ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE SISTEMAS INCERTOS USANDO FUNÇÕES DE LYAPUNOV COM DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR DOS ESTADOS

Paulo S. Pessim*, Bruna de Oliveira*, Márcio J. Lacerda*

*Grupo de Controle e Modelagem (GCoM)
Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade Federal de São João del-Rei
Pça. Frei Orlando, 170 - Centro- 36307-352 - São João del-Rei, MG, Brasil

Emails: paulopessim777@hotmail.com, brunahh.oliveira@hotmail.com, lacerda@ufsj.edu.br

Abstract— This paper is concerned with the stability problem of uncertain linear time-invariant systems in polytopic domains. The main contribution is to provide a systematic procedure to check the stability of continuous-time uncertain systems by using Lyapunov functions within higher order derivatives of the states. The formulation presented in the paper makes use of an augmented Lyapunov matrix that also can be considered in a block diagonal form. The sufficient conditions are given in terms of robust Linear Matrix Inequalities that can be solved by using available computational packages. Numerical examples from the literature illustrate the performance of the proposed method when compared with other approaches available in the literature.

Keywords— Robust stability, Lyapunov functions, continuous-time uncertain systems, polytopic uncertainties

Resumo— Este artigo trata do problema de estabilidade de sistemas lineares incertos invariantes no tempo em domínios politópicos. A principal contribuição é a apresentação de um procedimento sistemático para verificar a estabilidade de sistemas incertos contínuos no tempo, usando funções de Lyapunov com derivadas de ordem superior nos estados. A formulação apresentada faz uso de uma matriz aumentada de Lyapunov que também pode ser considera na forma bloco diagonal. As condições suficientes são dadas na forma de desigualdades matriciais lineares robustas que podem ser resolvidas usando pacotes computacionais existentes. Exemplos numéricos retirados da literatura ilustram o desempenho do método proposto quando comparado a outras técnicas disponíveis na literatura.

Palavras-chave— Estabilidade robusta, Funções de Lyapunov, sistemas incertos contínuos no tempo, incertezas politópicas

1 Introdução

A utilização da teoria de Lyapunov para análise de sistemas provou ser uma poderosa ferramenta para garantir a estabilidade de sistemas dinâmicos (Khalil, 2002). Uma das vantagens da utilização da teoria de Lyapunov, é o fato das condições poderem ser escritas na forma de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*) de uma forma simples. A utilização de LMIs para análise e projeto de sistemas de controle tornou-se frequente devido a sua consistência e pela sua capacidade de lidar com a presença de incertezas nos modelos (Boyd et al., 1994).

A condição baseada na estabilidade quadrática foi a primeira a ser usada para certificar a estabilidade de sistemas incertos lineares invariantes no tempo (LIT) contínuos no tempo com incertezas em domínio politópico (Barmish, 1985). Entretanto, o uso de uma matriz de Lyapunov comum para todo o domínio incerto pode ser conservador em alguns casos. Para reduzir o conservadorismo das condições, as principais contribuições foram no sentido de modificar a estrutura da matriz de Lyapunov, considerando funções de Lyapunov afins (Geromel et al., 1998; Trofino, 1999; Peaucelle et al., 2000; Leite e Peres, 2003) e funções de Lyapunov polinomialmente dependente dos parâmetros (Chesi et al., 2005; Oliveira e Peres, 2006; Scherer, 2006; Oliveira e Peres, 2007; Chesi, 2008) para certificar a estabilidade de sistemas incertos LIT.

Em uma outra direção, em Ebihara et al. (2005) derivadas de ordem superior dos estados (limitadas à terceira ordem) foram usadas para construir uma função de Lyapunov aumentada. O trabalho foi estendido em Peaucelle et al. (2007) considerando uma função de Lyapunov composta por um número genérico de derivadas de ordem superior dos estados para tratar do problema de separação topológica. Outro trabalho relacionado é Ebihara et al. (2015, Capítulo 2), que aborda a análise robusta de sistemas incertos LIT usando condições com a presença de variáveis de folga. É importante ressaltar a existência de técnicas que fazem uso de funções de Lyapunov não monotônicas para certificar a estabilidade de sistemas incertos (Lee et al., 2011; Lacerda e Seiler, 2017).

