, definido por $a \circ b = (1/2)(ab + ba)$, onde $a, b \in A$. Então, A^+ é uma álgebra de Jordan em corpo F de característica diferente de 2.

Também é importante destacar que uma álgebra A é comutativa, nil, nilpotente ou de divisão se A é um anel comutativo, nil, nilpotente ou de divisão.

Definição 1.3.7. Seja A uma álgebra e $H \subseteq A$. Chamamos H de *subálgebra* de A munida com as operações da álgebra A se H tem estrutura de álgebra.

Exemplo 32. Considere a álgebra $A = M_2(\mathbb{R})$ e $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Mostraremos que H é uma subálgebra de A .

De fato, sejam $h_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in H$. Assim, $h_1 - h_2 = \begin{pmatrix} a - c & 0 \\ 0 & b - d \end{pmatrix}$, $h_1 \cdot h_2 = \begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{pmatrix}$ e, $\alpha h_1 = \begin{pmatrix} \alpha a & 0 \\ 0 & \alpha b \end{pmatrix}$. Dessa forma, como $h_1 - h_2, h_1 \cdot h_2 \in H$, segue que, H possui estrutura de subanel de $M_2(\mathbb{R})$ e como $\alpha h_1 \in H$, implica que H possui estrutura de subespaço vetorial de A . Portanto, H é uma subálgebra de $M_2(\mathbb{R})$.

Capítulo 2

Álgebras com Identidades Polinomiais

Neste capítulo estudaremos um objeto importante na PI-teoria, as álgebras com identidades polinomiais. Exibiremos algumas definições fundamentais, como as de polinômios e identidade polinomiais. Além disso, apresentaremos a álgebra de Grassmann, suas principais propriedades e uma identidade polinomial dessa álgebra.

2.1 Polinômios

Para iniciarmos os estudos sobre as álgebras com identidades polinomiais é necessário definir a estrutura em que essas identidades estarão abrigadas. Para tanto, definiremos a álgebra livre e apresentaremos algumas características importantes dessa estrutura.

Considere uma classe de álgebras sobre P , onde P representa uma propriedade, por exemplo, associativa, comutativa, ou de Lie, etc. Dizemos que um objeto que satisfaz essa propriedade P é uma *álgebra livre* sobre P .

Seja $X = \{x_i \mid i \in I\}$, onde I é um conjunto enumerável. Chamamos de *variáveis* os x_i 's em X e denominamos por *palavra* a sequência enumerável $x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3} \dots x_{i_n}$, incluído o 1 como a palavra vazia.

Com isso, considere $F\langle X \rangle$ como sendo o espaço vetorial sobre um corpo qualquer F com base formada por todas as palavras em X . Assim, podemos definir o produto entre duas palavras por justaposição, ou seja,

$$(x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_n})(x_{j_1}x_{j_2} \dots x_{j_m}) = x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_n}x_{j_1}x_{j_2} \dots x_{j_m},$$

onde essas variáveis pertencem a X .

Um elemento $f \in F\langle X \rangle$ é chamado de *polinômio* e escrevemos f como $f = \sum \alpha_h h$, onde $\alpha_h \in F$ e h é uma palavra em X . Ainda, se $\alpha_h \neq 0$, então $\alpha_h h$ é dito *monômio* de f e α_h o coeficiente de h . Denotamos $f = f(x_1, \dots, x_n)$ o polinômio que só aparecem as variáveis $x_i \in X$, onde $i = 1, 2, \dots, n$.

Exemplo 33. O polinômio $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 x_3^3 + x_1 x_2 x_3 - x_1^3 x_2 x_3 \in F\langle X \rangle$ e seus monômios são $x_1^2 x_2 x_3^3$, $x_1 x_2 x_3$ e $-x_1^3 x_2 x_3$.

Note que $F\langle X \rangle$ é uma álgebra unitária com o produto definido acima, pois a palavra vazia é sua unidade. Também diremos que o *posto* de $F\langle X \rangle$ é a cardinalidade do conjunto X .

Desse modo, a partir desse momento, iremos definir alguns polinômios que serão importantes para o estudo das PI-álgebras.

Definição 2.1.1. O *comutador de peso 2* (ou *comutador duplo*) é o polinômio em $F\langle X \rangle$ definido da seguinte forma:

$$[x_1, x_2] := x_1 x_2 - x_2 x_1.$$

Indutivamente, podemos definir um *comutador de peso ≥ 3* como

$$[x_1, \dots, x_n] := [[x_1, \dots, x_{n-1}], x_n].$$

Nesses polinômios, valem as seguintes propriedades em corpo F de característica diferente de 2:

- i. (anticomutatividade) $[x_1, x_2] = -[x_2, x_1]$;
- ii. (identidade de Jacobi) $[x_1, x_2, x_3] + [x_2, x_3, x_1] + [x_3, x_1, x_2] = 0$.

Observação 3. Considere $f, g, h \in F\langle x \rangle$. Então $[f, gh] = [f, g]h + g[f, h]$. De fato,

$$\begin{aligned} [f, g]h + g[f, h] &= (fg - gf)h + g(fh - hf) \\ &= fgh - gfh + gfh - ghf \\ &= fgh - ghf \\ &= [f, gh]. \end{aligned}$$

Definição 2.1.2. O *produto de Jordan* de duas variáveis x_1 e x_2 é definido como sendo o polinômio

$$x_1 \circ x_2 := x_1 x_2 + x_2 x_1.$$

Dados $f, g \in F\langle X \rangle$, definimos:

$$[f, g] = fg - gf$$

e se $f_1, \dots, f_n \in F\langle X \rangle$, temos

$$[f_1, \dots, f_n] = [[f_1, \dots, f_{n-1}], f_n].$$

Dados $f, g \in F\langle X \rangle$, definimos:

- $[f, g] = fg - gf$;

- $f \circ g = fg + gf$,

e, se $f_1, \dots, f_n \in F\langle X \rangle$, definimos também: $[f_1, \dots, f_n] = [[f_1, \dots, f_{n-1}, f_n]$.

Definição 2.1.3. O polinômio *Standard* é definido como

$$St_n(x_1, x_2, \dots, x_n) := \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)},$$

onde S_n é o grupo simétrico de grau n e $sgn(\sigma)$ denota o sinal da permutação $\sigma \in S_n$.

Observe que o polinômio Standard é formado por monômios obtidos das permutações das variáveis, em que o coeficiente é o sinal da permutação correspondente.

