Estabilidade Linear e Exponencial de Semigrupos C_0 e Aplicações

Francis F. C. Puma
Instituto de Matemática, IM, UFRJ
Rio de Janeiro, RJ
E-mail: fcordova_80@ufrj.br

Jaime E. M. Rivera
Instituto de Matemática, IM, UFRJ
Rio de Janeiro, RJ
E-mail: rivera@im.ufrj.br

Resumo: *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert complexo e seja $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal do semigrupo de classe C_0 , $e^{t\mathcal{A}}$, em $\mathcal{H}$. Sejam $\omega_0(\mathcal{A})$ o tipo do semigrupo e $\omega_\sigma(A)$ a cota espectral. Um dos problemas mais importante dentro da teoria de estabilização de semigrupos é saber quando o sistema apresenta decaimento exponencial. Em caso afirmativo, o problema seguinte é obter uma taxa ótima de decaimento, um caminho para tal fim é obter o princípio de estabilidade linear para $e^{t\mathcal{A}}$, isto é, $\omega_0(\mathcal{A}) = \omega_\sigma(\mathcal{A})$. Além disso, se $e^{t\mathcal{A}}$ é um semigrupo analítico e $0 \in \rho(A)$ então o semigrupo é exponencialmente estável. Neste trabalho aplicamos resultados recentes sobre estabilização de semigrupos para estudar o comportamento assintótico e analiticidade das soluções dos problemas de valor inicial e fronteira para mistura de dois sólidos: com dissipação friccional (1)-(2) e viscoelástica (3)-(4). Em cada caso, mostramos a existência e unicidade de soluções globais fortes quando a matriz $[a_{ij}]_{2\times 2}$ é definida positiva. Daremos condições sobre a matriz $[b_{ij}]_{2\times 2}$ que caracteriza a analiticidade do semigrupo associado a (3)-(6) e condições suficientes para obter a estabilidade exponencial do semigrupo associado a (1)-(2). Nosso principal resultado é caracterizar a estabilidade exponencial de (1)-(2) quando $[b_{ij}]$ é uma matriz singular.*

Palavras-chave: *Semigrupos C_0 , Estabilidade Exponencial, Estabilidade linear, Analiticidade, Misturas viscoelástica e com dissipação friccional*

1 Preliminares

1.1 Modelos de misturas

Os sistemas de mistura de sólidos é um assunto que tem recebido muita atenção nos últimos anos. Os primeiros trabalhos sobre este tema foram as contribuções de Truesdell e Toupin (1960), Green e Naghdi (1965,1968) ou Bowen e Wiese (1969). Apresentações dessas teorias podem ser encontradas nos artigos de Atkin e Craine [1] ou Iesan D. [2]. Nos últimos anos, um crescente interesse tem sido dirigido para o estudo das propriedades qualitativas das soluções de este tipo de modelos. Em particular, podemos encontrar vários resultados sobre a existência, unicidade, depêndencia contínua e estabilidade assintótica, ver [3], [4], [8] ou [9]. Queremos enfatizar o estudo do comportamento das soluções para o caso de uma viga unidimensional composta por uma mistura de dois sólidos (elástica com atrito) e queremos saber quando podemos esperar estabilidade exponencial das soluções de esta classe de sistemas. No contexto mecânico o decaimento exponencial significa que depois de um certo período de tempo os deslocamentos mecânicos são muito pequenos e podem ser desprezados; em caso contrário os deslocamentos podem ser apreciados no sistema após algum tempo, porém, a natureza das soluções determina

o comportamento temporal do sistema e é importante ser capaz de classificá-los. Consideremos uma viga composta por uma mistura de dois sólidos interagindo de forma contínua, com densidades de massa $\rho_1 > 0$ e $\rho_2 > 0$, que ocupa o intervalo $(0, l)$ e fixada nos extremos. Se $u = u(x,t)$ e $w = w(x,t)$ representam os deslocamentos verticais das partículas de cada material componente no tempo t; $x \in (0, l)$ obtemos os seguintes modelos:

Mistura de dois sólidos com dissipação friccional

$$\rho_1 u_{tt} = a_{11} u_{xx} + a_{12} w_{xx} - b_{11} u_t - b_{12} w_t \quad em \quad (0,l) \times (0,\infty) \tag{1}$$

$$\rho_2 w_{tt} = a_{12} u_{xx} + a_{22} w_{xx} - b_{12} u_t - b_{22} w_t \quad em \quad (0,l) \times (0,\infty) \tag{2}$$

Mistura de dois sólidos viscoelástica

$$\rho_1 u_{tt} = a_{11} u_{xx} + a_{12} w_{xx} + b_{11} u_{xxt} + b_{12} w_{xxt} \quad em \quad (0,l) \times (0,\infty) \tag{3}$$

$$\rho_2 w_{tt} = a_{12} u_{xx} + a_{22} w_{xx} + b_{12} u_{xxt} + b_{22} w_{xxt} \quad em \quad (0,l) \times (0,\infty) \tag{4}$$

com condições iniciais

$$u(x,0) = u_o(x);\ u_t(x,0) = u_1(x);\ w(x,0) = w_o(x);\ w_t(x,0) = w_1(x) \quad em \quad (0,l) \tag{5}$$

e condições de fronteira

$$u(0,t) = u(l,t) = w(0,t) = w(l,t) = 0 \quad em \quad (0,\infty)\ , \tag{6}$$

submetido às seguintes hipóteses:

(H.1) $\rho_1,\ \rho_2 > 0$.

(H.2) $A = [a_{ij}]$ é uma matriz quadrada, simétrica e definida positiva, isto é,

$$a_{11} > 0 \ \text{ e } \ \alpha := a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0.$$

Portanto a forma quadrática associada é definida positiva:

$$\mathcal{Q}_A(x,y) := a_{11} x\overline{x} + a_{12}(x\overline{y} + y\overline{x}) + a_{22} y\overline{y} > 0 \ \ \forall\ (x,y) \neq (0,0).$$

(H.3) $B = [b_{ij}]$ é uma matriz quadrada, simétrica e semidefinida positiva. Portanto a forma quadrática associada é semidefinida positiva, isto é,

$$\mathcal{Q}_B(x,y) := b_{11} x\overline{x} + b_{12}(x\overline{y} + y\overline{x}) + b_{22} y\overline{y} \geq 0\ ,\ \forall\ (x,y) \in C \times C$$

1.2 Estabilização de semigrupos

Sejam H um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear e fechado e seja e^{tA} o semigrupo C_0 gerado por A. Então definimos:

- **Tipo do semigrupo.** $\omega_0(A) := \lim_{t\to\infty} \frac{\ln ||e^{At}||}{t}$
- **Cota espectral.** $\omega_\sigma(A) := \sup\{Re(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$
- **Princípio de estabilidade linear ou PCDE.** $\omega_0(A) = \omega_\sigma(A)$.
- **Semigrupo exponencialmente estável.** $\exists\ \omega < 0$ tal que:

$$||e^{tA}||_{\mathcal{L}(H)} \leq M e^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Teorema 1. (Estabilidade Linear) Sejam $\mathcal{A} := A_1 + A_2$ gerador de um semigrupo C_0 num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, A_1 um operador normal e $A_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Se existem constantes $M > 0$ e $n_0 \in N$ tais que:

(a) Se $\lambda \in \sigma(A_1)$ e $|\lambda| > M - 1$, então λ é um autovalor isolado com multiplicidade finita.

(b) Se $|z| > M$, então o número de autovalores de A_1 no disco $D(z, 1)$, com suas multiplicidades, não excede n_0.

Então $\omega_0(\mathcal{A}) = \omega_\sigma(\mathcal{A})$. Demonstração. Ver [13]

Teorema 2. (Estabilidade Exponencial) Seja e^{At} um semigrupo de classe C_0 de contrações num espaço de Hilbert H. Então e^{At} é exponencialmente estável se, somente se,

$$\{i\beta : \beta \in R\} \subset \rho(A)$$

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} ||(i\beta I - A)^{-1}||_{\mathcal{L}(H)} < \infty.$$

Demonstração. Ver [5], [11].

