Aula 4: Controladores Proporcionais

prof. Dr. Eduardo Bento Pereira

Universidade Federal de São João del-Rei

ebento@ufsj.edu.br

22 de agosto de 2019.

Visão Geral

Etapas do projeto de um controlador

1. Análise da solvabilidade;
2. Seleção da metodologia de projeto;
3. Projeto do controlador;
4. Simulação;
5. Implementação do controlador;
6. Testes de bancada e sintonização final;
7. Operação assistida;
8. Treinamento de pessoal e suporte técnico.

Modos de operação

Considerações sobre o valor inicial

Os controladores industriais, falando-se neste caso dos equipamentos físicos nos quais os algortimos de controle são implementados, possuem, basicamente, dois modos de operação: o automático e o manual.

Modo manual

Como é intutitivo de se pensar, o modo manual de operação é aquele no qual o operador (pessoa responsável por operar a planta industrial) define, por meio de uma Interface Homem Máquina (HMI, ou IHM do inglês) ou um Sistema Supervisório, o valor no qual a saída do controlador deva operar. Sendo este um valor constante até que o operador modifique este valor ou mude o modo de operação para automático.

Obs.: Na verdade, o que o operador define no sistema supervisório é o valor de operação do atuador ou elemento final de controle: sua abertura ou rotação, etc.

Modo automático

No modo automático, o algoritmo de controle é quem calcula e define o valor do sinal a ser envido ao atuador.

Transição entre modos

A transição entre os modos de operação exige um conhecimento do processo que está sendo controlado e só pode ser feito após serem tomadas medidas de segurança. Pois, o transitório decorrente desta ação pode ser perigoso ao não respeitar os limites de operação do sistema.

Controle PID

Controle Proporcional - P

O controle proporcional é aquele cuja estratégia de controle se basea em obter o sinal de saída do controlador como uma proporção do erro entre o valor setado ou de referência (*Setpoint* - SP) e o valor medido (*Process Variable* - PV).

Lei de controle proporcional

A lei de controle proporcional, para sistemas de tempo contínuo, pode ser escrita na forma:

$$u(t) = K_p e(t) + u_o, \tag{1}$$

em que:

- $u(t) \in \mathbb{R}$ é a variável que representa o valor de saída do controlador;
- $e(t)$ é a variável que representa o valor do erro entre o valor setado e o valor medido $e(t) = \mathrm{SP} - \mathrm{PV}$, ou, na notação usual para sistemas de controle $e(t) = r(t) - y(t)$, sendo $r(t)$ e $y(t)$ as variáveis que representam o valor setado e o valor medido, respecitivamente;
- K_p representa o ganho proporcional;
- u_o é a constante que representa o valor inicial para a saída do controlador, ou seja, valor que o controlador assumirá quando for ligado (energizado).

Lei de controle proporcional

A lei de controle proporcional, para sistemas de tempo contínuo, pode ser escrita na forma:

$$u(t) = K_p e(t) + u_o, \tag{1}$$

em que:

- $u(t) \in \mathbb{R}$ é a variável que representa o valor de saída do controlador;
- $e(t)$ é a variável que representa o valor do erro entre o valor setado e o valor medido ($e(t) = \mathrm{SP} - \mathrm{PV}$, ou, na notação usual para sistemas de controle $e(t) = r(t) - y(t)$, sendo $r(t)$ e $y(t)$ as variáveis que representam o valor setado e o valor medido, repsecitivamente;
- K_p representa o ganho proporcional;
- u_o é a constante que representa o valor inicial para a saída do controlador, ou seja, valor que o controlador assumirá quando for ligado (energizado).

Lei de controle proporcional

A lei de controle proporcional, para sistemas de tempo contínuo, pode ser escrita na forma:

$$u(t) = K_p e(t) + u_o, \tag{1}$$

em que:

- $u(t) \in \mathbb{R}$ é a variável que representa o valor de saída do controlador;
- $e(t)$ é a variável que representa o valor do erro entre o valor setado e o valor medido ($e(t) = \mathrm{SP} - \mathrm{PV}$, ou, na notação usual para sistemas de controle $e(t) = r(t) - y(t)$, sendo $r(t)$ e $y(t)$ as variáveis que representam o valor setado e o valor medido, repsecitivamente;
- K_p representa o ganho proporcional;
- u_o é a constante que representa o valor inicial para a saída do controlador, ou seja, valor que o controlador assumirá quando for ligado (energizado).

