



Universidade Federal
de São João del-Rei

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI
Curso de Matemática (Licenciatura)
Campus Santo Antônio

Continuação Analítica das Funções Gama e Zeta de Riemann

Simone Mylena de Melo

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado como parte dos requisitos para obtenção da Licenciatura em Matemática, junto ao Matemática (Licenciatura), da Universidade Federal de São João del-Rei, Campus Santo Antônio.

Orientador
Prof. Dr. Jorge Andrés Julca Avila

2021

Ficha catalográfica elaborada pela Divisão de Biblioteca (DIBIB)
e Núcleo de Tecnologia da Informação (NTINF) da UFSJ,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

D598c De Melo, Simone Mylena.
Continuação Analítica das Funções Gama e Zeta de
Riemann / Simone Mylena De Melo ; orientador Jorge
Andrés Julca Avila. -- São João del-Rei, 2021.
49 p.

Trabalho de Conclusão (Graduação - Matemática) --
Universidade Federal de São João del-Rei, 2021.

1. Análise Complexa. 2. Equação Funcional. 3.
Continuação Analítica. 4. Função Gama. 5. Hipótese de
Riemann. I. Julca Avila, Jorge Andrés, orient. II.
Título.

TERMO DE APROVAÇÃO

Simone Mylena de Melo

CONTINUAÇÃO ANALÍTICA DAS FUNÇÕES GAMA E ZETA DE
RIEMANN

TCC APROVADO como requisito parcial para a obtenção da Licenciatura em Matemática no Curso de Matemática (Licenciatura), da Universidade Federal de São João del-Rei (Campus Santo Antônio) pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Jorge Andrés Julca Avila (**Orientador**)
UFSJ - Universidade Federal de São João del-Rei

Prof. Dr. José Angel Dávalos Chuquipoma (*Avaliador Local*)
UFSJ - Universidade Federal de São João del-Rei

Prof. Dr. Arnulfo Miguel Rodríguez Peña (*Avaliador Local*)
UFSJ - Universidade Federal de São João del-Rei

São João del-Rei, 11 de junho de 2021

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus e à Santa Terezinha, que me deram forças nos momentos mais difíceis e que me fizeram continuar para que eu conseguisse concluir este trabalho. Agradeço também, de todo coração, ao meu maior presente de Deus, minha família, minha base, minha maior fonte de felicidade, paz e amor. Meus pais, Celina e José Luiz, que sempre fizeram de tudo para que eu conseguisse estar aqui hoje, dando o melhor de si para que eu estivesse bem e que sempre me ensinaram os verdadeiros valores da vida. Eu não seria nada sem vocês. As minhas irmãs, Carina e Naiane, e meu sobrinho João Henrique, que estiveram sempre do meu lado me motivando e me alegrando em todas as etapas dessa jornada. Além da minha família, tenho infinitos motivos a agradecer a Deus, dentre eles as minhas amigas, que me fazem tão bem e que me apoiam tanto em cada momento da minha vida, menciono aqui alguns deles, Helena, Ana Luíza e Marco Antônio. Agradeço também às minhas amigas, Anerrize e Tainara, pessoas incríveis que conheci no curso de Matemática e que quero levar para toda a vida, meu eterno trio de amigas matemáticas.

Não poderia deixar de agradecer também, meu querido orientador Jorge, que esteve do meu lado desde o início do curso e é um exemplo de professor, que sempre me inspirou a fazer tudo da melhor forma possível. Por fim, agradeço à banca, composta por professores do Departamento de Matemática e Estatística da Universidade Federal de São João del-Rei, e a todos os professores que também fizeram parte da minha trajetória no curso de graduação em Matemática, em especial a professora Patrícia Tempesta, minha orientadora da Iniciação Científica, que me fez gostar ainda mais de Análise Matemática. Sou muito grata por todos que passaram pelo meu caminho e me sinto realizada por conseguir concluir este trabalho.

*“Bela Matemática
Entender a Matemática é um
dom que transforma minha
vida em momentos de prazer,
alegria, criatividade, amor e
harmonia.
A Matemática é a essência da
vida; é fantástica; é genial;
sempre revela verdades e
busca a perfeição.
Tem excelentes ideias e uma
grande emoção.”*
Roberto Bulhões

Resumo

A análise complexa é uma área da matemática que estuda analiticamente as funções do cálculo diferencial e integral definidas sobre os números complexos. A continuação analítica, um tema importante dentro da análise complexa que consiste em estender domínios de funções para outros maiores, faz parte de uns dos maiores problemas em abertos da matemática: A Hipótese de Riemann. Neste trabalho estudaremos as demonstrações de dois teoremas que expressam a continuação analítica das funções Gama e Zeta de Riemann. Inicialmente fazemos um estudo sobre os conceitos elementares da análise complexa, as definições e aplicações das funções meromórficas e as singularidades das funções complexas. Depois, aprofundamos nossos estudos nas funções Gama e Zeta de Riemann, analisando definições, equações funcionais, teoremas e propriedades para, enfim, aplicar a técnica de continuação analítica a essas funções.

Palavras-chave: Análise Complexa, Equação Funcional, Continuação Analítica, Função Gama, Função Zeta de Riemann.

Abstract

Complex analysis is an area of mathematics that analytically studies the functions of differential and integral calculus defined on complex numbers. Analytical continuation, an important theme within the complex analysis that consists in extending domains of functions to larger ones, is part of one of the biggest open problems in mathematics: the Riemann Hypothesis. In this work we will study the proofs of two theorems that express the analytic continuation of Riemann's Gamma and Zeta functions. Initially, we study the elementary concepts of complex analysis, the definitions and applications of meromorphic functions and the singularities of complex functions. Then, we deepen our studies on Riemann's Gamma and Zeta functions, analyzing definitions, functional equations, theorems and properties to, finally, apply the analytical continuation technique to these functions.

Keywords: Complex Analysis, Functional Equation, Analytical Continuation, Gamma Function, Riemann's Zeta Function.

Lista de Figuras

2.1	A faixa $S_{\delta, M}$	30
2.2	O gráfico da função $\Gamma(s)$, $s = \sigma + i0$, $\sigma \in [-5, 5]$	36
3.1	O semiplano $S_{1+\delta}$	38

Sumário

Introdução	17
1 Resultados Preliminares	19
1.1 Noções Básicas de Cálculo	19
1.2 Noções Básicas de Análise Complexa	21
2 Função Gama	27
2.1 Continuação Analítica da Função Gama	32
3 Função Zeta de Riemann	37
3.1 Continuação Analítica da Função Zeta	46
Considerações Finais	47
Referências	49

Introdução

A teoria das funções, na matemática, considera-se um dos pilares do Cálculo; sua generalização e abstração devem-se, primeiro, à Análise Matemática e, depois, à Análise Funcional. Por outro lado, o cálculo complexo e sua abstração na Análise Complexa, desde o século XVIII, tem desempenhado um papel muito importante para a Matemática. Foi através dela, por exemplo, que Lagrange mostrou que toda função quase sempre pode ser expandida como uma série de potências (GRAY, 2015, p. 7). Nesse mesmo cenário, se estabeleceu relações importantes entre funções elementares, estendê-las ao plano complexo, além de destacar-se no desenvolvimento de outras áreas do conhecimento, como Engenharias e Física.

As funções definidas em espaços de dimensão finita (reta real ou plano complexo) são interessantes pelas múltiplas propriedades que elas apresentam. Mas, há entre eles, pelos menos uma variante que deixa o plano complexo mais “rico” em informações analíticas e geométricas. Essa variante chama-se: **continuação analítica** que consiste, a grosso modo, em estender o domínio de uma função a todo o plano complexo, exceto, seguramente, em algumas singularidades. STEIN e SHAKARCHI (2003) referem-se à análise complexa como:

“O estudo da análise complexa segue dois caminhos que frequentemente se cruzam. Seguindo a primeira maneira, procuramos compreender as características universais das funções holomórficas, sem consideração especial por exemplos específicos. A segunda abordagem é a análise de algumas funções particulares que se mostraram de grande interesse em outras áreas da matemática. ”

Compactuando com a ideia mencionada, buscamos por funções particulares para nosso estudo, sendo essas, funções interessantes para a Análise Complexa e também para analisar a continuação analítica.

Existem, na matemática, duas funções bem especiais, a primeira, é a **Função Gama**, que se estuda em engenharia mecânica e elétrica, no tocante a Equações de Bessel, que modelam problemas de vibrações, KREYSZIG (2019). Também, há quem diga que essa função é uma generalização da função fatorial de um número. A segunda é a **Função Zeta** de Riemann, que se estuda em teoria analítica dos números, mas especificamente, é a função da famosa conjectura: “A Hipótese de Riemann”, proposta, primeiro, por Hilbert no Congresso Internacional de Matemática (Paris em 1900) e, depois, pelo Instituto Clay de Matemática, como sendo um dos sete problemas do milênio, lançado no ano 2000 (CLAY MATHEMATICS INSTITUTE, 2021).

A continuação analítica, dessas duas funções, envolvem resultados ricos em análise complexa, no caso da função Zeta de Riemann é um ponto de partida para começar a estudar a Teoria analítica dos números, sem mencionar que na equação funcional da função Zeta de Riemann, utiliza-se a função Gama.

Neste trabalho, estudaremos e analisaremos as demonstrações da continuação analítica das funções Gama e Zeta de Riemann, proposto por STEIN e SHAKARCHI (2003). No primeiro Capítulo, abordaremos os resultados básicos do Cálculo diferencial e integral real e da análise complexa. No segundo Capítulo estudaremos, essencialmente, a demonstração da continuação analítica da Função Gama, e no terceiro Capítulo, estudaremos a demonstração da função Zeta de Riemann. É importante salientar que o intuito desse trabalho, embora esteja tudo demonstrado, foi de expandir as contas e mostrar o passo a passo de cada um dos resultados envolvidos na demonstrações dos teoremas principais.

1 Resultados Preliminares

Neste Capítulo, estabeleceremos algumas definições e/ou resultados que permeiam o estudo sobre o cálculo diferencial e integral, e da análise complexa, necessários para a compreensão dos próximos capítulos.

1.1 Noções Básicas de Cálculo

Inicialmente precisamos estabelecer alguns resultados de Cálculo que serão fundamentais para o nosso trabalho. Devido estes não serem o foco do nosso trabalho, muitos deles não foram demonstrados, mas sim, apresentados e deixados como exercício ou até direcionados onde o leitor poderá encontrar a demonstração.

