Funções Trigonométricas e Hiperbólicas de Terceira Ordem

Talison Gomes Moreira talisond@yahoo.com.br
Universidade Federal de São João del-Rei, Ouro Branco, MG, Brazil

José Eloy Ottoni jeottoni@ufsj.edu.br
Universidade Federal de São João del-Rei, Ouro Branco, MG, Brazil

Amanda Gonçalves Saraiva Ottoni amandagso@ufsj.edu.br
Universidade Federal de São João del-Rei, Ouro Branco, MG, Brazil

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar as funções trigonométricas e hiperbólicas generalizadas, mais especificamente as funções trigonométricas e hiperbólicas de terceira ordem, bem como a relação entre elas, seus gráficos, suas derivadas e alguma menção à sua história e algumas aplicações.

Palavras-chave

Funções hiperbólicas generalizadas, Funções hiperbólicas de terceira ordem, Funções trigonométricas de terceira ordem.

1 Introdução

Em meados do século XVIII, o matemático e físico italiano Vincenzo Riccati (1707 - 1775) definiu as chamadas funções hiperbólicas, assim denominadas por guardarem a mesma relação para com a hipérbole equilátera que as funções trigonométricas têm com o círculo (por isso também as trigonométricas são por vezes denominadas *funções circulares*), obtendo as fórmulas de adição e subtração de funções hiperbólicas, análogas às fórmulas para as trigonométricas. Riccati foi o primeiro a introduzir a notação para essas funções, $\mathrm{Sh}(x)$ e $\mathrm{Ch}(x)$ [16], utilizadas para o seno hiperbólico e cosseno hiperbólico, respectivamente, além de usar $\mathrm{Sc}(x)$ e $\mathrm{Cc}(x)$ para as funções da trigonometria circular. A notação $\mathrm{senh}\ x$ e $\cosh x$ para essas mesmas funções, e que vigora até hoje, surgiria apenas em 1768 com uma publicação do matemático suíço Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777), onde se encontra o primeiro desenvolvimento sistemático das funções hiperbólicas. As aplicações dessas funções não demoraram a surgir, na engenharia [1], com a criação e aperfeiçoamento da ponte pênsil, dos cabos de distribuição de energia, de cabos telegráficos e etc, que descrevem uma curva denominada *catenária*, caracterizada por uma função hiperbólica, ou na matemática pura, na chamada geometria hiperbólica, base para a descrição matemática do espaço-tempo de Minkowski, da teoria da relatividade de Einstein, um dos pilares da física moderna.

As funções trigonométricas e hiperbólicas podem ser generalizadas de várias maneiras, e entre as mais estudadas estão as funções de Bessel e as funções hipergeométricas, muito conhecidas pela variedade de aplicações na física matemática. Menos conhecidas, e inventadas em 1757 pelo mesmo Vincenzo Riccati, que era irmão do mecânico teórico Giordano Riccati, e segundo filho do matemático Jacopo Francesco Riccati (formulador da equação de Ricatti), são as chamadas funções hiperbólicas (e trigonométricas) generalizadas [19, 27, 24], das quais as conhecidas e usuais $\operatorname{senh} x$ e $\cosh x$ são casos específicos. Riccati definiu-as através através de séries de potências [24, 20]. Posteriormente, essas funções ressurgiriam na matemática de maneira independente inúmeras outras vezes, com uma variedade de notações diferentes [12, 25, 23], e até mesmo com definições um pouco distintas (Appel, por exemplo, e outros definiram funções generalizadas semelhantes para várias variáveis [2, 3, 21, 6]).

Essa classe de funções preserva muito da elegância e simplicidade das funções trigonométricas e hiperbólicas clássicas (que na formulação generalizada são as de segunda ordem), e muitas de suas propriedades podem ser apresentadas sem o uso de técnicas avançadas de análise matemática. O estudo, e as aplicações dessas funções, está relacionado com tópicos tão diversos quanto o teorema binomial [20], as transformadas finitas de Fourier (FFT) [20], as álgebras de Clifford generalizadas [11, 22, 18], a teoria dos grupos de Lie [13], as matrizes circulantes, anticirculantes e de Toeplitz [5, 10, 13, 9, 7], equações diferenciais lineares ordinárias e parciais de ordem superior [20, 4], mecânica quântica em dimensão finita [11], redes de spin [14], etc.

Em contraste com algumas funções especiais bem conhecidas da física-matemática, o manejo das propriedades da classe de funções estudada aqui pode ser considerada *elementar* e rica fonte de investigação para estudantes e pesquisadores. Há uma vasta e dispersa literatura sobre esse assunto que compreende muitas décadas e diversos idiomas, principalmente em francês, inglês, italiano, alemão e polonês, mas até o momento (aparentemente) nada foi escrito em português (uma referência é a dissertação do PROFMAT [7]).

Este artigo foi adaptado da dissertação de mestrado [17], defendida no ano de 2020 e apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Ele é dividido em quatro seções e está estruturado da seguinte maneira: A seção 1 faz um pequeno esboço de revisão histórica do assunto e um rápido panorama de sua perspectiva atual com relação às aplicações. A seção 2 inicia-se com a definição das funções hiperbólicas generalizadas e, posteriormente, apresenta as definições e diversas propriedades das funções hiperbólicas de terceira ordem. A seção 3 define as funções trigonométricas de terceira ordem e introduz uma notação para as mesmas, facilitando a percepção de algumas semelhanças entre suas propriedades e fórmulas com as funções descritas na seção 2, bem como com as funções trigonométricas. Finalmente, a seção 4 encerra este trabalho apresentando suas conclusões e algumas perspectivas de trabalhos futuros.

2 Funções Hiperbólicas de Terceira Ordem

A definição de Ricatti das chamadas funções hiperbólicas generalizadas é dada por:

$$\mathrm{H}_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{nk+r}}{(nk+r)!} \quad (r = 0, 1, 2, ..., n-1) \tag{1}$$

em que $\mathrm{H}_{n,r}(x)$ é referida como a **função hiperbólica de ordem n e tipo r**.

Existem exatamente n funções diferentes de ordem n, cada uma referente a um tipo nessa mesma ordem (r vai de 0 a $n-1$). Observe que a função hiperbólica de ordem $n = 1$ (e $r = 0$) é a função exponencial:

$$\mathrm{H}_{1,0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x. \tag{2}$$

Além disso, para $n = 2$ (logo $r = 0$ ou $r = 1$) as funções $H_{2,0}(x)$ e $H_{2,1}(x)$ são as funções hiperbólicas clássicas:

$$\mathrm{H}_{2,0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x), \tag{3}$$

$$\mathrm{H}_{2,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{senh}\,(x). \tag{4}$$

As funções hiperbólicas de terceira ordem:

$$\mathrm{H}_{3,r}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k+r}}{(3k+r)!} \quad (r = 0, 1, 2) \tag{5}$$

serão objeto de estudo nessa seção. A literatura contém uma variedade de notações diferentes para elas. Aqui será usada a notação $\mathrm{H}_{3,0}(x) = \cosh_{3,0}(x)$, $\mathrm{H}_{3,1}(x) = \mathrm{senh}_{3,1}(x)$ e $\mathrm{H}_{3,2}(x) = \mathrm{senh}_{3,2}(x)$ que é inspirada naturalmente na notação já bem estabelecida para as funções hiperbólicas clássicas de segunda ordem. Portanto, as três funções hiperbólicas básicas de terceira ordem que serão tratadas daqui por diante são definidas como:

$$
\begin{aligned}
\cosh_{3,0}(x) = \mathrm{H}_{3,0}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{(3k)!} = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + ... \\
\operatorname{senh}_{3,1}(x) = \mathrm{H}_{3,1}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k+1}}{(3k+1)!} = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{10}}{10!} + ... \\
\operatorname{senh}_{3,2}(x) = \mathrm{H}_{3,2}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k+2}}{(3k+2)!} = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{11}}{11!} + ...
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Aplicando o teste da Razão para séries nessas funções é possível mostrar que elas são convergentes $\forall x \in \mathbb{R}$, e portanto o domínio das três funções é a reta real toda (ao longo de todo o trabalho as funções são consideradas para uma variável real).