Lei de controle proporcional

A lei de controle proporcional, para sistemas de tempo contínuo, pode ser escrita na forma:

$$u(t) = K_p e(t) + u_o, \tag{1}$$

em que:

- $u(t) \in \mathbb{R}$ é a variável que representa o valor de saída do controlador;
- $e(t)$ é a variável que representa o valor do erro entre o valor setado e o valor medido ($e(t) = \mathrm{SP} - \mathrm{PV}$, ou, na notação usual para sistemas de controle $e(t) = r(t) - y(t)$, sendo $r(t)$ e $y(t)$ as variáveis que representam o valor setado e o valor medido, repsecitivamente;
- K_p representa o ganho proporcional;
- u_o é a constante que representa o valor inicial para a saída do controlador, ou seja, valor que o controlador assumirá quando for ligado (energizado).

Lei de controle proporcional

A lei de controle proporcional, para sistemas de tempo contínuo, pode ser escrita na forma:

$$u(t) = K_p e(t) + u_o, \tag{1}$$

em que:

- $u(t) \in \mathbb{R}$ é a variável que representa o valor de saída do controlador;
- $e(t)$ é a variável que representa o valor do erro entre o valor setado e o valor medido ($e(t) = \mathrm{SP} - \mathrm{PV}$, ou, na notação usual para sistemas de controle $e(t) = r(t) - y(t)$, sendo $r(t)$ e $y(t)$ as variáveis que representam o valor setado e o valor medido, repsecitivamente;
- K_p representa o ganho proporcional;
- u_o é a constante que representa o valor inicial para a saída do controlador, ou seja, valor que o controlador assumirá quando for ligado (energizado).

Banda Proporcional

Saturação e não linearidades

Na prática, os controladores não possuem uma potência ou excursão ilimitada de seus atuadores e a lei de controle deve ser escrita como na equação 2.

$$u(t) = \begin{cases} u_{max}, & \text{se} \quad u(t) \geq u_{max} \\ K_p e(t) + u_o, & \text{se} \quad u_{min} \leq u(t) \leq u_{max} \\ u_{min}, & \text{se} \quad u(t) \leq u_{min} \end{cases} \tag{2}$$

Banda Proporcional

Saturação e não linearidades

Na prática, os controladores não possuem uma excursão ilimitada e a lei de controle deve ser escrita como na equação 2.

$$\mathrm{BP} = \frac{u_{max} - u_{min}}{K_p} \tag{3}$$

Para $u_{min} = 0$ e $u_{max} = 100$, tem-se:

$$\mathrm{BP} = \frac{100}{K_p} \tag{4}$$

Banda Proporcional

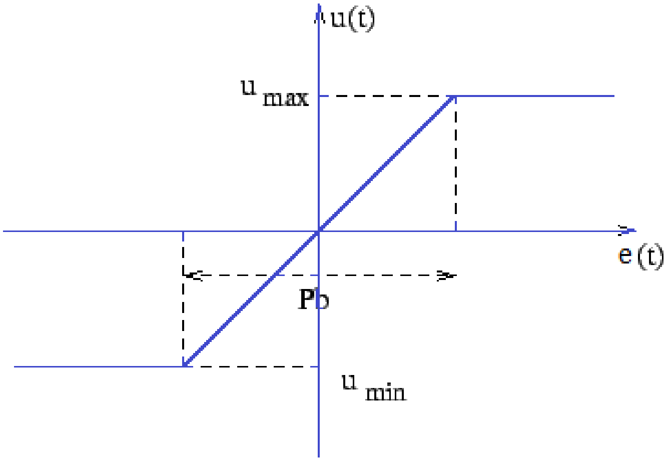

Figure: Banda proporcional e não linearidades.

Diagrama em blocos de um controlador P

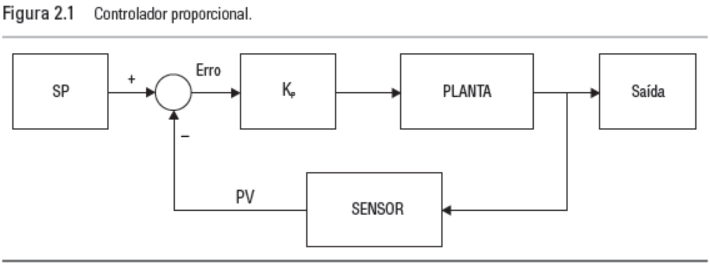

Figure: Diagrama em blocos de um controle proporcional.

Fonte: Figura fornecida como material suplementar do livro contido na Referência [Mário Cesar M. M. de Campos e Hebert C. G. Teixeira, 2008].