Exercício 1.1. Prove que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{kn^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a^{kn^2}$$

Solução. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{kn^2} = \sum_{n=-1}^{-\infty} a^{kn^2} + a^{k0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^{kn^2}$. Fazendo a mudança de variável $n = -m$ na primeira somatória, do lado direito, temos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{kn^2} = \sum_{m=1}^{\infty} a^{km^2} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^{kn^2} \quad (1.1)$$

$$= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a^{kn^2} \quad (1.2)$$

Exercício 1.2. Prove que

$$\int_a^b e^{-x/2} dx = 2(e^{-a/2} - e^{-b/2}) \quad (1.3)$$

Solução. Deixai-se a cargo do leitor.

Exercício 1.3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) - f(x) = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad (1.4)$$

Solução. Deixai-se a cargo do leitor.

Teorema 1.1 (Teorema do Confronto). *Seja $h(x) \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in D$. Se $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.*

Demonstração. Uma prova desse Teorema é encontrado em [5].

Exemplo 1.1. Se $\lim_{x \rightarrow a} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} g_2(x) = 0$ e $|f(x)| \leq g_1(x) + g_2(x)$. Então, pelo Teorema do Confronto, $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$.

Proposição 1.1 (Regra de l'Hôpital). *Sejam f e g funções diferenciáveis em $X \subset \mathbb{R}$, $g'(x) \neq 0, \forall x \in X$. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ou $\pm\infty$, e $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe. Então,*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (1.5)$$

Demonstração. Uma prova dessa Proposição é encontrada em [5].

Exemplo 1.2 (Polinomial vs. Exponencial). Sejam $f(x) = x^{s-1}, s > 0$ e $g(x) = e^{x/2}$ definidas para todo $x \geq 1$. As derivadas são: $f'(x) = (s-1)x^{s-2}$ e $g'(x) = (1/2)e^{x/2}$. Note que $g'(x) \neq 0, \forall x \geq 1$. Por outro lado, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{s-1} = \infty$. Aqui observe que para $0 < s < 1$ a função $f(x) = \frac{1}{x^{1-s}}$ é uma hipérbole, e para $s \geq 1$ é propriamente uma função potência. O outro limite, $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x/2} = \infty$. Para o cálculo do limite do quociente das derivadas, aplicamos iterativamente a Regra de l'Hôpital, ou seja,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(s-1)x^{s-2}}{(1/2)e^{x/2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(s-1)(s-2)x^{s-3}}{(1/2)^2 e^{x/2}} \\ &\quad \vdots \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(s-1)(s-2) \cdots (1)x^0}{(1/2)^{s-1} e^{x/2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Assim, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{s-1}}{e^{x/2}} = 0$. Desse modo podemos dizer que a exponencial cresce mais rápido que a polinomial. Ou, equivalentemente,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{s-1} e^{-x/2} = 0, \quad s > 0, x \in [1, \infty) \quad (1.6)$$

Como x^{s-1} e $e^{-x/2}$ são funções contínuas e o produto converge a 0 quando $x \rightarrow \infty$. então, o produto é limitado, ou seja, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|x^{s-1} e^{-x/2}| = x^{s-1} e^{-x/2} \leq C, \quad \forall x \geq 1, s > 0 \quad (1.7)$$

Observação 1.1.

- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} x^s = 0, x > 0, s > 0$ (A polinomial converge para zero e a exponencial é limitada)
- (ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} x^s = 0, x > 0, s > 0$ (A exponencial domina a polinomial)
- (iii) Fazendo a mudança de variável $x = 1/y$, no Item (ii). Então, $\lim_{y \rightarrow 0} e^{-1/y} y^{-s} = 0, y > 0, s > 0$
- (iv) A desigualdade (1.7) pode ser expressada mais fortemente, ou seja,

$$x^{s-1} e^{-x/2} \leq C, \quad \forall x \geq 1, s \in \mathbb{R} \quad (1.8)$$

(v) A desigualdade (1.8) pode expressar-se, equivalentemente, por

$$x^{1-s}e^{-x/2} \leq C, \quad \forall x \geq 1, s \in \mathbb{R} \quad (1.9)$$

(vi) A desigualdade (1.8) pode expressar-se, equivalentemente, por

$$x^{s-1}e^{-x} \leq Ce^{-x/2}, \quad \forall x \geq 1, s \in \mathbb{R} \quad (1.10)$$

Proposição 1.2. *Seja $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não limitada. Se a integral imprópria $\int_a^\infty |f(x)|dx$ converge, então a integral imprópria $\int_a^\infty f(x)dx$ converge.*

Demonstração. Uma prova dessa Proposição é encontrada em [5].

Observação 1.2.

- (i) Se $D(f) = (0, \infty)$ é o domínio de f , então podemos fazer $(0, \infty) = (0, a] \cup [a, \infty)$ para integrar.

1.2 Noções Básicas de Análise Complexa

Precisamos também estabelecer algumas definições que permeiam o estudo sobre Análise Complexa, necessários à compreensão do restante do texto. Desta forma, não é nosso objetivo apresentar um texto introdutório ao assunto. Simplesmente queremos facilitar a leitura do texto que segue, onde está o foco principal deste trabalho.

Notação 1.1.

- (a) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ e $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- (b) O conjunto X denotará um subconjunto de \mathbb{K} , onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- (c) $\Omega \subset \mathbb{C}$ é um conjunto aberto.
- (d) $E, \omega, \Theta \subset \mathbb{C}$.

Observação 1.3.

- (i) Seja $z = \alpha + i\beta$. Então, $|z| = |\alpha + i\beta| = |(\alpha, \beta)| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$
- (ii) Seja $z = \alpha + i\beta$. Então, $e^z = e^{\alpha+i\beta} = e^\alpha (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$ (Fórmula de Euler)
- (iii) Seja $z = \alpha + i\beta$, $a > 0$. Então, $a^z = e^{z \ln a} = e^{(\alpha+i\beta) \ln a} = e^{\alpha \ln a + i\beta \ln a} = e^{\alpha \ln a} (\cos(\beta \ln a) + i \operatorname{sen}(\beta \ln a)) = a^\alpha (\cos(\beta \ln a) + i \operatorname{sen}(\beta \ln a))$
- (iv) Seja $z = \alpha + i\beta$. Então, $|e^z| = |e^{\alpha+i\beta}| = |e^\alpha (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)| = e^\alpha |\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta| = e^\alpha \sqrt{\cos^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \beta} = e^\alpha$
- (v) Seja $z = \alpha + i\beta$, $a > 0$. Então, $|a^z| = |a^{\alpha+i\beta}| = |e^{(\alpha+i\beta) \ln a}| = |e^{\alpha \ln a + i\beta \ln a}| = |e^{\alpha \ln a}| = e^{\alpha \ln a} = a^\alpha$

Definição 1.1 (Convergência Pontual). Sejam $f, f_n : X \rightarrow \mathbb{K}$. Dizemos que $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge pontualmente a f em X , se $\forall x_0 \in X$ a sequência numérica $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^\infty$ converge a $f(x_0)$.

Definição 1.2 (Convergência Uniforme). Sejam $f, f_n : X \rightarrow \mathbb{K}$. Dizemos que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f em X , se $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall x \in X$.

Definição 1.3 (Convergência Uniforme de uma Série). Sejam $f, f_n : X \rightarrow \mathbb{K}$. A série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente sobre E , se a sequência das somas parciais $s_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z)$ converge uniformemente sobre E .

Teorema 1.2 (Teste M de Weierstrass). Seja $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções sobre E , e seja $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência numérica, tal que para todo n

$$(i) |f_n(z)| \leq M_n, \forall z \in E, e$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty.$$

Então, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente e absolutamente sobre E .

Demonstração. Uma prova desse Teorema é encontrada em [1].

Definição 1.4 (Função Holomorfa). Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ e $h \in \mathbb{C}$. Dizemos que f é uma função holomorfa em $z_0 \in \Omega$, se o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \quad (1.11)$$

existe, sendo $h \neq 0$ com $z_0 + h \in \Omega$.

Observação 1.4.

- (i) Se o limite em (1.11) existe, o denotamos por $f'(z_0)$ e chamamos de derivada de f em z_0 .
- (ii) Quando a função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa em todos os pontos de seu domínio Ω dizemos, simplesmente, que f é holomorfa em Ω .
- (iii) Seja D um subconjunto fechado de \mathbb{C} . Dizemos que f é holomorfa em D , se f é holomorfa em algum conjunto aberto que contem a D .
- (iv) Quando f é holomorfa em todos os pontos de \mathbb{C} , dizemos que f é inteira.

Definição 1.5 (Anel). Sejam $0 \leq r_1 < r_2$ e $a \in \mathbb{C}$. Definimos o anel $A(a, r_1, r_2)$ pelo conjunto

$$A(a, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - a| < r_2\}$$

Definição 1.6 (Vizinhança de um Ponto). Seja $z_0 \in \mathbb{C}$. Definimos uma vizinhança de z_0 pelo seguinte conjunto

$$V(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

para algum $r > 0$.

Observação 1.5. Os seguintes conjunto são iguais: $V(z_0, r) - \{z_0\}$ e o anel $A(z_0, 0, r)$.

Definição 1.7 (Função Analítica). Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Dizemos que f é uma função analítica em $z_0 \in \Omega$, se existe uma série de potência $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ centrada em z_0 , com raio de convergência positivo, tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \tag{1.12}$$

para todo z , em uma vizinhança de z_0 .

Observação 1.6.

(i) Se f é analítica em todos os pontos de Ω dizemos que f é analítica em Ω .

Teorema 1.3. *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função. Então,*

$$f \text{ é holomorfa} \iff f \text{ é analítica} \tag{1.13}$$

Demonstração. Uma prova desse Teorema é encontrada em [7].

Definição 1.8 (Ponto Singular). Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Dizemos que z_0 é um ponto singular de f , se f é holomorfa em todo \mathbb{C} exceto em z_0 .

Definição 1.9 (Polo de uma Função). Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função. Dizemos que z_0 é um polo de f , se a função f está definida em uma vizinhança de z_0 , exceto em z_0 .

Teorema 1.4. *Se f tem um polo em $z_0 \in \Omega$, então em uma vizinhança de z_0 existem uma função holomorfa h que não se anula, e um único $n \in \mathbb{Z}^+$, tal que*

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^n} \tag{1.14}$$

Observação 1.7. n é chamado de ordem (ou multiplicidade) do polo, e quando o polo é de ordem 1 dizemos que f possui um **polo simples**.