A partir das funções definidas em (6), que serão denotadas funções hiperbólicas de 3^a ordem *básicas*, pode-se definir, em analogia com o que é feito para o caso das funções de segunda ordem, as demais funções hiperbólicas de terceira ordem (o domínio de todas elas sendo a reta real menos os zeros das respectivas funções nos denominadores):

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sech}_{3,0}(x) &= \frac{1}{\cosh_{3,0}(x)} \\
\operatorname{csch}_{3,1}(x) &= \frac{1}{\operatorname{senh}_{3,1}(x)} \\
\operatorname{csch}_{3,2}(x) &= \frac{1}{\operatorname{senh}_{3,2}(x)} \\
\tanh_{3,1}(x) &= \frac{\operatorname{senh}_{3,1}(x)}{\cosh_{3,0}(x)} \\
\tanh_{3,2}(x) &= \frac{\operatorname{senh}_{3,2}(x)}{\cosh_{3,0}(x)} \\
\coth_{3,1}(x) &= \frac{1}{\tanh_{3,1}(x)} = \frac{\cosh_{3,0}(x)}{\operatorname{senh}_{3,1}(x)} \\
\coth_{3,2}(x) &= \frac{1}{\tanh_{3,2}(x)} = \frac{\cosh_{3,0}(x)}{\operatorname{senh}_{3,2}(x)},
\end{aligned}
\tag{7}
$$

2.1 Derivadas

Para calcular a derivada de cada uma das funções definidas em (6), pode-se derivar termo a termo a série de potências que as define. Sendo assim:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \cosh_{3,0} x &= \operatorname{senh}_{3,2} x \\
\frac{d}{dx} \operatorname{senh}_{3,1} x &= \cosh_{3,0} x \\
\frac{d}{dx} \operatorname{senh}_{3,2} x &= \operatorname{senh}_{3,1} x.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Além disso, todas as três funções têm a propriedade de serem elas mesmas suas derivadas de terceira ordem, isto é

$$\begin{aligned}
\frac{d^3}{dx^3}\cosh_{3,0}\,x &= \cosh_{3,0}\,x\\
\frac{d^3}{dx^3}\operatorname{senh}_{3,1}\,x &= \operatorname{senh}_{3,1}\,x\\
\frac{d^3}{dx^3}\operatorname{senh}_{3,2}\,x &= \operatorname{senh}_{3,2}\,x.
\end{aligned}$$

Consequentemente, elas são autofunções (soluções linearmente independentes) da equação diferencial ordinária linear de terceira ordem $y''' = y$ (tal como as funções hiperbólicas de segunda ordem, $\operatorname{senh} x$ e $\cosh x$, são as autofunções da equação diferencial ordinária linear de segunda ordem $y'' = y$), com as seguintes condições iniciais

$$\begin{aligned}
&\cosh_{3,0}(0) = 1\,,\ \cosh_{3,0}{}'(0) = 0\,,\ \cosh_{3,0}{}''(0) = 0\\
&\operatorname{senh}_{3,1}(0) = 0\,,\ \operatorname{senh}_{3,1}{}'(0) = 1\,,\ \operatorname{senh}_{3,1}{}''(0) = 0\\
&\operatorname{senh}_{3,2}(0) = 0\,,\ \operatorname{senh}_{3,2}{}'(0) = 0\,,\ \operatorname{senh}_{3,2}{}''(0) = 1.
\end{aligned} \tag{9}$$

As derivadas das demais funções hiperbólicas de 3^a ordem podem ser calculadas usando-se a fórmula da derivada do quociente de duas funções. A dedução das fórmulas a seguir estão descritas passo a passo em [17].

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\operatorname{sech}_{3,0}\,x &= -\operatorname{sech}_{3,0}\,x\tanh_{3,2}\,x\\
\frac{d}{dx}\operatorname{csch}_{3,1}\,x &= -\operatorname{csch}_{3,1}\,x\coth_{3,1}\,x\\
\frac{d}{dx}\operatorname{csch}_{3,2}\,x &= -\operatorname{csch}_{3,2}\,x\coth_{3,2}\,x\tanh_{3,1}\,x\\
\frac{d}{dx}\tanh_{3,1}\,x &= 1-\tanh_{3,1}\,x\tanh_{3,2}\,x\\
\frac{d}{dx}\tanh_{3,2}\,x &= \tanh_{3,1}\,x-\tanh_{3,2}{}^2\,x\\
\frac{d}{dx}\coth_{3,1}\,x &= \tanh_{3,2}\,x\coth_{3,1}\,x-\coth_{3,1}{}^2\,x\\
\frac{d}{dx}\coth_{3,2}\,x &= 1-\coth_{3,2}{}^2\,x\tanh_{3,1}\,x
\end{aligned} \tag{10}$$

Serão demonstradas outras propriedades das funções hiperbólicas de terceira ordem nas próximas subseções.

2.2 Gráficos

Nesta subseção serão apresentados os gráficos das funções hiperbólicas básicas de ordem 3. Para isso observe que, pelo fato das mesmas serem soluções do problema de valor inicial $y''' = y$ com condições iniciais dadas por (9), elas podem ser escritas como uma combinação linear da função exponencial da seguinte maneira:

$$\cosh_{3,0}\ x = \frac{1}{3}(e^x + e^{q_1 x} + e^{q_2 x})$$

$$\operatorname{senh}_{3,1}\ x = \frac{1}{3}(e^x + q_1 e^{q_1 x} + q_2 e^{q_2})$$

$$\operatorname{senh}_{3,2}\ x = \frac{1}{3}(e^x + q_2 e^{q_1 x} + q_1 e^{q_2 x}),$$

em que $q_1 = (-1+i\sqrt{3})/2$ e $q_2 = (-1-i\sqrt{3})/2$ são as duas raízes cúbicas não reais da unidade (ou seja $q_1^3 = q_2^3 = 1$). Ao aplicar a fórmula de Euler $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen}\ x$ nas expressões das funções hiperbólicas em termos de exponenciais, as funções hiperbólicas de terceira ordem podem ainda ser escritas como

$$\begin{aligned}
\cosh_{3,0}\ x &= \frac{1}{3}\left[e^x + 2e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right] \\
\operatorname{senh}_{3,1}\ x &= \frac{1}{3}\left[e^x + 2e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{2\pi}{3}\right)\right] \qquad (11)\\
\operatorname{senh}_{3,2}\ x &= \frac{1}{3}\left[e^x + 2e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{2\pi}{3}\right)\right].
\end{aligned}$$

Com o uso do software livre Geogebra [8] e de posse das fórmulas (11), foi possível obter os gráficos das funções hiperbólicas básicas de 3^a ordem, apresentados na figura 1.

