

INVESTIGAÇÃO DO REGIME TRANSITÓRIO NA CONSTRUÇÃO DE DIAGRAMAS DE BIFURCAÇÃO DO MAPA LOGÍSTICO

Pedro Henrique Oliveira Silva¹ - pedrolives@hotmail.com.br

Bruno Camargos da Silva¹ - bruno.csillva@gmail.com

Erivelton Geraldo Nepomuceno¹ - nepomuceno@ufsj.edu.br

¹Grupo de Controle e Modelagem, Universidade Federal de São João del-Rei, MG

Abstract. *O presente trabalho tem como meta avaliar o regime transitório na construção do diagrama de bifurcação, levando em consideração a influência da condição inicial neste processo. Assim analisar diferenças no diagrama, utilizando algoritmos baseados na análise intervalar. Para alcançar os objetivos deste projeto foram criadas rotinas refinadas em conjunto com análises matemáticas que fornecem dados com confiança numérica. É notado através destes métodos, que a alteração na representação da função e a variação no número do transitório afetam a evolução do diagrama de bifurcação, obtendo dados que diferem da literatura.*

Keywords: *Mapa lógistico, Diagrama de Bifurcação, Ponto Fixo, Estabilidade, análise intervalar*

1. Introdução

Simulações numéricas desempenham um papel fundamental para contornar e resolver diferentes tipos de problemas em todas os ramos de pesquisa, em que é uma ferramenta promissora e que necessita ainda de muito estudo. Devido a propriedades inerentes dos computadores, resultados encontrados por simulações numéricas não são exatos (Nepomuceno, 2014). A limitação dos computadores é devido as representações finitas dos números reais, mesmo que a reprodução do número no computador seja próxima, operações utilizando tal representação resulta em erros. Desta maneira não se obtêm resultados verdadeiros, e sim uma aproximação dada pelo computador. Esses pequenos erros podem se acumular e propagar em outros cálculos, em que para simulações numéricas mais extensas e complexas, pode originar respostas totalmente erradas.

A evolução de equações que descrevem componentes não-lineares, como diodos e transistores, é estudada em circuitos elétricos (Chua et al., 2002; Suneel, 2006). Métodos de criptografia criados com parametrização dinâmica (Vargas & Vital, 2014), são exemplos do uso da dinâmica não-linear. Uma aplicação da dinâmica não-linear são os modelos de crescimento

populacional, em que a equação do mapa logístico é estudada. É uma função que ilustra muitas noções fundamentais da dinâmica não-linear, apresentando equilíbrio, periodicidade, bifurcação e caos (May, 1976).

Para a análise deste modelo, entre outros, é utilizado o diagrama de bifurcação. Nele podemos observar a evolução do sistema a partir de parâmetros determinados, permitindo saber os pontos em que haverá comportamentos consequentes da sua dinâmica não-linear. Os diagramas de bifurcação se tornaram uma ferramenta largamente utilizada tanto para a análise de sistemas, bem como, para validação de modelos identificados, tais como os modelos NARMAX (Aguirre et al., 2002; Aguirre, 2006; Martins et al., 2012). Poucos trabalhos apresentam com detalhes os procedimentos para a construção do diagrama de bifurcação. Com destaque aos procedimentos adotados por Ott (2002), em que é desprezado um transitório de 500 iterações. Mas nem sempre este é o número ideal de iterações a serem excluídas. Neste trabalho será investigado alguns aspectos da influência do transitório na construção do diagrama de bifurcação. Importantes resultados de trabalhos sobre a imprecisão computacional serão utilizados para auxiliar esta análise (Nepomuceno, 2014; Paiva et al., 2015; Júnior & Nepomuceno, 2015). Em que é proposto um algoritmo refinado que fornece dados com confiabilidade numérica que distintos dos apresentados pela literatura.

2. Conceitos Preliminares

2.1 Mapa Logístico

Mapas não-lineares apresentam uma dinâmica rica e complexa, em que o mais estudado é a mapa logístico, dado pela seguinte equação

$$f(x_n) = x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad (1)$$

em que r é parâmetro de controle, que pertence ao intervalo $1 \leq r \leq 4$ e x_n ao intervalo $0 \leq x_n \leq 1$.