Para os atuais controladores que são digitais, é comum a implementação do algoritmo de "velocidade":

$$\Delta u(t) = K_p \Delta e(t) \tag{5}$$

A equação acima é obtida a partir da equação 1 ao se considerar a subtração de dois momentos de tempo $t = k$ (Equação 1) e $t = k-1$:

$$u(k-1) = K_p \Delta e(k-1) + u_o. \tag{6}$$

Banda proporcional

Para uma banda proporcional definida como sendo:

$$\text{BP} = \frac{100(\%)}{K_p}, \tag{7}$$

pode-se escrever:

$$\Delta u(t) = \frac{100}{\text{BP}} \Delta e(t) \tag{8}$$

Ação direta e reversa

Dependendo do fabricante, o erro pode ser definido como:

$$e(t) = y(t) - r(t), \tag{9}$$

ou,

$$e(t) = r(t) - y(t), \tag{10}$$

Existe, ainda, um fator multiplicativo nos controladores que permite inverter o cálculo do erro denominado ação do controlador (A), resultando em:

$$e(t) = e(t)(A), \tag{11}$$

em que $(A) = 1$ ou -1.

Ação direta e reversa

Ação Direta

Definida como sendo o método de cálculo de erro que faz com que, quando o valor do erro aumenta, a saída do controlador também aumenta.

Ação Reversa

Definida como sendo o método de cálculo de erro que faz com que, quando o valor do erro aumenta, a saída do controlador diminua.

Obs.: Essa definição não é adotada por todos os fabricantes. Portanto, verique o manual. A escolha errada da ação poderá levar a instabilidade do sistema.

Resposta ao degrau de um Controlador Proporcional

Figura 2.2 Ação proporcional.

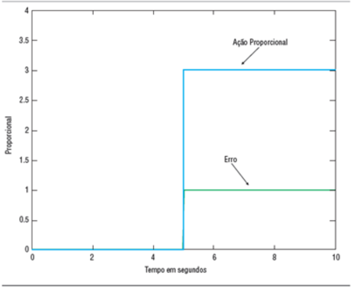

Figure: Resposta de um controle proporcional a um degrau no erro.

Fonte: Figura fornecida como material suplementar do livro contido na Referência [Mário Cesar M. M. de Campos e Hebert C. G. Teixeira, 2008].

Características do controlador P

Resposta transitória

- Quanto maior o valor de K_p maior a velocidade de resposta do controlador e maior o sobressinal;
- Porém, o comportamento pode ser tornar instável ou atingir a região não-linear (saturação).

Características do controlador P

Resposta transitória

- Quanto maior o valor de K_p maior a velocidade de resposta do controlador e maior o sobressinal;
- Porém, o comportamento pode ser tornar instável ou atingir a região não-linear (saturação).

Resposta em regime

- Para que a saída não seja nula o erro precisa ser diferente de zero $u(t) = K_p e(t)$;
- Portanto, nos casos práticos, sempre haverá erro em regime permanente sendo o erro inversamente proporcional ao valor de K_p.

Relação com o lugar das raízes

Exemplo de sistema de 1^a ordem

$$G(s) = \frac{K\tau}{\tau s + 1}$$

Relação com o lugar das raízes

Exemplo de sistema de 1^a ordem

$$G(s) = \frac{K\tau}{\tau s + 1}, \text{ sendo } G(s) = \mathscr{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} = Ku(t)\right\} \tag{12}$$

Relação com o lugar das raízes

Exemplo de sistema de 1ª ordem

$$G(s) = \frac{K\tau}{\tau s + 1}, \text{ sendo } G(s) = \mathscr{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} = Ku(t)\right\} \tag{12}$$

Controle Proporcional do sistema de 1ª ordem

Considere $C(s)$ como sendo a função de transferência do controlador P.

$$C(s) = K_p \tag{13}$$

Relação com o lugar das raízes

Exemplo de sistema de 1^a ordem

$$G(s) = \frac{K\tau}{\tau s + 1} = \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{14}$$

Controle Proporcional do sistema de 1^a ordem

Considere $C(s)$ como sendo a função de transferência do controlador P.

$$C(s) = K_p = \frac{U(s)}{E(s)} \tag{15}$$

Relação com o lugar das raízes

Equação de malha aberta

$$G_{MA}(s) = K_p \frac{K\tau}{\tau s + 1}$$

Relação com o lugar das raízes

Equação de malha aberta

$$G_{MA}(s) = K_p \frac{K\tau}{\tau s + 1} = \frac{Y(s)}{R(s)} \tag{16}$$

Relação com o lugar das raízes

Equação de malha aberta

$$G_{MA}(s) = K_p \frac{K\tau}{\tau s + 1} = \frac{Y(s)}{R(s)} \tag{16}$$

Equação de malha fechada

Considere $C(s)$ como sendo a função de transferência do controlador P.