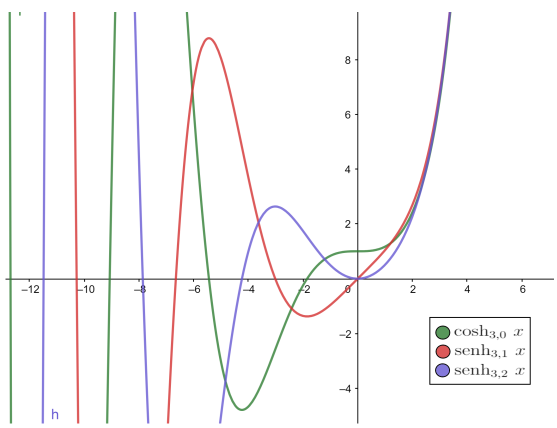

Figura 1: Gráfico das funções hiperbólicas básicas de 3^a ordem.

A partir de uma análise das fórmulas (11), pode-se notar que as três funções aproximam-se assintoticamente de $e^x/3$ para $x \to \infty$, e oscilam, aproximadamente de maneira periódica, à medida que $x \to -\infty$, com amplitudes crescentes. Esse comportamento pode ser observado na figura 1.

Utilizando as fórmulas dadas em (11) é possível, também, plotar os gráficos das demais funções hiperbólicas de ordem 3, definidas em (7). Esses gráficos aparecem na figura 2.

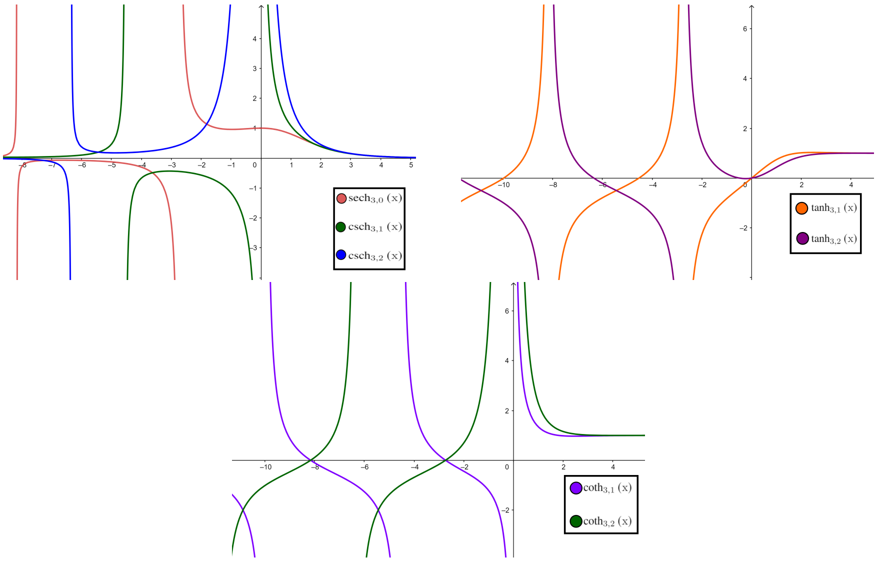

Figura 2: Gráficos das funções hiperbólicas secundárias de 3^a ordem.

2.3 Relações Fundamentais

A principal ferramenta para estudar outras propriedades das funções hiperbólicas generalizadas é um teorema encontrado em [24] (teoremas 8 e 9, página 303), a que denominaremos Teorema de Ungar, e que descreve fortes resultados a respeito das funções hiperbólicas generalizadas de ordem n.

Será enunciado aqui o teorema para o caso particular $n = 3$, e para tanto, será definida a matriz circulante dada abaixo, [5, 7] denominada, seguindo Ungar, por $\mathbf{H}_3(x)$. A matriz $\mathbf{H}_3(x)$ é dada por:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{H}_{3,0}(x) & \mathrm{H}_{3,1}(x) & \mathrm{H}_{3,2}(x) \\ \mathrm{H}_{3,2}(x) & \mathrm{H}_{3,0}(x) & \mathrm{H}_{3,1}(x) \\ \mathrm{H}_{3,1}(x) & \mathrm{H}_{3,2}(x) & \mathrm{H}_{3,0}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh_{3,0} x & \mathrm{senh}_{3,1}\, x & \mathrm{senh}_{3,2}\, x \\ \mathrm{senh}_{3,2}\, x & \cosh_{3,0} x & \mathrm{senh}_{3,1}\, x \\ \mathrm{senh}_{3,1}\, x & \mathrm{senh}_{3,2}\, x & \cosh_{3,0} x \end{bmatrix} \tag{12}$$

Teorema 1. *A matriz* $\mathbf{H}_3(x)$ *definida em (12) tem as seguintes propriedades:*

$$\begin{aligned} &\det \mathbf{H}_3(x) = 1 \ , && (\forall x \in \mathbb{R}) \\ &\mathbf{H}_3(x_1 + x_2) = \mathbf{H}_3(x_1)\mathbf{H}_3(x_2) \ , && (\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Observe que

$$\det \mathbf{H}_3(x) = \cosh_{3,0}\ x\ \Delta_0(x) + \operatorname{senh}_{3,1}\ x\ \Delta_1(x) + \operatorname{senh}_{3,2}\ x\ \Delta_2(x) = 1, \tag{13}$$

em que $\Delta_0(x)$, $\Delta_1(x)$ e $\Delta_2(x)$ são os respectivos cofatores da matriz $\mathbf{H}_3(x)$ obtidos eliminando-se os elementos da primeira linha, ou seja,

$$\Delta_0(x) = \begin{vmatrix} \cosh_{3,0}\ x & \operatorname{senh}_{3,1}\ x \\ \operatorname{senh}_{3,2}\ x & \cosh_{3,0}\ x \end{vmatrix} = {\cosh_{3,0}}^2 x - \operatorname{senh}_{3,1}\ x \operatorname{senh}_{3,2}\ x$$

$$\Delta_1(x) = -\begin{vmatrix} \operatorname{senh}_{3,2}\ x & \operatorname{senh}_{3,1}\ x \\ \operatorname{senh}_{3,1}\ x & \cosh_{3,0}\ x \end{vmatrix} = {\operatorname{senh}_{3,1}}^2 x - \operatorname{senh}_{3,2}\ x \cosh_{3,0}\ x \tag{14}$$

$$\Delta_2(x) = \begin{vmatrix} \operatorname{senh}_{3,2}\ x & \cosh_{3,0}\ x \\ \operatorname{senh}_{3,1}\ x & \operatorname{senh}_{3,2}\ x \end{vmatrix} = {\operatorname{senh}_{3,2}}^2 x - \cosh_{3,0}\ x \operatorname{senh}_{3,1}\ x$$