Exemplo 34. Considere $f(x_1, x_2) = St_2(x_1, x_2)$. Assim,

$$\begin{aligned} St_2 &= \sum_{\sigma \in S_2} sgn(\sigma) x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \\ &= x_1 x_2 - x_2 x_1 \\ &= [x_1, x_2] \end{aligned}$$

Exemplo 35. Considere $f(x_1, x_2, x_3) = St_3(x_1, x_2, x_3)$. Note que

$$St_3(x_1, x_2, x_3) = +x_1 x_2 x_3 - x_2 x_1 x_3 - x_3 x_2 x_1 - x_1 x_3 x_2 + x_2 x_3 x_1 + x_3 x_1 x_2.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} St_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1[x_2, x_3] - x_2[x_1, x_3] + x_3[x_1, x_2] \\ &= x_1 St_2(x_2, x_3) - x_2 St_2(x_1, x_3) + x_3 St_2(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Definição 2.1.4. Seja $m = m(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle$ um monômio.

- Denotamos por $\deg_{x_j}(m)$ o número de ocorrências da variável x_j em m , ou seja, o grau da variável x_j ;
- Denotamos por $\deg(m) = \sum_{j=1}^n \deg_{x_j}(m)$ o grau do monômio m ;
- Seja $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^r m_i$, onde $m_i = m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é um monômio. Denotamos por $\deg_{x_j}(f)$ o maior grau da variável x_j dentre os monômios de f , e por $\deg(f)$ o grau do polinômio f , dado pelo maior grau obtido entre seus monômios.

Exemplo 36. Considere $m = m(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 x_2^3 x_3^4$, então

$$\deg_{x_1}(m) = 2, \deg_{x_2}(m) = 3, \deg_{x_3}(m) = 4 \text{ e } \deg(m) = 9.$$

Exemplo 37. Seja $f = f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3 + x_2^2x_3^2x_1^2 + x_1x_2^3x_1x_4^4$, então

$$\deg_{x_1}(f) = 2, \deg_{x_2}(f) = 3, \deg_{x_3}(f) = 2, \deg_{x_4}(f) = 4 \text{ e } \deg(f) = 9.$$

Definição 2.1.5. Dizemos que um polinômio f é *homôgeneo* na variável x_i se, x_i aparece com o mesmo grau em todos os seus monômios. Além disso, f é *multihomôgeneo* quando é homogêneo em todas as suas variáveis.

Exemplo 38. Seja $f = f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 + x_2^2x_1$. Assim, f é homogêneo na variável x_1 e não é homogêneo em x_2 e x_3 .

Exemplo 39. Considere $g = g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3^2x_4 + x_1x_3^2x_4x_2$. Então, g é multihomôgeneo.

Agora, considere $F_n = F\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ a álgebra livre de posto $n \geq 1$ sobre o corpo F . Se $F_n^{(j)}$ denota o subespaço de F_n gerado por todos os monômios de grau j , então $F_n = \sum_{j \geq 1} F_n^{(j)}$. Dessa forma, é possível notar que esse somatório representa uma soma direta de espaços vetoriais. Um polinômio $f^{(k)} \in F_n^{(k)}$, para algum $k \geq 1$, será dito *homogêneo de grau k* . Sendo assim, ao escrevermos um polinômio $f = f^{(1)} + \dots + f^{(m)}$ diremos que os polinômios não nulos $f^{(k)}$ são componentes homogêneas de f .

Exemplo 40. Considere o polinômio $f(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3x_1 + x_1^3$. Assim, suas componentes homogêneas são $f^{(1)} = x_2$, $f^{(2)} = x_3x_1$ e $f^{(3)} = x_1^3$.

Definição 2.1.6. Seja $f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle$. Dizemos que f é *linear* na variável x_i , se x_i ocorre com grau 1 em cada monômio de f . Se f é linear em todas as suas variáveis, então f é chamado de *multilinear*.

Exemplo 41. Se $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_3x_2$, então f é linear na variável x_2 .

Exemplo 42. São exemplos de polinômios multilineares: standard, comutador e o produto de Jordan.

Definição 2.1.7. Seja $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ um polinômio linear nas variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$. Dizemos que f é *alternado* nas variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ se, para quaisquer $1 \leq i < j \leq n$, f se anula quando substituímos x_i por x_j .

Considere $f = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_t)$ alternado nas variáveis $x_1, \dots, x_n$ então

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_i + x_j, \dots, x_n, y_1, \dots, y_t) - \\ &\quad - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n, y_1, \dots, y_t) - f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_j, \dots, x_n, y_1, \dots, y_t) \\ &= f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n, y_1, \dots, y_t) + f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n, y_1, \dots, y_t). \end{aligned}$$

Assim, tem-se,

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n, y_1, \dots, y_t) + f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n, y_1, \dots, y_t) = 0.$$

Logo, uma característica de um polinômio alternado é dado por

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n, y_1, \dots, y_t) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n, y_1, \dots, y_t).$$

Dessa forma,

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, y_1, \dots, y_t) = \text{sgn}(\sigma) f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_t),$$

onde $\text{sgn } \sigma$ é o sinal da permutação σ .

Definição 2.1.8. Chamamos de polinômio de *Capelli de posto m* o polinômio definido por:

$$\text{Cap}_m(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{m+1}) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) y_1 x_{\sigma(1)} y_2 x_{\sigma(2)} \dots y_m x_{\sigma(m)} y_{m+1}.$$

Observe que o polinômio de Capelli de posto m é linear e alternado nas variáveis x'_i s. Além disso, é possível notar que $\text{Cap}_m(x_1, \dots, x_m, 1, \dots, 1) = \text{St}_m(x_1, \dots, x_m)$.

Agora, apresentaremos alguns resultados que facilitarão a encontrar identidades polinomais a partir da base do espaço vetorial que compõe a álgebra $F\langle X \rangle$.

Teorema 2.1.9. ([9], Teorema 3.1.33) (Poincaré-Birkhoff-Witt) Considere o conjunto ordenado B formado pelos seguintes elementos de $F\langle X \rangle$

$$x_1, x_2, \dots, [x_{i_1}, x_{i_2}], [x_{j_1}, x_{j_2}], \dots, [x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}], \dots$$

Então a álgebra livre $F\langle X \rangle$ possui uma base sobre F formada pelos elementos

$$x_{n_1} \dots x_{n_p} c_{m_1} \dots c_{m_k}$$

onde $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_p, p \geq 0, c_{m_1}, \dots, c_{m_k}$ são comutadores de pesos arbitrários e $c_{m_1} \leq c_{m_2} \leq \dots \leq c_{m_k}$ na ordem induzida de B . De maneira equivalente, $F\langle X \rangle$ possui uma base sobre F formada pelos elementos

$$x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m} [x_{i_1}, x_{i_2}]^{\beta_1} \dots [x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_p}]^{\beta_k}$$

onde $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_k \geq 0$ e $[x_{i_1}, x_{i_2}] < \dots < [x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_p}]$ na ordem induzida de B .