2.2 Ponto Fixo

Um conceito importante para entendimento deste trabalho é o de ponto fixo, como o ponto de $f(x_n)$ em que

$$x_n^* = f(x_n^*), \quad (2)$$

denota que, se a órbita do mapa atingir o ponto fixo numa determinada iteração, a órbita ali permanecerá nas seguintes iterações. Pela Equação (2) os pontos fixos do mapa logístico são dados por $x_1^* = 0$ e $x_2^* = 1 - (1/r)$.

2.3 Estabilidade de Ponto Fixo

O Ponto fixo x^* é dito estável se após uma pequena perturbação, as iterações do mapa permanecem próximas a x^* , este tipo de estabilidade é denominada estabilidade de Lyapunov (Monteiro, 2006). Usando dos conceitos de Lyapunov, existem duas soluções de equilíbrio, sendo a primeira $x_1^* = 0$ sendo estável em $0 \leq r < 1$, e o segundo $x_2^* = 1 - (1/r)$ estável em $0 < r < 3$. Da mesma análise determinamos que não existem pontos fixos estáveis para

$r > 3$, levando o aparecimento de novas soluções para um único valor de parâmetro de controle r , denominadas órbitas periódicas. Esta mudança repentina na estabilidade de ponto fixo ou órbita, ao passo que o parâmetro r varia é denominada bifurcação.

2.4 Aritmética de Ponto Flutuante

O sistema computacional de aritmética de ponto flutuante é utilizado por computadores na representação dos números e execução das operações (IEEE, 2008). Em que é representado da seguinte forma

$$m = \pm(b_0b_1b_2\dots b_t)_2 \times \beta^E, \quad (3)$$

sendo $(b_0b_1b_2\dots b_t)$ dígitos da parte fracionária, em que $b_0 \neq 0$ e $0 \leq b_i \leq \beta - 1$. β é base numérica, t é o número de dígitos na mantissa e E é o expoente inteiro.

A Figura 1 demonstra que os números em uma aritmética de ponto flutuante não são igualmente espaçados (Overton, 2001).

Cada número na aritmética representa um intervalo de números reais, a distância entre um número armazenado no computador em relação ao seu antecessor e sucessor é chamada de *ulp*.



Figure 1- Conjunto de números representados por (Overton, 2001, p. 15).

3. Metodologia

3.1 Definição do Problema

O procedimentos mais aceitos e citados para a construção do diagrama de bifurcação são os adotados por Ott (2002).

- Defina o valor de $r = 3,5$.
- Defina o valor de $x_0 = 1/2$.
- Faça 500 iterações do mapa (1).
- Faça mais 1000 iterações com condição inicial dada por x_{500} e plote o gráfico dos 1000 valores de x .
- Incremente r por um pequeno valor, tal como $r \rightarrow r + 10^{-2}$ e retorne ao passo (b).

Tais procedimentos foram utilizados como base para as construções das rotinas demonstradas neste trabalho e podem ser estendidos para outras faixas de r e também para outros mapas discretos. Apesar de um procedimento simples, alguns pontos não estão aparentemente bem definidos na literatura. Em que a Etapa (c), que define o número de iterações iniciais a serem desprezadas, merece um estudo aprofundado. Na construção do diagrama de bifurcação, é desejado determinar qual seria o número de iterações a serem consideradas transitório. E se este valor é influenciado pela condição inicial, e quais conclusões podemos tirar durante este processo. Para avaliar estas questões, entre outras, foi utilizado métodos matemáticos e rotinas refinadas.

3.2 Análise Intervalar

Tendo em vista a limitação de *hardware*, não é possível representar todo o conjunto dos números reais no computador. Como nem sempre é possível representar o resultado de operações matemáticas em ponto flutuante, pode ser necessário o uso de métodos de arredondamento definidos pela norma IEEE 754-2008 (IEEE, 2008). O impacto causado por erros de arredondamento desta representação pode ser grande em simulações de sistemas dinâmicos não-lineares. Mas a análise intervalar é uma ferramenta que permite a obtenção de maior confiança nos resultados (Nepomuceno, 2014; Júnior & Nepomuceno, 2015). Na simulação uma função recursiva, como a do mapa logístico, ao invés de um único número, um intervalo é considerado a cada iteração para obtenção do resultado da iteração seguinte.

