Aula 3: Sistemas e Modelos

prof. Dr. Eduardo Bento Pereira

Universidade Federal de São João del-Rei

ebento@ufsj.edu.br

19 de agosto de 2019.

Visão Geral

1. Modelagem de sistemas dinâmicos
   - Modelos lineares e suas representações
2. Identificação de sistemas
3. Estabilidade de sistemas de controle
   - Pontos de equilíbrio

Diferença entre variável e parâmetro

componentes básicos de um modelo:

1. o tempo (variável independente);
2. as variáveis (dependentes);
3. os parâmetros (independem das variáveis).

Exemplo: Pêndulo simples

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta(t), \tag{1}$$

em que:
t é o tempo, uma variável que evolui livremente e pode ser medida em diferentes escalas (Monteiro, 2011);
θ é o ângulo, variável que evolui com o tempo e g e l, são parâmetros, que nesta equação, são considerados constantes.

Equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dy^N(t)}{dt^N} + a_{N-1}\frac{dy^{N-1}(t)}{dt^{N-1}} + \ldots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$
$$= b_M\frac{du^M(t)}{dt^M} + b_{M-1}\frac{du^{M-1}(t)}{dt^{MN-1}} + \ldots + b_1\frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \tag{2}$$

Equações de diferenças

$$
\begin{aligned}
&y(k+n) - a_{n-1}y(k+n-1) + \ldots + a_0 y(k) = \\
&= b_n u(k+n) + b_{n-1}u(k+n-1) + \ldots + b_0 u(k)
\end{aligned} \tag{3}
$$

Funções de transferência

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \ldots + a_1 s + a_0} \tag{4}$$

Equações diferenciais discretas

A transformada Z.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_M z^M + b_{n-1} z^{M-1} + \ldots + b_1 z + b_0}{z^N + a_{n-1} z^{N-1} + + \ldots + a_1 z + a_0} \tag{5}$$

Espaço de Estados

Considere a representação linear, na forma padrão, para tempo contínuo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \tag{6}$$

em que $t \in \mathbb{R}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de entradas de controle, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ is the outputé o vetor de saídas, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de estados, $B \in \mathbb{R}^{q \times p}$ é a matriz de entradas, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ é a matriz de saídas e $D \in \mathbb{R}^{p \times n}$ é a matriz de transmissão.

Espaço de Estados

Incluindo perturbações de estado!

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ew(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \tag{7}$$

em que $t \in \mathbb{R}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de entradas de controle, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ is the outputé o vetor de saídas, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de estados, $B \in \mathbb{R}^{q \times p}$ é a matriz de entradas, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ é a matriz de saídas e $D \in \mathbb{R}^{p \times n}$ é a matriz de transmissão. E a matriz de perturbações e $w(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de variáveis de perturbações de estado.

Espaço de Estados

Incluindo perturbações de entrada!

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B[u(t) + p(t)] \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \tag{8}$$

em que $t \in \mathbb{R}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de entradas de controle, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ is the outputé o vetor de saídas, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é a matriz de estados, $B \in \mathbb{R}^{q\times p}$ é a matriz de entradas, $C \in \mathbb{R}^{q\times n}$ é a matriz de saídas e $D \in \mathbb{R}^{p\times n}$ é a matriz de transmissão. $p(t) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de variáveis de perturbações de entrada.

Espaço de Estados

Incluindo ruídos de medição!

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + Fv(t), \end{cases} \tag{9}$$

em que $t \in \mathbb{R}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de entradas de controle, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ is the outputé o vetor de saídas, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é a matriz de estados, $B \in \mathbb{R}^{q\times p}$ é a matriz de entradas, $C \in \mathbb{R}^{q\times n}$ é a matriz de saídas e $D \in \mathbb{R}^{p\times n}$ é a matriz de transmissão. F a matriz de ruídos e $v(t) \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de variáveis aleatórias representando o ruído de medição para cada instante de tempo t.

Espaço de Estados em tempo discreto

$$
\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k), \end{cases} \tag{10}
$$

em que $k \in \mathbb{N}$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u(k) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de entradas de controle, $y(k) \in \mathbb{R}^q$ is the outputé o vetor de saídas, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de estados, $B \in \mathbb{R}^{q \times p}$ é a matriz de entradas, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ é a matriz de saídas e $D \in \mathbb{R}^{p \times n}$ é a matriz de transmissão.

Do claro ao oculto!

- Identificação Caixa Branca (Transparente);
- Identificação Caixa Cinza (Translúcida);
- Identificação Caixa Preta (Opaca).

Do claro ao oculto!

- Identificação Caixa Branca (Transparente);
- Identificação Caixa Cinza (Translúcida);
- Identificação Caixa Preta (Opaca).

- Obtenção de um modelo a partir de dados experimentais;
- Sinais de excitação;
- dados de teste, checagem e validação.
- Há um conhecimento prévio sobre o sistema?

