



Universidade Federal de São João del-Rei
Coordenadoria do Curso de Matemática

Vanessa Lopes Asevedo

Sistemas de equações diferenciais ordinárias planares

São João del-Rei - MG, Junho de 2023

Universidade Federal de São João del-Rei
Coordenadoria do Curso de Matemática

Sistemas de equações diferenciais ordinárias planares

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenadoria do Curso de Matemática como parte necessária da Instrução Normativa COMAT N07 de 14 de Dezembro de 2021.

Orientadora: Dra. Patrícia Tempesta UFSJ-DEMAT

Banca Examinadora:

Orientadora: Profa. Patricia Tempesta

Prof. Jorge Andres Julca Avila

Prof. Wilker Thiago Resende Fernandes

Vanessa Lopes Asevedo
São João del-Rei - MG, Junho de 2023

Sumário

1	Introdução	7
2	Equações Diferenciais Ordinárias	9
2.1	Referencial Teórico	9
2.2	Equações Diferenciais	10
2.3	Teorema de Picard	12
2.3.1	Intervalo maximal	14
2.3.2	Dependência de soluções	15
3	Classificação de Sistemas Planares de EDOs Lineares	16
3.1	EDOs homogêneas com coeficientes constantes	17
3.2	Sistemas de Equações Diferenciais	19
3.3	Sistemas Lineares Planares	25
4	Sistemas não-lineares	31
4.1	Retratos de Fase	32
4.2	Uma aplicação de Linearização em Campos Gradientes	35
5	Teoria da Pertubação	38
5.1	Expansões Assintóticas	40
5.2	Escalas Múltiplas	43
5.2.1	Escalas Múltiplas para Osciladores Forçados: Notação Complexa	45
6	Teoria da Bifurcação	48
6.1	Bifurcação sela-nó	48
6.2	Bifurcação de Hopf	50
7	Considerações finais	52

Agradecimentos

A Deus, por agraciar-me com o dom da vida e pela luz durante cada momento desta jornada. À minha querida orientadora, Dra. Patricia Tempesta, do Departamento de Matemática e Estatística da Universidade Federal de São João del Rei, incentivadora e guia, pela orientação, oportunidade de aprendizado e confiança depositada. Pela dedicação e paciência, por mostrar as saídas, por não medir esforços para ajudar-me e pela compreensão sempre presente em todos os momentos de diálogo. Aos meu grandes amigos; Albertino, Ana Clara, Carine, Elielsom, Gabriel, Leticia Arantes, Gustavo, Heloisa, João Eduardo, Ruan, Samir, Túlio e Victoria pela amizade e incentivo durante todos os momentos. As meninas da república Submundo por tornarem esses últimos períodos momentos de aconchego e muita alegria. Aos meus pais, Eva da Conceição Lopes Asevedo e Francisco da Silva Asevedo, pelo importante e constante apoio que foram fundamentais em muitos momentos. Aos professores do Departamento de Matemática e Estatística da UFSJ, em especial aos professores: Carlos, Gustavo, Pedro, Flávia, Francinildo, Lorena e Viviane, pelos ensinamentos, apoio, projetos e por nunca deixarem de acreditar em mim. E agradeço também à Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação -PROPE e a Pró-Reitoria de Extensão e Cultura-PROEX pelas oportunidades e financiamentos de projetos que executei ao longo de minha graduação, experiências fundamentais em meu aprendizado.

“Desistir... eu já pensei seriamente nisso, mas nunca me levei realmente a sério; é que tem mais chã nos meus olhos do que o cansaço nas minhas pernas, mais esperança nos meus passos do que tristeza nos meus ombros, mais estrada no meu coração do que medo na minha cabeça.” (Cora Coralina)

Resumo

No presente trabalho estudamos a classificação dos sistemas lineares no plano, por meio da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais, e exploramos através de um conjunto de exemplos técnicas para estudar equações diferenciais não lineares e sistemas de equações não lineares no plano. No caso linear apresentamos a classificação usando autovetores e autovalores do sistema linear. Para o caso de equações não lineares estudamos a Teoria da Perturbação, que nos permite abordar equações diferenciais não lineares através de uma sucessão de equações, usualmente lineares, mais simples de resolver. Por fim, para os sistemas não lineares, vimos alguns exemplos da Teoria da Bifurcação, que tem como base sistemas não-hiperbólicos. Discutimos dois tipos de bifurcações, a Bifurcação Sela-Nó e a Bifurcação de Hopf.

Palavras-chave: Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias, Equações Diferenciais, Teoria da Bifurcação, Teoria da Perturbação.

1 Introdução

As Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) são equações contendo derivadas (ou diferenciais) ordinárias de uma ou mais variáveis independentes com relação a uma única variável dependente. Sendo matematicamente descritas da seguinte forma

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.1)$$

onde $y = y(x)$ e $y^{(n)}$ denota a n -ésima derivada de y em relação a x .

Equações como (1.1) são extremamente úteis para modelar fenômenos físicos, químicos e biológicos que regem o mundo em que vivemos conforme o tempo decorre. Alguns exemplos dessas aplicações ocorrem na datação de fósseis, conforme vemos em livros de química, ou mesmo quando tomamos um chá e observamos o seu resfriamento ao longo do tempo como vemos por exemplo em: [8] [10], [11]. A fim de analisarmos o comportamento desses eventos, recorreremos as soluções das EDOs, que são funções definidas em um intervalo I , contido no conjunto dos números reais, que satisfazem a equação dada.

O número de soluções de uma equação diferencial passando por um ponto fixado nem sempre é único. Algumas equações apresentam uma única solução, outras nenhuma e varias delas infinitas soluções. Já no século XIX, observou-se que nem sempre é algo simples expressar analiticamente as soluções das equações diferenciais, haja visto que a solução da grande maioria delas não pode ser expressas por meio de funções elementares. O trabalho de Henry Poincaré, matemático que viveu no século XIX, propõe então uma nova abordagem para esse problema, no qual analisamos propriedades inerentes das curvas soluções, sem nos preocuparmos com as possíveis expressões que elas venham a ter. Os estudos de Poincaré, e de outros matemáticos, são conhecidos como a Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias (TQEDO), cujo principal objetivo é dar descrições geométricas das soluções desse tipo de equação.

O objetivo principal deste trabalho é estudar a classificação dos sistemas lineares no plano, por meio da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias, e explorar, através de um conjunto de exemplos, técnicas para entender o comportamento das soluções das equações diferenciais não lineares e dos sistemas de equações não lineares no plano, em torno de pontos singulares.

Para equações ou sistemas de equações lineares, a álgebra linear é a ferramenta utilizada para classificar o comportamento das soluções do sistemas nos pontos singulares, como vemos na Seção 3. Para os casos não lineares existem dificuldades teóricas e outras técnicas precisam ser aplicadas, como vimos na Seção 4.

Para equações diferenciais não lineares usamos a Teoria da Perturbação para expressar suas soluções de maneira analítica, Seção 5. No caso dos sistemas não lineares, vimos que se dividem em dois tipos: hiperbólicos e não hiperbólicos, sendo sua classificação feita através da análise dos autovalores da matriz de linearização aplicada nos pontos singulares do sistema.

Estudos feitos sobre bifurcação de soluções de sistemas diferenciais sob a variação de um parâmetro tem sido estudada nos últimos anos por muitos autores [4] e [8]. A teoria geral de bifurcação descreve como as soluções para um dado sistema podem se ramificar conforme o parâmetro de bifurcação varia. Nos restringimos aos exemplos de Bifurcação de Hopf e Bifurcação Sela-nó.

Para melhor compreensão dos resultados dividimos este trabalho em cinco seções. Na Seção 2.1, listamos alguns resultados e definições preliminares de topologia e análise no \mathbb{R}^n . Na Seção 2.2 apresentamos uma abordagem teórica e formal do conceito de equação diferencial ordinária e resultados importantes, como o Teorema da Existência e Unicidade de Soluções para Equações Diferenciais Ordinárias, Teorema 2.18. E exploramos os sistemas de equações diferenciais lineares no plano em sua versão mais simples, autônomas e homogêneas com coeficientes constante.

Na Seção 4 abordamos o comportamento das soluções de sistemas não-lineares autônomos hiperbólicos, para isso faremos uso de técnicas de linearização, afim de aproximarmos esses sistemas de sistemas lineares e classifica-los a partir dos resultados da TQEDO. Por fim apresentamos as funções de Liapunov e estudamos o comportamento das soluções dos Campos Gradientes.

Na Seção 5, através de um conjunto de exemplos abordaremos de forma analítica as às soluções das equações diferenciais não lineares. De modo geral, realizaremos a decomposição de um problema mais complexo em um conjunto de problemas mais simples, através de uma coleção de métodos que nos permite obter soluções aproximadas, sendo esse conjunto de métodos conhecido como Teoria da Perturbação.

Finalmente, na Seção 6, estudamos problemas de bifurcação. Dada uma equação diferencial a 1-parâmetro, uma bifurcação ocorre quando há uma mudança "significativa" na estrutura das soluções do sistemas conforme variamos o parâmetro. Sendo assim, por meio da Teoria de Bifurcação, descreveremos a maneira como as características topológicas de uma solução (fluxo): número de pontos estacionários e órbitas periódicas, variam conforme o parâmetro varia, para isso analisaremos duas bifurcações em particular: a Bifurcação Sela-nó e a Bifurcação de Hopf.

2 Equações Diferenciais Ordinárias

Esta seção é dedicada a formalização do conceito de equação diferencial ordinária e aos primeiros resultados básicos que envolvem estas equações. Para tanto, começamos com a Seção 2.1 onde apresentamos algumas definições e resultados de Topologia e Análise no \mathbb{R}^n que serão úteis ao longo das discussões abordadas futuramente. As Seções subsequentes, Seção 2.2, Seção 2.3 e 2.3.2, são dedicadas à definição de equação diferencial, aos teoremas de existência e unicidade e dependência contínua das soluções com respeito às condições iniciais.

2.1 Referencial Teórico

Todas as demonstrações dos resultados desta seção foram omitidas e podem ser encontradas em [6] e [7].

Definição 2.1. (Métrica e espaço métrico) Uma métrica em um conjunto Y é uma função $d : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que dados quaisquer $x, y, z \in Y$, valem:

$$d1) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$d2) \quad d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in Y;$$

$$d3) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ (desigualdade triangular) .}$$

O par (Y, d) é chamado de Espaço Métrico. Dizemos também que Y é um espaço métrico que se submete a métrica d a ele associada.

A definição a seguir ilustra um caso específico de métrica.

Definição 2.2. (Norma) Seja E um espaço vetorial real. Uma norma em E é uma aplicação $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ com as seguintes propriedades:

$$N1) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$N2) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R};$$

$$N3) \quad \|x + w\| \leq \|x\| + \|w\| \text{ (desigualdade triangular).}$$

Definição 2.3. (Bola aberta e conjuntos abertos) Dados $x \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}_+^*$ qualquer, definimos a bola aberta centrada em x de raio r como sendo o conjunto

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n; \|x - y\| < r\}.$$

Dizemos que A contido em \mathbb{R}^n é um conjunto aberto de \mathbb{R}^n se A pode ser escrito como a união qualquer (inclusive não enumerável) de bolas abertas de \mathbb{R}^n . Dizemos que um conjunto F contido em \mathbb{R}^n é um conjunto fechado se seu complementar é um conjunto aberto.

Definição 2.4. (Fronteira) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto não vazio e $x \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que x pertence a fronteira de U , e denotamos por $x \in \partial U$, quando toda bola de centro em x contém pontos de U e pontos de $\mathbb{R}^n - U$.

A seguir, destacamos o conceito de sequência e veremos algumas definições de casos específicos.

Definição 2.5. Seja X um conjunto qualquer em \mathbb{R}^n . Uma sequência em X é uma aplicação $x : \mathbb{N} \rightarrow X$, definida por $x(j) = x_j$. Dada uma sequência x_j uma subsequência x_{j_k} é qualquer restrição da sequência a um conjunto infinito em \mathbb{N} . Uma sequência, $x_j \in \mathbb{R}^n$ diz-se convergente quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = a$. Uma sequência de pontos $x_j \in \mathbb{R}^n$ chama-se sequência de Cauchy quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k, r > k_0 \Rightarrow \|x_k - x_r\| < \epsilon$.

Apresentamos agora alguns teoremas que usados para a demonstração do Teorema de Picard, Teorema 2.18, feito na Seção 2.3.

Definição 2.6. (Espaço métrico completo) Um espaço métrico é dito completo quando todas as sequências de Cauchy convergem para um ponto que pertence ao espaço.

Definição 2.7. (Contração) Uma função $F : X \rightarrow X$, onde X é um espaço métrico, é uma contração se existe uma constante $0 \leq \lambda < 1$ tal que $d(F(x), F(y)) \leq \lambda d(x, y)$, $\forall x, y \in X$.

Teorema 2.8. (Ponto fixo) *Seja X um espaço métrico completo. Então toda contração F em X possui um único ponto fixo, isto é, existe um único ponto $p \in X$ tal que $F(p) = p$. Além disso, p é um atrator de F , ou seja, para todo ponto $x \in X$ vale que $F^n(x) \rightarrow p$ quando $n \rightarrow \infty$. Em particular, o mesmo vale se F possui algum iterado, $F^m : X \rightarrow X$, que é uma contração.*

2.2 Equações Diferenciais

Para escrever essa e as Seções 2.3 e 2.3.2, utilizamos como referências os textos [9] e [10].

Em todo o texto considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ com coordenadas retangulares (t, x) , onde $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Consideramos também, subconjuntos abertos U em \mathbb{R}^{n+1} que não são necessariamente da forma de produto de abertos. A partir daí podemos formalmente definir EDO de primeira ordem, como:

Definição 2.9. Dada uma função contínua $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde U é um aberto de \mathbb{R}^{n+1} , a equação diferencial ordinária de primeira ordem definida por f é dada por:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \quad (2.1)$$

As equações a seguir são exemplos de equações diferenciais ordinárias,

$$(a) y' - 5y = x \qquad (b) \frac{dy}{dx} = 7 \qquad (c) y'' - 2y' + 6 = 0,$$

onde $y = y(x)$ e y' e y'' denotam a primeira e segunda derivadas de y em relação a x .

As equações diferenciais ordinárias podem ser classificadas quanto a ordem e a linearidade.

Quanto a ordem: A ordem da maior diferencial na equação é, por definição, a ordem da equação. Por exemplo, as EDOs em (a) e (b) são de primeira ordem e em (c) temos uma EDO de segunda ordem.

Quanto a linearidade: Uma equação diferencial ordinária linear é dada na seguinte forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_0(x)y = g(x) \quad (2.2)$$

e atende as seguintes condições.

- (i) a variável dependente y e todas as suas derivadas são de primeiro grau.
- (ii) cada coeficiente $a_i, i = 0, 2, \dots, n$ depende apenas da variável independente x .

Vejamos alguns exemplos:

- (a) $xdy + ydx = 0$ é uma EDO linear de primeira ordem.
- (b) $y'' - 2y + y = 0$ é uma EDO linear de segunda ordem.
- (c) $\frac{d^3 y}{dx^3} + y^2 = 0$ é uma EDO não-linear de terceira ordem.

