



DINCON 2017

CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES  
30 de outubro a 01 de novembro de 2017 – São José do Rio Preto/SP

---

## Cálculo do maior expoente de Lyapunov baseado no limite inferior do erro e estimador recursivo

Márcia Luciana da Costa Peixoto<sup>1</sup>

Marco Túlio Rezende Matos<sup>2</sup>

Erivelton Geraldo Nepomuceno<sup>3</sup>

Samir Angelo Milani Martins<sup>4</sup>

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Departamento de Engenharia Elétrica,  
Grupo de Controle e Modelagem de Sistemas, UFSJ, São João del-Rei, MG

**Resumo** Neste trabalho é apresentado uma abordagem alternativa para calcular o maior expoente de Lyapunov baseado no cálculo do limite inferior do erro. Utilizando o método dos mínimos quadrados recursivos, calculou-se o coeficiente angular da reta obtida pelo limite inferior do erro, que corresponde ao expoente de Lyapunov, conforme é apresentado em [7]. Para atestar a convergência, utiliza-se um critério de parada baseado na estabilização do valor do expoente. A partir disso, tem-se menor esforço computacional para a estimativa do expoente de Lyapunov. O método foi validado nos seguintes sistemas: Mapa Logístico, Hénon, Lorenz e Rössler.

**Palavras-chave.** Sistemas não lineares, Expoente de Lyapunov, Limite Inferior do Erro, Estimador Recursivo, Extensão Intervalar.

## 1 Introdução

Sistemas dinâmicos caóticos têm recebido grande atenção nos últimos anos [3], principalmente após Lorenz [5] descobrir que a predição a longo prazo de alguns sistemas dinâmicos não lineares seria extremamente complicada. Em sistemas caóticos, é possível perceber que condições iniciais ligeiramente diferentes dadas a um mesmo sistema, alteram substancialmente o resultado final. Assim, em duas trajetórias de um sistema caótico com condições iniciais muito próximas, é possível observar que, depois de um número finito

---

<sup>1</sup>marciapeixoto93@hotmail.com

<sup>2</sup>mtrmatos@hotmail.com

<sup>3</sup>nepomuceno@ufs.br

<sup>4</sup>martins@ufs.br

de iterações, as sequências se distanciam exponencialmente. Este fato torna o sistema imprevisível. Alexander M. Lyapunov (1857-1918) desenvolveu um método de medida do afastamento de uma função de dois pontos iniciais considerando que a taxa de distanciamento entre eles seja exponencial. Este método ficou conhecido como o expoente de Lyapunov.

Desde o trabalho de Oseledec [11] vários métodos numéricos para estimar expoentes de Lyapunov foram apresentados, tal como os propostos por Wolf [15], Kantz [4] e Rosenstein [12]. Recentemente, Mendes e Nepomuceno [7], apresentaram uma abordagem robusta e muito mais simples que os demais métodos para obter o expoente de Lyapunov. Naquele trabalho, é apresentado um método para produzir duas pseudo-órbitas por meio de duas extensões intervalares do sistema original, em que o cálculo do expoente de Lyapunov consiste em um ajuste por mínimos quadrados da reta do limite inferior do erro, calculado a partir das duas extensões intervalares. Deste modo, o coeficiente angular da reta obtida pelos mínimos quadrados é o valor estimado para o expoente de Lyapunov. Entretanto, neste método utiliza-se os dados em batelada, ou seja, utiliza-se todos os dados de uma só vez para a estimação dos parâmetros do polinômio.

A partir disso, com o intuito de diminuir o esforço computacional e verificar a convergência do expoente de Lyapunov no decorrer do tempo, neste artigo é proposto o método de mínimos quadrados recursivos para estimar o maior expoente de Lyapunov, baseado em [7]. Ao invés vez de determinar o expoente com todos os dados simulados disponíveis, faz-se o cálculo dos dados do sistema simultaneamente com a estimativa do expoente de Lyapunov. Com este método, gera-se os valores do expoente de Lyapunov ponto a ponto e utiliza-se um critério para mensurar a convergência da estimação. O método é aplicado com sucesso a quatro sistemas dinâmicos caóticos bem conhecidos, os mesmos exemplos usados em [12, 7]: Mapa Logístico [6], Mapa Hénon [2], Lorenz [5] e Rössler [13].