$$G_{MF}(s) = \frac{G_{MA}(s)}{1 + G_{MA}(s)}$$

Relação com o lugar das raízes

Equação de malha aberta

$$G_{MA}(s) = K_p \frac{K\tau}{\tau s + 1} = \frac{Y(s)}{R(s)} \tag{16}$$

Equação de malha fechada

Considere $C(s)$ como sendo a função de transferência do controlador P.

$$G_{MF}(s) = \frac{G_{MA}(s)}{1 + G_{MA}(s)} = \frac{K_p \frac{K\tau}{\tau s+1}}{1 + K_p \frac{K\tau}{\tau s+1}} = \frac{K_p K\tau}{\tau s + 1 + K_p K\tau} \tag{17}$$

Relação com o lugar das raízes

Equação de malha aberta

$$G_{MA}(s) = K_p \frac{K}{\tau s + 1} = \frac{Y(s)}{R(s)} \tag{18}$$

Equação de malha fechada

Considere $C(s)$ como sendo a função de transferência do controlador P.

$$G_{MF}(s) = \frac{K_p K}{\tau s + 1 + K_p K \tau} = \frac{K_p K}{s + \frac{1}{\tau} + K_p K}$$

Relação com o lugar das raízes

Equação de malha aberta

$$G_{MA}(s) = K_p \frac{K}{\tau s + 1} = \frac{Y(s)}{R(s)} \tag{18}$$

Equação de malha fechada

Considere $C(s)$ como sendo a função de transferência do controlador P.

$$G_{MF}(s) = \frac{K_p K}{\tau s + 1 + K_p K \tau} = \frac{K_p K}{s + \frac{1}{\tau} + K_p K} = \frac{K'}{s + p'} \tag{19}$$

Relação com o lugar das raízes

Quanto ao lugar das raízes

- Para o exemplo citado, o acréscimo de um controle proporcional não modifica o desenho (formato) do lugar das raízes, pois o pólo de malha aberta não sofre alteração;
- Porém, o pólo de malha fechada dependerá do valor de K_p, o que altera a constante de tempo do sistema em malha fechada (pólo $= 1/\tau$).

Relação com o lugar das raízes

Quanto ao lugar das raízes

- Para o exemplo citado, o acréscimo de um controle proporcional não modifica o desenho (formato) do lugar das raízes, pois o pólo de malha aberta não sofre alteração;
- Porém, o pólo de malha fechada dependerá do valor de K_p, o que altera a constante de tempo do sistema em malha fechada (pólo $= 1/\tau$).

Quanto a estabilidade assintótica

- Se o ponto de equilíbrio for estável a estabilidade não será afetada com mundanças no valor de K_p.
- Se for instável, poderá ser estabilizado pelo ajuste de K_p (pólo de malha fechada $= 1/\tau + K_pK$)

Relação com o lugar das raízes

$$G(s) = \frac{1}{s-3} \tag{20}$$

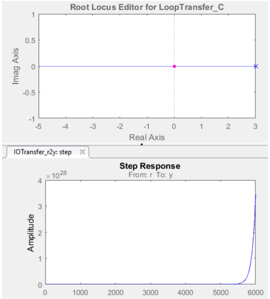

Figure: Lugar das raízes e resposta ao Degrau para $K_p = 2,99$

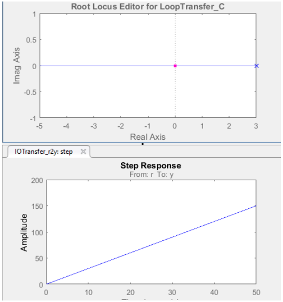

Figure: Lugar das raízes e resposta ao Degrau para $K_p = 3,00$

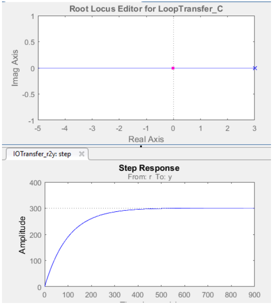

Figure: Lugar das raízes e resposta ao Degrau para $K_p = 3,01$

Relação com o lugar das raízes

Exemplo de integrador puro

$$G(s) = \frac{1}{s} \tag{21}$$

Considere o controlador P:

$$C(s) = K_p \tag{22}$$

Relação com o lugar das raízes

Exemplo de integrador puro

$$G(s) = \frac{k_p}{s} \tag{23}$$

Considere o controlador P:

$$C(s) = \frac{K_p}{s + K_p} \tag{24}$$

Relação com o lugar das raízes

Exemplo de sistema de segunda ordem

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{25}$$

Relação com o lugar das raízes

Exemplo de sistema de segunda ordem

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{25}$$

Considere o controlador P:

$$C(s) = K_p \tag{26}$$

Relação com o lugar das raízes

Função de transferência em malha aberta

$$G_{MA}(s) = K_p \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{27}$$

Relação com o lugar das raízes

Função de transferência em malha aberta

$$G_{MA}(s) = K_p \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{27}$$

Função de transferência em malha fechada

$$G_{MF}(s) = \frac{K_p\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 + K_p\omega_n^2}$$