Substituindo essas funções definidas em (14) na equação (13), chega-se na principal identidade algébrica envolvendo essas funções, que pode ser denominada como **Relação Fundamental para as Funções Hiperbólicas de Terceira Ordem**:

$${\cosh_{3,0}}^3 x + {\operatorname{senh}_{3,1}}^3 x + {\operatorname{senh}_{3,2}}^3 x - 3\cosh_{3,0}\ x \operatorname{senh}_{3,1}\ x \operatorname{senh}_{3,2}\ x = 1. \tag{15}$$

Tomando a equação acima e dividindo os dois membros por ${\cosh_{3,0}}^3 x$ (com $\cosh_{3,0}\ x \neq 0$), obtém-se a **Segunda Relação Fundamental para as Funções Hiperbólicas de Terceira Ordem**:

$$1 + {\tanh_{3,1}}^3 x + {\tanh_{3,2}}^3 x - 3\tanh_{3,1}\ x \tanh_{3,2}\ x = {\operatorname{sech}_{3,0}}^3 x \tag{16}$$

Note que as igualdades descritas pelas equações (15) e (16) estão para as funções hiperbólicas de 3^a ordem assim como as relações fundamentais $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ e $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ estão para a funções trigonométricas seno e cosseno.

2.4 Fórmulas de Adição de Arcos

Nesta seção serão deduzidas algebricamente as fórmulas de adição de arcos para as funções hiperbólicas básicas de terceira ordem.

De acordo com o teorema 1 a matriz $\mathbf{H}_3(x)$, definida em (12), obedece a propriedade:

$$\mathbf{H}_3(x_1+x_2)=\mathbf{H}_3(x_1)\mathbf{H}_3(x_2)\ , \quad (\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}).$$

Portanto, a matriz

$$\begin{bmatrix} \mathrm{H}_{3,0}(x_1+x_2) & \mathrm{H}_{3,1}(x_1+x_2) & \mathrm{H}_{3,2}(x_1+x_2) \\ \mathrm{H}_{3,2}(x_1+x_2) & \mathrm{H}_{3,0}(x_1+x_2) & \mathrm{H}_{3,1}(x_1+x_2) \\ \mathrm{H}_{3,1}(x_1+x_2) & \mathrm{H}_{3,2}(x_1+x_2) & \mathrm{H}_{3,0}(x_1+x_2) \end{bmatrix}$$

é igual ao produtos de matrizes

$$\begin{bmatrix} \mathrm{H}_{3,0}(x_1) & \mathrm{H}_{3,1}(x_1) & \mathrm{H}_{3,2}(x_1) \\ \mathrm{H}_{3,2}(x_1) & \mathrm{H}_{3,0}(x_1) & \mathrm{H}_{3,1}(x_1) \\ \mathrm{H}_{3,1}(x_1) & \mathrm{H}_{3,2}(x_1) & \mathrm{H}_{3,0}(x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{H}_{3,0}(x_2) & \mathrm{H}_{3,1}(x_2) & \mathrm{H}_{3,2}(x_2) \\ \mathrm{H}_{3,2}(x_2) & \mathrm{H}_{3,0}(x_2) & \mathrm{H}_{3,1}(x_2) \\ \mathrm{H}_{3,1}(x_2) & \mathrm{H}_{3,2}(x_2) & \mathrm{H}_{3,0}(x_2) \end{bmatrix}.$$

Analisando a primeira linha do resultado do produto de matrizes (as outras linhas não contêm informação adicional), pode-se obter a fórmula de adição de arcos das funções hiperbólicas básicas de terceira ordem. Note que

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_{3,0}(x_1+x_2) &= \mathrm{H}_{3,0}(x_1)H_{3,0}(x_2)+\mathrm{H}_{3,1}(x_1)\mathrm{H}_{3,2}(x_2)+\mathrm{H}_{3,2}(x_1)\mathrm{H}_{3,1}(x_2) \\ \mathrm{H}_{3,1}(x_1+x_2) &= \mathrm{H}_{3,0}(x_1)\mathrm{H}_{3,1}(x_2)+\mathrm{H}_{3,1}(x_1)\mathrm{H}_{3,0}(x_2)+\mathrm{H}_{3,2}(x_1)\mathrm{H}_{3,2}(x_2) \\ \mathrm{H}_{3,2}(x_1+x_2) &= \mathrm{H}_{3,0}(x_1)\mathrm{H}_{3,2}(x_2)+\mathrm{H}_{3,1}(x_1)\mathrm{H}_{3,1}(x_2)+\mathrm{H}_{3,2}(x_1)\mathrm{H}_{3,0}(x_2). \end{aligned}$$

Portanto a fórmula de adição de arcos é:

$$\begin{aligned} \cosh_{3,0}(x_1+x_2) &= \cosh_{3,0}\, x_1 \cosh_{3,0}\, x_2+\mathrm{senh}_{3,1}\, x_1\, \mathrm{senh}_{3,2}\, x_2 \\ &+ \mathrm{senh}_{3,2}\, x_1\, \mathrm{senh}_{3,1}\, x_2 \\ \mathrm{senh}_{3,1}(x_1+x_2) &= \cosh_{3,0}\, x_1\, \mathrm{senh}_{3,1}\, x_2+\mathrm{senh}_{3,1}\, x_1 \cosh_{3,0}\, x_2 \\ &+ \mathrm{senh}_{3,2}\, x_1\, \mathrm{senh}_{3,2}\, x_2 \\ \mathrm{senh}_{3,2}(x_1+x_2) &= \cosh_{3,0}\, x_1\, \mathrm{senh}_{3,2}\, x_2+\mathrm{senh}_{3,1}\, x_1\, \mathrm{senh}_{3,1}\, x_2 \\ &+ \mathrm{senh}_{3,2}\, x_1 \cosh_{3,0}\, x_2 \end{aligned} \tag{17}$$

Utilizando-se as fórmulas descritas em (17), pode-se deduzir que

$$\begin{aligned}\tanh_{3,1}(x_1+x_2) &= \frac{\tanh_{3,1}\ x_1+\tanh_{3,1}\ x_2+\tanh_{3,2}\ x_1\tanh_{3,2}\ x_2}{1+\tanh_{3,1}\ x_1\tanh_{3,2}\ x_2+\tanh_{3,2}\ x_1\tanh_{3,1}\ x_2} \\ \tanh_{3,2}(x_1+x_2) &= \frac{\tanh_{3,2}\ x_1+\tanh_{3,2}\ x_2+\tanh_{3,1}\ x_1\tanh_{3,1}\ x_2}{1+\tanh_{3,1}\ x_1\tanh_{3,2}\ x_2+\tanh_{3,2}\ x_1\tanh_{3,1}\ x_2}.\end{aligned} \tag{18}$$

Da mesma forma, pode-se obter a fórmula para a soma de arcos das demais funções hiperbólicas de terceira ordem definidas em (7). As contas para a dedução das fórmulas (18) estão detalhadas em [17].

Uma simples observação das definições das funções hiperbólicas de terceira ordem é suficiente para perceber que nenhuma delas é par, ou ímpar. Na subsecção seguinte será visto o que ainda é possível dizer com relação às simetrias delas.