O restante do trabalho está organizado em: na seção 2 são mostrados os conceitos básicos. Na seção seguinte os métodos utilizados, na seção 4 os resultados são exibidos e por fim são apresentadas as conclusões obtidas neste trabalho.

## 2 Conceitos Preliminares

Esta seção é uma adaptação e uma extensão do trabalho [9], onde é apresentado o limite inferior do erro aplicado a sistemas não lineares contínuos. Primeiro, algumas definições sobre funções recursivas, extensão intervalar e pseudo-órbitas são introduzidas. Em seguida é apresentado o teorema que define o limite inferior do erro, cuja prova se encontra em [9].

Uma função recursiva pode ser definida como:

**Definição 1.** *Seja  $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$  um espaço métrico com  $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ , tem-se que:*

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (1)$$

Séries de tempo discreto podem ser geradas por um procedimento iterativo simples de (1). A sequência  $\{x_n\}$  obtida pela iteração da Equação 1, a partir da condição inicial  $x_0$ , é chamada de órbita de  $x_0$  [10].

Seja  $f$  uma função definida por uma variável real  $x$ . Moore [8] estabelece a seguinte definição:

**Definição 2.** *Uma função  $F$  é uma extensão intervalar de  $f$  definida para mapear uma variável intervalar  $X$ , tal que para argumentos reais tem-se:*

$$F([x,x]) = f(x).$$

Considere o seguinte exemplo da Definição 2:

**Exemplo 1.** *Seja as seguintes extensões intervalares:*

$$G(X) = rX(1 - X) \tag{2}$$

$$H(X) = r(X(1 - X)) \tag{3}$$

$$L(X) = rX - rX^2. \tag{4}$$

Se  $r = 3,7$  e  $X = [0,1,0,25]$ , então tem-se:

$$\begin{aligned} G([0,1;0,25]) &= 3,7[0,1;0,25](1 - [0,1;0,25]) \\ &= [0,2774;0,8326], \\ H([0,1;0,25]) &= 3,7([0,1;0,25](1 - [0,1;0,25])) \\ &= [0,2774;0,8326], \\ L([0,1;0,25]) &= 3,7[0,1;0,25] - 3,7([0,1;0,25])^2 \\ &= [0,1387;0,8881]. \end{aligned}$$

Uma órbita associada a um mapa pode ser definida como:

**Definição 3.** *Órbita é uma sequência de valores de um mapa, representada por  $x_n = [x_0, x_1, \dots, x_n]$ .*

**Definição 4.** *Seja  $i \in \mathbb{N}$  uma pseudo-órbita, ou seja, uma aproximação de uma órbita representada por  $\hat{x}_{i,n} = [\hat{x}_{i,0}, \hat{x}_{i,1}, \dots, \hat{x}_{i,n}]$  tal que,  $|x_n - \hat{x}_{i,n}| \leq \delta_{i,n}$ , em que  $\delta_{i,n} \in \mathbb{R}$  é o limite e  $\delta_{i,n} \geq 0$ .*

Não existe uma única pseudo-órbita, pois existem diferentes *hardware*, *software*, padrões de precisão numérica e esquemas de discretização, que podem produzir diferentes resultados para cada extensão intervalar. Em [9] prova-se o seguinte teorema, que permite dimensionar um limite inferior do erro para pseudo-órbitas:

**Teorema 2.** *Considere duas pseudo-órbitas  $\{\hat{x}_{a,n}\}$  e  $\{\hat{x}_{b,n}\}$  derivadas de duas extensões intervalares. Seja  $\delta_{\alpha,n} = \frac{|\hat{x}_{a,n} - \hat{x}_{b,n}|}{2}$  o limite inferior do erro de um mapa  $f(x)$ , então  $\delta_{a,n} \geq \delta_{\alpha,n}$  ou  $\delta_{b,n} \geq \delta_{\alpha,n}$ .*

