

Estabilização Poliquadrática Local de Sistemas Sujeitos a Atuadores Saturantes

Larissa S. Figueiredo* Márcio J. Lacerda*,**
Valter J. S. Leite*,***

- * Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - CEFET- MG
& UFSJ (e-mail: larissasoares21@outlook.com).
** Departamento de Engenharia Elétrica / Universidade Federal de São
João del-Rei (UFSJ) (e-mail: lacerda@ufsj.edu.br)
*** Departamento de Engenharia Mecatrônica / CEFET-MG / campus
Divinópolis (e-mail:valter@ieee.org)

Abstract: This paper investigates the local stabilization problem for discrete-time systems with linear parameter varying (LPV) and subject to saturating actuators. It is proposed a convex condition to synthesize LPV state feedback controllers that stabilize local and poly-quadratically the closed-loop system for a set of initial conditions. Such a set is obtained from the intersection of ellipsoids got from a parameter dependent Lyapunov function. The proposed approach is based on a recently published stabilization condition by Pandey and de Oliveira (2017) for linear systems that can handle parametric dependence on the input matrix of the system. The proposed condition is illustrated by means of two numerical examples.

Resumo: Este artigo investiga o problema da estabilização local para sistemas discretos no tempo com parâmetros variantes no tempo, LPV (do inglês, *Linear Parameter Varying*), e sujeitos a atuadores saturantes. É proposta uma condição convexa para projetar controladores por realimentação de estados do tipo LPV, que estabilizam local e poliquadraticamente a malha fechada para um conjunto de condições iniciais. Esse conjunto é obtido a partir da interseção de elipsoides obtidos por meio de uma função de Lyapunov dependente de parâmetros. A abordagem baseia-se em uma condição para estabilização poliquadrática de sistemas lineares publicada recentemente por Pandey e de Oliveira (2017) que permite levar em conta a dependência paramétrica na matriz de entrada do modelo do sistema. A condição proposta é ilustrada por meio de dois exemplos numéricos.

Keywords: Local poly-quadratic stabilization. LPV systems. Saturating actuators. Parameter dependent Lyapunov function. LMI.

Palavras-chaves: Estabilização poliquadrática local. Sistemas LPV. Atuadores saturantes. Função de Lyapunov dependente de parâmetros. LMI.

1. INTRODUÇÃO

Sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo, (LPV do inglês, *Linear Parameter Varying*), são sistemas dinâmicos lineares com dimensões finitas, cujos parâmetros variantes no tempo são mensuráveis e podem ser agrupados em um vetor. Esse vetor modifica o comportamento dinâmico do sistema podendo afetar tanto o desempenho quanto a estabilidade (Briat, 2014; Sename et al., 2013). Técnicas baseadas em sistemas LPV podem ser aplicadas em controle de voo, sistemas automotivos, na área de energia, entre outras (Sename et al., 2013).

Uma das abordagens mais populares para tratar os problemas associados a sistemas do tipo LPV é baseada na teoria de Lyapunov. Uma das vantagens dessa abordagem está na obtenção de condições para análise de estabilidade e projeto de controladores que podem ser formuladas em

termos de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*) e resolvidas de forma eficiente por algoritmos especializados. Nessa abordagem, a redução do conservadorismo tem sido buscada a partir da construção de candidatas a funções de Lyapunov que sejam mais gerais, como por exemplo as funções quadráticas por parte (Almeida et al., 2001; Leite e Peres, 2004). No contexto de controle via modelo preditivo, o trabalho (Cui et al., 2015) usa um sistema discreto no tempo superamostrado para controlar um sistema LPV contínuo no tempo sob saturação. Registra-se também abordagens baseadas em funções de Lyapunov dependentes de parâmetros, dentre das quais se destacam as que são polinomialmente homogêneas nos parâmetros variantes (Rosa et al., 2017; Chesi et al., 2007).