Relação com o lugar das raízes

Função de transferência em malha aberta

$$G_{MA}(s) = K_p \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{27}$$

Função de transferência em malha fechada

$$G_{MF}(s) = \frac{K_p\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 + K_p\omega_n^2} = \frac{K_p\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + (1 + K_p)\omega_n^2} \tag{28}$$

Relação com as características da resposta sub-amortecida

A resposta ao degrau de um sistema de segunda ordem sub-amortecido pode ser expressa na forma

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_d t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right), \quad t \geq 0$$

Lembrando que: $\omega_d = W_n\sqrt{1-\zeta^2}$ é a frequência amotercida, ω_n a frequência natural e ζ é o coeficiente de amortecimento.

Obs.: Slide adaptado das aulas do prof. Márcio Junior Lacerda sob sua autorização.

Relação com a constante de tempo

A constante de tempo do sistema de segunda ordem é $\tau = \frac{1}{\zeta\omega_n}$. Sendo inversamente proporcional ao valor absoluto da parte real dos pólos de $G(s)$.

Obs.: Slide adaptado das aulas do prof. Márcio Junior Lacerda sob sua autorização.

Relação com as características da resposta sub-amortecida

Muitas características da resposta sub-amortecida de um sistema de segunda ordem podem ser expressas por meio dos parâmetros ζ e ω_n.

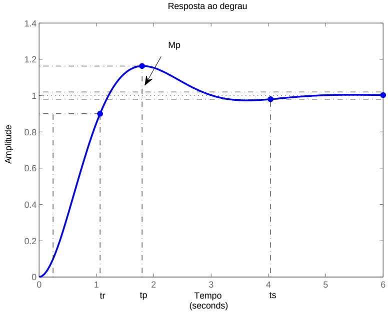

Figure: Resposta ao degrau unitário para $\omega_n = 2$ e $\zeta = 0.5$.

Obs.: Slide adaptado das aulas do prof. Márcio Junior Lacerda sob sua autorização.

Relação com o Tempo de subida - t_r

- Pode ser definido como o intervalo de tempo necessário para que a resposta vá de 10% a 90% do seu valor final.
- Matematicamente, $t_r = t_2 - t_1$, onde t_1 e t_2 são tempos tais que $y(t_1) = 0.1$ e $y(t_2) = 0.9$.
- O tempo de subida possui uma pequena dependência do fator de amortecimento.
- Admitindo valor médio $\zeta = 0.5$, o tempo de subida pode ser aproximado por

$$t_r = \frac{1.8}{\omega_n}$$

O fator determinante para o tempo de subida é a frequência natural do sistema.

Obs.: Slide adaptado das aulas do prof. Márcio Junior Lacerda sob sua autorização.

Relação com a Máxima sobre-elevação - $M_p(\%)$

É o máximo valor da resposta medida a partir do seu valor final.
A máxima sobre-elevação é obtida resolvendo-se $\dot{y}(t_p) = 0$ (condição de inclinação nula para um ponto de máximo de $y(t)$) para o menor t_p possível, chamado de tempo de pico.

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} \times 100\%, \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \; (s)$$

A sobre-elevação depende apenas do fator de amortecimento do sistema; o tempo de pico depende também da frequência natural.
Obs.: Slide adaptado das aulas do prof. Márcio Junior Lacerda sob sua autorização.

Relação com o Tempo de acomodação - t_s

Tempo necessário para que a resposta alcance e permaneça dentro de uma faixa percentual do seu valor final. Se utilizarmos uma faixa de 2%, o tempo de acomodação será de aproximadamente quatro constantes de tempo.

$$t_s = 4\tau = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

O tempo de acomodação depende tanto de ω_n quanto de ζ.
Obs.: Slide adaptado das aulas do prof. Márcio Junior Lacerda sob sua autorização.

References

Campos e Teixeira (2008)
Controle Típicos de equipamentos e processos industriais
Ediatora Blucher

Fim