2.5 Simetrias

Considere ainda a matriz $\mathbf{H}_3(x)$:

$$\mathbf{H}_3(x)=\begin{bmatrix}\cosh_{3,0}\ x & \operatorname{senh}_{3,1}\ x & \operatorname{senh}_{3,2}\ x\\ \operatorname{senh}_{3,2}\ x & \cosh_{3,0}\ x & \operatorname{senh}_{3,1}\ x\\ \operatorname{senh}_{3,1}\ x & \operatorname{senh}_{3,2}\ x & \cosh_{3,0}\ x\end{bmatrix}$$

Conforme visto, o teorema de Ungar 1 afirma que o determinante dessa matiz é 1, portanto essa matriz possui inversa, qualquer que seja o valor de x, dada por

$$\mathbf{H}_3^{-1}(x)=\frac{1}{\det\mathbf{H}_3(x)}adj\,\mathbf{H}_3(x)=adj\,\mathbf{H}_3(x),$$

em que $adj\mathbf{H}_3(x)$ é a transposta da matriz dos cofatores da matriz $\mathbf{H}_3(x)$.

Note que os cofatores das outras linhas serão iguais aos cofatores da primeira linha, a menos de uma mudança de ordem. Logo,

$$\mathbf{H}_3^{-1}(x)=\begin{bmatrix}\Delta_0(x) & \Delta_2(x) & \Delta_1(x)\\ \Delta_1(x) & \Delta_0(x) & \Delta_2(x)\\ \Delta_2(x) & \Delta_1(x) & \Delta_0(x)\end{bmatrix},$$

Os cofatores $\Delta_1(x)$, $\Delta_2(x)$ e $\Delta_3(x)$ estão calculados em 14.

A segunda afirmação do teorema de Ungar diz que $\mathbf{H}_3(x_1+x_2)=\mathbf{H}_3(x_1).\mathbf{H}_3(x_2)$. Fazendo $x_1=x$ e $x_2=-x$ tem-se

$$\mathbf{H}_3(0)=\mathbf{H}_3(x).\mathbf{H}_3(-x),$$

mas $\mathbf{H}_3(0) = \mathbf{I}_3$, onde $\mathbf{I}_3$ é a matriz identidade de terceira ordem. Portanto:

$$\mathbf{H}_3^{-1}(x) = \mathbf{H}_3(-x).$$

Ou seja,

$$\begin{bmatrix} \cosh_{3,0}(-x) & \operatorname{senh}_{3,1}(-x) & \operatorname{senh}_{3,2}(-x) \\ \operatorname{senh}_{3,2}(-x) & \cosh_{3,0}(-x) & \operatorname{senh}_{3,1}(-x) \\ \operatorname{senh}_{3,1}(-x) & \operatorname{senh}_{3,2}(-x) & \cosh_{3,0}(-x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_0(x) & \Delta_2(x) & \Delta_1(x) \\ \Delta_1(x) & \Delta_0(x) & \Delta_2(x) \\ \Delta_2(x) & \Delta_1(x) & \Delta_0(x) \end{bmatrix}.$$

De onde pode-se concluir as seguintes propriedades de simetria das funções hiperbólicas de terceira ordem:

$$\begin{aligned} \cosh_{3,0}(-x) &= {\cosh_{3,0}}^2 x - \operatorname{senh}_{3,1} x \operatorname{senh}_{3,2} x \\ \operatorname{senh}_{3,1}(-x) &= {\operatorname{senh}_{3,2}}^2 x - \operatorname{senh}_{3,1} x \cosh_{3,0} x \\ \operatorname{senh}_{3,2}(-x) &= {\operatorname{senh}_{3,1}}^2 x - \operatorname{senh}_{3,2} x \cosh_{3,0} x \end{aligned} \tag{19}$$

É interessante observar, em particular, que as funções $\Delta_0(x)$, $\Delta_1(x)$ e $\Delta_2(x)$ têm, como pode ser demonstrado, as seguintes derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\Delta_0(x) &= -\Delta_1(x) \\ \frac{d}{dx}\Delta_1(x) &= -\Delta_2(x) \\ \frac{d}{dx}\Delta_2(x) &= -\Delta_0(x). \end{aligned}$$

Efetuando a derivação três vezes de cada uma dessas funções, pode-se concluir que todas as três têm a propriedade de serem elas mesmas o negativo de suas derivadas de terceira ordem, i.e.:

$$\begin{aligned} \frac{d^3}{dx^3}\Delta_0(x) &= -\Delta_0(x) \\ \frac{d^3}{dx^3}\Delta_1(x) &= -\Delta_1(x) \\ \frac{d^3}{dx^3}\Delta_2(x) &= -\Delta_2(x). \end{aligned}$$

Dessa forma pode-se observar que elas são autofunções da equação diferencial de terceira ordem $y''' = -y$ (tal como as funções hiperbólicas de terceira ordem são as autofunções da equação diferencial $y''' = y$), mas com os seguintes valores iniciais:

$$\begin{aligned} &\Delta_0(0) = 1\ ,\ \Delta_0'(0) = 0\ ,\quad \Delta_0''(0) = 0 \\ &\Delta_1(0) = 0\ ,\ \Delta_1'(0) = 0\ ,\quad \Delta_1''(0) = 1 \\ &\Delta_2(0) = 0\ ,\ \Delta_2'(0) = -1\ ,\ \Delta_2''(0) = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Na próxima seção, serão definidas as **funções trigonométricas de terceira ordem**, que tem relações diretas com as funções $\Delta_0(x)$, $\Delta_1(x)$ e $\Delta_3(x)$.

3 Funções Trigonométricas de Terceira Ordem

Assim como, na segunda ordem, as funções trigonométricas e hiperbólicas possuem diversas propriedades análogas e estão relacionadas, as funções trigonométricas de terceira ordem são definidas de forma a serem bem relacionadas às funções hiperbólicas de 3^a ordem. Para isso, utiliza-se o fato das funções hiperbólicas de terceira ordem serem as soluções da equação diferencial $y''' = y$.

Definição 1. *As funções trigonométricas de terceira ordem são as três funções $T_{3,0}(x)$, $T_{3,1}(x)$ e $T_{3,2}(x)$, soluções da equação diferencial:*

$$y'''(x) = -y(x),$$

com os seguintes valores iniciais respectivamente:

$$\begin{aligned} &\mathrm{T}_{3,0}(0) = 1\ ,\ \mathrm{T}_{3,0}'(0) = 0\ ,\ \mathrm{T}_{3,0}''(0) = 0 \\ &\mathrm{T}_{3,1}(0) = 0\ ,\ \mathrm{T}_{3,1}'(0) = 1\ ,\ \mathrm{T}_{3,1}'(0) = 0 \\ &\mathrm{T}_{3,2}(0) = 0\ ,\ \mathrm{T}_{3,2}'(0) = 0\ ,\ \mathrm{T}_{3,2}''(0) = 1. \end{aligned} \tag{21}$$

Ao usar a notação mais familiar $\mathrm{T}_{3,0}(x) = \cos_{3,0} x$, $\mathrm{T}_{3,1}(x) = \mathrm{sen}_{3,1}\ x$ e $\mathrm{T}_{3,2}(x) = \mathrm{sen}_{3,2}\ x$, para as três funções trigonométricas de terceira ordem, e observar o desenvolvimento apresentado ao final da subseção 2.5, chega-se que:

$$\begin{aligned} \cos_{3,0}(x) &= \quad \Delta_0(x) = \quad \cosh_{3,0}(-x) \\ \mathrm{sen}_{3,1}(x) &= -\Delta_2(x) = -\,\mathrm{senh}_{3,1}(-x) \\ \mathrm{sen}_{3,2}(x) &= \quad \Delta_1(x) = \quad \mathrm{senh}_{3,2}(-x). \end{aligned} \tag{22}$$

O sinal de menos na segunda linha ocorre devido às diferenças nas condições iniciais descritas em (20) e (21).