Outra característica comum em sistemas de controle é a saturação dos atuadores. Normalmente, a magnitude do sinal que um atuador pode fornecer fica limitada entre valores máximos e mínimos por motivos físicos ou mesmo por segurança de operação (Ghiggi, 2008). Porém, essa

* Os autores agradecem à bolsa do CEFET-MG e as agências de fomento CNPq e FAPEMIG.

limitação pode causar efeitos indesejados no sistema, como ciclos limites, pontos de equilíbrio parasitas e até mesmo levar o sistema à instabilidade (Tarbouriech et al., 2011). Além disso, a limitação de controle faz com que seja quase impossível ocorrer a estabilização global. Assim é necessário determinar uma estimativa para a região de atração, ou seja, encontrar um conjunto de estados iniciais admissíveis tais que as trajetórias a partir desses pontos sejam, para uma dada lei de controle, convergentes para a origem; portanto, garantindo a estabilidade local tanto de sistemas LPV (Jungers e Castelan, 2011; Saberi et al., 1996; Binazadeh e Bahmani, 2017) quanto de sistemas quasi-LPV (Lopes et al., 2018).

De Souza et al. (2018) investigam a estabilização local de sistemas LPV discretos no tempo sujeitos a saturação de atuadores e distúrbio. Nesse caso, é utilizada a estabilização local entrada-estado e funções de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros. Outras abordagens utilizando funções de Lyapunov quadráticas e ganhos calculados a partir de funções homogêneas dependentes de parâmetros podem ser encontradas para o caso contínuo no tempo (Montagner et al., 2007), mas não o seu correspondente em tempo discreto. A estabilidade poliquadrática foi proposta por Daafouz e Bernussou (2001) e recentemente estendida por Pandey e de Oliveira (2017) de forma a permitir que a matriz de entrada do sistema seja dependente de parâmetros.

A principal contribuição deste trabalho é formular condições convexas para a síntese de uma lei de controle do tipo LPV que assegura a estabilização local poliquadrática de sistemas LPV em tempo discreto sujeitos a atuadores saturantes. São apresentados dois exemplos numéricos para ilustrar a eficiência das condições propostas.

Notações: O símbolo \star representa um bloco simétrico nas LMIs. As matrizes identidade e nula são representadas por \mathbf{I} e $\mathbf{0}$, respectivamente. O conjunto dos números reais é denotado por \mathbb{R} , $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $x \in \mathbb{R}^n$ são, respectivamente, a matriz de dimensões $n \times m$ e o vetor com n posições e entradas reais. O transposto de M é denotado por M^T e $M^T = M > (\geq) 0$ denota a matriz simétrica M cujos autovalores são maiores que (maiores ou iguais a) zero.

2. PRELIMINARES

Considere o sistema linear discreto no tempo com parâmetros lineares variantes no tempo e sujeito a atuadores saturantes, cujos modelos podem ser descritos por:

$$x(k+1) = A(\alpha(k))x(k) + B(\alpha(k))\text{sat}(u(k)) \quad (1)$$

em que $x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ o vetor de sinais de controle lineares, $A(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, pertencem ao politopo dado pela combinação convexa de N vértices conhecidos:

$$A(\alpha(k)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(k)A_i, \quad B(\alpha(k)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(k)B_i, \quad (2)$$

sendo $\alpha(k) \in \Lambda$ o vetor dos parâmetros variantes no tempo em que Λ é o simplex unitário:

$$\Lambda = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N \right\}. \quad (3)$$

A função de saturação (simétrica), $\text{sat}(u(k))$, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\text{sat}(u_{(r)}(k)) = \text{sign}(u_{(r)}(k)) \min(|u_{(r)}(k)|, \rho_{(r)}), \quad (4)$$

$r = 1, \dots, m$, em que $\rho \in \mathbb{R}^m$ e $\rho_{(r)}$ é a amplitude máxima permitida para o r -ésimo sinal de controle. Assume-se que o vetor de parâmetros variantes no tempo, $\alpha(k)$, está disponível em tempo real permitindo o uso da lei de controle

$$u(k) = K(\alpha(k))x(k), \quad (5)$$

em que $K(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é um ganho LPV localmente estabilizante, afim em $\alpha(k)$

$$K(\alpha(k)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(k)K_i, \quad (6)$$

e os valores de $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ devem ser determinados. Note que, se o sistema (1)-(3) não estiver sujeito a saturação dos atuadores, isto é $\rho_{(r)} \rightarrow \infty$, sua característica linear é retomada, sendo reescrito como:

$$x(k+1) = A(\alpha(k))x(k) + B(\alpha(k))u(k) \quad (7)$$

Para tratar o termo $\text{sat}(u(k))$, define-se a função zona morta, $\psi(u(k))$:

$$\psi(u(k)) = u(k) - \text{sat}(u(k)), \quad (8)$$

com a qual pode-se reescrever (1) como:

$$x(k+1) = \mathcal{A}_{cl}(\alpha(k))x(k) - B(\alpha(k))\psi(K(\alpha(k))x(k)), \quad (9)$$

em que $\mathcal{A}_{cl}(\alpha(k)) = A(\alpha(k)) + B(\alpha(k))K(\alpha(k))$. Considere o sinal $u(k) - v(k)$ em que o sinal auxiliar $v(k) = G(\alpha(k))x(k)$ é usado como um grau de liberdade no projeto apresentado adiante. Defina-se o conjunto \mathbb{S} como os estados $x(k)$ tais que $u(k) - v(k)$ é limitado em módulo por ρ :

$$\mathbb{S}(u(k) - v(k), \rho) =$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |[K_{(r)}(\alpha(k)) - G_{(r)}(\alpha(k))]x(k)| \leq \rho_{(r)}\} \quad (10)$$

para $r = 1, \dots, m$.

O Lema seguinte, proposto por Gomes da Silva Jr. e Tarbouriech (2005), é conhecido como condição de setor generalizada e é usado para tratar os sinais $u(k) - v(k)$ na região em que esse não satura.

Lema 1. (Gomes da Silva Jr. e Tarbouriech (2005)). Se o sinal $u(k) - v(k) \in \mathbb{S}$ para todo $\alpha(k) \in \Lambda$, então

$$\psi(u(k))^T S (\psi(u(k)) - v(k)) \leq 0 \quad (11)$$

é verificada para toda matriz diagonal definida positiva $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Devido à saturação dos atuadores, pode ocorrer que nem toda condição inicial para o sistema (1)-(6) resulta em uma trajetória que converge para a origem. O conjunto de todas as condições iniciais que resultam em trajetórias que convergem para a origem é denotada por $\mathcal{R}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{R}^n$, sendo denominada região ou bacia de atração. A determinação de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ não é uma tarefa fácil mesmo para sistemas de pequena ordem, pois essa pode ser não-convexa, aberta e ilimitada (Tarbouriech et al., 2011). Por essa razão, busca-se determinar uma estimativa $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$, em geral a maior possível, tal que $\mathcal{R}_{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$. Uma maneira de construir a estimativa $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ é utilizar os conjuntos de nível de uma função de Lyapunov associada ao sistema em malha fechada. Para esse fim, é utilizada uma candidata a função de Lyapunov quadrática

nos estados e dependente de forma afim do parâmetro variante no tempo, dada por:

$$V(x(k), \alpha(k)) = x(k)^T P(\alpha(k)) x(k), \quad (12)$$

$$P(\alpha(k)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(k) P_i > 0. \quad (13)$$

Para ser admitida como uma função de Lyapunov, $V(x(k), \alpha(k))$ tem de satisfazer, para todo $x(k) \in \mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ pertencente à trajetória de (9), as seguintes condições: *i)* $\beta_1(\|x(k)\|) \leq V(x(k), \alpha(k)) \leq \beta_2(\|x(k)\|)$ e *ii)* $\Delta V(x(k), \alpha(k)) \leq -\beta_3(\|x(k)\|) < 0$, sendo $\beta_i(\|x(k)\|)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, funções de classe \mathcal{K} (Khalil, 2002, pp. 144). Ou seja, $\beta_i(\|x(k)\|)$ são definidas no intervalo de $[0, a) \rightarrow [0, \infty)$, são estritamente crescentes e $\beta_i(0) = 0$, $i \in \{1, 2, 3\}$.

A definição de estabilidade poliquadrática proposta por Daafouz e Bernussou (2001) pode ser adaptada para o caso local conforme segue:

Definição 2. O sistema (9) é localmente poliquadraticamente estável se existe uma função de Lyapunov quadrática e dependente de parâmetros (12)-(13) para $x(k) \in \mathcal{R}_{\mathcal{E}}$.

Cabe destacar que em (Daafouz e Bernussou, 2001) o sistema dependente de parâmetro tratado não admite parâmetros variantes na matriz $B(\alpha(k))$. Entretanto, na extensão proposta recentemente por Pandey e de Oliveira (2017), essa matriz passa a admitir tal dependência paramétrica.