Afim de analisarmos o comportamento desses eventos, precisamos encontrar as soluções das EDOs, que são formalmente definidas a seguir:

Definição 2.10. Uma solução para (2.1) é uma função diferenciável $\mu : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde J é um intervalo aberto em \mathbb{R} , tal que:

- (a) para todo $t \in J$ tem-se $(t, \mu(t)) \in U$;
- (b) $\frac{d}{dt}\mu(t_0) = f(t_0, \mu(t_0)), \forall t_0 \in J$.

Donde $\frac{d}{dt}\mu(t_0)$ denota a derivada lateral correspondente no caso em que t_0 for extremo de J .

O número de soluções de uma equação diferencial passando por um mesmo ponto fixado nem sempre é único. Algumas equações apresentam uma única solução, outras nenhuma e varias delas infinitas soluções. No século XIX, já se sabia que não é algo simples expressar analaticamente as soluções das equações diferenciais, haja visto que a solução da grande maioria delas

não pode ser expressa por meio de funções elementares. O trabalho de Henry Poincaré propõe, então, uma nova abordagem para esse problema, no qual analisamos propriedades inerentes as curvas soluções, sem nos preocuparmos com as possíveis expressões que elas venham a ter. Os estudos de Poincaré, e de outros matemáticos, são conhecidos como a Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias (TQEDO), cujo principal objetivo é dar descrições geométricas das soluções desse tipo de equação, para isso recorreremos a Álgebra Linear, conforme veremos mais adiante.

Exemplo 2.11. Seja $h : J_0 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo aberto de $J_0 \subset \mathbb{R}$. Podemos considerar $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U = J_0 \times \mathbb{R}$ definida por $f(t, x) = h(t)$ e a EDO correspondente é então

$$x' = h(t).$$

Assim, uma solução é uma função diferenciável $\mu(t)$ tal que

$$\mu(t) = \mu(t_0) + \int_{t_0}^t h(\lambda)d\lambda, \forall t_0, t \in J. \quad (2.3)$$

A (2.3) nos dá um prelúdio para o próximo resultado.

Definição 2.12. (Problema de Cauchy ou problema de valor inicial-PVI) Dados a equação $x' = f(t, x)$ e um ponto $(t_0, x_0) \in U$, o problema de Cauchy associado a EDO é escrito como:

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (2.4)$$

A solução de (2.4) pode ser descrita através de uma função, $\mu : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, solução de $x' = f(t, x)$ tal que $t_0 \in J$ e $\mu(t_0) = x_0$. Como consequência do Teorema Fundamental do Cálculo temos o seguinte resultado:

Teorema 2.13. *O problema de Cauchy, (2.4) é equivalente à equação integral*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\lambda, x(\lambda))d\lambda.$$

Critérios para a existência de solução para o problema de Cauchy são estudados na próxima seção.

2.3 Teorema de Picard

Nesta seção estudaremos critérios de existência e unicidade de soluções para o problema de Cauchy (2.4). Veremos que, em condições bastante gerais, tais problemas podem apresentar, localmente, solução única, o que nos permitirá estende-las até um intervalo maximal e analisar características como dependências quanto a parâmetros e condições iniciais. As demonstrações omitidas aqui podem ser encontradas em [9].

Primeiramente, fixamos a norma do máximo em \mathbb{R}^{n+1} , dada por: $\|(t, x)\| = \max\{|t|, \|x\|\}$, onde $|t|$ e $\|x\|$ denotam normas euclidianas em \mathbb{R} e \mathbb{R}^n , respectivamente.

Definição 2.14. Uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ (não necessariamente contínua) é dita lipschitziana com respeito à segunda variável se existe $k > 0$ tal que $\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|$ para todo $(x, y_1), (x, y_2) \in U$.

A função é dita localmente lipschitziana com respeito à segunda variável se, todo ponto de U possui vizinhança restrita à qual f é lipschitziana com respeito a segunda variável. Sobre funções lipschitzianas vale ainda:

Teorema 2.15. *Toda função localmente lipschitziana é lipschitziana em partes compactas.*

Teorema 2.16. *Toda função $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$, de classe C^1 , com respeito a segunda variável é localmente lipschitziana com respeito a essa variável.*

Teorema 2.17. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ intervalo compacto e $K \subset \mathbb{R}^n$ subconjunto compacto. O espaço $X = C(I, K)$ das aplicações contínuas $\mu : I \rightarrow K$, com métrica do supremo $d(\mu, \gamma) = \sup_{t \in I} \|\mu(t) - \gamma(t)\|$ é completo.*

Teorema 2.18. *(Teorema de Picard) Seja $f : I[t_0, a] \times B[x_0, b] \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, contínua, lipschitziana com respeito à segunda variável. Então existe uma única solução do Problema de Cauchy correspondente a f em (t_0, x_0) , definida no intervalo $I[t_0, \alpha]$, onde $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ e $M = \sup\{\|f(t, x)\|; (t, x) \in I[t_0, \alpha] \times B[x_0, b]\}$*

Demonstração 2.19. : Tome $X = C(I[t_0, a], B[x_0, b])$, espaço métrico completo das funções contínuas de $I \rightarrow B$, com a métrica do supremo. Definimos então uma aplicação $F : X \rightarrow X$ da seguinte forma:

$$F(\mu)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(\lambda, \mu(\lambda)) d\lambda, \quad \forall t \in I(t_0, a). \quad (2.5)$$

Primeiro, mostremos que f está bem definida. De fato, de (2.5), temos que $\forall \mu \in X$,

$$|F(\mu)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(\lambda, \mu(\lambda)) d\lambda \right| \leq \int_{t_0}^t |f(\lambda, \mu(\lambda))| d\lambda \leq M|t - t_0| \leq b.$$

Logo, $F(\mu)(t) \in B[x_0, b], \forall t \in I[t_0, a]$ e, assim F é bem definida. Mostremos agora a seguinte afirmação:

Afirmação: F^n é uma contração se $n \in \mathbb{N}$ é suficiente grande.

Note que, se provarmos esta afirmação, o Teorema de Picard está provado, pois uma solução para o Problema de Cauchy em questão é dado justamente por um ponto fixo de F . E, o Teorema 2.8 diz que se F^n , para algum n for uma contração, então F possui um único ponto fixo em X , o que garante não só a existência da solução, mas também a sua unicidade.

Para provar a afirmação, usaremos indução finita sobre n , e provaremos que se K é a constante de Lipschitz de f , então

$$|F^n(\mu_1)(t) - F^n(\mu_2)(t)| \leq \frac{K^n}{n!} |t - t_0|^n d(\mu_1, \mu_2), \forall t \in I(t_0, \alpha), \forall \mu_1, \mu_2 \in X, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Com efeito, assumindo-se esta desigualdade para um certo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} |F^{n+1}(\mu_1)(t) - F^{n+1}(\mu_2)(t)| &= |F(F^n(\mu_1)(t)) - F(F^n(\mu_2)(t))| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(\lambda, F^n(\mu_1(\lambda))) - f(\lambda, F^n(\mu_2(\lambda)))| d\lambda \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |F^n(\mu_1)(\lambda) - F^n(\mu_2)(\lambda)| d\lambda \right| \leq K \left| \int_{t_0}^t \frac{K^n}{n!} (t_0 - \lambda)^n d(\mu_1, \mu_2) d\lambda \right| \leq \frac{K^{n+1}}{(n+1)!} |t - t_0|^{n+1} d(\mu_1, \mu_2). \end{aligned}$$

Assim, $F : X \rightarrow X$ é tal que

$$d(F^n(\mu_1), F^n(\mu_2)) \leq \frac{K^n \alpha^n}{n!} d(\mu_1, \mu_2).$$

Como $\frac{K^n \alpha^n}{n!} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, temos que a afirmação é verdadeira.

2.3.1 Intervalo maximal

Uma característica conspícua acerca da solução dada pelo Teorema de Picard, consiste no fato de podermos estende-la até um intervalo maximal de tempo. Vejamos como formalizar essas ideias. As demonstrações dos resultados apresentados nesta seção foram omitidas mas podem ser vistas em [9].

Definição 2.20. Dada uma EDO $x' = f(t, x)$, uma solução $\mu : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita maximal se para toda solução $\gamma : J_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $J \subset J_1$ e a função γ restrita a J é μ , ou seja, $\gamma|_J = \mu$, temos que $J = J_1$. Neste caso, J é dito intervalo maximal de μ .

Teorema 2.21. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua tal que para todo $(t_0, x_0) \in U$ existe uma única solução do Problema de Cauchy definida em um intervalo $I[t_0, x_0]$. Então para todo $(t_0, x_0) \in U$ existe uma única solução maximal $\mu(t, (t_0, x_0))$ do Problema de Cauchy.*

A principal propriedade geométrica da solução maximal pode ser vista por meio do seguinte resultado.

Teorema 2.22. *Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua e $\mu : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma solução maximal de $x' = f(t, x)$, onde $J(\omega_-, \omega_+) \subset \mathbb{R}$ é seu intervalo maximal de definição. Então, a aplicação*

$$\Phi : J \rightarrow U, \quad t \rightarrow (t, \mu(t))$$

satisfaz à seguinte propriedade de divergência: Para todo compacto $K \subset U$ existe uma vizinhança Ω de (ω_-, ω_+) tal que $t \in \Omega$ implica $\Phi(t) \notin K$. Essa condição é escrita como:

$$\Phi(t) \rightarrow \partial U, \quad t \rightarrow \omega_{\pm},$$

onde ∂U representa a fronteira de U .

2.3.2 Dependência de soluções

Veremos agora, que quando uma função f possui uma classe de diferenciabilidade adequada a solução de Problema de Cauchy associado a $f(t, x)$ e ao ponto inicial (t_0, x_0) dependem diferencialmente das variáveis (t, t_0, x_0) . As demonstrações dos resultados apresentados nesta seção foram omitidas mas podem ser vistas em [9].

Teorema 2.23. *(Dependência contínua das soluções com respeito às condições iniciais) Seja $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua no aberto U . Suponhamos que para todo $(t_0, x_0) \in U$, o Problema de Cauchy correspondente tenha solução única $\mu = \mu(t, (t_0, x_0))$, definida em um intervalo maximal denotado por (ω_-, ω_+) , onde $\omega_{\pm} = \omega_{\pm}(t_0, x_0)$. Então:*

- (i) O conjunto $D = \{(t, t_0, x_0); (t_0, x_0) \in U, t \in (\omega_-(t_0, x_0), \omega_+(t_0, x_0))\}$ é aberto em $\mathbb{R} \times U$;
- (ii) $\mu : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua.

Exemplo 2.24. Considere $k > 0$ e a equação diferencial dada por

$$X' = (-x, ky) \tag{2.6}$$

A solução da equação (2.6), satisfazendo $X(0) = (-1, 0)$, é dada por

$$X(t) = (-e^{-t}, 0).$$

Se considerarmos a mesma equação, na forma $Y' = (-x, ky)$ e qualquer $\eta \neq 0$, temos que a solução que satisfaz a condição inicial $Y_{\eta}(0) = (-1, \eta)$ é :

$$Y_{\eta}(t) = (-e^{-t}, \eta e^{kt})$$

Note que

$$|Y_{\eta}(t) - X(t)| = |\eta e^{kt} - 0| = |\eta - 0|e^{kt} = |Y_{\eta}(t) - X(t)|e^{kt}.$$

Ou seja, quando variamos a condição inicial, de $(-1, 0)$ para $(-1, \eta)$ as soluções Y_{η} , se separam de $X(t)$ como vemos na figura 1, mas o fazem no máximo exponencialmente, ou seja são contínuas em suas condições iniciais Além disso, para qualquer tempo fixo t , temos $Y_{\eta} \rightarrow x(t)$ com $\eta \rightarrow 0$.

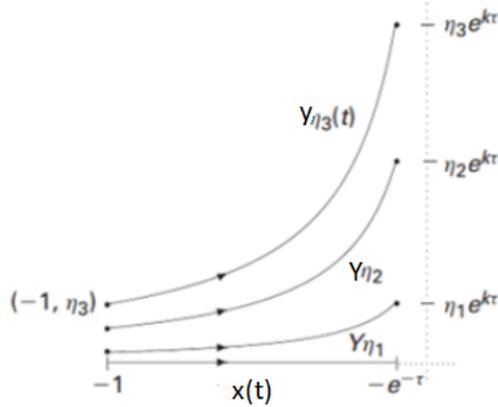


Figura 1: Soluções do sistema (2.6) com variação das condições iniciais, retirada de [2].

Equações diferenciais, frequentemente dependem de parâmetros, logo, é natural se perguntar como as soluções dessas equações dependem desses parâmetros. Tal questão é respondida no resultado abaixo.

Teorema 2.25. (*Dependência contínua das soluções com respeito às condições iniciais e parâmetros*) Seja $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua no aberto U . Suponhamos que para todo $(t_0, x_0, z) \in U$, o Problema de Cauchy correspondente tenha solução única $\mu = \mu(t, (t_0, x_0, z))$, definida em um intervalo maximal denotado por (ω_-, ω_+) , onde $\omega_{\pm} = \omega_{\pm}(t_0, x_0, z)$. Então:

- (i) O conjunto $D = \{(t, t_0, x_0, z); (t_0, x_0, z) \in U, t \in (\omega_-(t_0, x_0, z), \omega_+(t_0, x_0, z))\}$ é aberto em $\mathbb{R} \times U$;
- (ii) $\mu : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua.

O Teorema 2.23 pode ser visto como uma consequência do Teorema 2.25. Este fato se dá pela seguinte relação existente entre as classes de EDOs abordados em ambos os resultados: toda equação do tipo $x' = f(t, x, z)$ pode ser vista como uma equação do tipo $y = F(t, y)$ usando a mudança de coordenadas $y = (t, x)$.

3 Classificação de Sistemas Planares de EDOs Lineares

Nesta seção vamos restringir nossos estudos as equações lineares e autônomas. Apresentaremos classificação das soluções de sistemas de equações diferenciais lineares, autônomas (inva-

riantes pela ação do tempo), no plano do ponto de vista da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias. Para tanto, começamos com a Seção 3.1 na qual abordamos a independência entre soluções de uma EDO linear. A Seção 3.1 analisa as EDOs homogêneas com coeficientes constantes, que irão compor os sistemas lineares abordados nas Seções 3.2 e 3.3. As demonstrações dos resultados apresentados em todo a Seção 3 podem ser encontradas em [1], [10] e [11].

3.1 EDOs homogêneas com coeficientes constantes

Definição 3.1. Uma equação diferencial ordinária de n -ésima ordem homogênea com coeficientes constantes é da forma:

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y + a_0 = 0$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$, com $i = 1 \dots n$.

Uma característica conspícua acerca das soluções de uma EDO linear homogênea esta no fato de podermos usar do princípio de superposição de soluções, isto é, dado um conjunto de funções f_1, \dots, f_n que satisfazem uma equação diferencial em um intervalo I , podemos sempre tomar um conjunto linearmente independente (L.I) $f_1, \dots, f_k, k \leq n$, denominado conjunto fundamental, como segue do Teorema 3.2, para o qual todas as soluções da mesma são escritas como combinação linear desse grupo específico. Sendo a solução geral, dada por

$$\sum_{i=1}^k C_i f_i(x) = y,$$

com $C_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$ constantes arbitrárias.