Proposição 2.1.10. ([9], Proposição 3.2.34) Dado um polinômio multilinear de grau n , é possível escrevê-lo como uma combinação linear de comutadores de pesos quaisquer do tipo

$$x_{i_1} \dots x_{i_2} [x_{j_1}, \dots, x_{j_{m_2}}] \dots [x_{r_1}, \dots, x_{r_{k_2}}],$$

em que $i_1 < \dots < i_{s_1}$ em diferentes variáveis.

Com todas essas informações chegamos ao fim dessa seção, que teve o objetivo de trazer definições e resultados importante sobre polinômios em $F\langle X \rangle$. Esses conceitos serão importantes para o desenvolvimento dos estudos que seguirão nas próximas seções.

2.2 PI - álgebras

Nessa seção definiremos as álgebras com identidades polinomiais, as ditas PI-álgebras, e apresentaremos alguns resultados importantes.

Definição 2.2.1. Considere A uma álgebra e $f = f(x_1, \dots, x_n)$ um polinômio em $F\langle X \rangle$. Chamamos f de *identidade polinomial* de A se $f(a_1, \dots, a_n) = 0$, para todos $a_1, \dots, a_n \in A$. Denotamos por $f \equiv 0$ em A .

A partir dessa definição, fica fácil para o leitor notar que o polinômio nulo é identidade polinomial de qualquer álgebra A . Por isso, a definição a seguir é importante:

Definição 2.2.2. Uma álgebra A é dita *PI-álgebra* se A satisfaz uma identidade polinomial não nula.

Com essas definições podemos seguir para alguns exemplos de PI-álgebras.

Exemplo 43. *São exemplos de PI-álgebras:*

- (i) *As álgebras comutativas, pois satisfazem a identidade polinomial $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$;*
- (ii) *As álgebras nilpotentes, pois satisfazem a identidade polinomial $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \dots x_n$;*
- (iii) *As álgebras nil de expoente limitado, pois satisfazem a identidade polinomial $f(x) = x^n$.*

Exemplo 44. *Seja $A = UT_2(F)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem 2×2 sobre um corpo F . A é uma PI-álgebra.*

De fato, considere $a = a_{11}e_{11} + a_{12}e_{12} + a_{22}e_{22}$ e $b = b_{11}e_{11} + b_{12}e_{12} + b_{22}e_{22}$ elementos em A , então $[a, b] = \alpha e_{12}$, onde $\alpha = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} - b_{11}a_{12} - b_{12}a_{22}$. Com isso, se $a, b, c, d \in A$, então $[a, b][c, d] = 0$. Assim, $[x_1, x_2][x_3, x_4] \equiv 0$ em A , logo A é uma PI-álgebra.

De maneira análoga, é possível mostrar que o polinômio,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}) = [x_1, x_2] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}]$$

, é uma identidade polinomial para a álgebra $UT_n(F)$, álgebra de matrizes triangulares.

Exemplo 45. *A álgebra livre $F\langle X \rangle$ não é uma PI-álgebra.*

De fato, suponha que f seja uma identidade polinomial não nula de $F\langle X \rangle$. Como $x_1, \dots, x_n \in F\langle X \rangle$, temos que $f(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$, e assim, f é o polinômio nulo. Uma contradição.

O próximo resultado nos mostrará que, para determinar se um polinômio multilinear é identidade polinomial de uma álgebra A , basta avaliar o polinômio em uma base de A .

Proposição 2.2.3. *Considere A uma álgebra gerada como espaço vetorial por um conjunto B sobre F . Se $f = f(x_1, \dots, x_n)$ é um polinômio multilinear que se anula sobre qualquer substituição de elementos em B , então f é uma identidade polinomial de A .*

Demonstração. Considere $B = \{b_i \mid i \in I\}$ um conjunto gerador de A sobre F e $a_1, \dots, a_n$ elementos quaisquer de A . Com isso, temos que $a_i = \sum_{j \in I} \alpha_{ji} b_j$, onde b_j 's $\in B$ e $\alpha_{ji} \in F$. Seja $f(x_1, \dots, x_n)$ um polinômio multilinear, então

$$\begin{aligned} f(a_1, \dots, a_n) &= f\left(\sum_{j \in I} \alpha_{1j} b_j, \dots, \sum_{j \in I} \alpha_{nj} b_j\right) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n} \alpha_{1i_1} \dots \alpha_{ni_n} f(b_{i_1}, \dots, b_{i_n}). \end{aligned}$$

Como f se anula sob qualquer substituição de elementos em B , temos que,

$$\begin{aligned} f(a_1, \dots, a_n) &= \sum \alpha_{1i_1} \dots \alpha_{ni_n} f(b_{i_1}, \dots, b_{i_n}) \\ &= \sum \alpha_{1i_1} \dots \alpha_{ni_n} \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Assim, concluímos que $f \equiv 0$ em A . Portanto, f é uma identidade polinomial de A . $\square$

Proposição 2.2.4. *Seja $f \in F\langle X \rangle$ um polinômio multilinear e alternado nas variáveis $x_1, \dots, x_n$. Se existem elementos $a_1, \dots, a_n$ da álgebra A são linearmente dependentes sobre F , então*

$$f(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = 0,$$

para quaisquer $b_1, \dots, b_n$ em A .

Demonstração. Sejam $a_1, \dots, a_n$ elementos em A linearmente dependentes sobre F . Dessa forma, se $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = 0$, onde α_i 's $\in F$, então existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\alpha_i \neq 0$. Assim, $\alpha_i a_i = -\alpha_1 a_1 - \dots - \alpha_{i-1} a_{i-1} - \alpha_{i+1} a_{i+1} - \dots - \alpha_n a_n$.

Como f é multilinear e alternado, então

$$f(a_1, \dots, \frac{-\alpha_1 a_1 - \dots - \alpha_n a_n}{\alpha_i}, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = 0.$$

$\square$

A partir dessa proposição, podemos perceber que como o polinômio Standard é um polinômio multilinear e alternado, segue que:

Corolário 2.2.5. ([9], Corolário 3.2.11). *Toda álgebra de dimensão n possui uma identidade polinomial dada por St_{n+1} .*

Com isso, esse resultado nos mostra que toda álgebra de dimensão finita é uma PI-álgebra.

Exemplo 46. Como a álgebra das matrizes $M_n(F)$ possui dimensão n^2 , então o polinômio St_{n^2+1} é uma identidade polinomial para $M_n(F)$.

O próximo exemplo fornecerá uma outra identidade polinomial para $M_2(F)$.