3.3 Transformações Isométricas

Transformação é uma maneira interessante de analisar funções, mantendo seu aspecto gráfico. Assim podemos ilustrar as diferentes possibilidades de formato da mesma. A translação horizontal, ocorre quando houver uma substituição da variável x por $(x \pm k)$ na função original. Se k é real e $k > 0$, a função sofrerá um deslocamento horizontal. Outra transformação utilizada é translação vertical, este tipo de transformação ocorrerá quando substituirmos a função $f(x)$ por $(f(x) \pm k)$. Desta maneira pela Transformação de gráficos podemos deslocar um gráfico de L unidades para esquerda e deslocar verticalmente de L unidades para “baixo”. Utilizando de ambas transformações na função mapa logístico, obtemos a função modificada deslocada tanto verticalmente, quanto horizontalmente em L unidades.

$$g(x)' = (r(x + L)(1 - (x + L))) - L, \quad (4)$$

$$f(x) = rx(1 - x), \quad (5)$$

Para provar que as funções $f(x)$ e $g(x)'$ se tratam da mesma função, temos que x_n é os valores da função $f(x)$ e \hat{x}_n da função $g(x)'$, deste modo supondo um valor $L = 0,1$, temos a relação de x_n com \hat{x}_n

$$x_n \in [0; 1], \quad (6)$$

$$\hat{x}_n \in [-0,1; +0,9], \quad (7)$$

$$x_n = (\hat{x}_n + L), \quad (8)$$

Assim se trata da mesma função, mas deslocada em L unidades. Levando em consideração Overton (2001) e a Figura 1, para \hat{x}_n temos conjuntos de números com espaçamentos diferentes, aproximando de zero pela esquerda e direita. Foi criada uma interface gráfica no *software* MATLAB, com a finalidade de construir diagramas com números variados de condições iniciais e diferentes representações da função mapa logístico. As configurações da máquina utilizada para as simulações são as seguintes: *Intel(R) Core(TM) i3-2348M, CPU @ 2.30GHz, RAM 6,00 GB, 64-bits, Windows 7 Ultimate*.

4. Resultados

Os gráficos a seguir são plotados adotando $g(x)'$, variando os parâmetros x_0 (condição inicial), t (iterações de transitório) e L . Os parâmetros r_{min} e r_{max} serão variados para observar detalhes em uma faixa de r , em que estes não influenciam na evolução do diagrama.

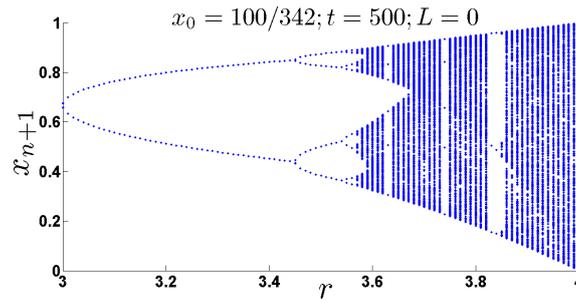


Figure 2- Diagrama de bifurcação adotando os parâmetros propostos.

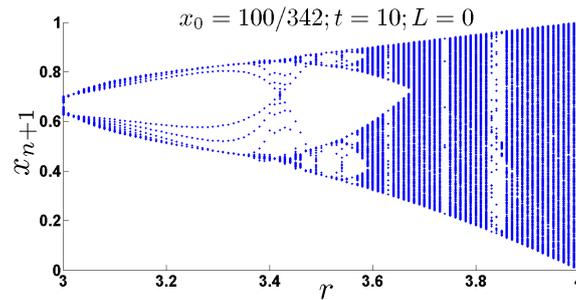


Figure 3- Diagrama de bifurcação adotando os parâmetros propostos, com diminuição do transitório.