Semigrupo Analítico. Seja $T(t)$ um semigrupo C_0 em H. $T(t)$ é Analítico se admite uma extensão $\bar{T}(\lambda)$ a

$$\Delta_\theta := \{\lambda \in C;\ |arg(\lambda)| < \theta\}$$

tal que $\lambda \mapsto \bar{T}(\lambda)$ é analítica e

(a) $\lim_{\lambda\to 0} ||\bar{T}(\lambda)z - z|| = 0$, $\forall z \in X$, $\lambda \in \Delta_\theta$.

(b) $\bar{T}(\lambda + \mu) = \bar{T}(\lambda)\bar{T}(\mu)$, para todo $\lambda, \mu \in \Delta_\theta$

Teorema 3. (Analiticidade) Seja $e^{t\mathcal{A}}$ um semigrupo C_0 de contrações num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Suponha que

$$\{i\beta : \beta \in R\} \subset \rho(\mathcal{A}).$$

Então $e^{t\mathcal{A}}$ é analítico se, e somente se,

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} ||\beta(i\beta\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty, \quad \beta \in R.$$

Demonstração. Ver [5], [10].

2 Mistura de sólidos com dissipação friccional

Nesta seção mostraremos a boa colocação do problema para o modelo de mistura com dissipação friccional e estudaremos a estabilidade do semigrupo associado.

Consideremos o espaço vetorial

$$\mathcal{H} := H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l) \times L^2(0,l) \times L^2(0,l)$$

que, munido com o produto interno

$$\langle (u,w,v,\eta); (\widetilde{u},\widetilde{w},\widetilde{v},\widetilde{\eta})\rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = \int_0^l (a_{11}u_x\overline{\widetilde{u}}_x + a_{12}(u_x\overline{\widetilde{w}}_x + w_x\overline{\widetilde{u}}_x) + a_{22}w_x\overline{\widetilde{w}}_x)dx$$

$$+\rho_1 \int_0^l v\overline{\widetilde{v}}dx + \rho_2 \int_0^l \eta\overline{\widetilde{\eta}}dx\ ,$$

é um espaço de Hilbert. A norma induzida $||.||_{\mathcal{H}}$ é dada por

$$||(u,w,v,\eta)||^2_{\mathcal{H}} = \int_0^l (a_{11}u_x\overline{u}_x + a_{12}(u_x\overline{w}_x + w_x\overline{u}_x) + a_{22}w_x\overline{w}_x)dx$$
$$+\rho_1\int_0^l v\overline{v}dx + \rho_2\int_0^l \eta\overline{\eta}dx \ .$$

Pode-se mostrar que tal norma é equivalente à norma usual $||.||$ de $\mathcal{H}$. Além disso,

$$||(u,w,v,\eta)||^2_{\mathcal{H}} \geq c_0\left\{\int_0^l |u_x|^2dx + \int_0^l |w_x|^2dx + \int_0^l |v|^2dx + \int_0^l |\eta|^2dx\right\},$$

Definimos o operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{H}$ como
$D(\mathcal{A}) := H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l) \times H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l) \times H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l)$

$$\mathcal{A}U := \begin{pmatrix} v \\ \eta \\ \frac{1}{\rho_1}(a_{11}u_{xx} + a_{12}w_{xx} - b_{11}v - b_{12}\eta) \\ \frac{1}{\rho_2}(a_{12}u_{xx} + a_{22}w_{xx} - b_{12}v - b_{22}\eta) \end{pmatrix}.$$

Então o problema torna-se

$$U_t = \mathcal{A}U \quad , \qquad U(0) = (u_0, w_0, u_1, w_1) \tag{7}$$

Aplicando os teoremas de estabilização de semigrupos , nos conseguimos os seguintes resultados:

Teorema 4. Seja A uma matriz definida positiva. Então

- $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo C_0, $e^{t\mathcal{A}}$ em $\mathcal{H}$. Além disso o semigrupo satisfaz o princípio de estabilidade linear.
- Se B é uma matriz definida positiva, então $e^{t\mathcal{A}}$ é exponencialmente estável.
- Seja B uma matriz singular.

$$e^{t\mathcal{A}} \text{ é exponencialmente estável} \Longleftrightarrow \max\{b_{11}, b_{22}\} > 0 \text{ e } 2\gamma r - \alpha\widetilde{b}^2 > 0$$

onde $2\gamma r - \alpha\widetilde{b}^2$ é um número que só depende das constantes a_{ij} e b_{ij}.