Exemplo 47. O polinômio $f(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2]^2, x_3]$ é uma identidade polinomial de $M_2(F)$. De fato, seja $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e $p(x) = x^2 - \text{tr}(A)x + \det(A)$ o polinômio característico de A , onde $\text{tr}(A)$ denota o traço da matriz A . Pelo Teorema de Cayley-Hamilton, segue que, $p(A) = A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)Id_2 = 0$. Considere $A_1, A_2 \in M_2(F)$ e defina $A = [A_1, A_2]$. Então, $\text{tr}(A) = 0$ e $[A_1, A_2]^2 = -\det([A_1, A_2])Id_2 \in Z(M_2(F))$. Portanto, para $A_3 \in M_2(F)$, temos que $[[A_1, A_2]^2, A_3] = 0$.

2.3 Álgebra de Grassmann

Nessa seção definiremos e apresentaremos algumas informações sobre a álgebra de Grassmann. Essa estrutura matemática é o foco de nosso trabalho. Além disso, iremos discutir uma identidade polinomial para essa álgebra.

Definição 2.3.1. Sejam $I = \{x_i x_j + x_j x_i \mid i, j \geq 1\}$ o ideal de $F\langle X \rangle$ e o espaço quociente $\mathcal{G} = F\langle X \rangle / I$. Denotamos $e_i := x_i + I$. Chamamos de *álgebra de Grassmann* $\mathcal{G}$ a álgebra gerada pelos elementos $1, e_{ii \in \mathbb{N}} \in F\langle X \rangle / I$. Ainda, $e_i e_j + e_j e_i = x_i x_j + x_j x_i + I = I$, ou seja, $e_i e_j = -e_j e_i$. Dessa forma, podemos representar $\mathcal{G}$ da seguinte maneira, com característica diferente de 2:

$$\mathcal{G} = \langle 1, e_1, e_2, \dots \mid e_i e_j = -e_j e_i, i, j \in \mathbb{N} \rangle.$$

Observe que uma base para $\mathcal{G}$ é dada por $\beta = \{1, e_{i_1} \dots e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k, k \geq 1\}$ e $\mathcal{G}$ possui dimensão infinita. Além disso, a álgebra de Grassmann possui dois subespaços importantes:

$$\mathcal{G}^{(0)} = \text{span}_F\{e_{i_1} \dots e_{i_{2k}}, k \geq 0\} \text{ e } \mathcal{G}^{(1)} = \text{span}_F\{e_{i_1} \dots e_{i_{2k+1}}, k \geq 0\}.$$

Com esses subespaços definidos é possível observar as seguintes relações entre eles:

$$\mathcal{G}^{(0)}\mathcal{G}^{(0)} + \mathcal{G}^{(1)}\mathcal{G}^{(1)} \subseteq \mathcal{G}^{(0)} \text{ e } \mathcal{G}^{(0)}\mathcal{G}^{(1)} + \mathcal{G}^{(1)}\mathcal{G}^{(0)} \subseteq \mathcal{G}^{(1)}$$

Assim, a primeira relação nos mostra que $\mathcal{G}^{(0)}$ é uma subálgebra de $\mathcal{G}$. Também pode-se observar que $\mathcal{G}^{(0)} \cap \mathcal{G}^{(1)} = \{0\}$ e todo elemento de $\mathcal{G}$ pode ser escrito como soma de elementos de $\mathcal{G}^{(0)}$ e $\mathcal{G}^{(1)}$, segue que, $\mathcal{G} = \mathcal{G}^{(0)} \oplus \mathcal{G}^{(1)}$.

Definição 2.3.2. Dizemos que o *centro da álgebra de Grassmann* é o conjunto $Z(\mathcal{G}) = \{x \in \mathcal{G} \mid xg = gx, \text{ para todo } g \in \mathcal{G}\}$.

Proposição 2.3.3. $\mathcal{G}^{(0)} \subseteq Z(\mathcal{G})$.

Demonstração. Considere $x = e_{i_1} \dots e_{i_{2k}} \in \mathcal{G}^{(0)}$ e $g = \alpha e_{j_1} \dots e_{j_{2m}} + \beta e_{j_1} \dots e_{j_{2n-1}} \in \mathcal{G}$. Dessa forma, precisamos mostrar que $xg = gx$.

De fato,

$$\begin{aligned} xg &= x(\alpha e_{j_1} \dots e_{j_{2m}} + \beta e_{j_1} \dots e_{j_{2n-1}}) \\ &= e_{i_1} \dots e_{i_{2k}}(\alpha e_{j_1} \dots e_{j_{2m}} + \beta e_{j_1} \dots e_{j_{2n-1}}) \\ &= \alpha e_{i_1} \dots e_{i_{2k}} e_{j_1} \dots e_{j_{2m}} + \beta e_{i_1} \dots e_{i_{2k}} e_{j_1} \dots e_{j_{2n-1}} \\ &= -\alpha e_{i_1} \dots e_{j_1} e_{i_{2k}} \dots e_{j_{2m}} + \beta e_{i_1} \dots e_{i_{2k}} e_{j_1} \dots e_{j_{2n-1}} \\ &= (\alpha e_{j_1} \dots e_{j_{2m}} + \beta e_{j_1} \dots e_{j_{2n-1}})(e_{i_1} \dots e_{i_{2k}}) \\ &= gx. \end{aligned}$$

Observe que basta usar $e_i e_j = -e_j e_i$. Logo, $\mathcal{G}^{(0)} \subseteq Z(\mathcal{G})$ □

Observação 4. Partindo da definição de centro, é possível notar que $\mathcal{G}^{(0)} \subseteq Z(\mathcal{G})$. Ademais, para todos $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1$ e $\beta = \beta_0 + \beta_1$, com $\alpha_0, \beta_0 \in \mathcal{G}^{(0)}$ e $\alpha_1, \beta_1 \in \mathcal{G}^{(1)}$, temos que

$$\begin{aligned} [\alpha, \beta] &= [\alpha_0 + \alpha_1, \beta_0 + \beta_1] \\ &= [\alpha_1, \beta_1] + [\alpha_0, \beta_0] + [\alpha_1, \beta_0] + [\alpha_0, \beta_1] \\ &= [\alpha_1, \beta_1] \\ &= 2\alpha_1\beta_1 \in \mathcal{G}^{(0)}. \end{aligned}$$

Então, $[\mathcal{G}, \mathcal{G}] \subseteq Z(\mathcal{G})$. Com isso, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.3.4. O polinômio comutador de peso 3 dado por $f(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3]$ é uma identidade polinomial da álgebra de Grassmann.

Assim, concluímos que a álgebra de Grassmann é uma PI-álgebra.

Proposição 2.3.5. A álgebra de Grassmann não satisfaz St_n , para todo $n \geq 1$.