Teorema 3.2. *Existe um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial linear homogênea de n -ésima ordem em um intervalo I .*

Dizemos que um conjunto de funções $f_i(x)$, com $i \in \{1, \dots, n\}$ é linearmente independente (L.I) em I , se a equação $\sum_{i=1}^k C_i f_i(x) = 0$, é satisfeita apenas quando todas as constantes C_i , com $i = 1, \dots, n$ são nulas, ou seja, apenas quando $C_i = 0, \forall i = 1, \dots, n$. Ademais, pelo Teorema 3.2, podemos fazer tal afirmação analisando somente o resultado do Wronskiano das f_i

Definição 3.3. O Wronskiano de duas funções diferenciáveis $f(x), g(x)$, em I , denotado por $W(f(x), g(x))$ é definido como a função gerada pelo calculo do seguinte determinante

$$W(f, g) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}.$$

. O mesmo raciocínio se estende para o caso do Wronskiano de n funções.

Teorema 3.4. *Sejam y_1, \dots, y_n soluções para a equação linear homogênea de n -ésima ordem*

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + \dots + a(x)y = 0,$$

em um intervalo I . Então, o conjunto de soluções é L.I em I , se e somente se,

$$W(y_1(x), \dots, y_n(x)) \neq 0, \quad \forall x \in I.$$

A partir de agora analisaremos uma classe bastante especial de equações diferenciais, as equações diferenciais lineares homogêneas com coeficientes constantes que são importantes no nosso contexto. Nós iremos relacioná-las com os sistemas de equações lineares no plano em subseções posteriores.

Apesar dos métodos aqui demonstrados estarem enunciados para equações diferenciais de ordem dois, os mesmos se estendem para equações ordem n . Deste modo, passaremos a analisar equações do tipo,

$$ay'' + by' + c = 0, \tag{3.1}$$

com a, b e c constantes arbitrárias. Nosso objetivo é descrever todas as suas soluções como funções exponenciais ou a partir de funções exponenciais, digamos $y = c_1 e^{mx}$, para isso faremos uso da possibilidade de associação da equação (3.1) com uma equação polinomial de grau dois dada por

$$am^2 + bm + c = 0. \tag{3.2}$$

Tal associação se da pela igualdade abaixo,

$$am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0 \tag{3.3}$$

Deste modo, resolver (3.3) significa encontrar as raízes de (3.2). Existem, ao todo, três possibilidades para as raízes de (3.2): duas raízes reais e distintas; duas raízes reais iguais e, por fim, duas raízes complexas conjugadas. A partir disso, podemos escrever a solução geral da EDO (3.1). Em todos os casos vamos denotar por m_1 e m_2 as raízes de (3.2).

Caso I: Raízes reais e distintas: Se $m_1 \neq m_2$ são raízes de (3.2), temos que $y_1 = e^{m_1 x}$ e $y_2 = e^{m_2 x}$, são soluções distintas de (3.1). Calculando o Wronskiano temos $W(y_1, y_2) = e^{(m_1 - m_2)x}(m_1 - m_2)$, que é sempre diferente de zero, o que garante que as soluções são L.I em I . Portanto, a solução geral é dada por

$$Y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x},$$

onde C_1, C_2 são constantes arbitrárias.

Caso II: Raízes reais e iguais: Quando $m_1 = m_2$, obtemos apenas uma solução $y_1 = e^{m_1 x}$. Deste modo, $m_1 = m_2 = -\frac{b}{2a}$, fato que decorre da demonstração da fórmula de Baskara. Como vimos, a solução geral de uma equação diferencial homogênea é dada pela combinação linear de duas soluções L.I. Afim de encontrar a segunda solução, utilizaremos o método do fator de integração, que fornece uma segunda solução que será L.I. com a primeira. Temos

$$y_2 = e^{m_1 x} \int \frac{e^{2m_1 x}}{e^{2m_1 x}} dx = e^{m_1 x} x.$$

Portanto a solução geral é dada por

$$Y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 x e^{m_1 x},$$

onde C_1, C_2 são constantes arbitrárias.

Caso III: Raízes Complexas: Se m_1, m_2 são complexas, então podemos escrever

$$m_1 = a + bi, \quad \text{e} \quad m_2 = a - bi,$$

onde $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $i^2 = -1$. Formalmente, não há diferença entre este caso e o Caso I, sendo assim, a solução geral é dada por

$$y = C_1 e^{(a+bi)x} + C_2 e^{(a-bi)x}.$$

Porém, graças a conhecida fórmula de Euler podemos, ao invés de trabalhar com exponenciais complexas, trabalhar com funções reais, usando a seguinte igualdade

$$e^{ib} = \cos(b) + i \sin(b)$$

e substituindo na solução geral anterior obtemos uma nova solução geral dada por,

$$y = e^{ax} (C_1 \cos(bx) + C_2 \sin(bx)),$$

onde C_1, C_2 são constantes arbitrárias.

3.2 Sistemas de Equações Diferenciais

Nesta seção e nas subsequentes, daremos início ao estudo qualitativo das soluções de uma equação diferencial linear homogênea em sua versão mais simples, sendo elas invariantes pela ação do tempo, autônomas, com coeficientes constantes como elucidado na subseção 3.1. Por meio dessa escolha, somos contemplados com soluções de comportamento bem conhecido e com a vantagem de as entendermos com ferramentas de Álgebra Linear, a saber, autovalores e autovetores. Alguns resultados aqui apresentados, terão suas demonstrações omitidas e podem ser encontradas em [2].

Considere a transformação linear

$$T = T_A = Ax,$$

em que $A \in M(n)$, isto é, A é uma matriz quadrada com entradas reais e de ordem n , sobre o vetor coluna $n \times 1$. Dizemos que o caminho $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução para a EDO autônoma

$$x' = Ax, \tag{3.4}$$

se x é derivável em \mathbb{R} e, para cada $t \in \mathbb{R}$, $x'(t) = Ax(t)$.

No tocante a questão de existência de uma solução, somos contemplados com duas características narradas na subseção 3.1, a primeira consiste na presença de um conjunto fundamental de solução descrito a partir da sobreposição de soluções linearmente independentes (L.I), interpretado aqui como base do espaço vetorial, subespaço $F(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ de todos os caminhos $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Isto é, se f_1, \dots, f_n são soluções de (3.4), todas L.I, temos que, qualquer solução f_k dada pode ser escrita como combinação linear destas,

$$f_k = \sum_{i=1}^{i=n} a_i f_i.$$

A segunda característica é dada pelo Teorema de Picard e estendido para EDOs em campos escalares pelo teorema a seguir.

Teorema 3.5. *Se $A \in M(n)$ é uma matriz real então, para cada ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe uma única solução do problema de valor inicial $x' = Ax$ com $x(0) = x_0$.*

Tomando T um operador linear sobre \mathbb{R}^n , caracterizado por $T(e_j) = e_i$, a A a matriz do operador T na base canônica de \mathbb{R}^n . Se existir v_1, \dots, v_n , uma outra base de \mathbb{R}^n , então

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^n b_{ij} v_i,$$

onde $b_{i,j} = B \in M(n)$ corresponde a matriz do operador de T nessa base. Podemos relacionar A e B , por uma matriz Q , chamada de matriz conjugação, da seguinte forma

$$A \sim B \rightarrow A = QBQ^{-1}.$$

Observação 3.6. A relação de equivalência obedece as seguintes afirmações:

- (i) $A \sim A$ (Reflexiva);
- (ii) Se $A \sim B$ então $B \sim A$ (Simétrica) ;
- (iii) Se $A \sim B$ e $B \sim C$ então $A \sim C$ (Transitiva).

Temos que, duas matrizes de um mesmo operador linear, em duas bases quaisquer do \mathbb{R}^n , são sempre conjugadas por transitividade. Em outras palavras, temos que um operador linear representa cada classe de equivalência de conjugação de matrizes.

Do ponto de vista de um operador linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, dadas duas matrizes A, B que representam T , os sistemas lineares $x' = Ax$ e $y' = By$ são, simplesmente, a mesma equação diferencial $x' = T(x)$ nas respectivas coordenadas de suas bases. Do ponto de vista das matrizes conjugadas A e B , os sistemas $x' = Ax$ e $y' = By$, são na realidade iguais, a menos de uma mudança de coordenadas, dada pela matriz de mudança de base entre A e B .

Agora vamos listar alguns teoremas que serão de grande importância.

Teorema 3.7. *Se Q conjuga as matrizes A e $B \in M(n)$ então Q transforma as soluções de $y' = By$ em soluções de $x' = Ax$. Mais precisamente, se $A = QBQ^{-1}$, então são equivalentes as afirmações:*

- (i) $y(t)$ é uma solução de $y' = By$;
- (ii) $Qy(t)$ é uma solução de $x' = Ax$.

Demonstração: Como a matriz Q independe de t , derivando $x(t) = Qy(t)$ obtemos, $x'(t) = Qy'(t) = QBy(t) = AQy(t) = Ax(t)$. Logo, (i) implica em (ii). Como Q é invertível, a demonstração da recíproca é análoga.

Teorema 3.8. *: Sejam $A \in M(n)$ uma matriz diagonalizável, com $Q, D \in M(n)$ tais que Q é invertível e $Q^{-1}AQ = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Então, dado $i = 1, 2, \dots, n$ e escrevendo $Qe_i = v_i$ o caminho $s_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por*

$$s_i(t) = e^{\lambda_i t} Qe_i = e^{\lambda_i t} v_i, t \in \mathbb{R}$$

é solução de $x' = Ax$ com valor inicial $s_i(0) = v_i$.

A partir daqui veremos que a matriz de conjugação, Q , tem seu formato definido conforme o número de autovalores presente na matriz que se deseja conjugar. Ademais, veremos que trabalhar com matrizes A com entradas no conjunto dos números complexos será mais viável.

Iniciaremos analisando uma matriz A que esta associada a transformação $T_A = T = Ax$, com x um vetor coluna da base canônica de \mathbb{R}^n , cujo operador linear esta descrito de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se A é diagonalizável, temos que existe uma matriz Q que conjuga $A \sim D$, com $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Resultando do Teorema 3.8 que cada vetor $Qe_j = v_j$ da origem a uma solução básica de $s_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j$ do sistema $x' = Ax$. Ademais, observamos que para cada vetor e_j da base canônica de \mathbb{R}^n , obtemos

$$Av_j = \lambda_j v_j$$

ou seja, cada vetor v_j é levado por A em um múltiplo do mesmo. Nesse caso, dizemos que λ é um autovalor associado a v , que é chamado de um autovetor de A e define uma solução para $Ax = x'$. Porém, esse fato é bem mais geral, pois independente de A ser ou não diagonalizável, temos que seus autovetores sempre serão solução do sistema proposto. Como nos será elucidado por alguns resultados a seguir.

Teorema 3.9. *Seja $v \in \mathbb{R}^n$ um autovetor de $A \in M(n)$ com autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$. Então*

$$x(t) = e^{\lambda t}v, t \in \mathbb{R}$$

é solução de $x' = Ax, x(0) = v$

Demonstração: Basta derivar $x(t) = e^{t\lambda}v, t \in \mathbb{R}^n$, para obter $x'(t) = \lambda e^{t\lambda}v = e^{t\lambda} = e^{t\lambda}Av = Ax(t)$.

Podemos constatar que cada autovetor de uma dada matriz gera um subespaço unidimensional, $[v] = \{\mu v \in \mathbb{R}^n : \mu \in \mathbb{R}\}$, que é solução do sistema.

Teorema 3.10. *Uma matriz $A \in M(n)$ é diagonalizável se, e somente se, existe uma base de \mathbb{R}^n construída de autovetores de A . Mais precisamente, dadas duas matrizes $A, Q \in M(n)$, temos que as colunas de Q formam uma base de autovalores de A se, e somente se, Q é invertível e $Q^{-1}AQ$ é uma matriz diagonal.*

De agora em diante veremos uma sequência de resultados que nos auxiliarão ao longo da subseção seguinte.

Teorema 3.11. *Sejam dados uma matriz real $A \in M(n)$ e um número real λ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) λ é um autovalor de A ;
- (ii) Existe um autovetor de A com autovalor associado λ ;
- (iii) $\text{Nuc}(\lambda - A) \neq 0$;
- (iv) a matriz $\lambda I - A$ não é invertível;
- (v) $\det(\lambda I - A) = 0$.

Teorema 3.12. *Seja $A \in M(n)$, então A anula seu polinômio característico, ou seja,*

$$p_A(A) = 0 \in M(n).$$

Teorema 3.13. *Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes.*

Teorema 3.14. *Se a matriz $A \in M(n)$ tem n autovalores distintos, então A é diagonalizável*

Exploraremos agora, os casos em que os autovalores da matriz associada ao sistema são complexos, dessa forma, sem perda de generalidade, temos que todas as propriedades e teoremas elucidadas até aqui serão mantidas. Focaremos no enunciado para o caso em que a matriz associada ao sistema possui ordem 2.

Afim de garantirmos a solução do maior número de EDOs do tipo, $x' = Ax$ com $A \in M(2)$, vamos expandir a ação de A para o corpo dos complexos, dessa forma sua solução passa a descrever os caminhos que vão de C^n para C^n . Tal escolha, é embasada pelo Teorema Fundamental da Álgebra, que garante que qualquer polinômio $p(z)$ pode ser fatorado em \mathbb{C}^2 ,

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

para todas as raízes $\lambda_i, i = 1, 2$ complexos. Se λ é do tipo $a + bi = z$, com $b \neq 0$, chamamos λ de autovalor generalizado de A . E chamamos o autovetor v complexo associado a um autovalor generalizado de autovetor generalizado.

Os próximos resultados nos garantirão um completo entendimento a cerca da construção da solução de uma sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem. Ficando assim, para a última subseção a análise de seu comportamento qualitativo, denominados Retratos de Fase.

Teorema 3.15. *Dados uma matriz $A \in M(2)$, um número complexo não real γ e um vetor não nulo $w \in \mathbb{C}^2$, temos:*

- (i) γ é um autovalor complexo de A se, e somente se, $\bar{\gamma}$ é um autovalor complexo de A ;
- (ii) w é um autovetor complexo de A com autovalor de γ se, e somente se, \bar{w} é um autovetor complexo de A com autovalor $\bar{\gamma}$;
- (iii) Se w é um autovetor complexo de A com autovalor γ , então w, \bar{w} é linearmente independente em \mathbb{C}^2 .

Usamos a identificação $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^2 + i\mathbb{R}^2$, ou seja, separar cada coordenada complexa de um vetor em sua parte real e imaginária. Sendo assim, dado $w \in \mathbb{C}^2$ podemos escrever $w = u + iv$ com $u, v \in \mathbb{R}^2$. Além disso, dado $w \in \mathbb{C}^2$ então,

$$u = \frac{1}{2}(w + \bar{w}) \quad \text{e} \quad v = \frac{1}{2i}(w - \bar{w}) \quad (3.5)$$

são os únicos vetores em \mathbb{R}^2 tais que $w = u + iv$.