Este artigo apresenta um procedimento sistemático para certificar a estabilidade de sistemas incertos LIT contínuos no tempo com incertezas em domínios politópicos. As condições são baseadas na existência de uma função de Lyapunov composta por um número genérico de derivadas de ordem superior do vetor de estados. Diferentemente de (Ebihara et al., 2005), as condições propostas neste trabalho não exigem que a matriz da função de Lyapunov aumentada seja definida positiva. Duas formulações são apresentadas, a primeira faz uso da matriz aumentada em sua forma completa e a segunda faz uso de uma matriz aumentada na forma bloco diagonal. Essa imposição de estrutura vai permitir a redução do número de variáveis escalares necessárias para certificar a estabilidade dos sistemas incertos. Experimentos numéricos ilustram o potencial do método proposto de reduzir o número de variáveis escalares para certificar a estabilidade de sistemas LIT incertos contínuos no tempo.

O artigo é organizado da seguinte forma. A Seção 2 introduz os resultados preliminares. Os resultados principais são apresentados na Seção 3. A Seção 4 apresenta experimentos numéricos que ilustram o desempenho do método proposto e a Seção 5 conclui o artigo.

2 Resultados Preliminares

2.1 Método de Lyapunov

Considere um sistema LIT contínuo no tempo representado por

$$\dot{x} = Ax \tag{1}$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados e $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é a matriz dinâmica do sistema. A estabilidade do sistema (1) pode ser determinada por meio de uma função de Lyapunov $V(x)$. Uma função de Lyapunov deve respeitar três condições:

$$V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \tag{2}$$

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0 \tag{3}$$

$$V(0) = 0 \tag{4}$$

Usando a função quadrática $V(x) = x^T P x$ como candidata à função de Lyapunov, é possível enunciar o seguinte lema:

Lema 1 *Se existir uma matriz $P = P^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que*

$$P > 0 \tag{5}$$

$$A^T P + PA < 0 \tag{6}$$

então o sistema representado em (1) é assintóticamente estável.

Prova: A escolha de $V(x) = x^T P x$ atende à condição (4). Além disso, a condição (5) garante que $V(x) = x^T P x$ seja definida positiva para todo $x \neq 0$. Por fim, multiplicando (6) por x^T a esquerda e por x a sua direita pode-se escrever

$$\begin{aligned} x^T(A^T P + PA)x &= x^T A^T P x + x^T P A x \\ &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= \dot{V}(x) < 0 \end{aligned}$$

Logo, a condição (3) é atendida. Dessa forma, $V(x) = x^T P x$ é uma função de Lyapunov que assegura a estabilidade do sistema (1). □

Considere o seguinte sistema LIT incerto contínuo no tempo

$$\dot{x} = A(\alpha)x \tag{7}$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados. A matriz incerta $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pertence a um domínio politópico parametrizada em termos de um vetor de parâmetros invariantes no tempo α, dada por

$$A(\alpha) = \sum_{z=1}^{N} \alpha_z A_z \ , \quad \alpha \in \Lambda_N \tag{8}$$

em que A_z, $z = 1, \dots, N$ são os vértices do politopo e Λ_N é o simplex unitário

$$\Lambda_N = \left\{ \sigma \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^{N} \sigma_i = 1; \sigma_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}. \tag{9}$$

Para tratar o problema de certificar a estabilidade para um sistema incerto, uma função de Lyapunov dependente de parâmetros $V(x) = x^T P(\alpha) x$ pode ser utilizada. A matriz de Lyapunov $P(\alpha)$ apresenta uma estrutura polinomial de grau arbitrário, como proposto em (Oliveira e Peres, 2007). A estabilidade do sistema incerto (7) pode ser computada usando o lema a seguir

Lema 2 *Se existir uma matriz $P(\alpha) = P(\alpha)^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ polinomial de grau arbitrário g tal que:*

$$P(\alpha) > 0 \tag{10}$$

$$A(\alpha)^T P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < 0 \tag{11}$$

então o sistema representado em (7) é assintoticamente estável.