## 2.1 Mínimos Quadrados Recursivos

O sinal a ser estimado pelo método dos mínimos quadrados recursivos é representado pela expressão:  $y(k) = \psi^T(k-1)\theta_k^{MQR} + \xi(k)$  [1]. Onde as sequências das entradas do sistema são representadas pelos vetores  $y(k)$  e  $\psi^T(k-1)$ , sendo  $k = 1, \dots, N$ , sendo  $N$  um número arbitrário de pontos, pois, não é necessário a consideração de um tamanho limite para os dados, devido ao seu caráter de incorporação de novos dados para a estimação dos parâmetros. As expressões para a determinação dos parâmetros pelo método de mínimos quadrados recursivo são apresentadas nas Equações (5)-(7), [1]:

$$K_k = \frac{P_{k-1}\psi_k}{\psi_k^T P_{k-1} \psi_k + 1}, \quad (5)$$

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + K_k \left[ y(k) - \psi_k^T \hat{\theta}_{k-1} \right], \quad (6)$$

$$P_k = P_{k-1} - K_k \psi_k^T P_{k-1}, \quad (7)$$

onde  $K$  é a matriz de ganhos,  $P$  é a matriz de covariância,  $\psi$  a matriz de regressores,  $\theta$  é o vetor de parâmetros, ambos calculados na iteração  $k$  e  $y(k)$  é o vetor de variáveis dependentes.

## 3 Metodologia

No método apresentado em [7], o maior expoente de Lyapunov é estimado a partir da inclinação da reta derivada do limite inferior do erro ao considerar duas extensões intervalares do sistema original. Entretanto, neste método utiliza-se os dados em batelada, ou seja, utiliza-se todos os dados de uma só vez para a estimação dos parâmetros do polinômio. Neste trabalho, determina-se estes mesmos parâmetros a partir de dados calculado e disponibilizados sequencialmente. Para tal operação, utiliza-se o método de mínimos quadrados recursivos (MQR) [1].

Com os valores dos coeficientes de Lyapunov, determinados com MQR, necessita-se de um critério para averiguar a convergência destes valores. É proposto um critério de parada adaptado de Takahashi [14] e baseia-se na geração de um ponto ótimo em tempo real. Deste modo, utiliza-se o critério mostrado no Algoritmo 1. De forma que: utilizando, arbitrariamente, os últimos cinco valores da estimação do expoente de Lyapunov, determina-se o máximo, o mínimo e a média dos dados. A condição de parada é feita quando a diferença relativa à média dos coeficientes de Lyapunov serem menores que um valor predeterminado,  $\xi$ . Os sistemas utilizados neste trabalho são apresentados na Tabela 1. As extensões intervalares utilizadas neste artigo são as mesmas que foram utilizadas em [7], não sendo repetidas neste trabalho.

## 4 Resultados

Nesta seção são apresentados os resultados da aplicação do método proposto em quatro sistemas bem conhecidos, listados na Tabela 1. As simulações são feitas pelo método de

---

**Algoritmo 1: CRITÉRIO DE PARADA**


---

```

1  $x_{5+} \leftarrow \max\{x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-5}\}$ 
2  $x_{5-} \leftarrow \min\{x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-5}\}$ 
3  $x_{média} \leftarrow \text{média}\{x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-5}\}$ 
4 se  $\frac{|x_{5+} - x_{5-}|}{|x_{média}|} < \xi$  então
5   | Parada  $\leftarrow$  verdadeira
6 fim

```

---

Tabela 1: Sistemas dinâmicos caóticos estudados em [12]. O tempo de amostragem é denotado por  $\Delta t(s)$ .  $\xi$  é a precisão relativa usada como critério de parada no algoritmo. A condição inicial é adotada arbitrariamente, mas fixa para as duas extensões intervalares.

Sistema	Equações	Parâmetros	$\Delta t(s)$	$\xi$	Condição Inicial
Logística	$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$	$\mu = 4,0$	1	0,01	$x_0 = 2/3$
Hénon	$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n$ $y_{n+1} = bx_n$	$a = 1,4$ $b = 0,3$	1	0,01	$x_0 = 0,3$ $y_0 = 0,3$
Lorenz	$\dot{x} = \sigma(y - x)$ $\dot{y} = x(\rho - z) - y$ $\dot{z} = xy - \beta z$	$\sigma = 16,0$ $\rho = 45,92$ $\beta = 4,0$	0,01	0,0001	$x(0) = 1$ $y(0) = 0,5$ $z(0) = 0,9$
Rössler	$\dot{x} = -y - z$ $\dot{y} = x + ay$ $\dot{z} = b + z(x - c)$	$a = 0,15$ $b = 0,20$ $c = 10,0$	0,10	0,0001	$x(0) = -1$ $y(0) = 1$ $z(0) = 1$

Runge-Kutta de quarta ordem. Todos os resultados, são obtidos usando dupla precisão (64 bits).