Demonstração. Considere $e_1, e_2 \in \mathcal{G}$, segue que

$$\begin{aligned} St_2(e_1, e_2) &= e_1 e_2 - e_2 e_1 \\ &= e_1 e_2 + e_1 e_2 \\ &= 2e_1 e_2. \end{aligned}$$

Com isso, $St_2(x_1, x_2)$ não é uma identidade polinomial para $\mathcal{G}$. De maneira análoga, temos que $St_n(e_1, e_2, \dots, e_n) = n!e_1 e_2 \dots e_n \neq 0$, para $e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathcal{G}$. Portanto, a álgebra de Grassmann não satisfaz St_n , para todo $n \geq 1$ □

Capítulo 3

T-ideais

Neste capítulo consideraremos F um corpo de característica zero. Definiremos T-ideais, apresentaremos o Teorema para o processo de multilinearização, isto é, um resultado que nos permite escrever um polinômio pertencente ao conjunto das identidades polinomiais de forma multilinear. Ademais, exibiremos o T-ideal da Álgebra de Grassmann de dimensão infinita.

3.1 Identidades Polinomiais

Para a PI-Teoria, é interessante estudar todas as identidades polinomiais satisfeitas por uma álgebra A . Nesse sentido, denotamos por $\text{Id}(A)$ o conjunto formado por todas as identidades polinomiais da álgebra A . É importante ressaltar que A é uma PI-álgebra se $\text{Id}(A) \neq \{0\}$. Além disso, denota-se

$$\text{Id}(A) = \{f \in F\langle X \rangle \mid f \equiv 0 \text{ em } A\}.$$

Definição 3.1.1. Uma aplicação $f : A \rightarrow B$, entre duas álgebras A e B é um *homomorfismo* se, para todos $a, b \in A$ e $\alpha \in F$, temos que:

- i. $f(\alpha a) = \alpha f(a)$;
- ii. $f(a + b) = f(a) + f(b)$;
- iii. $f(ab) = f(a)f(b)$.

Em particular, se o homomorfismo f é dado por $f : A \rightarrow A$ dizemos que é um *endomorfismo*.

Observação 5. Destaca-se que:

- i. $\text{Id}(A)$ é um ideal de $F\langle X \rangle$.
- ii. Se $\varphi : F\langle X \rangle \rightarrow F\langle X \rangle$ é um endomorfismo e $f \in \text{Id}(A)$, então $\varphi(f) \in \text{Id}(A)$. Isso significa que $\text{Id}(A)$ é invariante por endomorfismo, ou seja, o endomorfismo φ preserva $\text{Id}(A)$.

Exemplo 48. Considere uma álgebra A em que $f(x_1, x_3, x_4) = [x_3x_4, x_1^2]$ é uma identidade polinomial de A . Então, $f(\varphi(x_1), \varphi(x_3), \varphi(x_4)) \in \text{Id}(A)$, para todo endomorfismo em $F\langle X \rangle$. Logo,

$$f(\varphi(x_1), \varphi(x_3), \varphi(x_4)) = [\varphi(x_3)\varphi(x_4), \varphi(x_1)^2] = [\varphi(x_3)\varphi(x_4), \varphi(x_1)\varphi(x_1)].$$

Por exemplo, se $\varphi(x_1) = y_1, \varphi(x_3) = 3y_2$ e $\varphi(x_4) = y_1 + y_2$, então

$$f(\varphi(x_1), \varphi(x_3), \varphi(x_4)) = [3y_2(y_1 + y_2), y_1y_2]$$

é uma identidade de A .

Definição 3.1.2. Um ideal I de $F\langle X \rangle$ é um *T-ideal* se $\varphi(I) \subset I$, para todo endomorfismo φ de $F\langle X \rangle$.

Observação 6. Se I_1 e I_2 são T-ideais de $F\langle X \rangle$, então a intersecção $I_1 \cap I_2$ também o é. De fato, tome $\varphi : F\langle X \rangle \rightarrow F\langle X \rangle$ e $a \in I_1 \cap I_2$. Observe que $a \in I_1$ e $a \in I_2$, segue que, $\varphi(a) \in I_1$ e $\varphi(a) \in I_2$. Logo, $\varphi(a) \in I_1 \cap I_2$. A partir disso, concluímos que a intersecção de uma família arbitrária de T-ideais de $F\langle X \rangle$ é um T-ideal de $F\langle X \rangle$.

Definição 3.1.3. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo F e $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ um conjunto de vetores. O *span* de S , denotado por $\text{span}_F(S)$ ou simplesmente $\text{span}(S)$, é o conjunto de todas as combinações lineares dos vetores de S com coeficientes em F . Ou seja,

$$\text{span}_F(S) = \{c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n \mid c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{F}\}$$

Com base nisso, temos o objetivo de verificar como pode ser a forma de um conjunto gerador de T-ideal da álgebra livre $F\langle X \rangle$. Basta notar que dado um subconjunto S de $F\langle X \rangle$, definimos o *T-ideal gerado por S* , denotado por $\langle S \rangle_T$, como a intersecção de todos os T-ideais de $F\langle X \rangle$ que contém S . Assim,

$$\langle S \rangle_T = \text{span}_F\{h_1f(g_1, \dots, g_n)h_2 \mid f \in S \text{ e } h_1, g_1, \dots, g_n, h_2 \in F\langle X \rangle\}.$$

Nesse sentido, um T-ideal é gerado por um conjunto $S \subset F\langle X \rangle$ se todo elemento do T-ideal pode ser escrito como combinação linear de elementos da forma $h_1f(g_1, \dots, g_n)h_2$, em que os polinômios $h_1, h_2, g_1, \dots, g_n \in F\langle X \rangle$ e $f \in S$. Dessa forma, denotamos o T-ideal I por $I = \langle S \rangle_T$ ou $\langle f_1, \dots, f_n \rangle_T$ para mostrar que I é gerado por um conjunto finito $S = \{f_1, \dots, f_n\}$ como T-ideal.

Definição 3.1.4. Dizemos que um polinômio f é *consequência* dos polinômios em um subconjunto S de $F\langle X \rangle$ quando $f \in \langle S \rangle_T$. Em especial, indicamos que g é uma consequência de f se $g \in \langle f \rangle_T$.

Exemplo 49. Note que o comutador de peso n , para $n \geq 3$, é consequência do comutador de peso 2.

Proposição 3.1.5. Seja I um T -ideal de $F\langle X \rangle$. Então, $I = \text{Id}(F\langle X \rangle/I)$.

Demonstração. Seja $A = F\langle X \rangle/I$. Mostraremos que $\text{Id}(A) = I$. Para isso, tome $f(x_1, \dots, x_n) \in I$. Sendo $h_1 + I, \dots, h_n + I \in A$, existe um endomorfismo φ tal que $\varphi(x_i) = h_i$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Dessa forma,

$$f(h_1 + I, \dots, h_n + I) = f(h_1, \dots, h_n) + I = f(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) + I = \varphi(f(x_1, \dots, x_n)) + I.$$

Como I é um T -ideal, segue que $\varphi(f(x_1, \dots, x_n)) \in I$. Portanto, $f(h_1 + I, \dots, h_n + I) \in I$, e assim, conclui-se que $f \in \text{Id}(A)$.