Uma das referências atuais que este trabalho se baseia, é (Paiva et al., 2015) em que é descrito e comprovado analiticamente que para uma condição inicial

$$x_0 = 1/r, \quad (9)$$

o valor x_n é igual ao ponto fixo

$$x^* = 1 - (1/r), \quad (10)$$

que poderá ser estável ou instável. Desta maneira podemos comparar os resultados obtidos segundo a metodologia proposta por Paiva e os algoritmos apresentados neste trabalho. Como um dos propósitos, é confirmar que a condição inicial influencia no número de transitório. Será adotado diversas condições iniciais para o seu parâmetro r equivalente, conforme $x_0 = 1/r$. Inicialmente é construído o diagramas de bifurcação, adotando os cálculos dos parâmetros descritos por Paiva et al. (2015), mas utilizando as etapas descritas por Ott (2002).

Na Figura 3 o digrama de bifurcação para um transitório bem menor, fornece informações para $r = 3,42$, que antes não eram vistas pela Figura 2, que representa o transitório fornecido pela literatura. Conforme $x_0 = 100/342$ e $r = 342/100$, temos o valor $x^* = 0,7076$ através da equação 10. A órbita observada na Figura 3 tende a evoluir para o ponto fixo $x^* = 0,7076$, evolução não observada na Figura 2 utilizando $t = 500$. Desta maneira, o valor de transitório descartado para a construção do diagrama, se mostrou importante para a análise nestas condições. Conforme mostrado por Paiva et al. (2015), a evolução deveria ocorrer já nas primeiras iterações para o parâmetro proposto.

Devido a transformação da função mapa logístico utilizando translação vertical e horizontal em L unidades. Devem ser feitas modificações, nas equações propostas. Pela Equação 8 temos a relação $x_n = (\hat{x}_n + L)$, ou seja para obter o devido valor no diagrama para a função original é preciso somar o resultado em L unidades. O mesmo acontece para a condição inicial,

$$x_0 = (1/r) - L, \quad (11)$$

$$x^* = [1 - (1/r)] + L, \quad (12)$$

Como não pode ter certeza da representação numérica no computador, os parâmetros determinados para a construção dos digramas de bifurcação não são conhecidos exatamente. Mas se encontram dentro de um determinado intervalo, assim usando a análise intervalar temos intervalos que envolve todos os possíveis resultados. Este método foi mostrado e provado para o mapa logístico por Júnior & Nepomuceno (2015).

Júnior para representar os intervalos dos números, utilizou a *ulp* do número. Deste modo é possível determinar os limites do intervalo através de arredondamento. Por meio destes intervalos são feitas operações atendendo estes limites, e finalmente considerando o resultado final como o ponto médio dos intervalos resultantes.

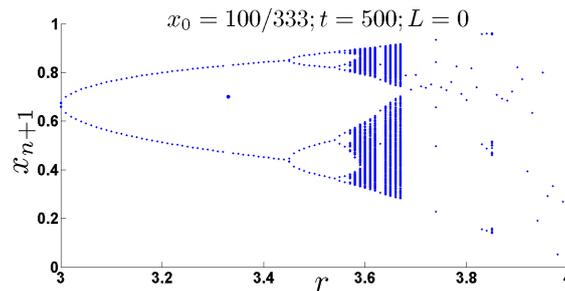


Figure 4- Diagrama de bifurcação adotando somente análise intervalar.

A Figura 4, mostra o diagrama de bifurcação construído usando análise intervalar para $x_0 = 100/333$ em $r = 3,33$. Temos que o ponto converge para o valor $x^* = 1 - (1/3,33)$, ao trabalhar com análise intervalar eliminamos o erro computacional em certos parâmetros do mapa logístico. Mas para outras condições iniciais em parâmetros r diferentes, que não fazem parte do problema proposto por Júnior & Nepomuceno (2015), a convergência não ocorre.

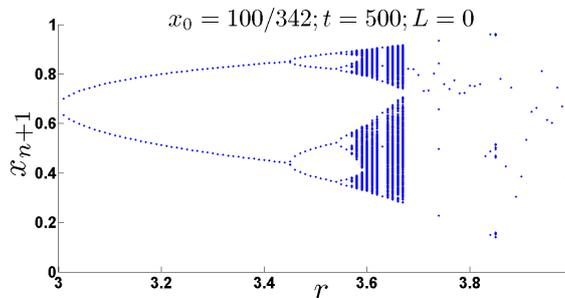


Figure 5- Diagrama de bifurcação adotando somente análise intervalar.