Vale ressaltar que a notação para as funções trigonométricas de 3^a ordem apresentadas neste trabalho são inéditas e possuem grandes vantagens para a observação de semelhanças e analogias, tanto com as funções trigonométricas, quanto com as funções hiperbólicas de 3^a ordem.

É possível extrair várias propriedades dessas novas funções a partir da definição e das propriedades das funções hiperbólicas de terceira ordem apresentadas na seção 2. Por exemplo, as séries de Taylor dessas funções podem ser obtidas a partir das séries das hiperbólicas (6) com algumas mudanças de sinal:

$$\begin{aligned}
\cos_{3,0}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{3k}}{(3k)!} = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^9}{9!} + \dots \\
\operatorname{sen}_{3,1}(x) &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{3k+1}}{(3k+1)!} = x - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots \\
\operatorname{sen}_{3,2}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{3k+2}}{(3k+2)!} = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots
\end{aligned} \tag{23}$$

Também todas elas convergentes $\forall x \in \mathbb{R}$.

Através das três funções trigonométricas básicas definidas em (23) pode-se definir as demais funções trigonométricas de 3^a ordem (o domínio de todas elas sendo a reta real menos os zeros das respectivas funções nos denominadores):

$$\begin{aligned}
\sec_{3,0}(x) &= \frac{1}{\cos_{3,0}(x)} \\
\csc_{3,1}(x) &= \frac{1}{\operatorname{sen}_{3,1}(x)} \\
\csc_{3,2}(x) &= \frac{1}{\operatorname{sen}_{3,2}(x)} \\
\tan_{3,1}(x) &= \frac{\operatorname{sen}_{3,1}(x)}{\cos_{3,0}(x)} \\
\tan_{3,2}(x) &= \frac{\operatorname{sen}_{3,2}(x)}{\cos_{3,0}(x)} \\
\cot_{3,1}(x) &= \frac{1}{\tan_{3,1}(x)} = \frac{\cos_{3,0}(x)}{\operatorname{sen}_{3,1}(x)} \\
\cot_{3,2}(x) &= \frac{1}{\tan_{3,2}(x)} = \frac{\cos_{3,0}(x)}{\operatorname{sen}_{3,2}(x)}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Nas próximas subseções serão mostradas diversas propriedades das funções trigonométricas de 3^a ordem. Todas essas propriedades advêm das propriedades das hiperbólicas de 3^a ordem, apresentadas na seção 2, devido às relações (22). Por uma questão de ordem cada propriedade está descrita em uma subseção e as subseções abaixo contém o mesmo nome e ordem daquelas descritas na seção 2.

3.1 Derivadas

As derivadas das funções trigonométricas de 3^a ordem podem ser calculadas utilizando-se as derivadas das funções hiperbólicas, descritas em (8) e (10), bem como as igualdades (22). As contas detalhadas estão descritas em [17]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\cos_{3,0}\ x = -\operatorname{sen}_{3,2}\ x\\
&\frac{d}{dx}\operatorname{sen}_{3,1}\ x = \cos_{3,0}\ x\\
&\frac{d}{dx}\operatorname{sen}_{3,2}\ x = \operatorname{sen}_{3,1}\ x\\
&\frac{d}{dx}\sec_{3,0}\ x = \sec_{3,0}\ x\tan_{3,2}\ x\\
&\frac{d}{dx}\csc_{3,1}\ x = -\csc_{3,1}\ x\cot_{3,1}\ x\\
&\frac{d}{dx}\csc_{3,2}\ x = -\csc_{3,2}\ x\tan_{3,1}\ x\cot_{3,2}\ x\\
&\frac{d}{dx}\tan_{3,1}\ x = 1+\tan_{3,1}\ x\tan_{3,2}\ x\\
&\frac{d}{dx}\tan_{3,2}\ x = \tan_{3,1}\ x+{\tan_{3,2}}^2 x\\
&\frac{d}{dx}\cot_{3,1}\ x = -\tan_{3,2}\ x\cot_{3,1}\ x-{\cot_{3,1}}^2 x\\
&\frac{d}{dx}\cot_{3,2}\ x = -1-{\cot_{3,2}}^2 x\tan_{3,1}\ x
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Note que as derivadas das funções trigonométricas de 3^a ordem apresentam diversas similaridades com as as derivadas das funções trigonométricas de 2^a ordem.

3.2 Gráficos

Para obter o gráfico das funções trigonométricas de 3^a ordem, procedimentos análogos àqueles adotados na seção 2.2 podem ser também aqui desenvolvidos. Entretanto as relações (22) dizem que é possível obter os gráficos das trigonométricas a partir de reflexões em torno dos eixos x e/ou y dos gráficos mostrados na figura 1. A figura 3 mostra os gráficos das funções trigonométricas básicas de ordem 3. Os gráficos das funções trigonométricas secundárias de 3^a ordem aparecem na figura 4.

3.3 Relações Fundamentais

Esta subseção apresenta as relações fundamentais das funções trigonométricas de terceira ordem, baseado no desenvolvimento da subseção 2.3.

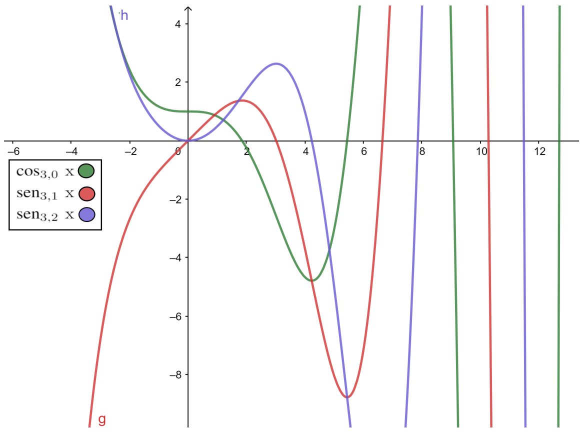

Figura 3: Gráfico das funções trigonométricas básicas de 3^a ordem.