Se (12)-(13) é uma função de Lyapunov para o sistema (9), então pode-se definir o conjunto de nível associado a essa função como (Jungers e Castelan, 2011):

$$\mathcal{L}_{\mathcal{V}}(\mu) = \bigcap_{\alpha(k) \in \Lambda} \mathcal{E}(P(\alpha(k)), \mu) = \bigcap_{i=1}^N \mathcal{E}(P_i, \mu) \quad (14)$$

para $\mu > 0$ e

$$\mathcal{E}(P_i, \mu) = \{x(k) \in \mathbb{R}^n; x(k)^T P_i x(k) \leq \mu\}. \quad (15)$$

Assim, pode-se formalizar o principal problema investigado neste trabalho como segue.

Problema 3. Considere o sistema LPV discreto no tempo (1)-(4) sob ação da lei de controle (5)-(6). Determine os ganhos K_i , $i = 1, \dots, N$, de tal forma que o sistema de malha fechada seja localmente poliquadraticamente estável para todo $\alpha(k) \in \Lambda$ e condições iniciais pertencentes a $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$.

3. RESULTADOS PRINCIPAIS

O resultado principal deste trabalho faz uso da nova condição de estabilização poliquadrática proposta por Pandey e de Oliveira (2017), em que pode-se admitir parâmetros variantes no tempo na matriz $B(\alpha(k))$. Assim, o Teorema seguinte fornece uma solução para o Problema 3.

Teorema 4. Considere o sistema discreto no tempo descrito em (1)-(4). Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $X_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $Y_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $Z_j \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $W_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $i, j = 1, \dots, N$, e uma matriz definida positiva diagonal $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$ de tal forma que as LMIs

$$\begin{bmatrix} X_i + X_i^T - Q_i & -W_i^T & X_i^T A_i^T & -L_i^T \\ * & V + V^T & -V^T B_i^T & \mathbf{0} \\ * & * & Q_j - R_{ij} & B_i Z_j - Y_j^T \\ * & * & * & Z_j + Z_j^T \end{bmatrix} > 0 \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} -\rho_{(r)}^2 & L_{i(r)} - W_{i(r)} \\ * & Q_i - X_i - X_i^T \end{bmatrix} \leq 0 \quad (17)$$

sejam satisfeitas, com $R_{ij} = B_i Y_j + Y_j^T B_i^T$, para todo $i, j = 1, \dots, N$, e $r = 1, \dots, m$, então, o sinal de controle (5) cujos ganhos do controlador são dados por

$$K_i = L_i X_i^{-1} \quad (18)$$

estabilizam local e poliquadraticamente o sistema, e asseguram que as trajetórias do sistema em malha fechada iniciadas no conjunto $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ convergem para a origem dentro do seu domínio, considerando $\mathcal{R}_{\mathcal{E}} = \mathcal{L}_{\mathcal{V}}(1)$ e $P_i = Q_i^{-1}$, $i = 1, \dots, N$.

Prova. Assuma que a condição (16) seja satisfeita, o que assegura a positividade Q_i e a regularidade de X_i . Substituí-se L_i e W_i por $K_i X_i$ e $G_i X_i$, respectivamente, em (16), e usa-se o fato de que $(Q_i - X_i)^T Q_i^{-1} (Q_i - X_i) \geq 0$ implica em $X_i^T Q_i^{-1} X_i \geq X_i + X_i^T - Q_i$ que pode ser usado para majorar o bloco (1,1) da desigualdade resultante, obtendo-se, para todo $i, j = 1, \dots, N$:

$$\begin{bmatrix} X_i^T Q_i^{-1} X_i & -X_i^T G_i^T & X_i^T A_i^T & -X_i^T K_i^T \\ * & V + V^T & -V^T B_i^T & \mathbf{0} \\ * & * & Q_j - R_{ij} & B_i Z_j - Y_j^T \\ * & * & * & Z_j + Z_j^T \end{bmatrix} > 0. \quad (19)$$