Prova disso é a Figura 5, em que para $x_0 = 100/342$ não temos convergência do ponto $x^* = 1 - (1/342)$ usando análise intervalar. Diminuindo o transitório como mostrado na Figura 6, existe uma órbita que tende a evoluir para o ponto fixo. Utilizando destes modelos matemáticos mostrados, tem-se uma rotina refinada. Com o objetivo de entender e diminuir os erros provocados pela simulação computacional. O Algoritmo 1, representa a rotina refinada levando em conta todos os métodos apresentados, e seus devidos experimentos. Atenção para a função $round^-$ e $round^+$ que se opera o arredondamento para o ponto flutuante inferior e superior, respectivamente, de acordo com a norma IEEE 754 (Overton, 2001).

Através das transformações isométricas os pontos de uma função, têm correspondentes nos pontos de outra função, que é a sua imagem pela transformação. Este método não altera a

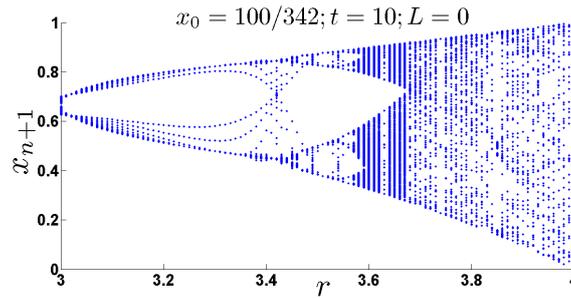


Figure 6- Diagrama de bifurcação adotando somente análise intervalar, com diminuição do transitório.

distancia entre os pontos, só relacionam as funções mantendo o seu aspecto matemático. Desta maneira podemos por meio de uma função transformada, analisar sua função de origem. Depois de uma busca por diferenças nos diagramas de bifurcação utilizando a nova rotina, foi possível para certos parâmetros do mapa obter convergência.

Como mostra a Figura 7, dado um $L = 0,1$, deslocando a função em 0,1 unidades, observamos um novo comportamento para estes parâmetros.

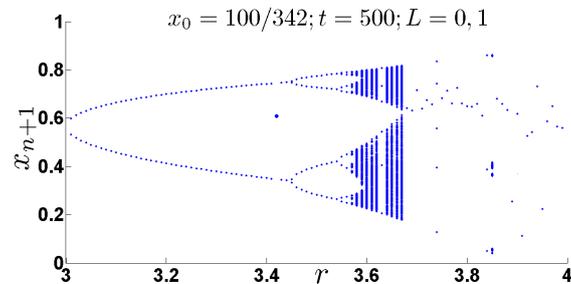


Figure 7- Diagrama de bifurcação adotando rotina refinada.

A convergência ocorreu, devido a nova condição inicial dada pela Equação 13 que representa o mapa clássico, em um mesmo parâmetro r . Como não existe nenhuma restrição sobre a condição inicial, além da mesma está dentro do intervalo $[0,1]$. É correto então aplicar condições iniciais para melhor representar o diagrama de bifurcação de uma função. Para demonstrar utilizamos as seguintes equações, em que o valor de \hat{x}^* é obtido na simulação.

$$\hat{x}_0 = (100/342) - 0,1 \cong 0,19239766, \quad (13)$$

$$x_0 = 100/342 \cong 0,29239766, \quad (14)$$

$$\hat{x}^* \cong 0.60760233, \quad (15)$$

$$x^* = \hat{x}^* + 0,1 \cong 0.70760233, \quad (16)$$

$$x^* = 1 - (100/342) \cong 0.70760233, \quad (17)$$

Outra observação importante que podemos extrair das figuras adotando rotinas refinadas, é que a partir de $r = 3,68$ não podemos afirmar nada quanto a sua convergência. Pois ocorre o aparecimento de pontos fixos em órbitas de períodos arbitrários, devido a análise intervalar em uma enorme densidade de valores em intervalos cada vez menores. Em que podemos obter outro comportamento apenas relacionando o número de transitório a ser considerado para a simulação. Levando em conta a condição inicial e o parâmetro de controle avaliado, e ao aplicar análise intervalar considerando comparações em órbitas periódicas diferentes.