Na Figura 1 é apresentado a evolução do expoente de Lyapunov no tempo, o valor calculado pelo método é indicado, porém continuou-se a simulação para mostrar que realmente há a convergência do maior do expoente de Lyapunov. A Tabela 2 apresenta os resultados obtidos para a estimação do maior expoente de Lyapunov, os valores encontrados estão em bom acordo com os valores encontrados por [7, 12]. Além disso, o número de iterações também são apresentados e são menores que os valores mostrados em [7, 12].

Tabela 2: Resultados obtidos para o cálculo do expoente de Lyapunov pelo método proposto, por Rosenstein [12] e pelo método de Mendes e Nepomuceno [7] bem como as iterações (N) necessárias em ambos os métodos.

Sistema	Roseinstein [12]		Mendes e Nepomuceno [7]		Método Proposto	
	N	$\lambda$	N	$\lambda$	N	$\lambda$
Logístico	200	0,705	53	0,687	39	0,700
Hénon	200	0,416	105	0,417	84	0,403
Lorenz	4000	1,392	2585	1,497	1363	1,406
Rössler	2000	0,088	4067	0,092	1413	0,098

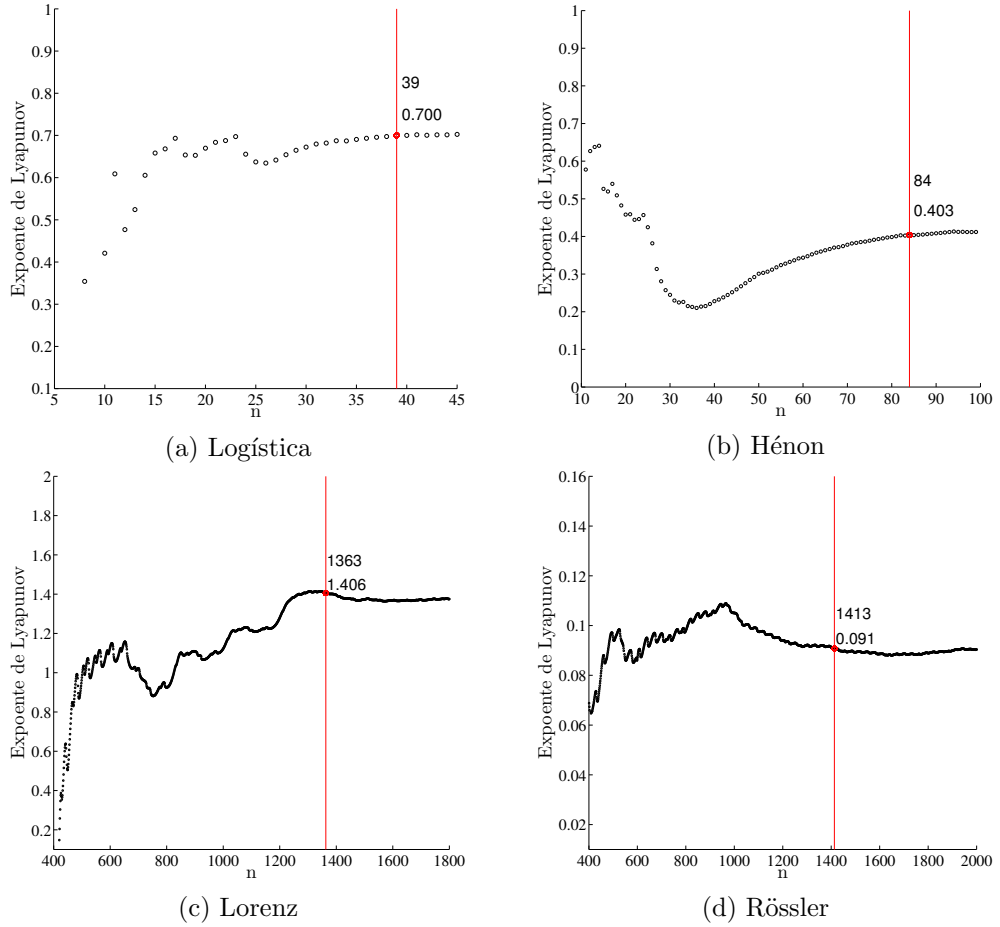


Figura 1: Convergência do expoente de Lyapunov dos sistemas estudados. Em preto a variação do expoente com o número de iterações necessárias e o expoente de Lyapunov, respectivamente. A reta vertical vermelha indica a iteração indicada para a parada de acordo com o  $\xi$  adotado.

## 5 Conclusões

Neste artigo é apresentada uma abordagem para o cálculo do maior expoente de Lyapunov por meio da obtenção do limite inferior do erro e estimador recursivo. O método utiliza a premissa de minimizar o número de pontos utilizados para a estimação do mesmo, com o uso do estimador de mínimos quadrados recursivo. Os coeficientes apresentados nesta artigo se mostram coerentes com os determinados na literatura com a vantagem da utilização de menos pontos para sua determinação.

A contribuição deste trabalho é a determinação do maior expoente de Lyapunov com um menor número de pontos se comparado com [7], justificando a metodologia aplicada. Com este menor número de pontos, o esforço computacional é minimizado.

Pretende-se, em trabalhos futuros, fazer a estimação do maior expoente de Lyapunov em outra representações matemáticas, tais como, redes neurais com o intuito da minimização do número de pontos para a estimação do maior expoente de Lyapunov.