Prova: Pode ser encontrada em (Oliveira e Peres, 2007). □

3 Resultados Principais

Como primeiro passo, vamos escolher como candidata uma função de Lyapunov $V(x)$ contendo apenas termos com derivada de primeira ordem dos estados na seguinte forma

$$V(x) = \begin{bmatrix} x^T & \dot{x}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11}(\alpha) & P_{12}(\alpha) \\ P_{12}(\alpha)^T & P_{22}(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Diferentemente das condições propostas em (Ebihara et al., 2005), nesse artigo não é necessário que a matriz

$$\begin{bmatrix} P_{11}(\alpha) & P_{12}(\alpha) \\ P_{12}(\alpha)^T & P_{22}(\alpha) \end{bmatrix}$$

seja definida positiva. O Lema a seguir apresenta condições para a estabilidade, obtidas com a utilização de $V(x)$ assim como em (12).

Lema 3 *Se existirem matrizes* $P_{11}(\alpha) = P_{11}(\alpha)^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$*,* $P_{22}(\alpha) = P_{22}(\alpha)^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *e* $P_{12}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *assim como em (12) tais que:*

$$Tp > 0 \tag{13}$$

$$A(\alpha)^T Tp + TpA(\alpha) < 0 \tag{14}$$

com

$$Tp = P_{11}(\alpha) + A(\alpha)^T P_{21}(\alpha) + P_{12}(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P_{22}(\alpha)A(\alpha) \tag{15}$$

então o sistema representado em (7) é assintoticamente estável.

Prova: Multiplicando (13) por x^T a esquerda e x a direita tem-se

$$x^T(P_{11}(\alpha) + A(\alpha)^T P_{12}(\alpha)^T + P_{12}(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P_{12}(\alpha)^T A(\alpha))x > 0 \tag{16}$$

Substituindo $\dot{x} = A(\alpha)x$, pode-se escrever (16) como

$$x^T P_{11}(\alpha)x + \dot{x}^T P_{12}(\alpha)^T x + x^T P_{12}(\alpha)\dot{x} + \dot{x}^T P_{12}(\alpha)^T \dot{x} > 0 \tag{17}$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} x^T & \dot{x}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11}(\alpha) & P_{12}(\alpha) \\ P_{12}(\alpha)^T & P_{22}(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} > 0 \tag{18}$$

ou seja, $V(x)$ como em (12) é definida positiva. Multiplicando a condição (14) por x^T a esquerda e x a direita tem-se:

$$x^T(A(\alpha)^T Tp + TpA(\alpha))x < 0$$

Substituindo $\dot{x} = A(\alpha)x$ na desigualdade anterior pode-se escrever

$$\dot{x}^T Tpx + x^T Tp\dot{x} < 0$$

que é equivalente a $\dot{V}(x) < 0$ com

$$V(x) = x^T Tpx \tag{19}$$

que pode ser reescrita como em (12). □

O Lema 4 pode ser estendido para considerar derivadas de ordem superior na função de Lyapunov com a seguinte estrutura:

$$V(x) = \begin{bmatrix} x^T & \dot{x}^T & \dots & (x^p)^T \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \vdots \\ (x^p) \end{bmatrix} \tag{20}$$

Teorema 4 *Se existir uma matriz* $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n(p+1)\times n(p+1)}$ *tal que:*

$$Tg > 0 \tag{21}$$

$$A(\alpha)^T Tg + TgA(\alpha) < 0 \tag{22}$$

em que

$$Tg = R^T QR \tag{23}$$

com

$$R = \begin{bmatrix} I \\ A(\alpha) \\ A(\alpha)^2 \\ \vdots \\ A(\alpha)^p \end{bmatrix} \tag{24}$$

então o sistema representado em (7) é assintoticamente estável.