Algoritmo 1: Procedimentos refinados.

```

1   $r_{min} \leftarrow 3$ ;
2   $r_{max} \leftarrow 4$ ;
3   $dr \leftarrow 0,01$ ;
4   $t \leftarrow 500$ ;
5   $n \leftarrow 1000$ ;
6   $L \leftarrow 0,5$ ;
7   $x_0 \leftarrow (100/342) - L$ ;
8   $x_0^- \leftarrow round^-(x_0)$ ;
9   $x_0^+ \leftarrow round^+(x_0)$ ;
10 for  $r \leftarrow r_{min}$  to  $r_{max}$  do
11   for  $n \leftarrow 0$  to  $t$  do
12      $\hat{x}_{n+1}^- \leftarrow round^-(\hat{x}_{n+1})$ ;
13      $\hat{x}_{n+1} \leftarrow (r(x_n^- + L)(1 - (x_n^- + L))) - L$ ;
14      $\hat{x}_{n+1}^+ \leftarrow round^+(\hat{x}_{n+1})$ ;
15      $\hat{x}_{n+1} \leftarrow (r(x_n^+ + L)(1 - (x_n^+ + L))) - L$ ;
16      $X_n = [\hat{x}_n^-, \hat{x}_n^+]$ ;
17      $X_{n+1} = [\hat{x}_{n+1}^-, \hat{x}_{n+1}^+]$ ;
18     if  $X_n \cap X_{n+1} \neq \emptyset$  then
19        $\hat{x}_n^* = (x_n^- + x_n^+)/2$ ;
20        $x_n^* = \hat{x}_n^* + L$ ;
21       break;
22     end
23   end
24 end
25  $x_0^- \leftarrow x_{500}^-$ ;
26  $x_0^+ \leftarrow x_{500}^+$ ;
27 for  $r \leftarrow r_{min}$  to  $r_{max}$  do
28   for  $n \leftarrow 0$  to  $n$  do
29      $\hat{x}_{n+1}^- \leftarrow round^-(\hat{x}_{n+1})$ ;
30      $\hat{x}_{n+1} \leftarrow (r(x_n^- + L)(1 - (x_n^- + L))) - L$ ;
31      $\hat{x}_{n+1}^+ \leftarrow round^+(\hat{x}_{n+1})$ ;
32      $\hat{x}_{n+1} \leftarrow (r(x_n^+ + L)(1 - (x_n^+ + L))) - L$ ;
33      $X_n = [\hat{x}_n^-, \hat{x}_n^+]$ ;
34      $X_{n+1} = [\hat{x}_{n+1}^-, \hat{x}_{n+1}^+]$ ;
35     if  $X_n \cap X_{n+1} \neq \emptyset$  then
36        $\hat{x}_n^* = (x_n^- + x_n^+)/2$ ;
37        $x_n^* = \hat{x}_n^* + L$ ;
38       break;
39     end
40   end
41    $plot(r, x_{n+1})$ ;
42 end

```

5. Conclusões

Ao comparar as Figuras 5 e 7, há a presença de ponto fixo somente na Figura 7, apesar dos dois métodos serem parecidos e se tratar da mesma função. Em que na Figura 7, é usado uma representação alternativa da função logística. Portanto o computador se mostrou sensível pelos diferentes modos que a função pode ser representada nas análises, levando a resultados diferentes em certos parâmetros de controle. Todos os resultados foram obtidos através do uso das rotinas refinadas, evidenciando a confiabilidade numérica dos valores encontrados. Contornando assim o problema de imprecisão numérica no processo de construção do diagrama de bifurcação.

A transformação isométrica utiliza outros valores para o processamento da máquina, em que mantem o aspecto matemático da função original. Consequentemente os arredondamentos feitos pela máquina diferem, levando a comportamentos mostrados anteriormente. Para cada comportamento deve ser considerado um número de transitório, capaz de manter a integridade do diagrama de bifurcação, diminuindo os erros provocados por simulações computacionais. O transitório se mostrou muito importante para construção do diagrama de bifurcação, visto que ele ainda contém muitas informações sobre a evolução dos gráficos. E sua interação com outros parâmetros o torna fundamental, para obtermos respostas sobre os comportamentos dos diagramas de bifurcação.