## Referências

- [1] L. A. Aguirre, Introdução à identificação de sistemas, Técnicas lineares e não lineares aplicadas a sistemas reais, Editora UFMG, Edição 4, (2015).
- [2] M. Hénon, A two-dimensional mapping with a strange attractor, Communications in Mathematical Physics, vol. 50, 69–77, (1976).
- [3] B. Kahng, On devaney’s definition of chaos for discontinuous dynamical systems, in Proceedings of the 15th American Conference on Applied Mathematics, World Scientific and Engineering Academy and Society, (2009).
- [4] H. Kantz, A robust method to estimate the maximal lyapunov exponent of a time-series, Physics Letters A, vol. 185, 77–87, (1994).
- [5] E. N. Lorenz, Deterministic Nonperiodic Flow, Journal of the Atmospheric Sciences, vol. 20, 130-141, (1963).
- [6] R. M. May, Simple mathematical models with very complicated dynamics, Nature, vol. 261, 459–67, (1976).
- [7] E. M. Mendes, A. M., Nepomuceno, E. G., A very simple method to calculate the (positive) largest lyapunov exponent using interval extensions, International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. 26, 1650226, (2016).
- [8] R. E. Moore, Methods and applications of interval analysis, SIAM, vol. 2, (1979).
- [9] E. G. Nepomuceno and S. A. M. Martins, A lower-bound error for free-run simulation of the polynomial narmax, Systems Science & Control Engineering, vol. 4, 50–58, (2016).
- [10] E. G. Nepomuceno, Convergence of recursive functions on computers, The Journal of Engineering, Institution of Engineering and Technology, 1-3, (2014).
- [11] V. I. Oseledec, The Multiplicative Ergodic Theorem: The Lyapunov Characteristic Numbers of Dynamical Systems, Transactions of the Moscow Mathematical Society, vol. 19, 197–231, (1968).
- [12] M. T. Rosenstein, J. J. Collins, and C. J. De Luca, A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets, Physica D: Nonlinear Phenomena, vol. 65, 117-134, (1993).
- [13] O. Rössler, An equation for continuous chaos. Physics Letters A, vol. 57, 397–398, (1976).
- [14] R. H. C. Takahashi, Otimização escalar e vetorial, volume 1: Conceitos preliminares, Relatório Técnico, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, (2007).
- [15] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vastano, Determining lyapunov exponents from a time series, Physica D: Nonlinear Phenomena, vol. 16, 285-317, (1985).