Pré- e pós-multiplicando a inequação (19) por $\text{diag}(X_i^{-T}, \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{I})$ e sua transposta, respectivamente, e definindo $P_i = Q_i^{-1}$, $H_i = Z_i^{-T}$ e $F_i = P_i Y_i^T H_i$, obtém-se para todo $i, j = 1, \dots, N$,

$$\begin{bmatrix} P_i & -G_i^T & A_i^T & -K_i^T \\ * & V + V^T & -V^T B_i^T & \mathbf{0} \\ * & * & P_j^{-1} - R_{ij} & B_i H_j^{-T} - P_j^{-1} F_j H_j^{-1} \\ * & * & * & H_j^{-1} + H_j^{-T} \end{bmatrix} > 0 \quad (20)$$

sendo que agora $R_{ij} = B_i H_j^{-T} F_j^T P_j^{-1} + P_j^{-1} F_j H_j^{-1} B_i^T$, para todo $i, j = 1, \dots, N$.

Pré- e pós-multiplicando a inequação (20) por

$$\text{diag}(\mathbf{I}, V^{-T}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} & H_j \\ P_j & F_j \end{bmatrix})$$

e sua transposta, respectivamente, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} P_i & -G_i^T V^{-1} & -K_i^T H_j^T & A_i^T P_j - K_i^T F_j^T \\ * & V^{-T} + V^{-1} & \mathbf{0} & -B_i^T P_j \\ * & * & H_j^T + H_j & B_i^T P_j + F_j^T \\ * & * & * & P_j \end{bmatrix} > 0 \quad (21)$$

para todo $i, j = 1, \dots, N$. Considerando que a matriz V é não-singular, define-se $S = V^{-1}$. Em seguida, multiplica-se (21) por α_i , α_j , $\alpha \in \Lambda$, e faz-se o somatório em $i, j = 1, \dots, N$.

$$\begin{bmatrix} P(\alpha(k)) - G(\alpha(k))^T S & -K(\alpha(k))^T H(\alpha(k+1))^T \\ \star & 2S & \mathbf{0} \\ \star & \star & H(\alpha(k+1))^T + H(\alpha(k+1)) \\ \star & \star & \star \\ A(\alpha(k))^T P(\alpha(k+1)) - K(\alpha(k))^T F(\alpha(k+1))^T \\ & -B(\alpha(k))^T P(\alpha(k+1)) \\ B(\alpha(k))^T P(\alpha(k+1)) + F(\alpha(k+1))^T \\ & P(\alpha(k+1)) \end{bmatrix} > 0. \quad (22)$$

Pré- e pós-multiplicando a inequação (22) por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & P(\alpha(k+1))^{-1} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & K(\alpha(k))^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

e sua transposta, respectivamente, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} P(\alpha(k+1))^{-1} & \mathcal{A}_{cl}(\alpha(k)) & -B(\alpha(k)) \\ \star & P(\alpha(k)) & -G(\alpha(k))^T S \\ \star & \star & 2S \end{bmatrix} > 0 \quad (23)$$

em que $\mathcal{A}_{cl}(\alpha(k))$ é definida após (9), $P(\alpha(k))$ é dada em (13), $K(\alpha(k))$ em (6) e $G(\alpha(k)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(k) G_i$.

Aplicando o complemento de Schur em (23), tem-se

$$\begin{bmatrix} P(\alpha(k)) & -G(\alpha(k))^T S \\ \star & 2S \end{bmatrix} - \Phi^T P(\alpha(k+1)) \Phi > 0, \quad (24)$$

em que $\Phi = [\mathcal{A}_{cl}(\alpha(k)) \quad -B(\alpha(k))]$. Pré- e pós-multiplicando (24) pelo vetor $[x(k)^T \quad \psi(k)^T]$ e seu transposto e usando (9), tem-se

$$\begin{aligned} x(k+1)^T P(\alpha(k+1)) x(k+1) - x(k)^T P(\alpha(k)) x(k) \\ - 2\psi(K(\alpha(k))x(k))^T S \left(\psi(K(\alpha(k))x(k)) \right. \\ \left. - G(\alpha(k))x(k) \right) < 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Suponha $x(k) \in \mathbb{S}$ e $\Delta V(x(k), \alpha(k)) = x(k+1)^T P(\alpha(k+1)) x(k+1) - x(k)^T P(\alpha(k)) x(k)$, tem-se

$$\begin{aligned} \Delta V(x(k), \alpha(k)) - 2\psi(K(\alpha(k))x(k))^T S \left(\psi(K(\alpha(k))x(k)) \right. \\ \left. - G(\alpha(k))x(k) \right) \leq 0. \end{aligned}$$

Portanto, a verificação da condição (16) e se a condição de setor é verificada, implica na positividade da função dada por (12) e na negatividade de $\Delta V(x(k), \alpha(k))$ com funções classe \mathcal{K} dadas por $\beta_1 = \min_{i=1, \dots, N} \lambda_{\min} P_i \|x(k)\|_2^2$, $\beta_2 = \max_{i=1, \dots, N} \lambda_{\max} P_i \|x(k)\|_2^2$, e para algum $\beta_3 > 0$.