Agora, seja $f = f(x_1, \dots, x_n) \in \text{Id}(A)$. Assim,

$$f(x_1, \dots, x_n) + I = f(x_1 + I, \dots, x_n + I) = I.$$

Assim, $f(x_1, \dots, x_n) \in I$.

Com isso, temos que $I = \text{Id}(A)$. □

3.2 Processo de Multilinearização

O objetivo desta seção é estudar o processo de multilinearização que serve para obtermos uma identidade multilinear de grau menor que ou igual a k , partindo de uma identidade polinomial arbitrária de grau k de uma álgebra A .

Teorema 3.2.1. (*Processo de multilinearização*) Se uma álgebra A satisfaz uma identidade polinomial de grau k , então A satisfaz uma identidade multilinear de grau menor que ou igual a k .

Demonstração. Seja $f = f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle$ uma identidade polinomial da álgebra A . Suponha que em cada monômio de f a variável x_i , para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, apareça com grau menor que ou igual a 1.

Se x_1 não aparece em algum monômio, então podemos definir a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi_1 : F\langle X \rangle &\rightarrow F\langle X \rangle \\ x_1 &\mapsto 0 \\ x_i &\mapsto x_i, \end{aligned}$$

para $i \neq 1$. Note que o polinômio $\varphi_1(f)$ continua sendo uma identidade polinomial de A , pois se x_1 não aparecia em f então $\varphi_1(f) = f$.

Se em algum monômio de $\varphi_1(f)$ a variável x_2 de φ_1 tem grau zero podemos repetir o processo e definir φ_2 da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\varphi_2 : F\langle X \rangle &\rightarrow F\langle X \rangle \\ x_2 &\mapsto 0 \\ x_i &\mapsto x_i,\end{aligned}$$

para $i \neq 2$. Assim, $\varphi_2(\varphi_1(f))$ é uma identidade polinomial de A obtida de $\varphi_1(f)$ sem os monômios que contém x_2 , pelos mesmos argumentos anteriores. Com isso, ao repetirmos o processo sucessivas vezes para todas as variáveis que não aparecem em algum monômio, obtemos uma sequência de aplicações $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l$ tais que, $\varphi_l(\varphi_{l-1}(\dots \varphi_1(f)))$ é polinômio multilinear de grau menor que ou igual a k que ainda pertence a $\text{Id}(A)$.

Agora, suponha que exista uma variável x_1 tal que $\deg_{x_1}(f) = d > 1$ e considere o polinômio

$$h = h(y_1, y_2, x_2, \dots, x_n) = f(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_n) - f(y_1, x_2, \dots, x_n) - f(y_2, x_2, \dots, x_n).$$

O polinômio h é ainda uma identidade polinomial de A . Verificaremos que h é não nulo. Suponha por absurdo que $h = 0$. Considerando $y_1 = y_2 = x_1$ temos que:

$$\begin{aligned}0 &= h(y_1, y_2, x_2, \dots, x_n) \\ &= h(x_1, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= f(x_1 + x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= f(2x_1, x_2, \dots, x_n) - 2f(x_1, \dots, x_n).\end{aligned}$$

Então, $f(2x_1, \dots, x_n) = 2f(x_1, \dots, x_n)$.

Escrevendo $f = f_0 + f_1 + \dots + f_d$, onde f_i é a soma de todos os monômios de f nos quais x_1 aparece i vezes, temos que:

$$\begin{aligned}2(f_0 + f_1 + \dots + f_d) &= 2^0 f_0 + 2^1 f_1 + \dots + 2^d f_d \\ &= f_0 + 2f_1 + \dots + 2^d f_d.\end{aligned}$$

Assim, $f_0 = (2^2 - 2)f_2 + \dots + (2^d - 2)f_d$, o que é uma contradição, pelo fato de f_0 ser o termo em que x_1 não aparece, enquanto do lado direito desta equação x_1 aparece com grau maior que ou igual a 2. Logo, f é uma identidade polinomial de A não trivial.

Portanto, obtemos uma identidade polinomial h da álgebra A tal que $\deg_{y_1}(h) = d - 1 < \deg_{x_1}(f)$. Assim, usando f repetimos, se necessário, esse processo de maneira indutiva para encontrar uma identidade g de A multilinear. $\square$

Exemplo 50. *Seja polinômio $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$, então $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \circ x_2)x_3$ é um polinômio multilinear encontrado a partir de f .*

De fato, observe que x_1 possui grau maior que ou igual a 1, por isso, realizaremos o processo de multilinearização sobre essa variável. Pelo Teorema 3.2.1, temos que:

$$\begin{aligned}
h(y_1, y_2, x_2) &= f(y_1 + y_2, x_2) - f(y_1, x_2) - f(y_2, x_2) \\
&= (y_1 + y_2)^2 x_2 - y_1^2 x_2 - y_2^2 x_2 \\
&= (y_1 + y_2)(y_1 + y_2)x_2 - y_1^2 x_2 - y_2^2 x_2 \\
&= (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2 y_1 + y_2^2)x_2 - y_1^2 x_2 - y_2^2 x_2 \\
&= y_1^2 x_2 + y_1 y_2 x_2 + y_2 y_1 x_2 + y_2^2 x_2 - y_1^2 x_2 - y_2^2 x_2 \\
&= y_1 y_2 x_2 + y_2 y_1 x_2
\end{aligned}$$

Considerando o seguinte endomorfismo:

$$\begin{aligned}
\varphi : F\langle X \rangle &\rightarrow F\langle X \rangle \\
y_1 &\mapsto x_1 \\
y_2 &\mapsto x_2 \\
x_2 &\mapsto x_3.
\end{aligned}$$

Concluimos que $g(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 + x_2 x_1 x_3 = (x_1 \circ x_2)x_3$ é encontrado a partir do polinômio f .

Teorema 3.2.2. *Seja F um corpo de característica zero e considere um polinômio*

$f = f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle$. Então, f é uma consequência de um conjunto finito de polinômios multilineares.

Corolário 3.2.3. ([9], Corolário 3.3.15). *Seja A uma PI-álgebra sobre um corpo de característica zero. Então $\text{Id}(A)$ é gerado, como T -ideal, por um conjunto finito de polinômios multilineares.*

Exemplo 51. *Seja A é uma álgebra comutativa unitária. Vamos mostrar que $\text{Id}(A) = \langle [x_1, x_2] \rangle_T$.*

De fato, considere $I = \langle [x_1, x_2] \rangle_T$. Note $I \subset \text{Id}(A)$, pois $[x_1, x_2]$ é uma identidade polinomial de A .