Prova: Seja Tg assim como definido em (23), multiplicando (21) por x^T à esquerda e x a direita obtém-se

$$x^T R^T QRx > 0 \tag{25}$$

com

$$Rx = \begin{bmatrix} x \\ A(\alpha)x \\ A(\alpha)^2 x \\ \vdots \\ A(\alpha)^p x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \vdots \\ (x^p) \end{bmatrix} \tag{26}$$

ou seja, (25) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} x^T & \dot{x}^T & \dots & (x^p)^T \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \vdots \\ (x^p) \end{bmatrix} > 0 \tag{27}$$

ou ainda, $V(x)$ como em (20) é definida positiva. Multiplicando a condição (22) por x^T a esquerda e x a direita tem-se:

$$x^T(A(\alpha)^T Tg + TgA(\alpha))x < 0$$

Substituindo $\dot{x} = A(\alpha)x$ na desigualdade anterior

$$\dot{x}^T Tgx + x^T Tg\dot{x} < 0$$

que é equivalente a $\dot{V}(x) < 0$ com

$$V(x) = x^T Tgx \tag{28}$$

que pode ser reescrita como em (20) □

O Corolário 5 apresentado a seguir, visa reduzir o esforço computacional considerando a matriz Q do Teorema 4 com uma estrutura bloco diagonal.

$$V(x) = \begin{bmatrix} x^T & \dot{x}^T & \dots & (x^p)^T \end{bmatrix} Q_d \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \vdots \\ (x^p) \end{bmatrix} \tag{29}$$

com

$$Q_d = \text{blkdiag}\left(Q_1, Q_2, \dots, Q_{(p+1)}\right) \tag{30}$$

Corolário 5 *Se existir uma matriz* $Q_d \in \mathbb{R}^{n(p+1)\times n(p+1)}$ *como em (30) tal que:*

$$Td > 0 \tag{31}$$

$$A(\alpha)^T Td + TdA(\alpha) < 0 \tag{32}$$

em que

$$Td = \sum_{i=0}^{p} (A(\alpha)^i)^T Q_{(i+1)} A(\alpha)^i \tag{33}$$

então o sistema representado em (7) *é assintoticamente estável.*

Prova: Multiplicando (31) por x^T a esquerda e x a direita tem-se

$$x^T(Q_1 + A(\alpha)^T Q_2 A(\alpha) + (A(\alpha)^2)^T Q_3 A(\alpha)^2 + \dots + (A(\alpha)^p)^T Q_{(p+1)} A(\alpha)^p)x \tag{34}$$

ou seja,

$$x^T R^T Q_d R x > 0 \tag{35}$$

com Rx como em (26) que é equivalente a

$$\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \vdots \\ (x^p) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Q_{(p+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \vdots \\ (x^p) \end{bmatrix} > 0 \tag{36}$$

ou seja $V(x)$ como em (29) é definida positiva. Multiplicando a condição (31) por x^T a esquerda e x a direita tem-se:

$$x^T(A(\alpha)^T Td + TdA(\alpha))x < 0$$

Substituindo $\dot{x} = A(\alpha)x$ na desigualdade anterior

$$\dot{x}^T T dx + x^T T d\dot{x} < 0$$

que é equivalente a $\dot{V}(x) < 0$ com

$$V(x) = x^T T dx \tag{37}$$

que pode ser reescrita como em (29). □

Note que, tanto o Teorema 4 quanto o Corolário 5 contém as condições do Lema 2 como caso particular quando $p = 0$.

O Corolário 5 possibilita que as matrizes que compõem Q_d como em (30), possuam estruturas distintas, isto é, cada matriz Q_i pode apresentar um grau polinomial distinto. Essa estrutura será explorada com o objetivo de reduzir o esforço computacional para certificar a estabilidade dos sistemas incertos.