Resta demonstrar que a condição de setor é de fato assegurada. A condição (17) assegura a inclusão do conjunto de nível contrativo dado pela função de Lyapunov em \mathbb{S} . Assumindo a factibilidade de (17), substitui-se L_i por $K_i X_i$, W_i por $G_i X_i$ e usa-se o fato que $X_i^T Q_i^{-1} X_i \geq X_i^T + X_i - Q_i$ para obter:

$$\begin{bmatrix} -\rho_{(r)}^2 & K_{i(r)} X_i - G_{i(r)} X_i \\ \star & -X_i^T Q_i^{-1} X_i \end{bmatrix} \leq 0 \quad (26)$$

para todo $i = 1, \dots, N$ e $r = 1, \dots, m$. Pré- e pós-multiplicando-se (26) por $\text{diag}(\mathbf{I}, X_i^{-T})$ e seu transposto, e definindo $P_i = Q_i^{-1}$, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} -\rho_{(r)}^2 & K_{i(r)} - G_{i(r)} \\ \star & -P_i \end{bmatrix} \leq 0. \quad (27)$$

Multiplicando-se (27) por α_i , somando-se em $i = 1, \dots, N$, e aplicando-se o complemento de Schur no resultado, tem-se

$$\Theta^T \rho_{(r)}^{-2} \Theta - P(\alpha(k)) \leq 0 \quad (28)$$

com $\Theta = K(\alpha(k))_{(r)} - G(\alpha(k))_{(r)}$, para todo $\alpha(k) \in \Lambda$ e $r = 1, \dots, m$. Finalmente, pré- e pós-multiplicando-se (28) por $x(k)^T$ e seu transposto:

$$x(k)^T \Theta^T \rho_{(r)}^{-2} \Theta x(k) - x(k)^T P(\alpha(k)) x(k) \leq 0 \quad (29)$$

para todo $\alpha(k) \in \Lambda$ e $r = 1, \dots, m$. Portanto, assegura-se que o conjunto dado por $\mathcal{R}_{\mathcal{E}} = \mathcal{L}_{\mathcal{V}}(1) \subset \mathbb{S}$ é contrativo e, como consequência, qualquer trajetória do sistema LPV de malha fechada iniciada em $x(0) \in \mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ permanece em $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ e converge assintoticamente para a origem.

Utilizando as condições de estabilização local poliadrática, é possível também encontrar um ganho robusto para garantir a estabilidade do sistema (1)-(3) com atuadores saturantes (4), conforme o corolário a seguir.

Corolário 5. Se as condições (16) e (17) forem satisfeitas com $L_i = L$, $X_i = X$, $i = 1, \dots, N$, então a lei de controle $u(k) = Kx(k)$ estabiliza local e poliadraticamente o sistema discreto no tempo descrito em (1)-(4) com $K = LX^{-1}$.

A prova deste corolário segue os mesmos passos que a prova do Teorema (4), fazendo apenas as modificações especificadas.

Note que tanto para o Teorema 4 quanto para o Corolário 5 é possível utilizar uma candidata a função de Lyapunov quadrática para a estabilização do sistema (1)-(4) em que a matriz P seja independente de parâmetros variantes no tempo, isto é, $V(x(k)) = x(k)^T P x(k)$. Neste caso, basta fazer $Q_i = Q$, $i = 1, \dots, N$, em ambos os casos.

Outra observação relevante é que a técnica usada por Montagner et al. (2007) pode ser aplicada nas condições aqui propostas, bastando para isso tratar as variáveis L e X nos Teorema 4 e Corolário 5 como variáveis homogêneas e dependentes de parâmetro. Nesse caso, o ganho a ser construído será do tipo racional (Briat, 2014).