Agora, mostraremos que $\text{Id}(A) \subset I$, ou seja, precisamos verificar que $f \equiv 0 \pmod{I}$, para todo $f \in \text{Id}(A)$. Para isso, tome $f \in \text{Id}(A)$. Pelo Corolário 3.2.3 f é consequência de polinômios multilineares. Ainda, pela Proposição 2.1.10, temos que f pode ser escrito como uma combinação linear de polinômios da forma $x_{i_1} \dots x_{i_n} C_1 \dots C_n$, em que $i_1 < \dots < i_n$ e C_i 's são comutadores de pesos arbitrários. Como $[x_i, x_j] \equiv 0$ em A , então $C_i \equiv 0$ em A , para todos comutadores de pesos maiores que ou iguais a 2.

Logo, módulo I , temos que $f(x_1, \dots, x_n) = \alpha x_1 \dots x_n$, para algum $\alpha \in F$. Assim, precisamos mostrar que $\alpha = 0$. Como $f \in \text{Id}(A)$, avaliando $x_1 = \dots = x_n = 1$ obtemos $0 = f(1, \dots, 1) = \alpha 1$. Portanto, $\alpha = 0$ e $\text{Id}(A) = \langle [x_1, x_2] \rangle_T$.

Lema 3.2.4. *Seja $I = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle_T$ o T -ideal gerado pela identidade polinomial $[x_1, x_2, x_3]$. Os polinômios $[x_1, x_2][x_2, x_3]$ e $[x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4]$ pertencem a I .*

Demonstração. Considere $\langle [x_1, x_2, x_3] \rangle_T$. Queremos mostrar que $[x_1, x_2][x_2, x_3] \in I$. Observe que $[x_1, x_2^2, x_3] \in I$. Assim,

$$\begin{aligned} [x_1, x_2^2, x_3] &= [[x_1, x_2^2], x_3] = [[x_1, x_2]x_2 + x_2[x_1, x_2], x_3] \\ &= [[x_1, x_2]x_2, x_3] + [x_2[x_1, x_2], x_3] \\ &= [[x_1, x_2], x_3]x_2 + [x_1, x_2][x_2, x_3] + [x_2, x_3][x_1, x_2] + x_2[[x_1, x_2], x_3] \in I. \end{aligned}$$

Como $[[x_1, x_2], x_3]x_2, x_2[[x_1, x_2], x_3] \in I$, segue que, $[x_1, x_2][x_2, x_3] + [x_2, x_3][x_1, x_2] \in I$.

Ainda, note que $ab + ba = 2ab + [b, a]$. Então, tomando $a = [x_1, x_2]$ e $b = [x_2, x_3]$, temos:

$$\begin{aligned} [x_1, x_2][x_2, x_3] + [x_2, x_3][x_1, x_2] &= 2[x_1, x_2][x_2, x_3] + [[x_2, x_3], [x_1, x_2]] \\ &= 2[x_1, x_2][x_2, x_3] \end{aligned}$$

Portanto, temos que $[x_1, x_2][x_2, x_3] \in I$. Ao fazermos o processo de multilinearização (Teorema 3.2.1) no polinômio $f = f(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2][x_2, x_3]$ obtemos o polinômio $g = g(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4]$. Logo, $g \in I$. $\square$

3.3 T-ideal da Álgebra de Grassmann

Nesta seção chegamos ao objetivo central desse trabalho. Isto posto, mostraremos que o conjunto das identidades polinomiais da álgebra de Grassmann é gerado, como T -ideal, pelo polinômio comutador de peso 3.

Teorema 3.3.1. *Seja $\mathcal{G}$ a álgebra de Grassmann sobre um corpo F de característica zero. Então, $\text{Id}(\mathcal{G}) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle_T$.*

Demonstração. Queremos mostrar que $\text{Id}(\mathcal{G}) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle_T$. Considere $I = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle_T$.

É fácil notar que $I \subseteq \text{Id}(\mathcal{G})$, pois pela Proposição 2.3.4, o comutador de peso 3 é uma identidade polinomial de $\mathcal{G}$. Assim, $I \subset \text{Id}(\mathcal{G})$.

Agora, precisamos verificar que $\text{Id}(\mathcal{G}) \subseteq I$. Para isso, tome $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \text{Id}(\mathcal{G})$ de grau n . Mostraremos que $f \equiv 0 \pmod{I}$.

Como $f \in \text{Id}(\mathcal{G})$, pelo Corolário 3.2.3, f pode ser considerado um polinômio multilinear. Além disso, pela Proposição 2.1.10, podemos escrever f como combinação linear do tipo $x_{i_1} \dots x_{i_n} C_1 \dots C_n$, em que C_i 's são comutadores de pesos arbitrários.

Dessa forma, note que $C_i \equiv 0$ em $\mathcal{G}$, para todos comutadores de peso ≥ 3 . Pelo Lema 3.2.4, temos que

$$[x_{j_1}, x_{j_2}][x_{j_3}, x_{j_4}] + [x_{j_1}, x_{j_3}][x_{j_2}, x_{j_4}] \equiv 0 \pmod{I},$$

ou seja,

$$[x_{j_1}, x_{j_2}][x_{j_3}, x_{j_4}] = -[x_{j_1}, x_{j_3}][x_{j_2}, x_{j_4}],$$

e, pela propriedade do comutador

$$[x_{j_1}, x_{j_2}] = -[x_{j_2}, x_{j_1}].$$

Então, conseguimos escrever f da seguinte forma:

$$x_{i_1} \dots x_{i_r} [x_{j_1}, x_{j_2}] \dots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}],$$

com $i_1 < \dots < i_n, j_1 < \dots < j_{2m}$ e $\alpha_S \in F$. Diante disso, temos que, mod I ,

$$f = \sum_{s \in S} \alpha_s x_{i_1} \dots x_{i_r} [x_{j_1}, x_{j_2}] \dots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}],$$

onde S é formado por todas as n -uplas $(i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_{2m})$ satisfazendo $i_1 < \dots < i_n, j_1 < \dots < j_{2m}$ com $r + 2m = n$.

Avaliando $x_1 = \dots = x_n = 1$, se $m = 0$, segue que, o coeficiente do monômio $x_1 \dots x_n$ é igual a 0, pois f é uma identidade de $\mathcal{G}$.