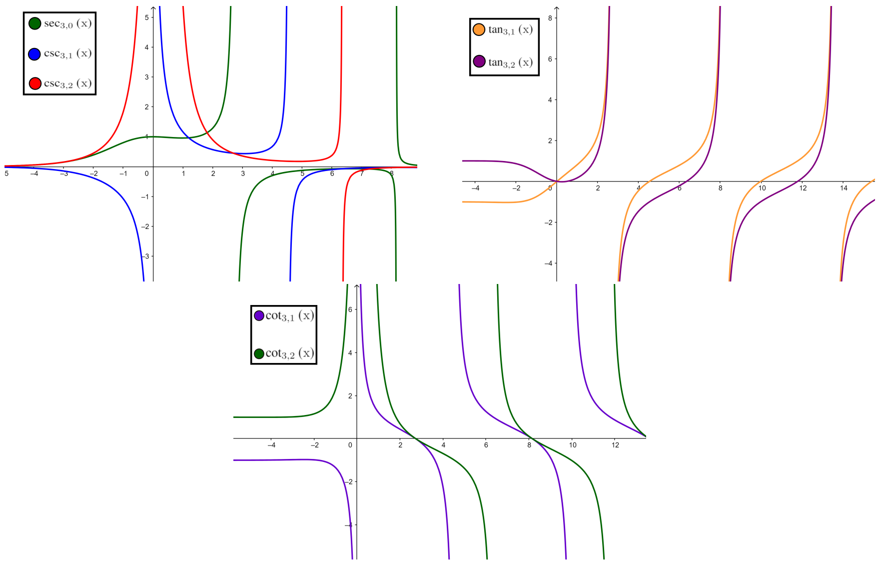

Figura 4: Gráficos das funções trigonométricas secundárias de 3^a ordem.

Substituindo-se x por $-x$ na relação fundamental para as funções hiperbólicas de terceira ordem, descrita em (15), tem-se que:

$$\begin{aligned} \cosh_{3,0}{}^3(-x) \quad &+ \quad \operatorname{senh}_{3,1}{}^3(-x) \\ &+ \quad \operatorname{senh}_{3,2}{}^3(-x) - 3\cosh_{3,0}(-x)\operatorname{senh}_{3,1}(-x)\operatorname{senh}_{3,2}(-x) = 1. \end{aligned}$$

Utilizando as igualdades (22) na equação acima, tem-se o que se pode denominar **Relação Fundamental para as Funções Trigonométricas de Terceira Ordem**:

$$\cos_{3,0}{}^3 x - \operatorname{sen}_{3,1}{}^3 x + \operatorname{sen}_{3,2}{}^3 x + 3\cos_{3,0} x \operatorname{sen}_{3,1} x \operatorname{sen}_{3,2} x = 1. \qquad (26)$$

Dividindo os dois membros da equação (26) por $\cos_{3,0}{}^3(x)$ com $\cos_{3,0}\, x \neq 0$ obtém-se a denominada **Segunda Relação Fundamental para as Funções Trigonométricas de Terceira Ordem**:

$$1 - \tan_{3,1}{}^3 x + \tan_{3,2}{}^3 x + 3\tan_{3,1}\, x \tan_{3,2}\, x = \sec_{3,0}{}^3 x. \tag{27}$$

3.4 Fórmulas de Adição de Arcos

Para deduzir as fórmulas de adição de arcos das funções trigonométricas de 3^a ordem, pode-se usar, além das igualdades (22), as fórmulas de adição de arcos das funções hiperbólicas, descritas nas equações (17). Logo,

$$\begin{aligned}
\cos_{3,0}(x_1+x_2) &= \cos_{3,0}\, x_1 \cos_{3,0}\, x_2 - \mathrm{sen}_{3,1}\, x_1 \,\mathrm{sen}_{3,2}\, x_2 \\
&- \mathrm{sen}_{3,2}\, x_1 \,\mathrm{sen}_{3,1}\, x_2 \\
\mathrm{sen}_{3,1}(x_1+x_2) &= \cos_{3,0}\, x_1 \,\mathrm{sen}_{3,1}\, x_2 + \mathrm{sen}_{3,1}\, x_1 \cos_{3,0}\, x_2 \\
&- \mathrm{sen}_{3,2}\, x_1 \,\mathrm{sen}_{3,2}\, x_2 \\
\mathrm{sen}_{3,2}(x_1+x_2) &= \cos_{3,0}\, x_1 \,\mathrm{sen}_{3,2}\, x_2 + \mathrm{sen}_{3,2}\, x_1 \cos_{3,0}\, x_2 \\
&+ \mathrm{sen}_{3,1}\, x_1 \,\mathrm{sen}_{3,1}\, x_2
\end{aligned} \tag{28}$$

Utilizando as definições em (24) e as fórmulas em (18) é possível mostrar que (as contas detalhadas em [17]):

$$\begin{aligned}
\tan_{3,1}(x_1+x_2) &= \frac{\tan_{3,1}\, x_1 + \tan_{3,1}\, x_2 - \tan_{3,2}\, x_1 \tan_{3,2}\, x_2}{1 - \tan_{3,1}\, x_1 \tan_{3,2}\, x_2 - \tan_{3,2}\, x_1 \tan_{3,1}\, x_2} \\
\tan_{3,2}(x_1+x_2) &= \frac{\tan_{3,2}\, x_1 + \tan_{3,2}\, x_2 + \tan_{3,1}\, x_1 \tan_{3,1}\, x_2}{1 - \tan_{3,1}\, x_1 \tan_{3,2}\, x_2 - \tan_{3,2}\, x_1 \tan_{3,1}\, x_2}
\end{aligned} \tag{29}$$

De forma análoga, pode-se obter as fórmulas para a adição de arcos das demais funções trigonométricas de terceira ordem definidas em (24).

3.5 Simetrias

As últimas propriedade das funções trigonométricas de 3^a ordem a serem descritas aqui, assim como na seção 2, são suas simetrias.

Para obter as simetrias, usa-se as simetrias das funções hiperbólicas de 3^a ordem, descritas pela equação (19), juntamente com as relações (22).

$$\begin{aligned}
\cos_{3,0}(-x) &= \cos_{3,0}{}^2 x + \operatorname{sen}_{3,1} x \operatorname{sen}_{3,2} x \\
\operatorname{sen}_{3,1}(-x) &= -\operatorname{sen}_{3,2}{}^2 x - \operatorname{sen}_{3,1} x \cos_{3,0} x \\
\operatorname{sen}_{3,2}(-x) &= \operatorname{sen}_{3,1}{}^2 x - \operatorname{sen}_{3,2} x \cos_{3,0} x.
\end{aligned} \tag{30}$$

4 Conclusão e Perspectivas Futuras

Neste trabalho introduziu-se brevemente as chamadas funções hiperbólicas generalizadas. De maneira mais aprofundada, definiu-se as funções hiperbólicas e trigonométricas de terceira ordem e foram deduzidas várias de suas propriedades, gráficos, identidades, fórmulas e derivadas, bem como de suas funções subsidiárias. Os gráficos de muitas dessas funções (principalmente das subsidiárias), bem como a concatenação de muitas das propriedades delas são raramente mencionadas na literatura, ou são encontrados de maneira dispersa, em idiomas variados, devido provavelmente ao surgimento histórico reincidente de maneira independente dessas funções. A caracterização numérica dos zeros dessas funções é trabalho para futuros empreendimentos.

A clara relação das funções hiperbólicas e trigonométricas quando a ordem é três, intimamente ligadas por simetrias aparentemente mais simples do que no caso das funções de ordem dois, foi mencionada (em ordem dois é preciso trabalhar com variáveis complexas para mostrar estas relações).