Teorema 3.16. *Sejam $A \in M(2)$ uma matriz real e $w \in \mathbb{C}^2$ um autovetor complexo de A associado ao autovalor complexo $a + bi \in \mathbb{C}$, com $b \neq 0$. Escrevendo $w = u + iv$, com $u, v \in \mathbb{R}^2$ dados em (3.5), temos que u, v é linearmente independente em \mathbb{R}^2*

$$\begin{cases} Au = au - bv \\ Av = bu + av \end{cases}$$

Demonstração: Suponha que w seja um autovetor complexo de A e sejam $u, v \in \mathbb{R}^2$ tais que $w = u + iv$ como em (3.5). Suponha ainda que $\{u, v\}$ são linearmente dependentes em \mathbb{R}^2 , isto é, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $v = \alpha u$. Então $w - \bar{w} = 2iv = 2i\alpha u = i\alpha(w + \bar{w})$ e, portanto $(1 - i\alpha)w = (1 + i\alpha)\bar{w}$. O que nos mostra que $\{u, v\}$ são linearmente dependentes, o que contraria o lema acima. Logo $\{u, v\}$ são linearmente independentes.

Seja $\gamma = a + bi$, com $b \neq 0$, o autovalor associado a w . Pela unicidade da decomposição (3.5), a segunda afirmação decorre de

$$Au + Aiv = A(u + iv) = Aw = \gamma w = (a + ib)(u + iv) = (au - bv) + i(bu + av),$$

por A pertencer a $M(n)$ ser real, temos $Au, Av \in \mathbb{R}^2$.

Teorema 3.17. *Dependendo das duas raízes λ_1, λ_2 do polinômio característico $p_A(\lambda)$ de uma matriz 2×2 real $A \in M(2)$, ocorre exatamente um dos seguintes casos:*

(1) se λ_1, λ_2 são reais e distintos, então $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, sendo as colunas da matriz de conjugação linear dadas por quaisquer autovetores associados aos autovalores λ_1, λ_2 ;

(2) se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ é real e:

(a) $\dim \text{Nuc}(\lambda_0 I - A) = 2$, então $A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \lambda_0 I$;

(b) $\dim \text{Nuc}(\lambda_0 I - A) = 1$, então $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$, sendo as colunas da matriz conjugação linear dadas por qualquer vetor u fora do autoespaço $\text{Nuc}(\lambda_0 I - A)$ e o autovetor $v = Au - \lambda_0 u$ de A associado ao autovalor λ_0 ;

(3) se $\lambda_1 = a + ib$ e $\lambda_2 = a - ib$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, são números complexos conjugados, então $A \sim \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, sendo as colunas da matriz conjugação dadas pelas partes real e imaginária de qualquer autovetor complexo de A associado ao autovalor λ_1 .

Teorema 3.18. *Seja $w \in \mathbb{C}^2$ um autovetor complexo de $A \in M(2)$ com autovalor complexo associado $\lambda = a + ib$, com $b \neq 0$. Seja $w = u + iv$ a decomposição de w dada em (3.5), com $u, v \in \mathbb{R}^n$. Então*

$$\begin{cases} x(t) = e^{at}[(\cos bt)u - (\sin bt)v] \\ y(t) = e^{at}[(\sin bt)u + (\cos bt)v] \end{cases}$$

definem as únicas soluções de $x' = Ax$, com $x(0) = u$ e $y(0) = v$, respectivamente.

Seja $w \in \mathbb{R}^2$ um autovetor complexo de A associado a γ e seja $w = u + iv$ a decomposição de w . Sabemos que $\{u, v\}$ são linearmente independentes, portanto a matriz real $Q \in M(2)$

de colunas $Qe_1 = u$ e $Qe_2 = v$ é invertível, e $Au = au - bv$ e $Av = bu + av$. Escrevendo $J = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, temos $Je_1 = ae_1 - be_2$ e $Je_2 = be_1 + ae_2$ e,

$$\begin{cases} AQe_1 = Au = au - bv = aQe_1 + bQe_2 = Q(ae_1 + be_2) = QJe_1 \\ AQe_2 = Av = bu + av = bQe_1 + aQe_2 = Q(be_1 + ae_2) = QJe_2 \end{cases}$$

assim $A \sim J$.

Finalizamos a subseção com um exemplo que mostra como obter a solução da equação diferencial dada por $x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x$, $x(0) = (K_1, K_2)$. Segue que a matriz $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ conjuga a matriz A em $B = \text{diag}(i, -i)$. Resolvendo o sistema $y'(t) = By$ obtemos $y(t) = (e^{it}, e^{-it})$, pelo Teorema 3.7 temos que $x(t) = Qy(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \times (e^{it}, e^{-it}) = (e^{it} + e^{-it}, ie^{it} - ie^{-it}) = r(\cos(t - \theta), -\sin(t - \theta)) = (\sin t, \cos t)$, pois $r = 1$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$.

3.3 Sistemas Lineares Planares

A partir dos resultados apresentados na subseção anterior, somos capazes de nos atentar à descrição geométrica das soluções da equação linear vetorial

$$x' = Ax, \tag{3.6}$$

sujeita a $x(0) = (k_1, k_2)$, no plano, $A \in M(2)$ e $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Tal descrição irá proceder segundo o Teorema 3.17 que aborda o número de autovalores distintos de $A \in M(2)$, e que caracteriza o formato de suas soluções como nos Casos I, II e III descritos na Subseção 3.1.

Cada solução de (3.6), dada por $x = (x_1, x_2) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, pode ser identificada como uma curva parametrizada no plano, denominada órbita, que é dada pelo conjunto de pontos

$$\{(x_1(t), x_2(t)) | t \in \mathbb{R}\},$$

munido de uma orientação dada pelo crescimento de t em $(-\infty, \infty)$. Esse sentido será comumente indicado por uma seta. Pela unicidade das soluções, por cada ponto passa uma única órbita. Sendo assim, dados duas órbitas distintas, $\{(x_1(t), x_2(t)) | t \in \mathbb{R}\}$ e $\{(y_1(t), y_2(t)) | t \in \mathbb{R}\}$, temos pelo princípio do terceiro excluído que, ou elas são coincidentes, ou elas são distintas.

O esboço de tais conjuntos no plano é chamado de retrato de fase do sistema de equações diferenciais. Com base no tipo dos autovalores que uma matriz $A \in (2)$ podemos classificar o comportamento das órbitas de um sistema do tipo (3.6) em 12 tipos distintos. Listaremos todos os tipo aqui, os cálculos detalhados podem ser encontrados em [2].

- Caso I: Se a matriz A possui autovalores reais e distintos, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, a solução de (3.11) é da forma $(k_1 e^{\lambda_1 t}, k_2 e^{\lambda_2 t})$, $t \in \mathbb{R}$. Os possíveis retratos de fase são dados pela Figura 1, em Figura 8(a) temos um nó atrator, em Figura 8(b) temos uma sela, em Figura 2(c) temos um nó repulsor. No caso de um dos autovalores ser igual a zero, temos os retratos dados pela Figura 2(d) e Figura 2(e), cujo comportamento é descrito por retas paralelas a uma reta de singularidade.

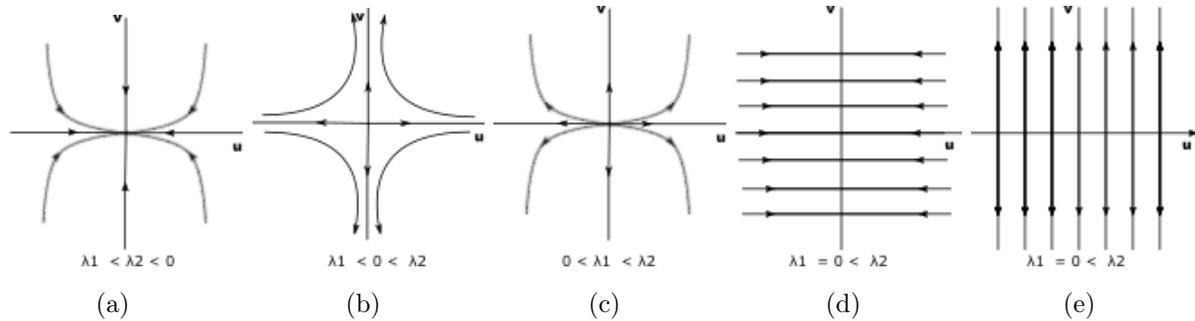


Figura 2: Retratos de fase quando os autovalores são distintos.

- Caso II: Se os autovalores são reais e iguais, isto é $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, temos duas possibilidades

$$[1] \quad A \equiv \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad [2] \quad A \equiv \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

No caso (3.7)[1] as soluções são da mesma forma que as encontradas no Caso I. No caso (3.7)[2] as soluções são dadas por $((k_1 + k_2)te^{\lambda t}, k_2 e^{\lambda t})$ com $t \in \mathbb{R}$. Os possíveis retratos de fase para esse caso, estão listados na Figura 3.3, sendo que Figura 3(a) é chamado de foco estável, Figura 3(b) é chamado de foco instável e representam (3.7)[1], enquanto que Figura 3(c) é chamado de nó impróprio estável e Figura 3(d) é chamado de nó impróprio instável e representam (3.7)[2].

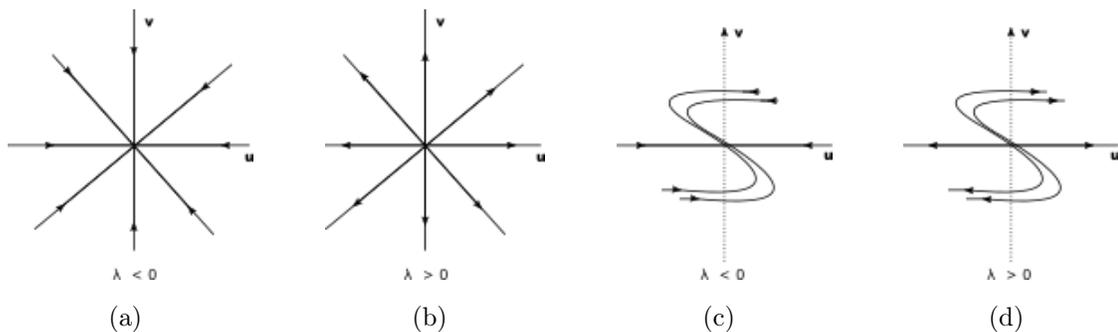


Figura 3: Retratos de fase quando os autovalores são iguais.

Observação 3.19. Considere $\lambda = 0$. Para (3.7)[1] temos $A \equiv 0$, nessa caso todas as soluções são constante e o retrato de fase é obtido pintando-se alguns pontos do plano.

Já em (3.7)[1] temos $A \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, e as soluções são do tipo, $(0, K_2)$ quando $k_1 = 0$ e retas $(k_1, k_1 t + k_2)$ com $k_1 \neq 0$.

- Caso III: Se os autovalores de A são complexos conjugados $\lambda = a + bi$ e $\bar{\lambda} = a - bi$, $b \neq 0$, temos que $A \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, e a solução fica na forma $r e^{at} (\cos b(t - \theta), \sin b(t - \theta))$. Os possíveis retratos de fase são descritos na Figura 3.3. Em Figura 4(a) temos um atrator, também chamado de espiral estável, em Figura 4(b) temos um repulsor, também chamado de espiral instável, e em Figura 4(c) temos um centro. Em todos os casos, o sinal de b interfere apenas na orientação das curvas.

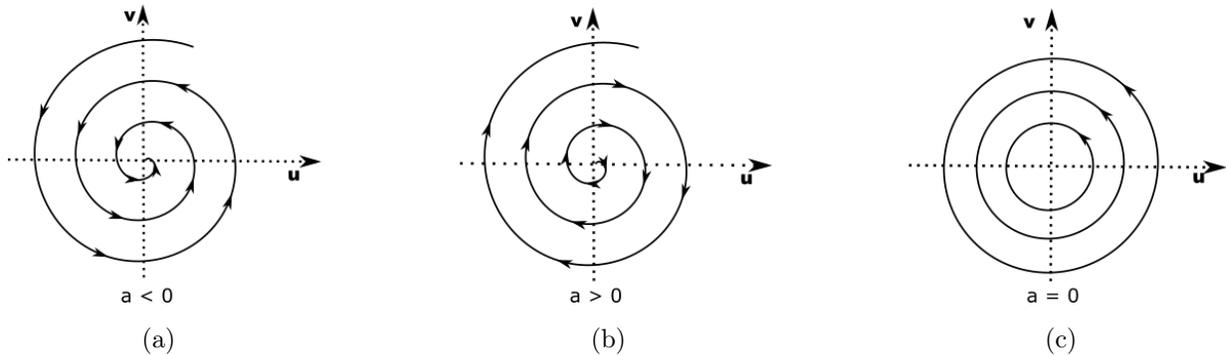


Figura 4: Possíveis retratos de fase para o caso em os autovalores são complexos conjugados.

Olhando para as matrizes onde a parte real de cada um de seus autovalores é não nula, também chamadas de matrizes hiperbólicas, podemos pensar em uma classificação menos rígida (classificação topológica) e agrupar os retratos de fase descritos anteriormente em três tipos:

- os atratores, com ambos autovalores generalizados de parte real negativa, onde todas as soluções tendem a origem com $t \rightarrow \infty$
- os repulsores, com ambos os autovalores generalizados da parte real positiva, onde todas as solução tendem a origem com $t \rightarrow -\infty$
- as selas, com um autovalor real positivo e o outro negativo: duas soluções tendem a origem, com $t \rightarrow -\infty$, duas com $t \rightarrow \infty$ e as demais não tendem a origem com $t \rightarrow \pm\infty$.

Vamos agora, por meio de um exemplo, usar os retratos de fase acima para analisar comportamentos de modelos matemáticos.

Exemplo 3.20. Considere a EDO linear homogênea de segunda ordem descrita por

$$x'' + px' + qx = 0, \quad (3.8)$$

com $p, q \in \mathbb{R}$ constantes. Essa equação generaliza a equação do oscilador harmônico simples, basta considerar $p = 2a \geq 0$ representando o atrito e $q = w^2 > 0$, constante de elasticidade da mola.

Considerando $x_1 = x$ e $x'_1 = x_2$. Obtemos o sistema equivalente à (3.8).

$$\begin{cases} x_2 = x'_1 \\ x'_2 = -qx_1 - px_2 \end{cases} \quad (3.9)$$

associado à matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}.$$

Temos que um par de funções (x_1, x_2) é solução do sistema (3.9) se, e somente se, $x'_1 = x_2$ e x_1 é solução de (3.8). Vamos aplicar o Teorema 3.17 e analisar o polinômio característico da matriz companheira A associada ao sistema. Por meio desta análise, podemos identificar o comportamento do sistema (3.8), em torno da origem, para todos os possíveis valores de p e q .

Analisando o polinômio característico de A observamos que os autovalores podem ser descritos por

$$\lambda = -a \pm \sqrt{a^2 - q}, \quad 2a = p,$$

se $\Delta \geq 0$ esse autovalores são reais e caso $\Delta < 0$ temos que serão complexos. Vamos analisar os possíveis comportamentos do sistema, dependendo da equação (3.8) modelar, ou não um oscilador harmônico simples sem força externa.