Definição 1.10 (Expansão da Série de Laurent). Seja f uma função analítica no anel $A(z_0, r_1, r_2)$. Definimos a expansão da série de Laurent de f , ao redor do ponto z_0 , por

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

Definição 1.11 (Resíduo). Seja f uma função holomorfa no anel $A(z_0, 0, r)$. O coeficiente a_{-1} da expansão da série de Laurent de f , ao redor de z_0 é chamado de resíduo de f em z_0 .

Notação 1.2. Denotamos o resíduo de f no ponto z_0 por $\text{res}_{z_0} f$.

Definição 1.12 (Zero). Um número complexo z_0 é um zero para a função holomorfa f , se $f(z_0) = 0$.

Observação 1.8. Seja

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z)$$

uma função holomorfa, onde $n \in \mathbb{Z}^+$ e g uma função holomorfa. Se $z = z_0$ é um zero de f então dizemos que f tem um zero de ordem n . Quando $n = 1$, dizemos que se trata de um **zero simples**.

Definição 1.13 (Função Meromorfa). Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Dizemos que f é uma função meromorfa, se existe uma sequência de pontos $S = \{z_0, z_1, z_2, \dots\}$ que não tem pontos limites em Ω , e tal que

- (a) f é holomorfa em $\Omega - S$, e
- (b) f tem polos nos pontos de S .

Definição 1.14 (Continuação Analítica). Sejam $f : \omega \rightarrow \mathbb{C}$ e $F : \Theta \rightarrow \mathbb{C}$, $\omega \subset \Theta$, funções analíticas. Dizemos que F é uma continuação analítica de f em Θ , se $F = f$ para todo $z \in \omega$.

Teorema 1.5. Se $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de funções holomorfas que convergem uniformemente à função f em qualquer subconjunto compacto de Ω , então f é holomorfa em Ω .

Demonstração. Uma prova desse Teorema é encontrada em [7].

Corolário 1.1. Se $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de funções holomorfas sobre Ω . Se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente a f em qualquer subconjunto compacto de Ω . Então, f é holomorfa sobre Ω .

Demonstração. Considere a sequência de somas parciais $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $s_n = \sum_{k=1}^n f_k$. Note que $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de funções holomorfas sobre Ω . Pela hipótese, $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f em qualquer subconjunto compacto de Ω . Logo, pelo Teorema 1.5, $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é holomorfa sobre Ω .

Teorema 1.6. Se $\varphi(s, t)$ é uma função definida em $(s, t) \in \Omega \times [0, 1]$. Suponha-se que φ satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $\varphi(s, t)$ é holomorfa em s para cada t .
- (ii) φ é contínua sobre $\Omega \times [0, 1]$.

Então, a função F definida sobre Ω é dada por

$$F(s) = \int_0^1 \varphi(s, t) dt \quad (1.15)$$

é holomorfa.

Demonstração. Uma prova desse Teorema é encontrada em [7].

Teorema 1.7. Se f tem um polo de ordem n em z_0 , então

$$\text{res}_{z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{n-1} (z - z_0)^n f(z) \quad (1.16)$$

onde, $\text{res}_{z_0} f$ é o resíduo de f no polo z_0 .

Demonstração. Uma prova desse Teorema é encontrada em [7].

Observação 1.9. Quando f tem um polo simples em z_0 , a fórmula para resíduo de f no polo z_0 , é dada por

$$\text{res}_{z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) \quad (1.17)$$

Notação 1.3. \mathcal{S} é o espaço Schwartz sobre \mathbb{R} . Maiores informações em [8].

Definição 1.15 (Transformada de Fourier sobre \mathcal{S}). Seja $f \in \mathcal{S}$. A transformada de Fourier de f sobre \mathcal{S} é definida por

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx \quad (1.18)$$

Teorema 1.8. Se $f(x) = e^{-\pi x^2}$, então $\hat{f}(\xi) = f(\xi)$.

Demonstração. A prova desse Teorema é encontrada na pág. 139 de [8].

Definição 1.16 (A classe de funções \mathfrak{F}_a). Para cada $a > 0$, denotamos por \mathfrak{F}_a , a classe de todas funções f que satisfazem as seguintes duas condições:

(i) A função f é holomorfa na faixa horizontal:

$$S_a = \{z \in \mathbb{C} : |\Im(z)| < a\} \quad (1.19)$$

(ii) Existe uma constante $A > 0$ tal que

$$|f(x + iy)| \leq \frac{A}{1 + x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } |y| < a \quad (1.20)$$

Teorema 1.9 (Fórmula do Somatório de Poisson). Se $f \in \mathfrak{F}$, então

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \quad (1.21)$$

onde, \mathfrak{F} é a classe de todas as funções que pertencem a \mathfrak{F}_a para algum a .

Demonstração. A prova desse Teorema é encontrada na pág. 138 de [7].

Por fim, é importante esclarecer que, de acordo com a notação padrão, denotamos por s (em vez de z) o argumento das funções Γ e ζ . Assim estamos prontos para discutirmos os resultados deste trabalho.

2 Função Gama

A função Gama Γ foi batizada por Legendre (1752-1833) em 1811, e foi encontrada por Euler (1707-1783) em 1729 quando ele pesquisava movimentos harmônicos. Euler comunicou sua descoberta ao professor Golbach:

“(...) encontrei duas integrais ¹ interessantes que persistem em aparecer nos meus estudos. É impressionante, Goldbach, a beleza e simplicidade desses objetos (...)”.

Suas aplicações se fazem presentes na física quântica, astronomia e dinâmica de fluídos, e inclusive é usada para saber o tempo entre um terremoto e outro. Na matemática, é usada para resolver expressões do tipo $f(x)e^{-g(x)}$, que descrevem processos que decaem exponencialmente no tempo e no espaço, mas que muitas vezes não possui uma solução elementar e é bastante utilizada também pelo fato de $\frac{1}{\Gamma(s)}$ ser a função inteira mais simples que possui zeros exatamente $s = 0, -1, -2, \dots$

A seguir definimos a função Gama.

Definição 2.1 (Função Gama). Seja $\sigma > 0$. Definimos a função Gama pela seguinte integral imprópria

$$\Gamma(\sigma) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\sigma-1} dt \quad (2.1)$$

Proposição 2.1 (Convergência uniforme de $\Gamma(\sigma)$). Seja $\sigma \in \mathbb{R}^+$. A função Gama, dada em (2.1), converge uniformemente em \mathbb{R}^+ .

Demonstração. Dado $0 < \epsilon < 1$, definimos para qualquer $\sigma > 0$, a seguinte função

$$\Gamma_{\epsilon}(\sigma) = \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} e^{-t} t^{\sigma-1} dt \quad (2.2)$$

¹Quanto a segunda, se trata da função Beta, que não será tratada neste trabalho

Efetuem os,

$$\begin{aligned}
|\Gamma(\sigma) - \Gamma_\epsilon(\sigma)| &= \left| \int_0^\infty e^{-t} t^{\sigma-1} dt - \int_\epsilon^{1/\epsilon} e^{-t} t^{\sigma-1} dt \right| \\
&= \left| \int_0^{1/\epsilon} e^{-t} t^{\sigma-1} dt + \int_{1/\epsilon}^\infty e^{-t} t^{\sigma-1} dt - \int_\epsilon^{1/\epsilon} e^{-t} t^{\sigma-1} dt \right| \\
&= \left| \int_0^{1/\epsilon} e^{-t} t^{\sigma-1} dt + \int_{1/\epsilon}^\infty e^{-t} t^{\sigma-1} dt + \int_{1/\epsilon}^\epsilon e^{-t} t^{\sigma-1} dt \right| \\
&= \left| \int_0^\epsilon e^{-t} t^{\sigma-1} dt + \int_{1/\epsilon}^\infty e^{-t} t^{\sigma-1} dt \right| \\
&\leq \left| \int_0^\epsilon e^{-t} t^{\sigma-1} dt \right| + \left| \int_{1/\epsilon}^\infty e^{-t} t^{\sigma-1} dt \right| \\
&\leq \int_0^\epsilon |e^{-t} t^{\sigma-1}| dt + \int_{1/\epsilon}^\infty |e^{-t} t^{\sigma-1}| dt \\
&= \underbrace{\int_0^\epsilon e^{-t} t^{\sigma-1} dt}_{I_1(\sigma)} + \underbrace{\int_{1/\epsilon}^\infty e^{-t} t^{\sigma-1} dt}_{I_2(\sigma)} \tag{2.3}
\end{aligned}$$

Cálculo de $I_1(\sigma)$:

$$I_1(\sigma) = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^\epsilon e^{-t} t^{\sigma-1} dt \tag{2.4}$$

Como $a < t < \epsilon$ então $e^{-a} > e^{-t} > e^{-\epsilon}$. Daí, $e^{-t} < e^{-a}$. Assim,

$$\begin{aligned}
I_1(\sigma) &< \lim_{a \rightarrow 0} e^{-a} \int_a^\epsilon t^{\sigma-1} dt = \frac{1}{\sigma} \lim_{a \rightarrow 0} e^{-a} (\epsilon^\sigma - a^\sigma) \\
&= \frac{\epsilon^\sigma}{\sigma} \tag{2.5}
\end{aligned}$$

Cálculo de $I_2(\sigma)$:

$$I_2(\sigma) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{1/\epsilon}^b e^{-t} t^{\sigma-1} dt \tag{2.6}$$

Usando (1.7), temos que

$$e^{-t/2} t^{\sigma-1} \leq C \iff e^{-t} t^{\sigma-1} \leq C e^{-t/2}$$

onde $C > 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
I_2(\sigma) &\leq C \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{1/\epsilon}^b e^{-t/2} dt = 2C \lim_{b \rightarrow \infty} (e^{-1/2\epsilon} - e^{-b/2}) = 2C e^{-1/2\epsilon} \\
&= c e^{-1/2\epsilon} \tag{2.7}
\end{aligned}$$

onde $c > 0$.

Agora, substituindo (2.5) e (2.7) em (2.3), temos

$$|\Gamma(\sigma) - \Gamma_\epsilon(\sigma)| < \frac{\epsilon^\sigma}{\sigma} + c\epsilon^{-1/2\epsilon} \quad (2.8)$$

Como o limite, quando $\epsilon \rightarrow 0$, do lado direito de (2.21) é zero, então, pelo Teorema do Confronto,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma_\epsilon(\sigma) = \Gamma(\sigma), \quad \forall \sigma > 0 \quad (2.9)$$

Portanto, a função Gama, $\Gamma(\sigma)$, converge uniformemente em \mathbb{R}^+ .