3 Mistura de sólidos viscoelástica

Nesta seção mostraremos a boa colocação do problema para o modelo de mistura viscoelástica e estudaremos a analiticidade do semigrupo associado a (3)-(6). Definimos o operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{H}$, como sendo

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) \ := \ \{ \ U = (u,w,v,\eta) \in \mathcal{H}; \ \ & (v,\eta) \in H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l) \\ & a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta \in H^2(0,l) \\ & a_{12}u + a_{22}w + b_{12}v + b_{22}\eta \in H^2(0,l) \ \} \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}U := \begin{pmatrix} v \\ \eta \\ \frac{1}{\rho_1}\left(a_{11}u_{xx} + a_{12}w_{xx} + b_{11}v_{xx} + b_{12}\eta_{xx}\right) \\ \frac{1}{\rho_2}\left(a_{12}u_{xx} + a_{22}w_{xx} + b_{12}v_{xx} + b_{22}\eta_{xx}\right) \end{pmatrix}$$

Aplicando a teoria de semigrupos e o teorema 3 (analiticidade), nos conseguimos os seguintes resultados:

Teorema 5. Seja A uma matriz definida positiva.

- Se B é uma matriz semidefinida positiva, então $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações.
- Se B é uma matriz definida positiva, então $e^{t\mathcal{A}}$ é analític0.
- Se B é uma matriz singular, então $e^{t\mathcal{A}}$ não é analítico.
- Se B é uma matriz singular, $\max\{b_{11}, b_{22}\} > 0$ e $a_{12} \neq 0$, então o semigrupo é exponencialmente estável.

Referências

[1] ATKIN, R.J. and CRAINE, R.E. **Continuum theories of mixtures: basic theory and historical development**. Quat. J. Mech. Appl. Math. 29, 209-243, 1976.

[2] IESAN, D. **On the theory of mixtures of thermoelastic solids**. J. Thermal Stresses 14, 389-408, 1991.

[3] IESAN, D. and QUINTANILLA, R. **A theory of porous thermoviscoelastic mixtures**. Jour. Therm. Stress. 30, 693-714, 2007.

[4] IESAN, D. and QUINTANILLA, R. **On a theory of thermoelasticity with microtemperatures**. Jour. Therm. Stress. 23, 199-215, 2000.

[5] LIU Z. and ZHENG S. **Semigroups associated with dissipative systems**. CHAPMAN and HALL/CRC, 1999.

[6] MUÑOZ RIVERA, J. E. **Tópicos em Termoelasticidade e Viscoelasticidade**. Rio de Janeiro, LNCC, 1997.

[7] MUÑOZ RIVERA, J. E. **Energy Decay Rates in Linear Thermoelasticity**. Funkcialaj Ekvacioj, Nro.35, pp 19-30, 1992.

[8] MUÑOZ RIVERA, J. E. and ALVES M. S. **Analyticity of semigroups associated with thermoviscoelastic mixtures of solids**. Journal of thermal stresses Nro. 32, pp 986-1004, 2009.

[9] MUÑOZ RIVERA, J. E. and QUINTANILLA R. **Exponential decay in thermoelastic mixture of solids**. Internacional Journal of Solids and Structures Nro. 46, pp 1659-1666, 2009.

[10] PAZY, A. **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations**. Springer-Verlag, New York, 1983.

[11] PRÜSS, J. **On the Spectrum of C_0-Semigroups**. Transaction of the American Mathematical Society, 284, Nro. 2, pp 847-857, 1984.

[12] PRÜSS, J. , BATKAI A. , ENGEL K. and SCHNAUBELT R. **Polynomial stability of operator semigroups**. Match. Nachr., 279, Nro. 1, pp 1425-1440, 2006.

[13] RENARDY, M. **On the Type of Certain C_0-Semigroups**. Commun. in Partial Diferential Equations, 18(7-8), pp 1299-1307, 1993.

[14] YOSIDA K. **Functional Analysis**. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971.