Caso A1: $0 = p < q$, movimento oscilatório não amortecido: Neste caso $\Delta < 0$, o que nos dá dois autovalores imaginários puros e pelo Teorema 3.17 temos que $A \sim \begin{pmatrix} 0 & w \\ -w & 0 \end{pmatrix}$. Sendo, assim seu retrato de fase é descrito através de centro linear, Figura 4(c), que são elipses centradas na origem e com período igual a $\frac{2\pi}{w}$, cuja solução é descrita por

$$x(t) = c_1 \cos wt + c_2 \sin wt.$$

Vale salientar que esse caso é estruturalmente instável, ou crítico, afinal qualquer mudança no coeficiente de atrito faz com que o sistema perca a característica de centro.

Caso A2: $0 < \frac{1}{4}p^2 < q$, movimento oscilatório subamortecido. Ao analisarmos os autovalores de A , temos que os mesmos são complexos e conjugados, da forma $a \pm bi$, com $b = \sqrt{-\Delta} > 0$ e

$0 < \frac{p^2}{4} < q$ dessa forma pelo Teorema 3.17, $A \sim \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}$. Resolvendo o sistema associado e tomando o produto de sua solução, $e^{-at}(k_1 \cos bt + k_2 \sin bt, -k_1 \sin bt + k_2 \cos bt)$, pela matriz conjugação $Q \in M(2)$. Obtemos

$$x(t) = e^{-at}(c_1 \cos bt + c_2 \sin bt).$$

Que caracteriza a solução de $Ax = x'$. Sendo assim, seu retrato de fase é dado por uma espiral estável, como na Figura 4(a).

Caso A3: $q = \frac{1}{4}p^2$, movimento criticamente amortecido. Nesse caso temos $\Delta = 0$, o que nos dá como autovalores da matriz A dois valores iguais e negativos, a saber $-a$. Pelo Teorema 3.17, temos $A \sim \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$. Resolvendo o sistema associado e tomando o produto de sua solução, $e^{-at}(k_1, k_1 + k_2)$, pela matriz conjugação $Q \in M(2)$. Obtemos

$$x(t) = c_1 e^{-at} + t c_2 e^{-at},$$

que é solução de $Ax = x'$ cujo retrato de fase é descrito por um nó impróprio estável, Figura 3(d).

Caso 4: $\Delta > 0$, movimento superamortecido. Esse cenário tem sua solução descrita a partir de uma matriz A associado ao sistema, cujas raízes de seu polinômio característico são números reais e distintos, ou seja $\Delta > 0$. Dessa maneira, pelo Teorema 3.17, temos $A \sim \begin{pmatrix} -a - \sqrt{\Delta} & 0 \\ 0 & -a + \sqrt{\Delta} \end{pmatrix}$, resolvendo o sistema associado e tomando o produto de sua solução, $(K_1 e^{\lambda_1 t}, K_2 e^{\lambda_2 t})$ pela matriz $Q \in M(2)$, obtemos $x(t) = (c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t})$ que é solução de $Ax = x'$, cujo retrato de fase caracteriza um nó estável, Figura 8(a).

A partir dos cenários descritos para o caso em que (3.8) descreve o Sistema Mola-Partícula, podemos analisar que conforme se variam os parâmetros p, q , obtemos o comportamento geral das soluções do sistema associado à A no primeiro quadrante e sobre o eixo das ordenadas quando $q < 0$. Os próximos cenários serão construídos baseando-se no fato de que (3.8) não descreve o Sistema Mola-Partícula, $q \leq 0, p < 0$.

Caso B1: $p < 0 < q$. Nesse caso temos que a é negativo, porém (Δ pode ser negativo, nulo ou positivo). A cada um desses possíveis valores de Δ , temos o dual dos casos A2, A3, A4 respectivamente, apenas invertendo o sentido do movimento, apresentando um espiral estável ($a^2 < q$), um nó impróprio instável ($a^2 = q$) e um nó instável ($a^2 > q$).

Caso B2: $q = 0$. Nesse cenário, temos $\det(A) = 0$ e os autovalores da matriz triangular A são os números reais $0, -p = \text{tr}(A)$. Se p for positivo, temos uma reta de singularidade, o

autoespaço formado pela origem, e todas as demais trajetórias tendem paralela e transversalmente para essa reta de singularidades. Se $p = 0$ temos teremos uma reta de singularidades e todas as demais trajetórias são paralelas a essa reta, em sentido e lados opostos a essa reta; se $p < 0$, temos todas as trajetórias fora da reta de singularidades se afastam paralela e transversalmente dessa reta. As soluções de $x'' + px' + qx = 0$ são dadas por $x(t) = c_1 + c_2e^{-pt}$ se $p \neq 0$ e por $c_1 + c_2t = x(t)$ se a equação se reduz a $x'' = 0$. Veja a Figura 2(d) e Figura 2(e).

Caso B3: $q < 0$. Nesse cenário temos $0 \leq a^2 < a^2 - q = \Delta$, que implica $0 \leq |a| < \sqrt{\Delta}$ e, portanto, temos dois autovalores reais, distintos e opostos de A . Sendo assim, temos que o campo de A define uma sela, Figura 2(c) e as soluções de $x'' + px' + qx = 0$ são dadas por $x(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t}$.

Ao Analisarmos o caso em que a EDO, $x' = Ax$ não descreve o Sistema Mola-Partícula, obtemos o comportamento das soluções nos demais quadrantes.

Portanto, somos capazes de compreender o comportamento de quaisquer soluções de equações diferenciais lineares do tipo (3.8), levando em consideração o quadrante em que ela se encontra, por meio da variação dos parâmetros p, q que provocam mudanças "significativas" na estrutura das soluções do sistemas. Na Figura 4, que caracteriza o Diagrama de Bifurcação ao longo dos quadrantes do plano PoQ .

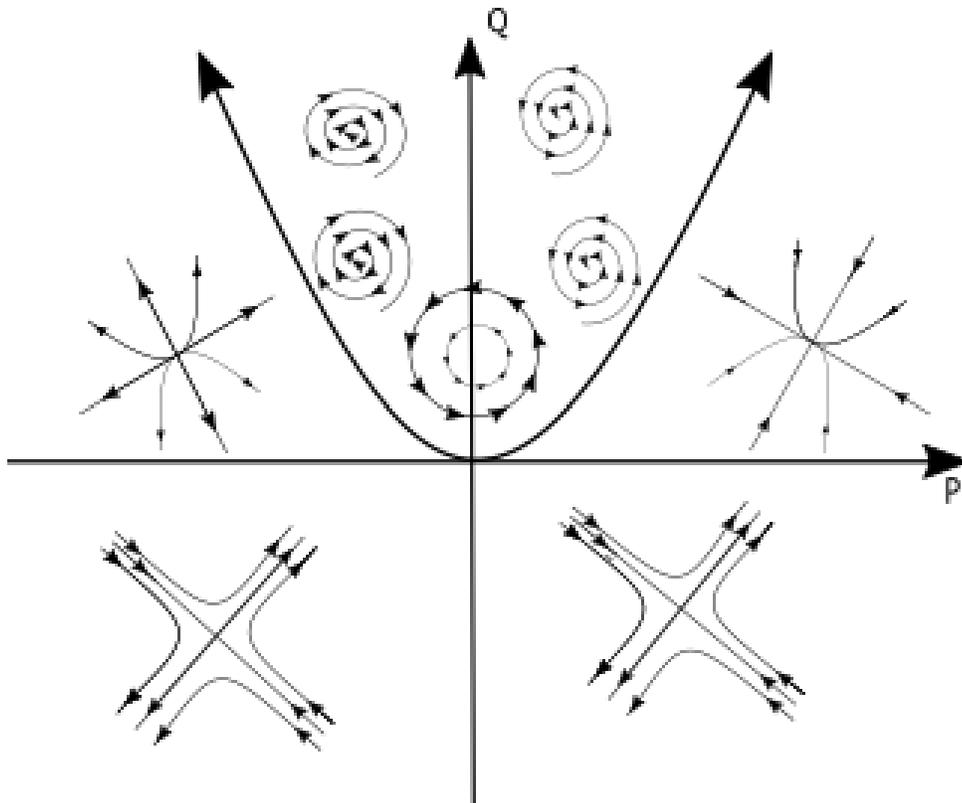


Figura 5: Possíveis retratos de fase da equação 3.8

4 Sistemas não-lineares

Nesta seção, daremos início ao estudo de sistemas de EDOs não lineares. Os resultados apresentados nesta parte podem ser encontrados em [8].

Um campo de vetores em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ é uma aplicação contínua $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$. Todo campo de vetores define um sistema de equações diferenciais autônomos, invariante pela ação do tempo, dada por, $x' = F(x)$.

Definição 4.1. :Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores. Um ponto $P \in U$ tal que $F(p) = 0$ é dito um ponto singular ou singularidade de F . Um ponto $q \in U$ tal que $F(q) \neq 0$ é dito regular, ou não singular.

As soluções de $x' = F(x)$ são também chamadas de trajetórias, curvas integrais ou fluxos.

Considere o sistema de equações diferenciais não linear $x' = F(x)$, com F um campo de vetores de classe C^1 . Seja $x(t)$ uma solução particular do sistema definida em algum intervalo I . Fixe $t_0 \in I$. Para cada $t \in I$ defina

$$A(t) = DF_{x(t)},$$

onde $DF_{x(t)}$ denota a matriz Jacobiana de F no ponto $x(t)$. Sendo F de classe C^1 , $A(t) = DF_{x(t)}$, são uma família de matrizes 2×2 contínuas. Considere a equação linear

$$y' = A(t)y. \quad (4.1)$$

A equação (4.1) é chamada de equação variacional ao longo da solução $x(t)$. Está provado em [8] que esta equação tem solução definida em I para cada condição inicial $y(t_0) = y_0$

Dado qualquer sistema não-linear de equações diferenciais $x' = F(x)$ com ponto singular x_0 , podemos considerar a equação variacional (4.1) ao longo dessa solução. Neste caso, DF_{x_0} é uma matriz constante A . A equação variacional é então

$$y' = Ay$$

que é um sistema linear autônomo. Esse sistema é chamado de sistema linearizado em x_0 . Mais formalmente,

Definição 4.2. (Linearização) Seja $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores de classe C^1 . Considere o sistema $x' = F(x)$ com ponto singular x_0 . O sistema linear

$$y' = DF_{x_0}y,$$

onde DF_{x_0} é a matriz Jacobiana de F no ponto x_0 é chamado de linearização de F em x_0 ou de sistema linearizado.

Definição 4.3. (Ponto singular hiperbólico) Seja $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores de classe C^1 . Considere o sistema $x' = F(x)$ com ponto singular x_0 e sua linearização $y' = DF_{x_0}y$. Quando a matriz DF_{x_0} não possui autovalores imaginários dizemos que o ponto singular x_0 é hiperbólico, caso contrário, dizemos que x_0 é não hiperbólico.

As soluções de sistemas não-lineares planares, próximos aos pontos singulares, se assemelham às suas partes lineares apenas quando são hiperbólicos. Formalmente, usamos o termo conjugação para sistemas que tem o mesmo comportamento.

Teorema 4.4. (Teorema da Linearização): *Suponha que o sistema bidimensional $x' = F(x)$ tem um ponto singular em x_0 que é hiperbólico. Então o fluxo do sistema não linear é conjugado ao fluxo do sistema linearizado em uma vizinhança de x_0 .*

4.1 Retratos de Fase

Nessa seção apresentaremos um procedimento geral para esboçarmos, de forma qualitativa, as trajetórias de um sistema não-linear autônomo próximo aos pontos singulares.

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} ;$$

1. Encontre todos os pontos singulares resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} ;$$

2. Para cada ponto singular (x_0, y_0) encontre a matriz A do sistema linearizado, ou seja calcule a matriz Jacobiana nos pontos singulares

$$A = J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} ;$$

3. Determine o tipo geométrico da origem do sistema linearizado, ou seja, se são pontos de sela, nós ou espirais estáveis ou instáveis assim como fizemos para os casos lineares na Seção 3;

4. No plano xy , marque os pontos de equilíbrio e desenhe as trajetórias nas proximidades dos pontos de equilíbrio (x_0, y_0) , incluindo a direção do movimento;

5. Finalmente, represente algumas trajetórias compatíveis com o comportamento das trajetórias que foram desenhadas no passo anterior. Se foi cometido algum erro na análise anterior em qualquer ponto singular, ele vai aparecer agora. Em outras palavras, será impossível desenhar de forma plausível qualquer trajetória que complete o desenho.

Veja o seguinte exemplo:

Exemplo 4.5. Considere o sistema

$$\begin{cases} x' = x - xy \\ y' = 2y - y^2 \end{cases} \quad (4.2)$$

Os pontos singulares do sistema (4.2) são $(0, 0)$ e $(0, 2)$.

Agora, derivando cada uma das funções que compõe o sistema 4.2, obtemos a matriz Jacobiana

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - y & -x \\ 0 & 2 - 2y \end{pmatrix}.$$

Vamos analisar os sistemas linearizados para cada ponto singular.

1. Para o caso em que o ponto singular é a origem temos o sistema:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y \end{cases} , \quad (4.3)$$

cujos autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$. Portanto, o ponto singular é um nó instável como ilustrado a Figura 6.

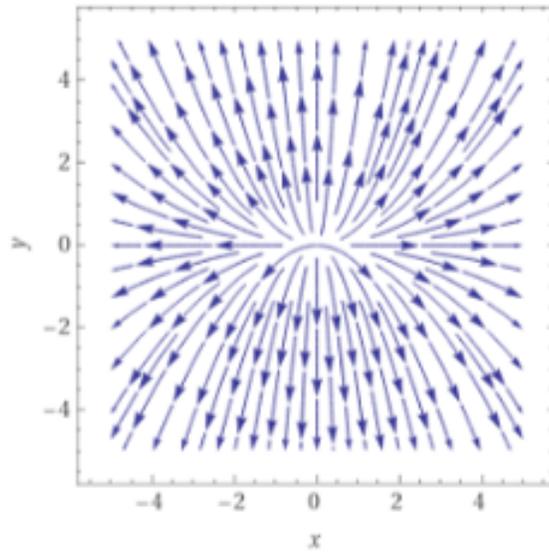


Figura 6: Nó instável do sistema (4.3) na origem.

2. Para o caso em que o equilíbrio é o ponto $(0, 2)$ temos o sistema linearizado em função da mudança de coordenadas u e v é

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -2y \end{cases} \quad (4.4)$$

cujos autovalores são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$, assim o ponto singular é um nó estável como esboça a Figura 7.