Proposição 2.2. *Seja $s \in \mathbb{C}$. A função Gama, definida pela fórmula (2.1), estende-se a uma função analítica definida no semiplano $\Re(s) > 0$, e ainda, permanece com a mesma fórmula.*

Demonstração. Seja $s = \sigma + i\beta \in \mathbb{C}$ então, $\Re(s) = \sigma$. Considere uma faixa qualquer do semiplano $\Re(s) > 0$, definida por:

$$S_{\delta, M} = \{s \in \mathbb{C} : \delta < \sigma < M, 0 < \delta < M < \infty\} \quad (2.10)$$

Para te-ser uma ideia melhor dessa faixa, um esboço é mostrado na Figura 2.1. Tome-mos $s \in S_{\delta, M}$ e calculemos

$$|e^{-t}t^{s-1}| = e^{-t}|t^{\sigma+i\beta-1}| = e^{-t}|t^{(\sigma-1)+i\beta}| = e^{-t}t^{\sigma-1} \quad (2.11)$$

Note que o termo do lado esquerdo de (2.11) não depende da parte imaginária de s , depende unicamente da parte real de s , ou seja de σ .

Agora, consideremos uma função $\tilde{\Gamma}(s)$, definida para todos os pontos s da faixa $S_{\delta, M}$, e dada por

$$\tilde{\Gamma}(s) = \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt \quad (2.12)$$

Para $0 < \epsilon < 1$ e para todo $s \in S_{\delta, M}$, definamos a seguinte função:

$$F_\epsilon = \int_\epsilon^{1/\epsilon} e^{-t}t^{s-1}dt \quad (2.13)$$

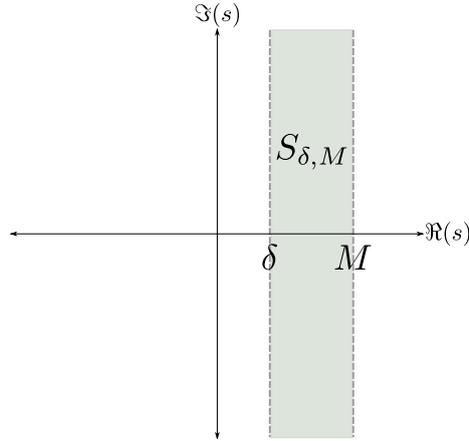
Afirmamos que para todo $\epsilon > 0$, $F_\epsilon(s)$ é **uma função holomorfa na faixa $S_{\delta, M}$.**

De fato, seja $\varphi(s, t) = e^{-t}t^{s-1}$.

- Para cada $t \in [\epsilon, 1/\epsilon]$ a função φ é holomorfa na faixa $S_{\delta, M}$, pois a função t^{s-1} é holomorfa na faixa $S_{\delta, M}$.
- A função φ é contínua em $S_{\delta, M} \times [\epsilon, 1/\epsilon]$, pois é o produto de funções contínuas.

Então, pelo Teorema 1.6, a função $F_\epsilon(s)$ é holomorfa na faixa $S_{\delta, M}$.

Observação 2.1. O Teorema 1.6, trabalha com o intervalo $[0, 1]$ e, nós com o intervalo $[\epsilon, 1/\epsilon]$, mas isso não é problema porque podemos usar uma mudança de variável de tal maneira que possamos usar o intervalo apropriado.

Figura 2.1: A faixa $S_{\delta, M}$.

Fonte: Os autores (2021).

Agora, verificaremos que $F_\epsilon(s)$ converge uniformemente a $\tilde{\Gamma}(s)$ para todo s da faixa $S_{\delta, M}$. De fato,

$$\begin{aligned}
|\tilde{\Gamma}(s) - F_\epsilon(s)| &= \left| \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt - \int_\epsilon^{1/\epsilon} e^{-t} t^{s-1} dt \right| \\
&= \left| \int_0^{1/\epsilon} e^{-t} t^{s-1} dt + \int_{1/\epsilon}^\infty e^{-t} t^{s-1} dt - \int_\epsilon^{1/\epsilon} e^{-t} t^{s-1} dt \right| \\
&= \left| \int_0^{1/\epsilon} e^{-t} t^{s-1} dt + \int_{1/\epsilon}^\infty e^{-t} t^{s-1} dt + \int_{1/\epsilon}^\epsilon e^{-t} t^{s-1} dt \right| \\
&= \left| \int_0^\epsilon e^{-t} t^{s-1} dt + \int_{1/\epsilon}^\infty e^{-t} t^{s-1} dt \right| \\
&\leq \left| \int_0^\epsilon e^{-t} t^{s-1} dt \right| + \left| \int_{1/\epsilon}^\infty e^{-t} t^{s-1} dt \right| \\
&\leq \int_0^\epsilon |e^{-t} t^{s-1}| dt + \int_{1/\epsilon}^\infty |e^{-t} t^{s-1}| dt \\
&= \underbrace{\int_0^\epsilon e^{-t} t^{\sigma-1} dt}_{I_1(\sigma)} + \underbrace{\int_{1/\epsilon}^\infty e^{-t} t^{\sigma-1} dt}_{I_2(\sigma)} \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Cálculo de $I_1(\sigma)$:

$$I_1(\sigma) = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^\epsilon e^{-t} t^{\sigma-1} dt \tag{2.15}$$

Como $0 < \delta < \sigma$, então $-1 < \delta - 1 < \sigma - 1$. Assim, $t^{\sigma-1} < t^{\delta-1}$ para todo $0 < t < 1$. Logo,

$$I_1(\sigma) < \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^\epsilon e^{-t} t^{\delta-1} dt \tag{2.16}$$

De (2.5), temos que

$$I_1(\sigma) < \frac{\epsilon^\delta}{\delta} \quad (2.17)$$

Cálculo de I_2 :

$$I_2(\sigma) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{1/\epsilon}^b e^{-t} t^{\sigma-1} dt \quad (2.18)$$

Como $0 < \delta < \sigma < M$, então $-1 < \delta - 1 < \sigma - 1 < M - 1$. Assim, $t^{\sigma-1} < t^{M-1}$ para todo $t > 1$. Logo,

$$I_2(\sigma) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{1/\epsilon}^b e^{-t} t^{M-1} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{1/\epsilon}^b e^{-t} t^{M-1} dt \quad (2.19)$$

De (2.7), temos que

$$I_2(\sigma) \leq c e^{-1/2\epsilon} \quad (2.20)$$

Agora, substituindo (2.17) e (2.20) em (2.14), temos

$$\left| \tilde{\Gamma}(s) - F_\epsilon(s) \right| < \frac{\epsilon^\delta}{\delta} + c e^{-1/2\epsilon} \quad (2.21)$$

Como o limite, quando $\epsilon \rightarrow 0$, do lado direito de (2.21) é zero, então, pelo Teorema do Confronto,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_\epsilon(s) = \tilde{\Gamma}(s), \quad \forall s \in S_{\delta, M} \quad (2.22)$$

Portanto, a sequência $F_\epsilon(s)$ converge uniformemente a $\tilde{\Gamma}(s)$ em todos os pontos s da faixa $S_{\delta, M}$.

Agora, aplicaremos o Teorema 1.5. Vejamos, temos uma sequência de funções holomorfas $\{F_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$ que converge uniformemente a $\tilde{\Gamma}$ em todo subconjunto compacto da Faixa $S_{\delta, M}$, e pelo Teorema 1.5, $\tilde{\Gamma}$ é uma função holomorfa na faixa $S_{\delta, M}$. Mas, como a faixa foi escolhida arbitrariamente do semiplano $\Re(s) > 0$, isso significa que a função $\tilde{\Gamma}$ é holomorfa em todo o semiplano $\Re(s) > 0$.

Finalmente, denotemos $\tilde{\Gamma}(s)$ por $\Gamma(s)$. Dessa forma tivemos uma continuação analítica de $\Gamma(s)$, inicialmente definida em $s > 0$, e agora $\Gamma(s)$ definida em todo o semiplano $\Re(s) > 0$.

Lema 2.1 (Equação Funcional da Função Γ). *Se $\Re(s) > 0$, então*

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad (2.23)$$

Como consequência,

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.24)$$

Demonstração. $\Gamma(s+1) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} e^{-t} t^s dt$. Integrando por partes: $u = t^s$; $dv = e^{-t} dt \rightarrow du = s t^{s-1} dt$; $v = -e^{-t}$. Então,

$$\begin{aligned} \Gamma(s+1) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(-t^s e^{-t} \Big|_{\epsilon}^{1/\epsilon} + s \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} e^{-t} t^{s-1} dt \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -t^s e^{-t} \Big|_{\epsilon}^{1/\epsilon} + s \Gamma(s) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[-(1/\epsilon)^s e^{-(1/\epsilon)} + \epsilon^s e^{-\epsilon} \right] + s \Gamma(s) \\ &= s \Gamma(s) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Por outro lado, calculemos $\Gamma(1)$,

$$\Gamma(1) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} e^{-t} dt = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{-t} \Big|_{\epsilon}^{1/\epsilon} = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (e^{-1/\epsilon} - e^{-\epsilon}) = 1 \quad (2.26)$$

Para o cálculo de $\Gamma(2), \Gamma(3), \dots$ usamos a equação funcional. Então,

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= \Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1 = 1! \\ \Gamma(3) &= \Gamma(2+1) = 2\Gamma(2) = 2 = 2! \\ \Gamma(4) &= \Gamma(3+1) = 3\Gamma(3) = 6 = 3! \\ &\vdots \\ \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n!, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

2.1 Continuação Analítica da Função Gama

Iniciamos com a função Gama definida para todo número real positivo. Logo, pela Proposição 2.2, conseguimos estendê-la para todo o semiplano complexo $\Re(s) > 0$. A seguir, passamos a estendê-la para todo o plano complexo.

Teorema 2.1. *A função $\Gamma(s)$, inicialmente definida para $\Re(s) > 0$, possui uma continuação analítica para uma função meromorfa sobre \mathbb{C} cujas singularidades são polos simples nos inteiros não positivos $s = 0, -1, -2, -3, \dots$. O resíduo de Γ em $s = -n$ é $(-1)^n/n!$.*

Demonstração. Como já temos a função Gama definida em todo o semiplano complexo positivo, a ideia é estender, primeiro, para o semiplano $\Re(s) > -1$, logo para o semiplano $\Re(s) > -2$, e assim, sucessivamente até preencher todos os semiplanos inteiros negativos.