Foi demonstrado a necessidade de compreendermos as simulações a nível computacional, levando em consideração os cuidados que devemos ter ao realizar simulações extensas e complexas. Assim fica comprovado que cada vez mais é necessário estabelecer procedimentos mais rigorosos para simulações numéricas. Em trabalhos futuros, pretende-se investigar a construção do diagrama de bifurcações com o trabalho recentemente publicado por Nepomuceno & Martins (2016).

Agradecimentos

Agradecemos à CAPES, CNPQ, FAPEMIG, PPGEL, GCOM e UFSJ pelo apoio.

REFERENCES

- Aguirre, L. A. (2006), Introdução à Identificação de Sistemas – Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais. ACM SIGPLAN Fortran Forum, 3^a edição.
- Aguirre, L. A., Maquet, J. e Letellier, C. (2002), Induced one-parameter bifurcations in identified nonlinear dynamical models. International Journal of Bifurcation and Chaos. World Scientific, vol 12, 01, 135–145.
- Chivers, I. D e Sleightholme, J. (2006), Fortran resources. CM SIGPLAN Fortran Forum, vol 25, 9–13.
- Chua, L. O., Wu, C. W., Huang, A. e Zhong, G. (1993), A universal circuit for studying and generating chaos- part I: routes to chaos. Fundamental Theory And Applications, vol 40, 10, 732–744.
- IEEE, IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic (2008).
- Li, T. e Yorke J. A. (1975), Period three implies chaos. The American Mathematical Monthly. JSTOR, vol 82, 10, 985–992.
- Lorenz, E. N. (1963), Deterministic nonperiodic flow. Journal of the atmospheric sciences, vol 20, 2, 130–141.

- Martins, S. A. M., Nepomuceno, E. G. e Barroso, M. F. S (2012), Detecção de Estruturas de Modelos NARMAX Polinomiais: a Taxa de Redução de Erro Multi-objetivo. *Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática*.
- May, R. M. (1976), Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, vol 261, 5560, 459–467.
- Monteiro, L.H.A. (2006), *Sistemas dinâmicos*. Editora Livraria da Física.
- Nepomuceno, E. G e Martins, S. A. M. (2016), A lower-bound error for free-run simulation of the polynomial NARMAX. *Systems Science & Control Engineering*, 1–149. Taylor & Francis.
- Nepomuceno, E. G (2014), Convergence of recursive functions on computers. *The Journal of Engineering*, 1–3.
- Ott, E. (2002), *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press.
- Overton, M. L. (2001), *Numerical Computing with IEEE floating point arithmetic*. SIAM.
- Paiva, B. P. O., Nepomuceno, E. G. e Amaral, G. F. V.(2015), Considerações sobre a condição inicial na construção do diagrama de bifurcação para o mapa logístico. *Anais do DINCON 2015 - Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações*
- Rodrigues Júnior, H. M. e Nepomuceno, e E. G. (2015), Uso da Computação Por Intervalos para Cálculo de Ponto Fixo de um Mapa Discreto. *Anais do DINCON 2015 - Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações*
- Silverfrost (2016), *Fortran 95 for Windows*.
- Smaoui, Nejib e Kanso, Al (2009), Cryptography with chaos and shadowing. *Chaos, Solitons and Fractals*, vol 4, 2312–2321.
- Suneel, Madhekar (2006), Electronic circuit realization of the logistic map. *Springer*, vol 31, 69–78.
- Vargas, J. A. R. e Vital, F. (2014), Sistema Para Comunicação Com Segurança Baseado Em Osciladores Caóticos. *Anais do XX Congresso Brasileiro de Automática*.

INVESTIGATION OF THE TRANSIENT IN THE CONTRUCTION OF BIFURCATION DIAGRAMS OF THE LOGISTIC MAP

Abstract. *This work presents an evaluation of the transient in the construction of bifurcation diagram, taking into account the influence of the initial condition in this process. Thus analyzing diferences in the diagram, using algorithms based on interval analysis. For achieving the objectives of this project were created refined and efficient routines, integrated with a graphical interface that provides organization and more reliable results. It is noted through such methods that an slightly alteration in the function of representation is enough to obtain different results. Results different from the literature are found and they indicate that the transient influences in the evolution of the diagram.*

Keywords: *Logistic map, Bifurcation diagram, Fixed point, Stability, Interval analysis*