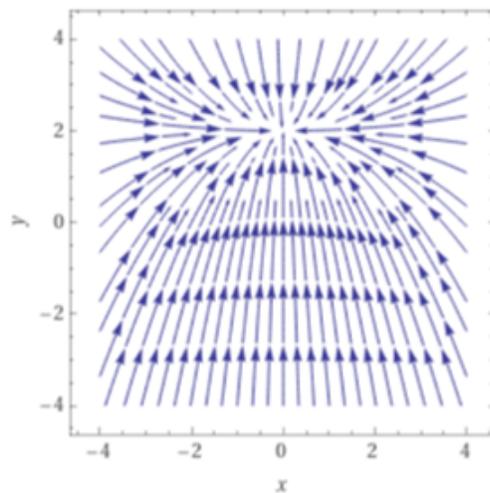


Figura 7: Nó estável do sistema (4.4) no ponto $(0, 2)$.

4.2 Uma aplicação de Linearização em Campos Gradientes

Começamos definindo uma ferramenta muito útil no estudo dos sistemas gradientes. Desenvolvidas pelo matemático russo, Aleksandr M. Lyapunov, as funções de Liapunov consistem em um método alternativo para mostrarmos que um ponto singular, p é assintoticamente estável (Teorema 4.6). Os dessa seção, podem ser vistos em [8].

Teorema 4.6. *Seja p um ponto singular para $x' = F(x)$. Seja $L : O \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável definida em um conjunto aberto O centrado em p . Suponha ainda que*

(a) $L(p) = 0$ e $L(x) > 0$ com $x \neq p$;

(b) $L' \leq 0$ em $O - \{p\}$.

Então p estável. Além disso, se L também satisfaz

(c) $L < 0$ em $O - \{p\}$.

Então p é assintoticamente estável.

Dizemos que uma função L que satisfaz (a) e (b) é de Liapunov em p . Se (c) também é válido, chamamos L de função de Liapunov estrita.

Observe que o Teorema de Liapunov, Teorema 4.6, pode ser aplicado sem resolver a equação diferencial, tudo o que precisamos calcular é $DL_x(F(x))$ (Diferencial da função de Liapunov aplicada no campo). Por outro lado, não existe um método direto para encontrar essa classe de funções. Encontra-las é uma questão de engenhosidade ou uma questão de tentativa e erro.

Analisaremos um tipo particular de sistema para o qual as funções de Liapunov são pertinentes. Um sistema gradiente em \mathbb{R}^2 é um sistema de equações diferenciais da forma

$$x' = -\text{grad}V(x) \tag{4.5}$$

onde $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é C^2 , e

$$\text{grad}V(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2} \right).$$

Observação 4.7. O sinal negativo no sistema (4.5) é uma convenção.

O campo vetorial associado à (4.5) é chamado Campo Gradiente ou Campo Conservativo. Destacamos duas características desses campos, a primeira nos é dada de forma imediata pela Proposição 4.8 e a segunda consiste no fato da simplicidade envolvendo as propriedades de seus fluxos, que será melhor abordada conforme o andamento da seção.

Proposição 4.8. *A função V é uma função de Liapunov para o sistema $X' = -\text{grad}V(x)$. Além disso, $V'(p) = 0$ se, e somente se, p for um ponto singular.*

Demonstração: Pela regra da cadeia temos

$$\begin{aligned} V'(X) &= DV_X(X') = -\text{grad}(V(x)) \cdot (-\text{grad}(V(X))) \\ &= -|\text{grad}(V(X))|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Em particular, $V'(X) = 0$ se, e somente se, $\text{grad}(V(X)) = 0$.

Observação 4.9.

Lembre-se que $V' : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ consiste na derivada de V ao longo da curva solução $X(t)$ do sistema (4.5), isto é

$$V' = \frac{d}{dt}V(X(t)).$$

A partir da Proposição 4.8 verificamos a seguinte igualdade fundamental:

$$DV_x(y) = \text{grad}V(x)y.$$

O que nos diz, que a derivada da função de Liapunov em X avaliada em $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ é dada pelo produto escalar dos vetores $\text{grad}V(x)$ e y . Outra consequência imediata da Proposição 4.8 é o seguinte resultado, que nos fornece as propriedades dos Sistemas Gradientes.

Teorema 4.10. *Para o sistema $x' = -\text{grad}V(x)$*

- (1) *Se p é um valor regular de V , então o campo vetorial é perpendicular ao nível definido por $V^{-1}(p)$;*
- (2) *Os pontos críticos de V são os pontos de equilíbrio do sistema;*
- (3) *Se um ponto crítico é um mínimo isolado de V , então este ponto é um ponto singular assintoticamente estável.*

Deste modo para compreendermos um fluxo gradiente geometricamente, basta olharmos para as superfícies de nível da função $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Essas são subconjuntos de $V^{-1}(p)$ com $p \in \mathbb{R}$. Se $x \in V^{-1}(p)$ é um ponto regular, $-\text{grad}V(x) \neq 0$, então $V^{-1}(p)$ se assemelha a uma superfície de dimensão 1 próximo a x . Se todos os pontos em $V^{-1}(p)$ são pontos regulares, então dizemos que p é um ponto regular de V . No caso $n = 2$ temos que V é uma única curva simples. Caso contrario, se p for não regular dizemos que ele é um ponto crítico de $V^{-1}(p)$. E por fim, como propriedade das funções de Liapunov, temos que se uma solução esta contida em uma superfície de nível ela permanece nesta superfície.

Vejamos um exemplo:

Exemplo 4.11. Seja $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função $V(x, y) = x^2(x-1)^2 + y^2$. Então o sistema gradiente é dado por

$$\begin{cases} x' = -2x(x-1)(2x-1) \\ y' = -2y. \end{cases}$$

Existem três pontos de equilíbrio: $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $(1, 0)$. As linearizações nesses três pontos produzem as seguintes matrizes:

$$(i) \quad DV(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad DV\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(iii) \quad DV(1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Portanto, os itens (i) e (iii) caracterizam nós enquanto o item (ii) caracteriza uma sela. Tanto o eixo- x quanto o eixo- y são invariantes, assim como as linhas $x = \frac{1}{2}$ e $x = 1$. Uma vez que $y' = -2y$ em linhas verticais segue a curva estável em $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e a linha estável em $x = \frac{1}{2}$ enquanto a curva instável em $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ é o intervalo $]0, 1[$ no eixo- x . Como podemos ver pela Figura 4.2.

Proposição 4.12. Para um sistema gradiente, $x' = -\text{grad}V(x)$, o sistema linearizado em qualquer ponto singular tem apenas autovalores reais.

Demonstração: Sabemos que a linearização de um sistema gradiente em um ponto singular X^* é a matriz $[a_{ij}]$ onde

$$a_{ij} = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right)(X^*).$$

Como

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right)(X^*) = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i}\right)(X^*),$$

segue que a matriz de linearização é simétrica, assim possui apenas autovalores reais. Esse conspícuo fato procede devido a um propriedade da matriz correspondente ao sistema linearizado, matrizes simétricas possuem apenas autovalores reais.

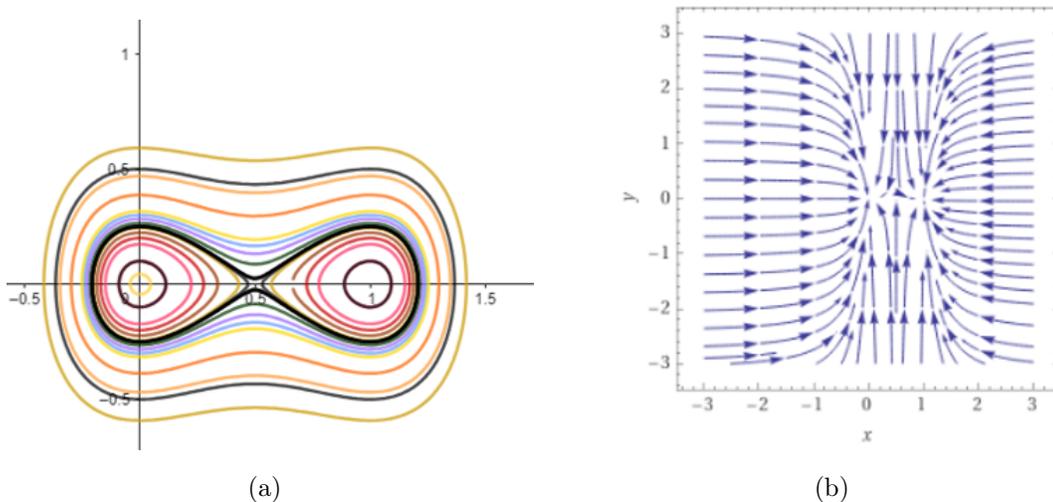


Figura 8: (a) Curvas de nível de V e (b) retrato de fase do sistema gradiente.

5 Teoria da Perturbação

Nessa seção daremos uma abordagem mais analítica às soluções das equações diferenciais não lineares, usando técnicas que são compiladas pela chamada Teoria da Perturbação. Nossa referência para essa seção é [4].

A Teoria da Perturbação consiste em uma coleção de métodos para a obtenção de soluções aproximadas de problemas que envolvem, na maioria das vezes, um pequeno parâmetro, $\epsilon \ll 1$, também chamado de parâmetro de perturbação. De forma genérica, tal teoria realiza uma decomposição de um problema mais complexo em um conjunto de problemas relativamente mais simples de se obter solução.

Iniciamos com um exemplo de perturbação em uma equação, usada para encontrar as raízes de um polinômio,

Exemplo 5.1. Considere o seguinte polinômio

$$x^3 - 4,001x + 0,002 = 0. \quad (5.1)$$

Podemos olhar para equação (5.1) como um problema de perturbação introduzindo um parâmetro pequeno ϵ . Em geral essa tarefa não é fácil, entretanto aqui faremos isso de forma bem simples considerando a família de polinômios a seguir,

$$x^3 - (4 + \epsilon)x + 2\epsilon = 0. \quad (5.2)$$

Observe que (5.2) reproduz (5.1) quando $\epsilon = 0,001$. Pode parecer estranho a primeira vista, mas é mais fácil calcular as raízes aproximadas da família de polinômios do que resolver (5.1). A razão para isso é que se as raízes forem consideradas funções de ϵ , então pode-se assumir a

solução em uma série de potências de ϵ , a qual chamaremos de série assintótica. Considere $x(\epsilon)$ uma solução polinomial, com coeficientes reais, para (5.2) como a seguir

$$x(\epsilon) = a_0\epsilon^0 + a_1\epsilon^1 + \cdots + a_n\epsilon^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\epsilon^n. \quad (5.3)$$

Os coeficientes a_n podem ser obtidos substituindo-se a equação (5.3) na equação (5.2). Para efeito de cálculos, a série assintótica será truncada em termos de terceira ordem, assim

$$x(\epsilon) = a_0 + a_1\epsilon + a_2\epsilon^2 + O(\epsilon^3). \quad (5.4)$$

Substituindo a equação (5.4) em (5.2) temos

$$[a_0 + a_1\epsilon + a_2\epsilon^2]^3 - (4 + \epsilon)[a_0 + a_1\epsilon + a_2\epsilon^2] + 2\epsilon = O(\epsilon^3).$$

Fatorando a equação acima e igualando os termos de mesma potência obtemos:

$$(a_0^3 - 4a_0) + (3a_0^2a_1 - 4a_1 - a_0 + 2)\epsilon + (3a_0a_1^2 + 3a_0^2a_2 - 4a_2 - a_1)\epsilon^2 = O(\epsilon^3). \quad (5.5)$$

Como o parâmetro ϵ é arbitrário, fazendo ϵ tender a zero a equação (5.5) também tenderá, conseqüentemente os produtos de coeficientes na mesma potência devem ser nulos, assim:

$$\text{Aproximação de ordem zero } (\epsilon^0): a_0^3 - 4a_0 = 0$$

$$\text{Aproximação de ordem um } (\epsilon): 3a_0^2a_1 - 4a_1 - a_0 + 2 = 0$$

$$\text{Aproximação de ordem } (\epsilon^2): 3a_0a_1^2 + 3a_0^2a_2 - 4a_2 - a_1 = 0$$

Observe que a solução da equação (5.1) restringe-se, após a introdução do método das perturbações, a solução de três equações algébricas. Os coeficientes a_0 , a_1 e a_2 são determinadas como segue,

$$(\epsilon^0) \Rightarrow a_0 = 0, \pm 2; \quad (\epsilon) \Rightarrow a_1 = 0, \pm \frac{1}{2}; \quad (\epsilon^2) \Rightarrow a_2 = 0, \pm \frac{1}{8}.$$

A solução aproximada das raízes de (5.1) é formada a partir da série assintótica, dada por (5.4). Um dos aspectos importantes da solução da série de perturbação é a introdução de correções na solução de ordem zero pelos termos de ordem superior. Esta correção pode ser tão pequena quanto o parâmetro de perturbação. Para referência, a série contendo as soluções aproximadas das raízes do polinômio é apresentada a seguir

$$x_1 = -2 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{8}\epsilon^2 + O(\epsilon^3)$$

$$x_2 = 0 + \frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{8}\epsilon^2 + O(\epsilon^3)$$

quando $\epsilon = 0,001$ obtemos as raízes para (5.1)

$$x_1 = -2,000499875; \quad x_2 = 0,000499875; \quad x_3 = 2.$$

O exemplo anterior ilustra uma das ideias principais da Teoria da Perturbação, que é usar a expansão polinomial de soluções, como

$$x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots$$

e, substituir na equação a ser resolvida para encontrarmos os coeficientes x_i , igualando os termos de ordem ϵ^i . Por fim, escrevemos a solução em termos da série assintótica proposta.

A partir de agora, daremos início a análises de técnicas semelhantes para as equações diferenciais e, em seguida, aplicá-las a vários osciladores forçados que nos darão ideia de alguns fenômenos distintos não-lineares que ocorrem nesses sistemas.

Cabe ressaltar que todas essas análises serão feitas através da observação de exemplos, que elucidam cada caso.

5.1 Expansões Assintóticas

Aqui buscamos analisar se expansões, semelhantes as feitas no Exemplo 5.1, realmente convergem.

Definição 5.2. Dada uma função real $f(\epsilon)$, dizemos que a soma $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(\epsilon)$ é uma expansão assintótica da função f se para todo $n \geq 0$

$$\frac{f(\epsilon) - \sum_{k=0}^n f_k(\epsilon)}{f_n(\epsilon)} \rightarrow 0 \text{ com } \epsilon \rightarrow 0.$$

Em outras palavras, se o resto for menor que o último termo incluído na expansão.

Destacamos que, se $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(\epsilon)$ é uma expansão assintótica de $f(\epsilon)$ então

$$f(\epsilon) \sim \sum_k f_k(\epsilon), \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

Nosso foco aqui é expandir soluções de equações diferenciais, denotadas por $x(t, \epsilon)$. Sendo assim, obtemos expansões assintóticas da forma

$$x(t, \epsilon) \sim \sum_k x_k(t) \delta_k(\epsilon),$$

onde $\delta_k(\epsilon) = \epsilon^k$ recebem o nome de funções mediação, e $x_k(t)$ são funções apenas da variável t . Observe que tal expansão é assintótica em algum domínio, D , se $\sum_k a_k(t) \delta_k(\epsilon)$ é uma expansão

assintótica com $\epsilon \rightarrow 0$ para todo $t \in D$. Não verificaremos se a expansão é de fato assintótica, usaremos apenas o critério de que, se $\sum_k x_k(t)\delta_k(\epsilon)$ é uma expansão assintótica então

$$\frac{a_{k+1}(t)\delta_{k+1}(\epsilon)}{x_k(t)\delta_k(\epsilon)} \rightarrow 0 \text{ com } \epsilon \rightarrow 0.$$

Ou seja, analisaremos se os termos sucessivos da série são menores que o anterior, seguindo a Definição 5.2.