(i) **Para o semiplano $\Re(s) > -1$:** Definamos a seguinte função:

$$F_1(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s} \quad (2.27)$$

Note que $\Gamma(s+1)$ é holomorfa em $\Re(s) > -1$, pois como $s > -1$ então $s+1 > 0$, ou seja o argumento da função Gama é positivo. Logo, pela Proposição 2.2, $\Gamma(s+1)$ é holomorfa em $\Re(s) > -1$. Observe, também, que a função $F_1(s)$ possui uma singularidade no ponto $s = 0$, pois a função, no numerador, avaliada em $s = 0$ está definida e vale 1, isto é, $\Gamma(0+1) = \Gamma(1) = 1$; essa singularidade é um polo simples. O resíduo de F_1 no polo $s = 0$ é 1. De fato,

$$\text{res}_{s=0} F_1 = \lim_{s \rightarrow 0} (s-0) F_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\Gamma(s+1)}{s} = \Gamma(1) = 1$$

Dessa forma $F_1(s)$ é uma função meromorfa no semiplano $\Re(s) > -1$, com um polo simples em $s = 0$, e com resíduo, nesse polo, igual a 1. Por outro lado, $F_1(s)$ restringida para o semiplano $\Re(s) > 0$ coincide com $\Gamma(s)$, isto é,

$$F_1(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s} = \frac{s\Gamma(s)}{s} = \Gamma(s)$$

Isso é devido ao Lemma 2.1.

(ii) **Para o semiplano $\Re(s) > -2$:** Definamos a seguinte função:

$$F_2(s) = \frac{\Gamma(s+2)}{(s+2-1)(s+2-2)} = \frac{\Gamma(s+2)}{(s+1)s} \quad (2.28)$$

Note que $\Gamma(s+2)$ é holomorfa em $\Re(s) > -2$, pois como $s > -2$ então $s+2 > 0$, ou seja o argumento da função Gama é positivo. Logo, pela Proposição 2.2, $\Gamma(s+2)$ é holomorfa em $\Re(s) > -2$. Observe, também, que a função $F_2(s)$ possui duas singularidades uma no ponto $s = 0$ e a outra em $s = -1$, pois a função que está no numerador quando avaliada em $s = 0$ e $s = -1$ está definida e vale 1 e 1, respectivamente, isto é,

$$\begin{aligned} \Gamma(0+2) &= \Gamma(2) = 1 \\ \Gamma(-1+2) &= \Gamma(1) = 1 \end{aligned}$$

Essas duas singularidade são polos simples. O resíduo de F_2 no polo $s = 0$ e no polo $s = -1$ são, respectivamente,

$$\begin{aligned} \text{res}_{s=0}F_2 &= \lim_{s \rightarrow 0} (s-0)F_2(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\Gamma(s+2)}{(s+1)s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Gamma(s+2)}{(s+1)} = \Gamma(2) = 1 \\ \text{res}_{s=-1}F_2 &= \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)F_2(s) = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \frac{\Gamma(s+2)}{(s+1)s} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{\Gamma(s+2)}{s} \\ &= \frac{\Gamma(1)}{-1} = -1 \end{aligned}$$

Dessa forma $F_2(s)$ é uma função meromorfa no semiplano $\Re(s) > -2$, com dois polos simples, um no ponto $s = 0$ e o outro $s = -1$, e com resíduo, nesses polos, igual a 1 e -1 , respectivamente. Por outro lado, $F_2(s)$ restringida para o semiplano $\Re(s) > 0$ coincide com $\Gamma(s)$, isto é,

$$F_2(s) = \frac{\Gamma(s+2)}{(s+1)s} = \frac{\Gamma(s+1)}{s} = \Gamma(s)$$

Isso é devido ao Lema 2.1.

(iii) **Para o semiplano $\Re(s) > -m$, $m \in \mathbb{Z}^+$:** Definamos a seguinte função:

$$F_m(s) = \frac{\Gamma(s+m)}{(s+m-1)(s+m-2)(s+m-3)\cdots(s+1)s}$$

Note que $\Gamma(s+m)$ é holomorfa em $\Re(s) > -m$, pois como $s > -m$ então $s+m > 0$, ou seja o argumento da função Gama é positivo. Logo, pela Proposição 2.2, $\Gamma(s+m)$ é holomorfa em $\Re(s) > -m$. Observe, também, que

a função $F_m(s)$ possui m -singularidades nos pontos $\{0, -1, -2, \dots, -(m-1)\}$, pois a função que está no numerador quando avaliada nesses pontos está definida e vale, respectivamente,

$$\begin{aligned}\Gamma(0+m) &= \Gamma(m) = (m-1)! \\ \Gamma(-1+m) &= \Gamma(m-1) = (m-2)! \\ &\vdots \\ \Gamma(-(m-1)+m) &= \Gamma(1) = 1\end{aligned}$$

Essas m -singularidade são polos simples. O resíduo de F_m nos polos $\{0, -1, -2, \dots, -(m-1)\}$ são, respectivamente,

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{s=0}F_m &= \lim_{s \rightarrow 0} (s-0)F_m(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\Gamma(s+m)}{(s+m-1)(s+m-2) \cdots (s+2)(s+1)s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Gamma(s+m)}{(s+m-1)(s+m-2) \cdots (s+2)(s+1)} \\ &= \frac{\Gamma(m)}{(m-1)(m-2) \cdots 2 \cdot 1} = \frac{(m-1)!}{(m-1)!} = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{s=-1}F_m &= \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)F_m(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \frac{\Gamma(s+m)}{(s+m-1)(s+m-2) \cdots (s+2)(s+1)s} \\ &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{\Gamma(s+m)}{(s+m-1)(s+m-2) \cdots (s+2)s} = \frac{\Gamma(m-1)}{(m-2)(m-3) \cdots 1 \cdot (-1)} \\ &= \frac{(m-2)!}{(m-2)!(-1)} = \frac{(-1)^1}{1!}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{s=-2}F_m &= \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)F_m(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow -2} (s+2) \frac{\Gamma(s+m)}{(s+m-1)(s+m-2) \cdots (s+3)(s+2)(s+1)s} \\ &= \lim_{s \rightarrow -2} \frac{\Gamma(s+m)}{(s+m-1)(s+m-2) \cdots (s+3)(s+1)s} \\ &= \frac{\Gamma(m-2)}{(m-3)(m-4) \cdots 1 \cdot (-1)(-2)} \\ &= \frac{(m-3)!}{(m-3)!(-1)(-2)} = \frac{(-1)^2}{2!}\end{aligned}$$

\vdots

$$\begin{aligned}
 \operatorname{res}_{s=-n} F_m &= \lim_{s \rightarrow -n} (s+n)F_m(s) \\
 &= \lim_{s \rightarrow -n} \frac{(s+n)\Gamma(s+m)}{(s+m-1)(s+m-2)\cdots(s+n+1)(s+n)(s+n-1)\cdots(s+2)(s+1)s} \\
 &= \lim_{s \rightarrow -n} \frac{\Gamma(s+m)}{(s+m-1)(s+m-2)\cdots(s+n+1)(s+n-1)\cdots(s+2)(s+1)s} \\
 &= \frac{\Gamma(m-n)}{(m-n-1)(m-n-2)\cdots 1(-1)\cdots(-n+2)(-n+1)(-n)} \\
 &= \frac{\Gamma(m-n)}{(m-n-1)(m-n-2)\cdots 1(-1)\cdots[-(n-2)][-(n-1)](-n)} \\
 &= \frac{(m-n-1)!}{(m-n-1)!(-1)(-2)\cdots[-(n-1)](-n)} = \frac{(-1)^n}{n!}
 \end{aligned}$$

onde, $n = 0, 1, 2, \dots, m-1$. Dessa forma $F_m(s)$ é uma função meromorfa no semi-plano $\Re(s) > -m$, com m -polos simples nos pontos $\{0, -1, -2, \dots, -(m-1)\}$, e com resíduo, nesses polos, igual a $\frac{(-1)^n}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \dots, m-1$, respectivamente. Por outro lado, $F_m(s)$ restringida para o semiplano $\Re(s) > 0$ coincide com $\Gamma(s)$, isto é,

$$\begin{aligned}
 F_m(s) &= \frac{\Gamma(s+m)}{(s+m-1)(s+m-2)(s+m-3)\cdots(s+1)s} \\
 &= \frac{\Gamma(s+m-1)}{(s+m-2)(s+m-3)\cdots(s+1)s} \\
 &= \frac{\Gamma(s+m-2)}{(s+m-3)\cdots(s+1)s} \\
 &\vdots \\
 &= \frac{\Gamma(s+2)}{(s+1)s} = \frac{\Gamma(s+1)}{s} = \Gamma(s)
 \end{aligned}$$

Isso é devido a aplicações sucessivas do Lema 2.1.

Portanto, a função $\Gamma(s)$ definida, inicialmente, no plano complexo $\Re(s) > 0$ possui uma continuação analítica para a função meromorfa $\Gamma(s)$ definida em todo o plano complexo, com polos simples nos pontos $s = 0, -1, -2, -3 \dots$, e resíduo em todos esses polos $s = -n, n \in \mathbb{Z}^+$, com valores $\frac{(-1)^n}{n!}$.

A prova está completa. ■

Observação 2.2. O gráfico da função Γ para $s = \sigma + i0$, $\sigma \in [-5, 5]$ é mostrado na Figura 2.2. Para a elaboração desse gráfico foi utilizado o software Mathematica.

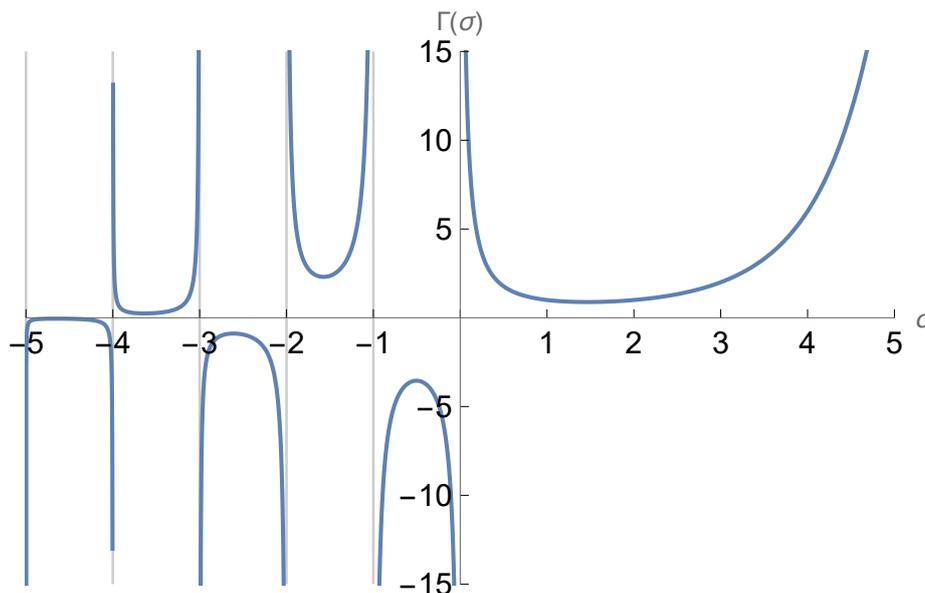
Com a finalidade de demonstrar a continuação analítica da função Zeta, que veremos no próximo Capítulo, estudaremos os resultados a seguir.