4 Experimentos Numéricos

Realizando um comparativo entre as condições propostas neste artigo com outras presentes na literatura, as simulações foram realizadas em Matlab versão R2015a, utilizando pacotes computacionais YALMIP (Löfberg, 2004), SeDuMi (Sturm, 1999) e ROLMIP (Agulhari et al., 2012). O computador utilizado possui um processador Intel Core i5 4200, 1.6 Ghz, 4 Gb de RAM com sistema operacional Windows 8.1. Os exemplos utilizados foram retirados de Ebihara et al. (2005). Os graus empregados para as matrizes de Lyapunov nos exemplos a seguir, bem como a ordem da derivada utilizada para construir a função de Lyapunov aumentada, foram escolhidos de maneira empírica de forma a prover os melhores resultados em função do menor número de linhas de LMIs e menor número de variáveis de decisão.

Sejam dadas matrizes $A_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\bar{A}_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com $i \in Z_N$ e $Z_N := \{1, \dots, N\}$. Considerando o sistema representado em (7), os vértices da matriz $A(\alpha)$ são computados por

$$A_i = \bar{A}_0 + \eta \bar{A}_i, \quad i \in Z_N \tag{38}$$

Assumindo que a matriz $\bar{A}_0$ seja Hurwitz estável i.e., possua todos os autovalores com parte real negativa, o objetivo é encontrar o máximo valor de η tal que a estabilidade do sistema possa ser assegurada pelas condições propostas.

4.1 Exemplo 1

Considerando $N = 2$, as matrizes em (38) são dadas por

$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} -2.0 & 1.0 & -1.0 \\ 2.5 & -3.0 & 0.5 \\ -1.0 & 1.0 & -3.5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} -0.7 & -0.5 & -2.0 \\ -0.8 & 0.0 & 0.0 \\ 1.5 & 2.0 & 2.4 \end{bmatrix}$$

e $\bar{A}_2 = -\bar{A}_1$ respectivamente.

A Tabela 1 mostra os resultados obtidos para o primeiro exemplo. O grau g das matrizes P ou Q está indicado da seguinte forma. Para o Lema 3 foram considerados graus $(g_{P_{11}}, g_{P_{12}}, g_{P_{22}})$, o Teorema 4 foi utilizado considerado derivadas de ordem p com grau g_Q. O Corolário 5 utilizou derivadas de ordem p com graus distintos para cada uma das matrizes que compõem a matriz diagonal Q_d da seguinte forma $(g_{Q_1}, g_{Q_2}, \dots, g_{Q_{p+1}})$. A referida tabela mostra também o número de variáveis escalares (N_V) envolvidas no problema de otimização, o número de linhas de LMIs (N_L) e o máximo valor de η encontrado em cada caso. As condições propostas no artigo foram comparadas com os métodos (Ebihara et al., 2005, Teorema 2), (Ebihara et al., 2015, Teorema 2.4) e com o Lema 2 (apresentado em (Oliveira e Peres, 2007)).

Tabela 1: Máximo valor de η obtido para o Exemplo 1 usando diferentes métodos, contendo número de variáveis escalares N_V e número de linhas de LMIs N_L para cada caso.

Método	N_V	N_L	η
Lema 2 ($g_P = 4$)	30	33	3.551
Lema 3 ($g_P = 0{,}0{,}2$)	33	33	3.551
Teorema 4 ($p = 1{,}g_Q = 2$)	63	33	3.551
Corolário 5 ($g_{Qi} = 1{,}2$)	30	33	3.551
(Ebihara et al., 2005)	96	30	3.551
(Ebihara et al., 2015)	30	18	3.207

Analisando a Tabela 1 é possível observar que o Teorema 4 conseguiu reduzir o número de variáveis quando comparado com o método (Ebihara et al., 2005), além disso pode-se notar que o método (Ebihara et al., 2015) não é capaz de alcançar o máximo valor de η. O Corolário 5 com $p = 1$, apresenta o mesmo número de variáveis escalares e o mesmo número de linhas de LMIs que o Lema 2 para certificar a estabilidade do sistema para o maior valor de η.