Vejam agora a teoria aplicada no Oscilador de Van der Pol e na equação de Duffing.

Exemplo 5.3. O Oscilador de Van der Pol é dado pela seguinte equação diferencial perturbada:

$$x'' + \epsilon x'(x^2 - 1) + x = 0, \quad 0 < \epsilon \ll 1. \quad (5.6)$$

Essa equação perturbada pode ser pensada como um exemplo de equação do oscilador harmônico simples. Colocando a expansão assintótica $x(t) \sim x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \dots$ e substituindo-a na equação obtemos

$$\begin{aligned} & (x''_0(t) + \epsilon x''_1(t) + \epsilon^2 x''_2(t) + \dots) + \epsilon(x'_0(t) + \epsilon x'_1(t) + \epsilon^2 x'_2(t) + \dots)[(x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \\ & + \epsilon^2 x_2(t) + \dots)^2 - 1] + x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \dots = 0. \end{aligned}$$

Comparando os dois lados da igualdade na equação anterior, obtemos as equações de ordem ϵ^0 e ϵ^1 , como se segue:

$$x''_0(t) + x_0(t) = 0 \quad \text{e} \quad x''_1(t) + x_1(t) = -x'_0(t)(x_0^2(t) - 1).$$

Resolvendo a EDO homogênea, $x''_0(t) + x_0(t) = 0$ obtemos a solução geral

$$x_0(t) = A \cos(t - t_0) + B \sin(t - t_0), \quad (5.7)$$

com A e B constantes reais.

Sujeitando (5.7) a uma dada condição inicial e considerando $t_0 = 0$ obtemos

$$x_0(t) = A \cos t.$$

Logo, $x''_1(t) + x_1(t) = -x'_0(t)(x_0^2(t) - 1)$ pode ser reescrita como

$$x''_1(t) + x_1(t) = A \sin t((A \cos t)^2 - 1),$$

o que implica que $x''_1(t) + x_1(t) = A^3 \sin t - A^3 \sin^3(t) - A \sin t$.

Daí, pela abordagem da superposição de soluções obtemos

$$x_1(t) = B \cos(t - t_0) - \frac{A}{8}(A^2 - 4)t \cos t - \frac{A^3}{32} \sin 3t.$$

Note que o segundo termo nessa solução cresce com $t \cos t$ isso vem da ressonância da função seno. Portanto, se quisermos uma expansão assintótica para $x(t)$ na ordem ϵ^1 os termos $\sin t$ devem desaparecer, para isso, basta tomar $A = 2$. Assim, a solução para a equação (5.6) é dada por

$$x(t) \sim 2 \cos t + O(\epsilon).$$

Exemplo 5.4. A equação de Duffing é dada por

$$x'' + x + \epsilon x^3 = 0, \quad 0 < \epsilon \ll 1,$$

essa equação perturbada também pode ser pensada como um exemplo de equação do oscilador harmônico simples. Como antes, colocamos a expansão $x(t) \sim x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \dots$ para termos de ordem ϵ^0 e ϵ^1 e encontramos as equações para x_0 e x_1

$$x_0'' + x_0 = 0, \quad \text{e} \quad x_1'' + x_1 = -x_0^3.$$

Escolhendo as condições iniciais de modo que $x_0 = A \sin t$, a segunda equação equivale a

$$x_1'' + x_1 = -A^3(\sin t)^3 = \frac{A}{4}(\sin 3t - 3 \sin t).$$

Note que o termo $(A^3(\sin t)^3 = \frac{1}{4}(\sin 3t - 3 \sin t))$ é ressonante, e gera uma solução proporcional a $t \sin t$ o que impede que a série $x_0 + \epsilon x_1 + \dots$ seja assintótica. Uma vez que, os termos sucessivos não diminuem. Tomando $A = 0$ tornarmos essa série assintótica, e a origem é uma solução para a equação.

A solução completa para a equação x_1 é

$$x_1 = B \sin(t - t_1) - \frac{1}{32}A^3 \sin 3t + \frac{3}{8}A^3 t \cos t$$

e assim

$$x(t) \sim A \sin t + \epsilon \left(B \sin t - \frac{1}{32}A^3 \sin 3t + \frac{3}{8}A^3 t \cos t \right) + \dots$$

onde \dots denotam termos de ordem dois ou superiores. Essa não é uma expansão assintótica para termos de ordem ϵ^{-1} (a menos que $A = 0$), pois o termo $\frac{3}{8}\epsilon t A^3$ é de ordem 1 quando $t = O(\epsilon^{-1})$. Mas

$$A \sin t + \frac{3}{8}\epsilon t A^3 \cos t = A \sin \left(t + \frac{3}{8}\epsilon t A^3 \right) + \dots$$

e assim poderíamos rearranjar os termos na solução $x(t)$ e escrito

$$x(t) \sim A \sin \left(t + \frac{3}{8}\epsilon t A^3 \right) + \epsilon \left(B \sin t - \frac{1}{32}A^3 \sin 3t \right) + \dots$$

Agora $x(t)$ é uma série assintótica para qualquer escolha finita de A . Isso sugere que devemos pensar um pouco mais sobre a maneira como desenvolvemos a série assintótica.

5.2 Escalas Múltiplas

Nessa subseção abordaremos uma forma sistemática de lidar com as amplitudes e o desvio de fase descritos anteriormente. Um fato importante tratado no Exemplo 5.4 é que as soluções oscilam em uma escala de tempo de ordem t com amplitudes de fase que flutuam em uma escala de ordem ϵt , o que nos sugere que devemos buscar soluções da forma

$$R(\epsilon t) \sin(t + \theta(\epsilon t))$$

ou equivalentemente,

$$A(\epsilon t) \sin t + B(\epsilon t) \cos t.$$

Note que existem duas escalas de tempo, uma escala rápida na qual as soluções oscilam, $\tau = t$ e uma escala lenta, $T = \epsilon t$ na qual a amplitude e a fase evoluem. Porém, normalmente propomos uma solução de expansão assintótica como se segue:

$$x(t) = x(\tau, T, \epsilon) \sim x_0(\tau, T) + \epsilon x_1(\tau, T) + \dots$$

que é assintótica para termos de ordem ϵ^{-1} , ou seja para uma perturbação pequena o suficiente temos uma boa aproximação com as soluções da equação original. Nesta expressão tratamos τ e T como variáveis independentes, então

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T} \quad (5.8)$$

Usando (5.8) e a definição 5.2, descobrimos

$$x \sim x_0(\tau, T) + \epsilon x_1(\tau, T) + \dots$$

$$x' \sim x_{0\tau} + \epsilon(x_{1\tau} + x_{0T}) + \dots \quad (5.9)$$

$$x'' \sim x_{0\tau\tau} + \epsilon(x_{1\tau\tau} + x_{0T\tau}) + \dots \quad (5.10)$$

onde os subscritos nas equações (5.9) e (5.10) denotam derivadas parciais. Tendo em mãos as análises propostas acima, podemos trabalhar adequadamente o Exemplo 5.4.

Exemplo 5.5. A equação de Duffing é dada por

$$x'' + x + \epsilon x^3 = 0, \quad 0 < \epsilon \ll 1.$$

Procuramos uma solução em série $x(t) \sim x_0(\tau, T) + \epsilon x_1(\tau, T) + \dots$ que é assintótica para tempos de ordem ϵ^{-1} , onde $t = \tau$ e $\epsilon t = T$.

Na ordem ϵ^0 obtemos a equação

$$x_{0\tau\tau} + x_0 = 0,$$

e assim,

$$x_0 = R(T) \cos(t + \theta(T)),$$

onde as funções R e θ são determinadas pela não ressonância na ordem ϵ . A equação x_1 de ordem ϵ^1 é

$$x_{1\tau\tau} + x_1 = -2x_{0,\tau T} - x_0^3 = 2(R \sin(\tau + \theta))_T - R^3 \cos^3(\tau + \theta).$$

Assim, diferenciando o lado direito desta equação e usando a identidade $\cos^3(t) = \frac{1}{4}(\cos t + \cos 3t)$ temos

$$x_{1\tau\tau} + x_1 = 2R_T \sin(\tau + \theta) + 2R\theta_T \cos(\tau + \theta) - \frac{1}{4}R^3(3 \cos(\tau + \theta) + \cos 3(\tau + \theta)).$$

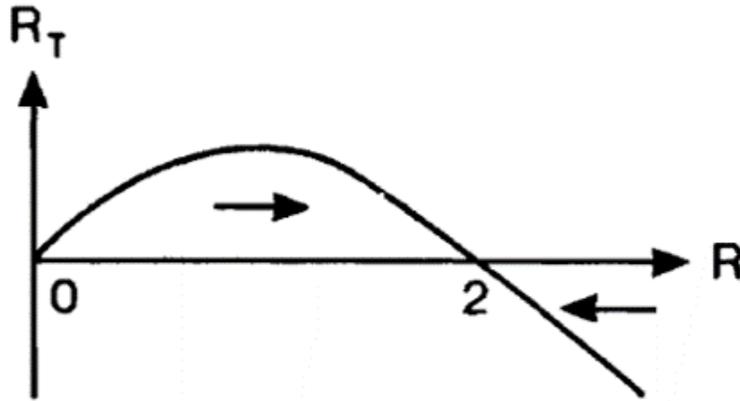


Figura 9: Gráfico de R_T contra R

O $\cos 3(\tau + \theta)$ é inofensivo, mas os termos $\sin(\tau + \theta)$ e $\cos(\tau + \theta)$ são ressonantes, ou seja as soluções dispersam da origem, e portanto, para que as soluções em série permanecem assintóticas, ao longo das escalas de tempo de ordem ϵ^{-1} , os termos $\sin(\tau + \theta)$ e $\cos(\tau + \theta)$ devem desaparecer. Isto é possível tomando

$$R_T = 0 \text{ e } \theta_T = \frac{3}{8}R^2.$$

Resolvendo a primeira equação acima temos $R = R_0$, onde R_0 é constante, e assim a segunda equação pode ser resolvida, resultando em $\theta_T = \frac{3}{8}R_0^2 T + t_0$ onde t_0 é uma constante (determinada pelas condições iniciais). Portanto a solução de maior ordem é

$$x(t) \sim R_0 \cos(t + \frac{3}{8}R_0^2 \epsilon t + t_0) + O(\epsilon).$$

Ressaltamos que, esse método não se limita à análise de osciladores perturbados de equações diferenciais lineares $L(x', x'', x''') = 0$, podendo ser estendido a sistemas de ordem superior.

Dada a equação que pode ser resolvida usando o método da superposição de soluções.

5.2.1 Escalas Múltiplas para Osciladores Forçados: Notação Complexa

Para simplificar os cálculos feitos na seção anterior é mais conveniente usar notação complexa. Usaremos essa notação para o caso do Oscilador de Van der Pol que é dada pela equação $x'' + \epsilon x'(x^2 - 1) + x = 0$ com $0 < \epsilon \ll 1$. Sujeita a $x(0) = 1$ e $x'(0) = 0$.

Buscamos uma solução $x(t) \sim x_0(\tau, T) + \epsilon x_1(\tau, T) + \dots$ com $t = \tau$ e $T = t\epsilon$. Consideramos assim como no Exemplo 5.3 que é válida para termos de ordem ϵ^1 , o que nos fornece as equações:

$$x_{0\tau\tau} + x_0 = 0 \quad (5.11)$$

$$x_{1\tau\tau} + x_1 = -2x_{0\tau T} - x_{0\tau}(x_0^2 - 1)$$

A solução para (5.11) é escrita como

$$x_0(\tau, T) = A(T)e^{i\tau} + A^*(T)e^{-i\tau}$$

Onde A é uma função complexa da variável T e A^* é o conjugado de A . Isso implica que

$$x_{0\tau} = iAe^{i\tau} - iA^*e^{-i\tau}$$

e

$$x_{0\tau T} = iA_T e^{i\tau} - iA_T^* e^{-i\tau}$$

O lado direito da equação para x_1 é, portanto,

$$-2(iA_T e^{i\tau} - iA_T^* e^{-i\tau}) - (iAe^{i\tau} - iA^*e^{-i\tau})([Ae^{i\tau} + A^*e^{-i\tau}]^2 - 1).$$

Os termos que ressoam com o lado esquerdo da equação são $e^{i\tau}$ e $e^{-i\tau}$. O coeficiente de $e^{i\tau}$ é

$$-2iA_T - iA^2 A^* + iA$$

e o coeficiente de $e^{-i\tau}$ é

$$2iA_T^* + i(A^*)^2 A - iA^*,$$

sendo eles complexos e conjugados.

Escrevendo $A = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}$, temos

$$u_T = \frac{1}{2}u(1 - (u^2 + v^2)) \text{ e } v_T = \frac{1}{2}v(1 - (u^2 + v^2))$$

ou alternativamente, escrevendo $A = re^{i\theta}$ temos

$$A_T = r_T e^{i\theta} + ir\theta_T e^{i\theta}.$$

Agora, como $2A_T = (A - |A|^2) = re^{i\theta}(1 - r^2)$, temos

$$r_T = r(1 - r^2), \quad r\theta_T = 0.$$

Assim, com $r \rightarrow 1$ e $\theta = \theta_0$ teremos,

$$x_0(\tau, T) \sim r(T)e^{i(\tau+\theta_0)} + r(T)e^{-i(\tau+\theta_0)} = 2r(T) \cos(\tau + \theta_0).$$

Com $r \rightarrow 1$ e $T \rightarrow \infty$ encontramos uma solução periódica de período $2\pi + O(\epsilon^2)$ na amplitude $2 + O(\epsilon)$, como acima.

O método das escalas múltiplas não se restringe apenas a escalas de tempos mais curtas, como no recorte aqui proposto, podemos de forma similar analisar escalas de tempo mais longas, isso é feito com detalhes em [3].

Até este momento discorreremos acerca de um método para "transformar" equações diferenciais que são perturbadas em equações diferenciais que somos capazes de resolver. Daqui em diante, usaremos essas técnicas para explorar alguns dos efeitos dos termos não lineares que ocorrerem em perturbações de osciladores harmônicos simples.

Considere a equação diferencial

$$x'' + x = \epsilon f(x, x'), \quad 0 < \epsilon \ll 1$$

As soluções para a equação não perturbada, $x'' + x = 0$, são todas periódicas exceto o ponto singular na origem, que é um centro. Já vimos que centros são críticos, pois pequenas perturbações podem torna-los focos estáveis ou instáveis assim como vimos na subseção 3.3, então existem três tipos de comportamentos que podemos esperar em tais sistemas. A origem pode se tornar estável e todas as soluções tendem a ela (comportamento de atrator) ou as soluções podem se dispersar da origem (comportamento de repulsor) por tempos de ordem ϵ^{-1} , este último fenômeno é chamado de ressonância. Outra possibilidade é que uma ou mais das soluções periódicas da equação não perturbada "sobrevivam" e, portanto combinações de órbitas estáveis e, talvez alguns pontos estacionários estáveis, podem ser observados. Esses são os casos das equações de Van der Pol e Duffing, que estudamos em exemplos anteriores. A equação não perturbada $x'' + x = 0$, pode ser reescrita como: $x' = y, y' = -x$ e assim se $H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ nos temos

$$x' = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = y',$$

com H constante nas trajetórias.