Teorema 2.2. Para todo $s \in \mathbb{C}$,

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi s} \tag{2.29}$$

Demonstração. Uma prova desse Teorema é encontrada em [7].

Figura 2.2: O gráfico da função $\Gamma(s)$, $s = \sigma + i0$, $\sigma \in [-5, 5]$.



Fonte: Os autores (2021).

Teorema 2.3. *Seja a função Gama, $\Gamma(s)$. Então, $\frac{1}{\Gamma(s)}$ é uma função inteira de s com zeros simples em $s = 0, -1, -2, -3, \dots$ e só se anula neles.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.2, temos

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \Gamma(1-s) \frac{\text{sen } \pi s}{\pi} \quad (2.30)$$

Sabemos que os pontos $s = 0, -1, -2, -3, \dots$ são os polos simples de $\Gamma(s)$. Então, a função $\Gamma(1-s)$ está bem definida nesses pontos, e o produto de $\Gamma(1-s)$ com a função $\text{sen } \pi s$ se anula por causa que esses pontos são os zeros simples da função $\text{sen } \pi s$. Desse modo, os pontos $s = 0, -1, -2, -3, \dots$ são zeros simples da função $\frac{1}{\Gamma(s)}$. Já para os pontos $s = 1, 2, 3, \dots$ não precisa-se usar a fórmula (2.30), pois $\frac{1}{\Gamma(s)}$ está bem definida. Os pontos $s = 0, -1, -2, -3, \dots$ são os únicos zeros simples da função $\frac{1}{\Gamma(s)}$. Desse forma a função $\frac{1}{\Gamma(s)}$ é inteira, com os únicos zeros simples em $s = 0, -1, -2, -3, \dots$

A prova está completa. ■

3 Função Zeta de Riemann

A função Zeta de Riemann ζ exerce um papel muito importante em várias áreas de pesquisa moderna. Além das diversas aplicações importantes na Física, essa função desempenha um grande fascínio entre os matemáticos devido, principalmente, à famosa conjectura de Riemann, que é um dos Problemas do Milênio¹. Grandes nomes, como Euler e Riemann, estudaram a função Zeta e nos trouxeram grandes avanços no seu entendimento. A seguir, vamos defini-las, mas antes, denotaremos o conceito de série- p .

Nas aulas de cálculo diferencial e integral é ensinado séries. Sabe-se que a *série Harmônica generalizada* ou *série- p* é definida por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad (3.1)$$

Proposição 3.1. *Seja $p \in \mathbb{R}$. A série- p converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.*

Demonstração. Uma prova dessa Proposição é encontrada em [9].

Definição 3.1 (Função Zeta). Seja $s > 1$. Definimos a função Zeta, $\zeta : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (3.2)$$

Observação 3.1. Note que pela Proposição 3.1 a função Zeta está bem definida.

A seguinte Proposição estende analiticamente a função Zeta, definida em $s > 1$, para a função Zeta definida para todo semiplano $\Re(s) > 1$.

Proposição 3.2. *A série definida por $\zeta(s)$, (3.2), converge para $\Re(s) > 1$, e a função ζ é holomorfa nesse semiplano.*

Demonstração. Seja $s = \sigma + it$ um número complexo. Pelo Item (v) da Observação 1.3, temos que para qualquer $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$|n^{-s}| = n^{-\sigma} \quad (3.3)$$

¹Os Problemas do Milênio são sete problemas matemáticos estabelecidos no ano 2000 pelo *Clay Mathematics Institute*, oferecendo um milhão de dólares, entregues pelo mesmo, a quem conseguisse resolver um dos problemas propostos e ter a solução acatada por experts. O objetivo da instituição é promover a disseminação da matemática pelo mundo. Atualmente, apenas a Conjectura de Poincaré foi resolvida. Segue um link para acesso aos sete problemas: <http://www.claymath.org/millennium-problems>. Acesso em: 11 de Mar 2021.

Considere, para qualquer $\delta > 0$, o semiplano

$$S_{1+\delta} = \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1 + \delta\}$$

Na Figura 3.1 mostramos esse semiplano. Seja $s \in S_{1+\delta}$, então $\Re(s) > 1 + \delta$, ou escrito de outra forma, $\sigma > 1 + \delta$. Então, $n^\sigma > n^{1+\delta}$, ou equivalentemente,

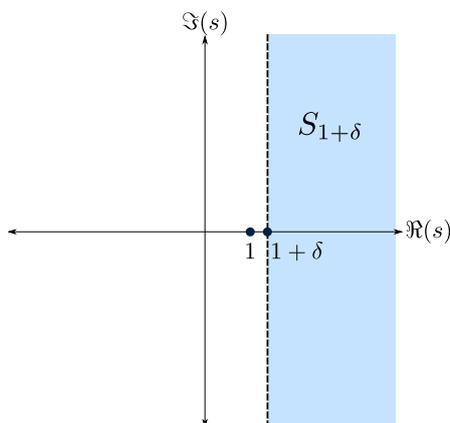
$$\frac{1}{n^\sigma} < \frac{1}{n^{1+\delta}} \quad (3.4)$$

De (3.3) e (3.4), temos que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\left| \frac{1}{n^s} \right| < \frac{1}{n^{1+\delta}}, \quad \forall s \in S_{\delta+1} \quad (3.5)$$

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}}$ é uma série- p , como o expoente $1 + \delta > 1$, a série é convergente. Logo, pelo Teste M de Weierstrass, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge uniformemente no semiplano $S_{1+\delta}$, consequentemente converge uniformemente em todo o semiplano $\Re(s) > 1$, pois $\delta > 0$ foi escolhido arbitrariamente. Por outro lado, a sequência de funções $\left\{ \frac{1}{n^s} \right\}_{n=1}^{\infty}$ são holomorfas no semiplano $\Re(s) > 1$, e a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge uniformemente em qualquer compacto do semiplano $\Re(s) > 1$. Então, pelo Corolário 1.1, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ é holomorfa no semiplano $\Re(s) > 1$.

Figura 3.1: O semiplano $S_{1+\delta}$.



Fonte: Os autores (2021).

Com a finalidade de demonstrar a continuação analítica da função Zeta em uma função meromorfa definida em \mathbb{C} , precisamos definir, antes, algumas outras funções e/ou propriedades.

Definição 3.2 (Função Teta). Defini-se a função Teta, para todo $t > 0$, por

$$\vartheta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} \quad (3.6)$$

Proposição 3.3 (Equação Funcional da Função Teta). A equação funcional da função Teta, é dada por

$$\vartheta(t) = t^{-1/2} \vartheta(1/t) \quad (3.7)$$

Demonstração. Do Teorema 1.8 temos que, se $f(x) = e^{-\pi x^2}$, então

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx = f(\xi) = e^{-\pi \xi^2} \quad (3.8)$$

Para valores fixos: $t > 0$ e $a \in \mathbb{R}$, consideremos a seguinte função

$$g(x) = f(t^{1/2}(x+a)) = e^{-\pi t(x+a)^2}$$

Queremos obter a transformada de Fourier $\hat{g}(\xi)$ de $g(x)$.

$$\hat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t^{1/2}(x+a)) e^{-2\pi i x \xi} dx$$

Fazendo a mudança de variáveis $y = t^{1/2}(x+a)$ na integral. Então, $dx = t^{-1/2} dy$, e

$$\begin{aligned} \hat{g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i(t^{-1/2}-a)\xi} t^{-1/2} dy \\ &= t^{-1/2} e^{-2\pi i a \xi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i(t^{-1/2}\xi)} dy \\ &= t^{-1/2} e^{-2\pi i a \xi} \hat{f}(t^{-1/2}\xi) = t^{-1/2} e^{-2\pi i a \xi} f(t^{-1/2}\xi) \\ &= t^{-1/2} e^{2\pi i a \xi} e^{-\pi t^{-1}\xi^2} \end{aligned}$$

Agora, aplicaremos o Teorema 1.9 (Fórmula do Somatório de Poisson) às funções $g(x)$ e $\hat{g}(\xi)$, considerando as variáveis x e ξ números inteiros. Assim, temos

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi t(n+a)^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^{-1/2} e^{2\pi i a n} e^{-\pi t^{-1}n^2} \quad (3.9)$$

Quando $a = 0$, (3.9) se reduz a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi t n^2} = t^{-1/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi t^{-1} n^2} \quad (3.10)$$

Esta última equação, em termos da função Teta, é dada por

$$\vartheta(t) = t^{-1/2} \vartheta(1/t) \quad (3.11)$$

Isso completa a prova está completa. ■

Proposição 3.4. *Existe $C > 0$ tal que $\forall t \rightarrow 0$,*

$$\vartheta(t) \leq C t^{-1/2} \quad (3.12)$$

Demonstração. Do Item (iii) da Observação (1.1), temos que

$$\lim_{y \rightarrow 0} e^{-1/y} y^{-s} = 0, \quad y > 0, s > 0 \quad (3.13)$$

Logo, $\exists \delta > 0$ tal que $\forall y \in (0, \delta)$ existe uma constante $c > 0$ tal que

$$e^{-1/y} y^{-s} \leq c \quad (3.14)$$

Para $s = 1/2$, temos

$$e^{-1/y} \leq cy^{1/2} \quad (3.15)$$

Agora, fazendo $y = t/k\pi$, $k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$, na última desigualdade, temos $e^{-k\pi/t} \leq c\frac{1}{\sqrt{k\pi}}t^{1/2} \leq c_1t^{1/2}$, $c_1 > 0$. Logo, para t suficientemente pequeno, temos que

$$e^{-k\pi/t} \leq \frac{1}{2} \quad (3.16)$$

Por outro lado, da equação funcional de $\vartheta(t)$ e Exercícios 1.1, temos que

$$\vartheta(t) = t^{-1/2} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2/t} \right) = t^{-1/2} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\pi n/t)n} \right) \quad (3.17)$$

De (3.16), temos

$$\vartheta(t) \leq t^{-1/2} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \right) = t^{-1/2} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \right) = t^{-1/2} (1 + 2 \cdot 2) \quad (3.18)$$

Portanto,

$$\vartheta(t) \leq Ct^{-1/2} \quad (3.19)$$

onde, $C = 5$.