A notação aqui utilizada para as funções de terceira ordem é inédita e facilmente generalizável para ordens mais altas. A clareza com que remete à notação convencional, que subsiste por séculos, das funções de segunda ordem, mais familiares, propicia vantagens cognitivas no levantamento das propriedades gerais das funções primárias e subsidiárias de terceira, e até outras ordens.

Como motivo de trabalho futuro pode-se esperar um estudo mais aprofundado das raízes dessas funções, o cálculo de integrais das funções subsidiárias, e suas equações diferenciais. É possível suspeitar que as séries das funções hiperbólicas e trigonométricas de terceira ordem subsidiárias ($\operatorname{sech}_{3,0} x$, $\sec_{3,0} x$, $\tanh_{3,1} x$, $\tanh_{3,2} x$, $\tan_{3,1} x$, $\tan_{3,2} x$, etc) estejam relacionadas, por exemplo, com os números de Euler e Bernoulli generalizados, assim como as séries das funções de segunda ordem ($\operatorname{sech} x$, $\sec x$, $\tan x$, $\tanh x$) estão com os números de Euler e Bernoulli.

A relação dessas funções com uma parametrização da interessante superfície cúbica de revolução $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$ não foi explorada [15, 26], e é provável que suas propriedades geométricas revelem o misterioso significado das transformações geométricas codificadas pela matriz $\mathbf{H}_3(\theta)$, [6].

As funções inversas de terceira ordem não foram tratadas aqui, e suas propriedades, como derivadas, integrais, séries, gráficos, raízes, etc podem ser assunto de trabalhos futuros. Possivelmente estejam também relacionadas com integrais do tipo $\int \frac{1}{1+x^3}dx$, etc.

Nota-se que a rota para exploração das propriedades das funções de ordens mais altas é a mesma, e tudo que aqui foi feito para terceira ordem pode ser feito para ordens maiores, exatamente com os mesmos procedimentos.

A necessidade de mais literatura específica sobre o tema, de pouca ou nenhuma referência substancial em português, e de pesquisa visando o preenchimento de muitas lacunas no conhecimento ainda a serem cobertas foram as principais motivações do presente trabalho. É possível que uma maior popularização desses interessantes objetos matemáticos leve ao preenchimento de muitas destas lacunas, e de uma intensificação na busca de suas relações com outras áreas da matemática pura e aplicada.

Referências

[1] Aguiar, Luiz Bizerra de. Relações complexas entre as funções hiperbólicas e a transmissão de energia. *Revista Científico*, 18(37):189–206, 2018.

[2] Appell, P. Sur certaines fonctions analogues aux fonctions circulaires. *CR Acad. Sci. Paris*, 84:1378–1380, 1877.

[3] Appell, P. Propositions d'algèbre et de géométrie déduites de la considération des racines cubiques de l'unité. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris*, 84:540–543, 1877.

[4] Bell, E. T. A laplacian equation. *The American Mathematical Monthly*, 39(9):515–517, 1932. DOI: 10.2307/2300825.

[5] Davis, Philip J. *Circulant matrices*. Chelsea Pub Co; 2ª edição. ISBN-10: 0821891650, ISBN-13: 978-0821891650, 2012.

[6] Devisme, Jacques. Sur l'équation de m. pierre humbert. In *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques*, volume 25, pages 143–238, 1933. Zbl 0009.16803.

[7] Filho, Edson Pereira Arruda. As elegantes matrizes circulantes. Master's thesis, 2019. PROFMAT-UFSJ.

[8] Free Software Foundation. Geogebra. `https://www.geogebra.org`.

[9] Good, I. J. Skew circulants and the theory of numbers. *The Fibonacci Quarterly*, 24(2):47–60, 1986.

[10] Gray, Robert M. Toeplitz and circulant matrices: A review. *Communications and Information Theory*, 2(3):155—239, 2006. DOI: 10.1561/0100000006.

[11] Jagannathan, Ramaswamy. On generalized clifford algebras and their physical applications. In *The legacy of Alladi Ramakrishnan in the mathematical sciences*, pages 465–489. Springer, 2010.

[12] Kaufman, H. A generalization of the sine function. *The American Mathematical Monthly, Mathematical Notes*, 64(3):181–183, 1957. DOI: 10.2307/2310551.

[13] Kittappa, R. K. A generalization of the rotation matrix and related results. *Linear Algebra and its Applications*, 92:251–258, 1987. DOI: 10.1016/0024-3795(87)90262-X.

[14] Kwasniewski, A. K. A note on generalized rademacher and hyperbolic functions. In *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics*, pages 215–219. Springer, 1992.

[15] MacHale, Desmond. My favourite polynomial. *The Mathematical Gazette*, 75(472):157–165, 1991. DOI: 10.2307/3620243.

[16] Mingoranci, Marcos Rogério. Uma introdução à trigonometria hiperbólica e sua aplicação no ensino médio. Master's thesis, 2016. PROFMAT - UFMS.

[17] Moreira, Talison Gomes. Um estudo sobre funções trigonométricas e hiperbólicas de terceira ordem. Master's thesis, 2020. PROFMAT - UFSJ.

[18] Morinaga, Kakutarō and Nōno, Takayuki and others. On the linearization of a form of higher degree and its representation. *Journal of Science of the Hiroshima University, Series A (Mathematics, Physics, Chemistry)*, 16:13–41, 1952. DOI: 10.32917/hmj/1557367250.

[19] Muldoon, Martin E. Generalized hyperbolic functions, circulant matrices and functional equations. *Linear algebra and its applications*, 406:272–284, 2005. DOI: 10.1016/J.LAA.2005.04.011.

[20] Muldoon, Martin E. and Ungar, Abraham A. Beyond sin and cos. *Mathematics Magazine*, 69(1):3–14, 1996. DOI: 10.1080/0025570X.1996.11996374.

[21] Oniga, Théodore. Analyse mathematique-sur une generalisation des fonctions circulaires et hyperboliques. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris*, 227(22):540, 1948.

[22] Ramakrishnan, Alladi. A new approach to internal quantum numbers. In *Proceedings of the Conference on Clifford Algebra, Its Generalization and Applications*, pages 87–96. Matscience, 1971.

[23] Silberstein, Ludwjk. Differentially cyclical sets of functions. an extension of the concept of hyperbolic functions. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 33(221):457–461, 1942. DOI:10.1080/14786444208521211.

[24] Ungar, Abraham. Generalized hyperbolic functions. *The American Mathematical Monthly*, 89(9):688–691, 1982. DOI: 10.1080/00029890.1982.11995514,.

[25] Ungar, Abraham. Higher order alpha-hyperbolic functions. *Indian J. pure appl. Math*, 15(3):301–304, 1984.

[26] Villarino, Mark B. A cubic surface of revolution. *The Mathematical Gazette*, 98(542):281–290, 2015. DOI: 10.1017/S0025557200001327.

[27] Ward, L. E. Some functions analogous to trigonometric functions. *The American Mathematical Monthly.*, 34(6):301–303, 1927. DOI: 10.1080/00029890.1927.11986709,.