Por fim, vejamos alguns exemplos que ilustram o quão robusto é o fenômeno da ressonância

Exemplo 5.6. (Ressonância na equação de Mathieu): Considere a equação de Mathieu dada por: $x'' + (1 + 4\epsilon \cos 2t)x = 0$ que iremos escrever como

$$x'' + x = -4x\epsilon \cos 2t, \quad 0 < \epsilon \ll 1.$$

Para aplicar o método das escalas múltiplas procuramos uma solução

$$x(t) \sim x_0(\tau, T) + \epsilon x_1(\tau, T) + \dots$$

com $\tau = t$, $T = \epsilon t$, que é assintótico para $t = O(\epsilon^{-1})$. Isso dá a solução de ordem líder

$$x_0 = A(T)e^{i\tau} + A^*(T)e^{-i\tau}.$$

Portanto, a equação de ordem ϵ é

$$x_{1\tau\tau} + x_1 = -2x_{0\tau T} - 4x_0 \cos 2\tau = -2(iA_T e^{i\tau} - iA_T^* e^{-i\tau}) - 2(Ae^{i\tau} + A^*e^{-i\tau})(e^{2i\tau} + e^{-2i\tau}).$$

$$iA_T + A^* = 0$$

ou, se $A = u(T) + iv(T)$,

$$-v_T + u = 0 \text{ e } u_T - v = 0.$$

Daí $u_{TT} = u$, então $u(T) = c_1 e^T + c_2 e^{-T}$ e $v(T) = c_1 e^T - c_2 e^{-T}$. A solução, assintótica para tempo de ordem ϵ^{-1} , tem uma amplitude que cresce exponencialmente com $e^{\epsilon t}$ e obtemos soluções com amplitude cada vez maiores e mais distantes da origem.

6 Teoria da Bifurcação

Nesta seção pretendemos descrever algumas das técnicas simples usadas para descrever bifurcação de pontos singulares, conforme é descrito em [8] e [5]. Para tanto, considere a família de sistemas

$$x' = F_a(x)$$

onde a é um parâmetro real. Assumimos que F_a depende de a em C^∞ . Uma bifurcação ocorre quando há uma mudança "significativa" na estrutura das soluções do sistema conforme variamos o parâmetro. A observação fundamental para os pontos singulares de fluxo é que se o ponto singular é hiperbólico, ou seja, os autovalores do fluxo linearizados no ponto singular tem parte real não nula, então o comportamento do fluxo é localmente determinado pelo fluxo linearizado conforme vimos na Seção 4. Portanto, as bifurcações de pontos singulares só podem ocorrer em valores de parâmetros para os quais um ponto singular não é hiperbólico. Isso fornece um critério fácil para detectar bifurcações: basta encontrar valores de parâmetros para os quais o fluxo linearizado próximo a um ponto tem um autovalor nulo ou imaginário puro.

Nas seções que se seguem veremos dois tipos de bifurcações, a Bifurcação Sela-nó e a Bifurcação de Hopf.

6.1 Bifurcação sela-nó

Considere a equação de primeira ordem

$$x' = f_a(x) = x^2 + a.$$

A equação tem um único ponto singular $x = 0$ quando $a = 0$. Observe que $f'_0(0) = 0$, mas $f''(0) \neq 0$. Para $a > 0$ esta equação não tem pontos singulares, pois $f_a(x) > 0$ para todo x , mas se $a < 0$ essa equação tem um par de pontos singulares. Assim, ocorre uma bifurcação quando o parâmetro passa pela origem.

Esse tipo de bifurcação é chamado de bifurcação sela-nó. Neste caso, há um intervalo sobre o valor de bifurcação a_0 e outro intervalo I no eixo das abcissas no qual a equação diferencial tem:

1. Dois pontos singulares em I se $a < 0$;
2. Um ponto singular se $a = 0$;
3. se $a > 0$ não há pontos singulares.

A bifurcação descrita no exemplo acima, caracteriza o tipo clássico de bifurcações em equações de primeira ordem, como definida a seguir.

Teorema 6.1. (*Bifurcação sela-nó*): Suponha que $x' = G(x, \mu)$ é uma equação diferencial de primeira ordem na qual:

$$(i) \quad G(x_0, \mu_0) = 0;$$

$$(ii) \quad G_x(x_0, \mu_0) = 0;$$

$$(iii) \quad G_{xx}(x_0, \mu_0) \neq 0;$$

$$(iv) \quad G_\mu(x_0, \mu_0) \neq 0.$$

Então esta equação diferencial possui uma bifurcação sela-nó no ponto $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^2$.

Agora voltaremos nossos olhares para a Bifurcação Sela-Nó em duas dimensões. No exemplo a seguir fica claro, porque essa bifurcação recebe este nome.

Exemplo 6.2. Considere o sistema não linear

$$\begin{cases} x' = x^2 + a \\ y' = -y, \end{cases},$$

cuja equação linearizada é:

$$x' = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x.$$

Quando $a = 0$ existe um único ponto de singular na origem, e o sistema linearizado tem autovalores 0 e -1 . Quando a passa pela origem ocorre uma Bifurcação Sela-Nó, pois, quando $a > 0$, nos temos $x' > 0$, então o ponto singular desaparece. Quando $a < 0$ temos um par de singularidades, nos pontos $(\pm\sqrt{-a}, 0)$.

Portanto, se $a < 0$ temos um nó em $(-a, 0)$ e uma sela em $(a, 0)$. Para $a = 0$ temos um nó e para $a > 0$ o sistema não apresenta pontos singulares. Observe que as soluções nas linhas $x = \pm\sqrt{-a}$ permanecem o tempo todo nessas linhas desde que $x' = 0$ nessas linhas. As soluções tendem diretamente para as singularidades nessas linhas desde que $y' = y$. Essa bifurcação é esboçada na Figura 10

Um Diagrama de Bifurcação para $x' = f(x)$ é um gráfico das várias linhas de fase da equação versus o parâmetro a .

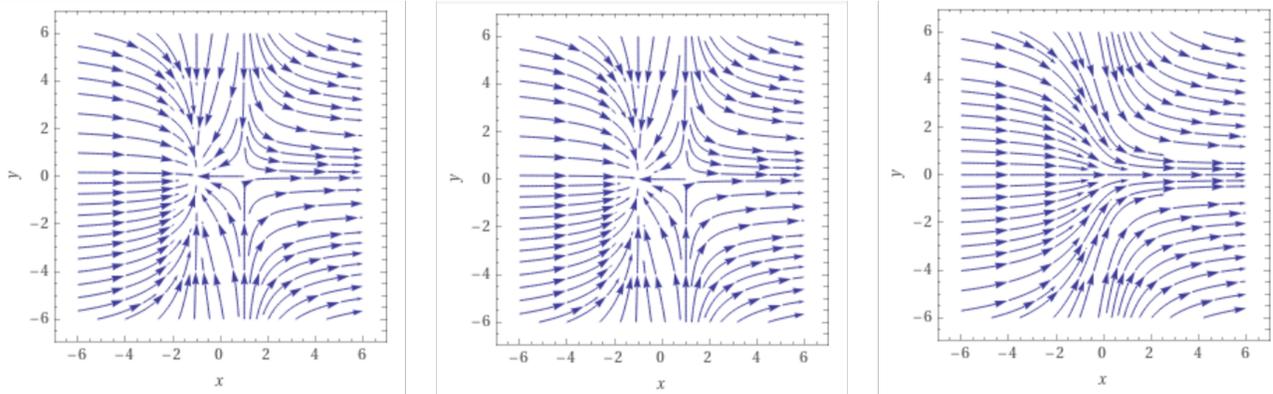


Figura 10: Diagrama de bifurcação sela-nó, da direita para a esquerda, $a < 0$, $a = 0$, e $a > 0$.

6.2 Bifurcação de Hopf

A Bifurcação de Hopf ocorre quando, para algum parâmetro, os autovalores associados a matriz jacobiana em torno do ponto singular deixam de ser hiperbólicos e passam a ser imaginários puros. Vejamos um exemplo:

Exemplo 6.3. Considere o seguinte sistema bidimensional a um parâmetro:

$$\begin{cases} x' = ax - y - x(x^2 + y^2) \\ y' = x + ay - y(x^2 + y^2). \end{cases},$$

cujo sistema linearizado é

$$x' = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} x.$$

Note que a origem é um ponto singular do sistema, independente do parâmetro. Os autovalores são $a \pm i$, então esperamos uma bifurcação quando $a = 0$. Para ver o que acontece, vamos usar coordenadas polares, e reescrevemos o sistema na forma

$$\begin{cases} r' = ar - r^3 \\ \theta' = 1. \end{cases}$$

Observe que a origem é o único ponto singular desse sistema, pois $\theta' \neq 0$. Para $a < 0$, a origem é um atrator, pois os autovalores tem parte real negativa. Assim todas as soluções tendem a origem. Quando $a > 0$, temos $r' = 0$ se $r = \sqrt{a}$. Então o círculo de raio \sqrt{a} é uma solução periódica de período 2π . Também temos $r' > 0$ se $0 < r < \sqrt{a}$, enquanto $r' < 0$ se $r > \sqrt{a}$. Assim, todas as soluções diferentes de zero espiralam em direção a solução circular com $t \rightarrow \infty$. O comportamento, quando $a = 0$ é o mesmo para $a > 0$.

Assim, verificamos que na Bifurcação de Hopf, nenhum novo ponto singular surge. Em vez disso, uma solução periódica nasce no ponto singular quando passa pelo valor de bifurcação, conforme vemos na Figura

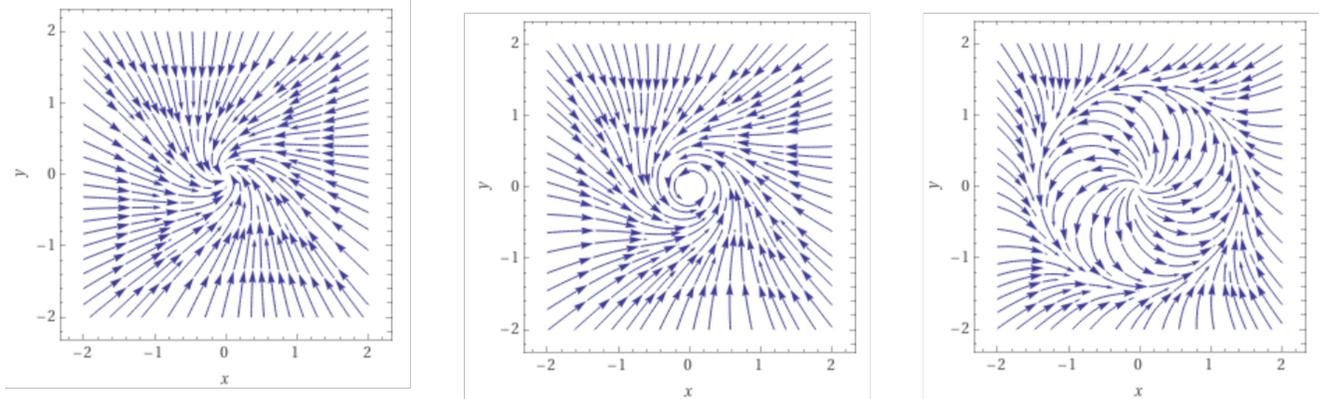


Figura 11: Diagrama de Bifurcação de Hopf, da direita para a esquerda, $a < 0$, $a = 0$ e $a > 0$.

Formalmente, a condição de bifurcação de Hopf é dada por

Teorema 6.4. (*Teorema de Bifurcação de Hopf*): *Qualquer sistema bidimensional*

$$x' = f(x, \alpha),$$

tendo em $\alpha = 0$ o equilíbrio $x = 0$ com autovalores $\lambda_{1,2}(0) = \pm i\omega_0, \omega_0 > 0$, e localmente em torno da origem equivalente a

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

7 Considerações finais

Vimos ao longo desse estudo que, embora para sistema de equações lineares bidimensionais, o comportamento das órbitas é bem conhecido e totalmente classificado, o mesmo não ocorre para sistemas de equações não lineares, mesmo no caso bidimensional.

Na Seção 4 vimos que, para sistemas hiperbólicos, o comportamento próximos aos pontos singulares de sistemas não lineares se assemelha ao comportamento do sistema linear a ela associado (sistema linearizado). Para o estudo de sistemas não-hiperbólicos precisamos recorrer a outras técnicas.

Na Seção 5, apresentamos um conjunto de técnicas analíticas que permitem estudar a solução de equações não lineares por meio de uma "perturbação", que nos permite associar a equação original uma família de equações lineares que, sob algumas hipótese, converge para a solução da equação.

Na Seção 6 apresentamos alguns exemplos de bifurcações em sistemas não lineares. Aqui consideramos sistemas com parâmetros e observamos que, para o caso não hiperbólico, isto é, sistemas onde a linearização no ponto singular apresenta autovalores nulos ou imaginários puros, há mudanças qualitativas significativas na estrutura de suas soluções quando variamos os parâmetros.

Concluimos que, a grande maioria dos modelos apresentados nos materiais usados são de equações ou sistemas não lineares. Sendo assim, o estudo da Teoria da Bifurcação é de grande importância. Embora não apresentado neste material, pode-se formalizar essa teoria através do estudo da variedade central, conforme aponta [4], sendo esse estudo uma possível continuação para o tema aqui proposto.

Referências

- [1] W. E. BOYCE, R. C. DIPRIMA, Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno, Guanabara Dois, 1985.
- [2] C. DOERING, A. O. LOPES. Equações diferenciais ordinárias. 2° ed. Rio de Janeiro: Impa, 2007.
- [3] G. FAYE An introduction to bifurcation theory. CNRS, ENS Paris, France. 2006
- [4] P. GLENDINNING, Stability, instability and chaos: an introduction to the theory of non-linear differential equations. Cambridge university press, 1994.
- [5] Y. A. KUZNETSOV. Elements of Applied Bifurcation Theory. Springer-Verlag, New York, 2 edition, 1998.
- [6] E. L. LAGES. Curso de Análise. Vol.1. Rio de Janeiro: Impa, 2014
- [7] E. L. LAGES Curso de Análise. Vol.2. Rio de Janeiro: Impa, 2014
- [8] H. W. MORRIS, S. SMALE, R. L. DEVANEY, Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos. Academic press, 2012.
- [9] B. SCÁRDUA Tópicos de Equações Diferenciais Ordinárias. Rio de Janeiro: Impa, 1999
- [10] D. G. ZILL, M. R. CULLEN. Equações Diferenciais. Vol 1, 3° ed. São Paulo. Pearson Makron Books, 2001.
- [11] D. G. ZILL, M. R. CULLEN. Equações Diferenciais. Vol 2, 3° ed. São Paulo. Pearson Makron Books, 2001.