4.2 Exemplo 2

Considerando $N = 3$, as matrizes em (38) são dadas por

$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} -2.4 & -0.6 & -1.7 & 3.1 \\ 0.7 & -2.1 & -2.6 & -3.6 \\ 0.5 & 2.4 & -5.0 & -1.6 \\ -0.6 & 2.9 & -2.0 & -0.6 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 1.1 & -0.6 & -0.3 & -0.1 \\ -0.8 & 0.2 & -1.1 & 2.8 \\ -1.9 & 0.8 & -1.1 & 2.0 \\ -2.4 & -3.1 & -3.7 & -0.1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0.9 & 3.4 & 1.7 & 1.5 \\ -3.4 & -1.4 & 1{,}3 & 1.4 \\ 1.1 & 2.0 & -1.5 & -3.4 \\ -0.4 & 0.5 & 2.3 & 1.5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_3 = \begin{bmatrix} -1.0 & -1.4 & -0.7 & -0.7 \\ 2.1 & 0.6 & -0.1 & -2.1 \\ 0.4 & -1.4 & 1.3 & 0.7 \\ 1.5 & 0.9 & 0.4 & -0.5 \end{bmatrix}$$

A Tabela 2 mostra os resultados obtidos para o Exemplo 2. Novamente foram considerados graus $(g_{P_{11}}, g_{P_{12}}, g_{P_{22}})$ para as matrizes do Lema 3 e grau g_Q para a matriz Q do Teorema 4 com derivadas de ordem p. O Corolário 5 utilizou derivadas de ordem p com graus distintos para cada uma das matrizes que compõem a matriz diagonal Q_d da seguinte forma $(g_{Q_1}, g_{Q_2}, \ldots, g_{Q_{p+1}})$. As condições propostas no artigo foram comparadas com os métodos (Ebihara et al., 2005, Teorema 2), (Ebihara et al., 2015, Teorema 2.4) e com o Lema 2 (apresentado em (Oliveira e Peres, 2007)).

Tabela 2: Máximo valor de η obtido para o Exemplo 2 usando diferentes métodos, contendo número de variáveis escalares N_V e número de linhas de LMIs N_L para cada caso.

Método	N_V	N_L	η
Lema 2 ($g_P = 3$)	100	100	2.223
Lema 3 ($g_P = 2{,}0{,}1$)	106	100	2.223
Teorema 4 ($p = 1{,}g_Q = 2$)	216	144	2.223
Corolário 5 ($g_{Qi} = 2{,}1$)	90	100	2.223
Corolário 5 ($g_{Qi} = 2{,}0{,}0$)	80	144	2.223
(Ebihara et al., 2005)	204	60	1.930
(Ebihara et al., 2015)	62	36	1.497

É importante observar que os métodos propostos em (Ebihara et al., 2005; Ebihara et al., 2015) não são capazes de atingir o valor 2.223 para η. Além disso, o Corolário 5 é capaz de atingir o menor número de variáveis entre os métodos considerados. Para $p = 1$ e $g_{Qi} = 2{,}1$, o Corolário 5 utilizou 90 variáveis com o mesmo número de linhas de LMIs utilizadas pelo Lema 2, $N_L = 100$. Para $p = 2$ e $g_{Qi} = 2{,}0{,}0$ o número de variáveis escalares foi reduzido para 80, porém o número de linhas de LMIs aumentou para $N_L = 144$.

A estrutura diagonal permitiu certificar a estabilidade com um número menor de variáveis, mostrando-se uma alternativa viável na análise de sistemas incertos.