Definição 3.3 (Função Psi). Defina-se a função Psi, por

$$\psi(u) = \frac{\vartheta(u) - 1}{2} \quad (3.20)$$

Observação 3.2.

(i) De Exemplo 1.1, a **função Psi**, é dada por

$$\psi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 u} \quad (3.21)$$

(ii) A Equação funcional para a Função Psi, é dada por

$$\psi(u) = u^{-1/2}\psi(1/u) + \frac{1}{2u^{1/2}} - \frac{1}{2} \quad (3.22)$$

De fato, $\psi(u) = [\vartheta(u) - 1]/2$. Então, $\psi(1/u) = [\vartheta(1/u) - 1]/2$, ou equivalentemente, $u^{-1/2}\psi(1/u) = u^{-1/2}[\vartheta(1/u) - 1]/2$. Assim,

$$\psi(u) - u^{-1/2}\psi(1/u) = [\vartheta(u) - 1]/2 - u^{-1/2}[\vartheta(1/u) - 1]/2$$

De (3.7), temos

$$\begin{aligned} \psi(u) - u^{-1/2}\psi(1/u) &= [u^{-1/2}\vartheta(1/u) - 1]/2 - u^{-1/2}[\vartheta(1/u) - 1]/2 \\ &= \frac{u^{-1/2}}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Assim, completamos a prova.

Proposição 3.5. Para todo $t \geq 1$, tem-se

$$\sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 t} = C e^{-\pi t} \quad (3.23)$$

para alguma constante $C > 0$.

Demonstração. Como $n \geq 1$, então $n^2 \geq n$, ou ainda, $\pi n^2 t \geq \pi n t$. Logo, $e^{-\pi n^2 t} \leq e^{-\pi n t}$. Assim,

$$\sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 t} \leq \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n t} \quad (3.24)$$

Como a série do lado direito é convergente, denotemos a sua soma por:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n t} = e^{-\pi t} + e^{-2\pi t} + e^{-3\pi t} + e^{-4\pi t} + \dots \\ &= e^{-\pi t} + e^{-\pi t} (e^{-\pi t} + e^{-2\pi t} + e^{-3\pi t} + \dots) = e^{-\pi t} + S e^{-\pi t} \\ &= \frac{e^{-\pi t}}{1 - e^{-\pi t}} \end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos que $t \geq 1$, ou melhor, $\pi t \geq \pi$. Então, $e^{-\pi t} \leq e^{-\pi}$, ou equivalentemente, $1 - e^{-\pi t} \geq 1 - e^{-\pi}$, ou ainda, $\frac{1}{1 - e^{-\pi t}} \leq \frac{1}{1 - e^{-\pi}}$. Assim,

$$S = \frac{1}{1 - e^{-\pi}} e^{-\pi t}$$

Substituindo este último valor em (3.24), temos

$$\sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 t} \leq C e^{-\pi t} \quad (3.25)$$

onde, $C = \frac{1}{1 - e^{-\pi}}$.

Com isso concluímos a prova.

Proposição 3.6. A seguinte função

$$h(s) = \int_1^{\infty} (u^{-s/2-1/2} + u^{s/2-1}) \psi(u) du \quad (3.26)$$

é inteira.

Demonstração. Precisamos provar que a função $h(s)$ é holomorfa em todo o plano complexo.

Para $0 < \epsilon < 1$ e para todo $s = \sigma + i\beta \in \mathbb{C}$, definamos a seguinte função:

$$h_\epsilon(s) = \int_1^{1/\epsilon} (u^{-s/2-1/2} + u^{s/2-1}) \psi(u) du, \quad (3.27)$$

Seja $\rho(s, u) = (u^{-s/2-1/2} + u^{s/2-1}) \psi(u)$ onde $(s, u) \in \mathbb{C} \times [1, 1/\epsilon]$. Então,

- (i) $\rho(s, u)$ é holomorfa em s para cada u . De fato, seja $u_0 \in [1, 1/\epsilon]$, então a função $\rho(s, u_0) = (u_0^{-s/2-1/2} + u_0^{s/2-1}) \psi(u_0)$ é exponencial e, portanto, holomorfa em \mathbb{C} .

- (ii) $\rho(s, u)$ é contínua em $\mathbb{C} \times [1, 1/\epsilon]$, pois trata-se de adição e multiplicação de funções exponenciais e polinomiais.
- (iii) Pelo Teorema 1.6 a função h_ϵ , definida em \mathbb{C} , é holomorfa. Embora, o Teorema, considere o intervalo fechado $[0, 1]$, não haveria problema, pois antes de aplicá-lo, faríamos uma transformação de intervalos.

Agora provaremos que a função $h_\epsilon(s)$ converge uniformemente a $h(s)$, sobre \mathbb{C} . De fato,

$$|h(s) - h_\epsilon(s)| = \left| \int_1^\infty (u^{-s/2-1/2} + u^{s/2-1}) \psi(u) du - \int_1^{1/\epsilon} (u^{-s/2-1/2} + u^{s/2-1}) \psi(u) du \right|$$

Simplificando,

$$\begin{aligned} |h(s) - h_\epsilon(s)| &= \left| \int_{1/\epsilon}^\infty (u^{-s/2-1/2} + u^{s/2-1}) \psi(u) du \right| \\ &\leq \int_{1/\epsilon}^\infty |(u^{-s/2-1/2} + u^{s/2-1}) \psi(u)| du \\ &\leq \int_{1/\epsilon}^\infty |u^{-s/2-1/2} \psi(u) + u^{s/2-1} \psi(u)| du \\ &\leq \int_{1/\epsilon}^\infty |u^{-s/2-1/2} \psi(u)| du + \int_{1/\epsilon}^\infty |u^{s/2-1} \psi(u)| du \\ &\leq \int_{1/\epsilon}^\infty |u^{-\sigma/2-1/2}| |\psi(u)| du + \int_{1/\epsilon}^\infty |u^{s/2-1}| |\psi(u)| du \\ &\leq \underbrace{\int_{1/\epsilon}^\infty u^{-\sigma/2-1/2} \psi(u) du}_{h_1(s)} + \underbrace{\int_{1/\epsilon}^\infty u^{s/2-1} \psi(u) du}_{h_2(s)} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Calculemos, independentemente, cada uma dessas integrais.

Cálculo de h_1 :

$$\begin{aligned} h_1(s) &= \int_{1/\epsilon}^\infty u^{-\sigma/2-1/2} \psi(u) du \\ &= \int_{1/\epsilon}^\infty u^{-\sigma/2-1/2} \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 u} du \end{aligned} \quad (3.29)$$

De (3.23), temos

$$h_1(s) \leq C \int_{1/\epsilon}^\infty u^{-\sigma/2-1/2} e^{-\pi u} du$$

Na última integral, fazendo a mudança de variável, $v = \pi u$; então, $du = (1/\pi)dv$, temos

$$h_1(s) \leq C \frac{1}{\pi^{-\sigma/2+1/2}} \int_{\pi/\epsilon}^\infty v^{-\sigma/2-1/2} e^{-v} dv$$

Fazendo a substituição $-\sigma/2 - 1/2 = \alpha - 1$, temos

$$h_1(s) \leq C \frac{1}{\pi^\alpha} \int_{\pi/\epsilon}^\infty v^{\alpha-1} e^{-v} dv$$

Agora, usando (1.10), temos

$$\begin{aligned}
h_1(s) &\leq c_0 \frac{1}{\pi^\alpha} \int_{\pi/\epsilon}^{\infty} e^{-v/2} dv \\
&= \frac{c_0}{\pi^\alpha} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\pi/\epsilon}^b e^{-v/2} dv = \frac{2c_0}{\pi^\alpha} \lim_{b \rightarrow \infty} (e^{-\pi/2\epsilon} - e^{-b/2}) = \frac{2c_0}{\pi^\alpha} e^{-\pi/2\epsilon} \\
&= c_1 e^{-\pi/2\epsilon}, \quad c_1 > 0
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Cálculo de h_2 :

Procede-se de forma análoga como no cálculo de h_1 . Desse modo,

$$h_2(s) \leq c_2 e^{-\pi/2\epsilon}, \quad c_2 > 0 \tag{3.31}$$

Voltando, substituindo (3.30) e (3.31) em (3.28), temos

$$|h(s) - h_\epsilon(s)| \leq c_1 e^{-\pi/2\epsilon} + c_2 e^{-\pi/2\epsilon} = c e^{-\pi/2\epsilon}, \quad c > 0 \tag{3.32}$$

Como $\forall s \in \mathbb{C}$, o limite, quando $\epsilon \rightarrow 0$, do lado direito de (3.32) é zero, temos, pelo Teorema do Confronto, a convergência uniforme de $h_\epsilon(s)$ para $h(s)$ sobre \mathbb{C} , em particular, tem-se convergência uniforme para qualquer subconjunto compacto contido em \mathbb{C} . Logo, pelo Teorema 1.5, a função $h(s)$ é holomorfa em \mathbb{C} .