Suponha, por absurdo, que $\alpha'_s \neq 0$, onde a sua n -upla correspondente é dada por

$$(i'_1, \dots, i'_r, j'_1, \dots, j'_{2m})$$

e o conjunto $\{j_1, \dots, j_{2m}\}$ é o menor possível. Considere $x_{i_1} = \dots = x_{i_r} = 1$ e $x_{j_t} = e_t, t \in \{1, 2, \dots, 2m\}$. Assim, $f = \alpha'_s 2^m e_{j_1} e_{j_2} \dots e_{j_{2m}}$. Como f é uma identidade, segue que, $\alpha'_s = 0$. Portanto, $\text{Id}(\mathcal{G}) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle_T$. $\square$

Considerações Finais

Finalizamos esse trabalho com resultados vinculados à álgebra de Grassmann de dimensão infinita. Assim, podemos nos perguntar o que ocorre com as identidades polinomiais da álgebra de Grassmann de dimensão finita.

Definição 3.3.2. Seja $\mathcal{G}$ a álgebra de Grassmann. Dizemos que $\mathcal{G}_k = \langle 1, e_1, \dots, e_k \mid e_i e_j = -e_j e_i \rangle$ é uma *subálgebra finita de $\mathcal{G}$* , para $k \geq 2$.

A partir disso, podemos observar que as subálgebras finitas de $\mathcal{G}$ possuem dimensão 2^k e sua base é formada por 1 e pelos elementos $\prod_{i_1 < \dots < i_n} e_{i_1} \dots e_{i_n}$ onde $1 \leq s \leq k$.

Exemplo 52. $\mathcal{G}_2$ é uma subálgebra finita de $\mathcal{G}$ dada por $\mathcal{G}_2 = \langle 1, e_1, e_2 \mid e_i e_j = -e_j e_i \rangle$. A base de $\mathcal{G}_2$ é formada por $\{1, e_1, e_2, e_1 e_2\}$ e $\dim \mathcal{G}_2 = 4$.

Proposição 3.3.3. $\text{Id}(\mathcal{G}_2) = \langle [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$.

Demonstração. Queremos mostrar que $\text{Id}(\mathcal{G}_2) = \langle [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$. Considere $I = \langle [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$.

Primeiro, precisamos verificar que $I \subseteq \text{Id}(\mathcal{G}_2)$. Note que $[x_1, x_2, x_3] \in \text{Id}(\mathcal{G}_2)$, pois essa é uma identidade polinomial de $\mathcal{G}$. Agora, mostraremos que $[x_1, x_2][x_3, x_4] \in \text{Id}(\mathcal{G}_2)$. O primeiro caso é quando avaliamos 1 em alguma das variáveis, e assim, obtemos zero como resultado. O segundo caso é quando todas as variáveis são avaliadas de 1. Com isso, teremos um elemento que é a soma de produtos com pelo menos 4 elementos e'_i s. Sabendo que $e_i^2 = 0$ e $e_j e_i = -e_i e_j$ obtemos que o resultado dessa avaliação é igual a zero. Logo, $I \subseteq \text{Id}(\mathcal{G}_2)$.

Agora, precisamos verificar que $\text{Id}(\mathcal{G}_2) \subseteq I$. Para isso, tome $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \text{Id}(\mathcal{G}_2)$ de grau n .

Como $f \in \text{Id}(\mathcal{G}_2)$ então, pelo Corolário 3.2.3, f pode ser considerado um polinômio multilinear. Além disso, pela Proposição 2.1.10, podemos escrever f como combinação linear do tipo $x_{i_1} \dots x_{i_n} C_1 \dots C_n$, onde C'_i s são comutadores de pesos arbitrários. Como visto anteriormente no Teorema 3.3.1, como se $[x_1, x_2, x_3] \in I$, então f é dado por

$$x_{i_1} \dots x_{i_r} [x_{j_1}, x_{j_2}] \dots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}],$$

com $i_1 < \dots < i_n, j_1 < \dots < j_{2m}$. Além disso, como $[x_1, x_2][x_3, x_4] \in I$, implica que $C_i C_j \equiv 0$ em $\mathcal{G}_2$, onde C_i e C_j são comutadores de peso 2. Logo, existem escalares $\alpha, \beta_{ij} \in F$ tais que $1 \leq i < j \leq n$, com

$$f \equiv \alpha x_1 \dots x_n + \sum_{i,j=1, i < j}^n \beta_{ij} x_{i_1} \dots x_{i_{n-2}} [x_i, x_j] \pmod{I}.$$

Avaliando $x_1 = \dots = x_n = 1$ temos que $\alpha = 0$, pois $f \in \text{Id}(\mathcal{G}_2)$. Agora, fixando i e j consideramos a avaliação $x_k = 1$, para $k \neq i, j$, e $x_i = e_1$ e $x_j = e_2$. Assim, $f = \beta_{ij} 2e_1 e_2$. Como $f \in \text{Id}(\mathcal{G}_2)$ implica que $\beta_{ij} = 0$. $\square$

Por fim, de uma forma mais ampla, temos o seguinte resultado provado por Giambruno, La Mattina e Petrogradsky em 2007.

Teorema 3.3.4. *Se $k \geq 1$, então*

$$\text{Id}(\mathcal{G}_{2k}) = \langle [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2] \dots [x_{2k+1}, x_{2k+2}] \rangle_T.$$

Referências Bibliográficas

- [1] AMITSUR, S. A.; LEVITZKI, J. Minimal identities for algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **vol. 1**, p. 449-463, 1950.
- [2] COTA, W. Q. Álgebras com Estruturas Adicionais de Crescimento Polinomial. 2021. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2021.
- [3] DEHN, M. Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlssysteme. *Mathematische Annalen*, **vol. 85**, p. 184-194, 1922.
- [4] DOMINGUES, H; IEZZI, G. Álgebra Moderna. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2017.
- [5] HALL, M. Projective planes. *Transactions of the American Mathematical Society*, **vol. 54**, p. 229-277, 1943.
- [6] KEMER, A. R. Varieties and $\mathbb{Z}_2$ -graded algebras. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, **vol. 25**, p. 359-374, 1985.
- [7] KEMER, A. R. Finite basis property of identities of associative algebras. *Algebra and Logic*, **vol. 26**, p. 362-397, 1987.
- [8] KRAKOWSKI, D.; REGEV, A. The polynomial identities of the Grassmann algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, **vol. 181**, p. 429-438, 1973.
- [9] SANTOS, R. B. dos; VIEIRA, A. C. PI-álgebras: uma introdução à PI-teoria. v. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2021.
- [10] SPECHT, W. Gesetze in Ringen. *I. Mathematische Zeitschrift*, **vol. 52**, p. 557–589, 1950.
- [11] GIAMBRUNO, A.; LA MATTINA, D.; PETROGRADSKY, V. M. Matrix algebras of polynomial codimension growth. *Israel Journal of Mathematics*, **vol. 158**, p. 367-378, 2007. MR: 2342471, Zbl: 1127.16018.
- [12] WAGNER, H. über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme. *Mathematische Annalen*, **vol. 113**, n. 1, p. 528–567, 1937.