5 Conclusão

Este artigo apresentou condições suficientes na forma de LMIs robustas para certificar a estabilidade de sistemas incertos usando a teoria de Lyapunov. A função de Lyapunov utilizada para certificar a estabilidade possui uma estrutura que considera derivadas de ordem superior dos estados. As vantagens do método proposto foram demonstradas nos exemplos numéricos, em que o número de variáveis necessárias para certificar a estabilidade dos sistemas incertos foi menor ou igual ao número de variáveis utilizadas por outros métodos existentes na literatura. Como extensões para trabalhos futuros, os autores estão investigando como realizar o cômputo de critérios de desempenho como o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ fazendo uso da metodologia proposta.

6 Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPEMIG pelo apoio financeiro e ao grupo GCOM pelo suporte.

Referências

Agulhari, C. M., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2012). Robust LMI parser: A computational package to construct LMI conditions for uncertain systems, *XIX CBA*, Campina Grande, PB, Brasil, pp. 2298–2305.

Barmish, B. R. (1985). Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system, *J. Optim. Theory and Appl.* **46**(4): 399–408.

Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. e Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA.

Chesi, G. (2008). On the non-conservatism of a novel LMI relaxation for robust analysis of polytopic systems, *Automatica* **44**(11): 2973–2976.

Chesi, G., Garulli, A., Tesi, A. e Vicino, A. (2005). Polynomially parameter-dependent Lyapunov functions for robust stability of polytopic systems: An LMI approach, *IEEE Trans. Autom. Control* **50**(3): 365–370.

Ebihara, Y., Peaucelle, D. e Arzelier, D. (2015). *S-Variable Approach to LMI-Based Robust Control*, Springer-Verlag, London, UK.

Ebihara, Y., Peaucelle, D., Arzelier, D. e Hagiwara, T. (2005). Robust performance analysis of linear time-invariant uncertain systems by taking higher-order time-derivatives of the state, *Proc. 44th IEEE Conf. Decision Control — Eur. Control Conf. ECC 2005*, Seville, Spain, pp. 5030–5035.

Geromel, J. C., de Oliveira, M. C. e Hsu, L. (1998). LMI characterization of structural and robust stability, *Lin. Alg. Appl.* **285**(1–3): 69–80.

Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*, 3ª ed, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

Lacerda, M. J. e Seiler, P. (2017). Stability of uncertain systems using lyapunov functions with non-monotonic terms, *Automatica* **82**: 187–193.

Lee, D. H., Park, J. B. e Joo, Y. H. (2011). Fundamental connections among the stability conditions using higher-order time-derivatives of Lyapunov functions for the case of linear time-invariant systems, *Syst. Control Lett.* **60**(9).

Leite, V. J. S. e Peres, P. L. D. (2003). An improved LMI condition for robust $\mathcal{D}$-stability of uncertain polytopic systems, *IEEE Trans. Autom. Control* **48**(3): 500–504.

Löfberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *Proc. 2004 IEEE Int. Symp. on Comput. Aided Control Syst. Des.*, Taipei, Taiwan, pp. 284–289.

Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2006). LMI conditions for robust stability analysis based on polynomially parameter-dependent Lyapunov functions, *Syst. Control Lett.* **55**(1): 52–61.

Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2007). Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations, *IEEE Trans. Autom. Control* **52**(7): 1334–1340.

Peaucelle, D., Arzelier, D., Bachelier, O. e Bernussou, J. (2000). A new robust $\mathcal{D}$-stability condition for real convex polytopic uncertainty, *Syst. Control Lett.* **40**(1): 21–30.

Peaucelle, D., Arzelier, D., Henrion, D. e Gouaisbaut, F. (2007). Quadratic separation for feedback connection of an uncertain matrix and an implicit linear transformation, *Automatica* **43**(5): 795–804.

Scherer, C. W. (2006). LMI relaxations in robust control, *European J. Control* **12**(1): 3–29.

Sturm, J. F. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optim. Method Softw.* **11**(1–4): 625–653. `http://sedumi.ie.lehigh.edu/`.

Trofino, A. (1999). Parameter dependent Lyapunov functions for a class of uncertain linear systems: an LMI approach, *Proc. 38th IEEE Conf. Decision Control*, Vol. 1, Phoenix, AZ, pp. 2341–2346.