A prova está completa. ■

Teorema 3.1. *Se $\Re(s) > 1$, então*

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} u^{s/2-1} [\vartheta(u) - 1] du \tag{3.33}$$

Demonstração. Primeiro, afirmamos que, se $n \geq 1$, então

$$\int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 u} u^{s/2-1} du = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) n^{-s} \tag{3.34}$$

De fato, consideremos a mudança de variável $u = t/\pi n^2$ para a integral. Assim, $du = (1/\pi n^2) dt$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 u} u^{s/2-1} du &= \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 (t/\pi n^2)} (t/\pi n^2)^{s/2-1} (1/\pi n^2) dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s/2-1} (1/\pi n^2)^{s/2} dt \\
&= (\pi n^2)^{-s/2} \Gamma(s/2) \\
&= \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) n^{-s}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Segundo, afirmamos que

$$\vartheta(u) - 1 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 u} \tag{3.36}$$

De fato, $\vartheta(u) - 1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 u} - 1$. Agora, apliquemos o Exercício 1.1, assim

$$\vartheta(u) - 1 = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 u} - 1 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 u} \quad (3.37)$$

Finalmente, procedemos a demonstrar o Teorema. Se $\Re(s) > 1$ e usando (3.36), temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} u^{s/2-1} [\vartheta(u) - 1] du &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} u^{s/2-1} \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 u} \right] du \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} u^{s/2-1} \left[e^{-\pi n^2 u} \right] du \end{aligned} \quad (3.38)$$

Substituindo, (3.34) em (3.38), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} u^{s/2-1} [\vartheta(u) - 1] du &= \sum_{n=1}^{\infty} \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) n^{-s} \\ &= \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \\ &= \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) \end{aligned} \quad (3.39)$$

A prova está completa. ■

Definição 3.4 (Função Csi). Defini-se a função Csi, para todo $\Re(s) > 1$, por

$$\xi(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) \quad (3.40)$$

Teorema 3.2. A função ξ é holomorfa sobre o semiplano $\Re(s) > 1$ e tem uma continuação analítica, sobre todo o plano complexo, como uma função meromorfa que tem dois polos simples: um em $s = 0$ e o outro em $s = 1$. Além disso,

$$\xi(s) = \xi(1 - s), \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.1, temos

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} u^{s/2-1} [\vartheta(u) - 1] du \quad (3.41)$$

para qualquer $\Re(s) > 1$. De (3.21), temos que

$$\begin{aligned} \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) &= \int_0^{\infty} u^{s/2-1} \psi(u) du \\ &= \int_0^1 u^{s/2-1} \psi(u) du + \int_1^{\infty} u^{s/2-1} \psi(u) du \end{aligned}$$

De (3.22), temos

$$\begin{aligned}
\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= \int_0^1 u^{s/2-1} \left[u^{-1/2}\psi(1/u) + \frac{1}{2u^{1/2}} - \frac{1}{2} \right] du + \int_1^\infty u^{s/2-1}\psi(u)du \\
&= \int_0^1 u^{s/2-3/2}\psi(1/u)du + \int_0^1 \frac{u^{s/2-1}}{2u^{1/2}}du - \int_0^1 \frac{u^{s/2-1}}{2}du \\
&\quad + \int_1^\infty u^{s/2-1}\psi(u)du \\
&= \underbrace{\int_0^1 u^{s/2-3/2}\psi(1/u)du}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^1 u^{s/2-3/2}du}_{I_2} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^1 u^{s/2-1}du}_{I_3} \\
&\quad + \int_1^\infty u^{s/2-1}\psi(u)du \tag{3.42}
\end{aligned}$$

Cálculo I_1 :

Fazendo, a mudança de variáveis $v = 1/u$; $du = -\frac{1}{v^2}dv$

$$I_1 = - \int_\infty^1 v^{-s/2-1/2}\psi(v)dv = \int_1^\infty u^{-s/2-1/2}\psi(u)du \tag{3.43}$$

Cálculo I_2 :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{2(s/2-1/2)} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u^{s/2-1/2} \Big|_\epsilon^1 = \frac{1}{s-1} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (1^{s/2-1/2} - \epsilon^{s/2-1/2}) \\
&= \frac{1}{s-1} (1-0) = \frac{1}{s-1}, \quad \Re(s) > 1 \tag{3.44}
\end{aligned}$$

Cálculo I_3 :

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{1}{2(s/2)} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u^{s/2} \Big|_\epsilon^1 = \frac{1}{s} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (1^{s/2} - \epsilon^{s/2}) \\
&= \frac{1}{s} (1-0) = \frac{1}{s}, \quad \Re(s) > 1 \tag{3.45}
\end{aligned}$$

Substituindo I_1, I_2 e I_3 em (3.46)

$$\begin{aligned}
\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= \int_1^\infty u^{-s/2-1/2}\psi(u)du + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty u^{s/2-1}\psi(u)du \\
&= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty (u^{-s/2-1/2} + u^{s/2-1})\psi(u)du \tag{3.46}
\end{aligned}$$

De (3.40), temos

$$\xi(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty (u^{-s/2-1/2} + u^{s/2-1})\psi(u)du \tag{3.47}$$

para todo $\Re(s) > 1$. Agora, pela Proposição 3.6, a integral do lado direito de (3.47) é holomorfa em todo o plano complexo. Sendo assim, $\tilde{\xi}(s)$ é uma continuação analítica de $\xi(s)$ em $\mathbb{C} - \{0, 1\}$. Ainda, denotaremos $\tilde{\xi}(s)$ por $\xi(s)$. Por tanto, $\xi(s)$ é uma função

meromorfa, definida em todo o plano complexo, que tem dois polos simples em $s = 0$ e $s = 1$.

Agora, vejamos o que acontece quando substituirmos s por $1 - s$ em (3.47):

$$\xi(1 - s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s - 1} + \int_1^{\infty} (u^{s/2-1} + u^{-s/2-1/2}) \psi(u) du = \xi(s) \quad (3.48)$$

para todo $s \in \mathbb{C}$.

A prova está completa. ■

3.1 Continuação Analítica da Função Zeta

A continuação analítica de ζ para uma função meromórfica em \mathbb{C} é mais sutil do que no caso da função gama. A prova que apresentamos aqui relaciona ζ a Γ e ϑ , e consequentemente, ξ .

Teorema 3.3. *A função Zeta tem uma continuação meromorfa em todo o plano complexo, cuja única singularidade é um polo simples em $s = 1$.*

Demonstração. De (3.40), temos

$$\zeta(s) = \pi^{s/2} \xi(s) \frac{1}{\Gamma(s/2)} \quad (3.49)$$

Analisaremos as funções holomorfas do lado direito de (3.49).

- (i) **A função $\frac{1}{\Gamma(s/2)}$:** De (2.3) temos que a função $\frac{1}{\Gamma(s)}$ é inteira com zeros simples em $s = 0, -1, -2, -3, \dots$. Então, a função $\frac{1}{\Gamma(s/2)}$ é inteira com zeros simples em $s = 0, -2, -4, -6, \dots$
- (ii) **A função $\xi(s)$:** Do Teorema 3.2, a função $\xi(s)$, definida em todo o plano complexo, é meromorfa com polos simples em $s = 0$ e $s = 1$.
- (iii) **A função $\pi^{s/2}$:** Essa função exponencial é inteira em s .
- (iv) **Em $s = 0$:** A função $\frac{1}{\Gamma(s/2)}$ se anula no zero simples $s = 0$. Então, o produto $\xi(s)$ com $\frac{1}{\Gamma(s/2)}$ se anula nesse ponto, não importando que este seja um polo simples de $\xi(s)$. Logo, a função $\zeta(s)$ está bem definida em $s = 0$.
- (v) **Em $s = 1$:** A função $\frac{1}{\Gamma(s/2)}$ está bem definida em $s = 1$, porém não se anula nesse ponto. Agora, $s = 1$ é um polo simples da função $\xi(s)$. Então, o produto $\xi(s)$ com $\frac{1}{\Gamma(s/2)}$ não está definido, nesse ponto. Logo, $s = 1$ é um polo simples da função $\zeta(s)$.

Dos itens anteriores podemos dizer que a função $\tilde{\zeta}(s)$ é holomorfa em $\mathbb{C} - \{1\}$ e, por tal, uma continuação analítica de $\zeta(s)$ em $\mathbb{C} - \{1\}$. Ainda, usando a mesma notação $\zeta(s)$ para $\tilde{\zeta}(s)$, concluímos que a função $\zeta(s)$, definida em todo o plano complexo, é meromorfa com polos simples em $s = 1$.

A prova está completa. ■

Considerações Finais

Neste trabalho, apresentamos nossos estudos sobre a continuação analítica das funções Gama e Zeta de Riemann. Para isso, foi necessário um estudo aprofundado do Cálculo Diferencial e Integral, na reta real e no plano complexo. Assim, como também resultados importantes da Análise complexa. Nos dedicamos a compreender diversas definições, teoremas e conceitos que nos aproximaram do nosso objetivo. Introduzir os conceitos relacionados às continuações analíticas das funções especiais, destacadas neste trabalho, foi nosso objetivo e, também, a parte mais interessante de nossos estudos, pois foi onde percebemos a grandiosidade da Continuação Analítica para essas funções. Percebemos a necessidade de se pensar em estender o domínio de uma função para que possamos perceber novas características e trabalha-la de novas maneiras, podendo usufruir de outros resultados e, assim, ampliar ainda mais as possibilidades e o aprimoramento de estudos e resultados. Além disso, foi possível perceber enquanto trabalhávamos a Função Zeta de Riemann que existem também possibilidades de se trabalhar com a função de forma simétrica, utilizando a equação funcional mais adequada para cada caso e percebemos que isso pode ser um passo estratégico, de acordo com o rumo que se deseja levar a pesquisa feita.

Por fim, é importante enfatizar a escolha das funções estudadas neste trabalho. Foram realmente escolhas interessantes, pois além de serem muito utilizadas na Matemática, nos aproximou daquilo que conhecíamos, ao passo que nos fascinava com os novos resultados. Futuramente, pretendo me aprofundar no estudo da Função Zeta de Riemann, a qual os estudos me instigaram a querer pesquisar ainda mais no assunto, podendo, a qualquer momento, me direcionar para os números primos e até à conjectura conhecida como Hipótese de Riemann, através da Teoria Analítica dos Números.

Referências

- [1] ASMAR, Nakhlé H. e GRAFAKOS, Loukas. **Complex Analysis with Applications**. Springer Nature Switzerland AG, 2018.
- [2] CLAY MATHEMATICS INSTITUTE. **Millennium Problems: Riemann Hypothesis**. Disponível em:
<https://www.claymath.org/millennium-problems/riemann-hypothesis>.
Acesso em: 11 mar. 2021.
- [3] CONWAY, J. B. **Functions of One Complex Variable**. Springer-Verlag, 1986.
- [4] KREYSZIG, E. **Matemática Superior para Engenharia: Volume 1**. 9^a edição, LTC, 2008.
- [5] GHORPADE, S. R.; LIMAYE, B. V. **A course in calculus and real analysis**. Springer Science+Business Media, LLC, 2006.
- [6] GRAY, J. **The Real and the Complex: A History of Analysis in the 19th Century**. Springer-Verlag, 2015.
- [7] STEIN, E. M. e SHAKARCHI, R. **Complex Analysis**. Princeton University Press , 2003.
- [8] STEIN, E. M. e SHAKARCHI, R. **FOURIER ANALYSIS: an introduction**. Princeton University Press , 2003.
- [9] STEWART, J. **Cálculo: Volume II**. Tradução da 7^a Edição Norte-americana, Cengage Learning, São Paulo, SP, 2013.