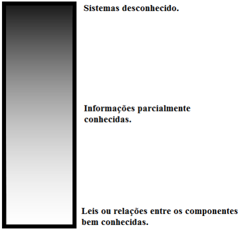

Figure: Identificao de sistemas.

Sinais de excitação

A caixa de presente fechada!

Sinal PRBS

O sinal PRBS (do inglês *Pseudo Random Binary Signal*) é um sinal de excitação muito utilizado para identificação de sistemas.

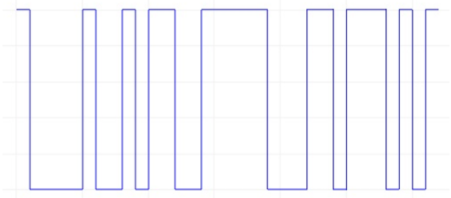

Figure: Sinal Binário Pseudo aleatório.

Resposta em frequência

Diagrama de Bode e sinais senoidais

Para um sistema linear, é possível se obter um modelo do sistema físico a partir da resposta deste sistema a uma série de sinais senoidais de modo a se obter módulo e fase para cada frequncia usada.

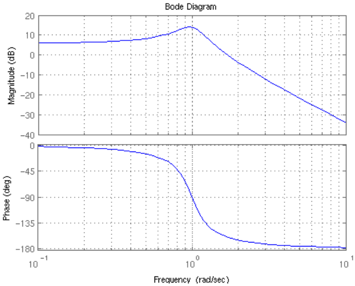

Figure: Diagrama de Bode.

Simulação de sistemas

Por que simular?

A simulação de sistemas é uma ferramenta essencial no estudo de sistemas dinâmicos e no projeto de controladores.

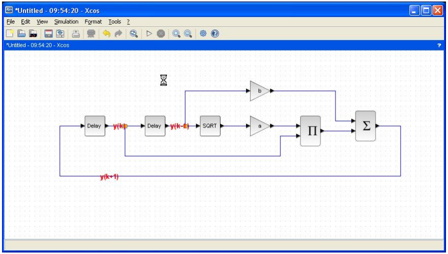

Figure: Simulação de sistemas dinâmicos usando o Scilab.

Simulação de sistemas

Como simular!

A simulação precisa ser bem planejada de modo a permitir a análise adequada dos resultados.

- Tempo de simulação;

Simulação de sistemas

Como simular!

A simulação precisa ser bem planejada de modo a permitir a análise adequada dos resultados.

- Tempo de simulação;
- passo fixo ou variável;

Simulação de sistemas

Como simular!

A simulação precisa ser bem planejada de modo a permitir a análise adequada dos resultados.

- Tempo de simulação;
- passo fixo ou variável;
- parâmetros de projeto;

Simulação de sistemas

Como simular!

A simulação precisa ser bem planejada de modo a permitir a análise adequada dos resultados.

- Tempo de simulação;
- passo fixo ou variável;
- parâmetros de projeto;
- escolha do método numérico;

Simulação de sistemas

Como simular!

A simulação precisa ser bem planejada de modo a permitir a análise adequada dos resultados.

- Tempo de simulação;
- passo fixo ou variável;
- parâmetros de projeto;
- escolha do método numérico;
- armazenamento dos dados;

Simulação de sistemas

Como simular!

A simulação precisa ser bem planejada de modo a permitir a análise adequada dos resultados.

- Tempo de simulação;
- passo fixo ou variável;
- parâmetros de projeto;
- escolha do método numérico;
- armazenamento dos dados;
- análise dos dados.

Simulação de sistemas

Como simular!

A simulação precisa ser bem planejada de modo a permitir a análise adequada dos resultados.

- Tempo de simulação;
- passo fixo ou variável;
- parâmetros de projeto;
- escolha do método numérico;
- armazenamento dos dados;
- análise dos dados.
- efeito da variação paramétrica.

Ponto de equilíbrio

Sistemas autônomos

O ponto de equilíbrio é aquele no qual a variável independente não possui alteração em seus valores. Desta forma, se um sistema for autônomo (valor de entrada nulo) iniciado no valor de equilíbrio, o mesmo permanecerá neste valor indefinidamente. Para este caso, pode se enunciar que:

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = 0 \tag{11}$$

em que $\bar{y}(t)$ é o valor de $y(t)$ no equilíbrio.

Ponto de equilíbrio

Sistemas autônomos

O ponto de equilíbrio é aquele no qual a variável independente não possui alteração em seus valores. Desta forma, se um sistema for autônomo (valor de entrada nulo) iniciado no valor de equilíbrio, o mesmo permanecerá neste valor indefinidadamente. Para este caso, pode se enunciar que:

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = 0 \tag{11}$$

em que $\bar{y}(t)$ é o valor de $y(t)$ no equilíbrio.

Sistemas não-autônomos

Para sistemas não-autônomos o ponto de equilíbrio dependerá do valor do sinal de entrada.

Fim