3.1 Procedimento de otimização

As condições do Teorema 4 e Corolário 5 fornecem possíveis soluções para o Problema 3. Entretanto, pode-se ir além e usar as condições desta seção para maximizar o tamanho da estimativa da região de atração. Esta maximização está associada ao problema da minimização do determinante das matrizes de Lyapunov ou, de forma mais simples, à minimização do traço das matrizes P_i , $i = 1, \dots, N$. Conforme argumentado por Tarbouriech et al. (2011), esse procedimento leva a elipsoides que tendem a ter dimensões mais homogêneas em todas as direções.

Neste trabalho, considera-se o procedimento de maximização de um elipsoide dado por $\mathcal{E}(H)$, $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$, interno aos elipsoides determinados por $\mathcal{E}(P_i)$, $i = 1, \dots, N$. Ou seja, minimiza-se o traço de H sujeito a $H \geq P_i$. Assim, aplicando o complemento de Schur nessa última desigualdade e usando $Q_i = P_i^{-1}$, tem-se:

$$\mathcal{P}_H \equiv \begin{cases} \min_{Q_i, X_i, L_i, Y_i, Z_i} \text{traço}(H) \\ \text{sujeito a: LMIs (16), (17) e} \\ \begin{bmatrix} Q_i & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & H \end{bmatrix} \geq 0, i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (30)$$

4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nesta seção, ilustra-se a contribuição proposta no presente trabalho. São investigados dois exemplos numéricos, o primeiro extraído de (Bertolin et al., 2018) e o outro adaptado de (Oliveira et al., 2009), onde inicialmente o objetivo era verificar a estabilização sem restrições de amplitude nos atuadores. Nos exemplos que seguem, a menos que explicitamente mencionado, foi considerado o limite de saturação simétrico $\rho = 1$.

Exemplo 1: Considere o sistema (1) com $n = 2$, $N = 2$ e matrizes dadas por (Bertolin et al., 2018):

$$A_1 = \gamma \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \gamma \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Primeiramente, é investigado o maior valor de $\gamma > 0$ tal que o sistema (1) com matrizes dadas em (31) pode ser estabilizado por meio da lei de controle (6) em duas situações: *i*) usando um ganho robusto, isto é, $K(\alpha_k) = K$, para todo $k \geq 0$, ou seja, aplicando as condições propostas do Corolário 5; *ii*) usando o ganho dependente de parâmetros (6), isto é, aplicando o Teorema 4. Em ambos os casos, utiliza-se o procedimento de otimização (30) que permite a obtenção de $\gamma = 0,3273$ com ganho robusto e $\gamma = 1,4900$ com ganhos LPV. Portanto, neste caso o controlador do tipo LPV consegue estabilizar o sistema sob saturação para valores de γ que são maiores que 4,55 vezes o máximo estabilizável por um ganho robusto. É também verificado o maior valor de $\gamma > 0$ em que o sistema (31) pode ser estabilizado usando o conceito de estabilidade quadrática, isto é $P(\alpha(k)) = P$. Para isto, pode ser utilizada uma lei de controle usando um ganho robusto e utilizando um ganho dependente de parâmetros (6). Para estes casos também aplicou-se o procedimento de otimização (30) que obteve um $\gamma = 0,3272$ com ganho robusto e $\gamma = 0,8890$ com ganhos LPV. Portanto, quando se utiliza estabilidade poli-quadrática obtém-se um valor de γ maior em comparação com a estabilidade quadrática.

Fixando $\gamma = 0,45$ e resolvendo o procedimento de otimização (30) com ganhos LPV, são obtidos os ganhos $K_1 = [0,8839 \ 0,2701]$ e $K_2 = -[0,5847 \ 0,8768]$, e pode ser determinada uma estimativa da região de atração. Os resultados obtidos são ilustrados na Figura 1 em que são mostrados os conjuntos elipsoidais $\mathcal{E}(P_1)$, $\mathcal{E}(P_2)$ e $\mathcal{E}(H)$, este em linha pontilhada. Note que o conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(H)$ fornece uma aproximação interna da interseção dos conjuntos $\mathcal{E}(P_1)$ e $\mathcal{E}(P_2)$. São selecionadas 8 condições iniciais, marcadas com \circ , sobre a borda da região determinada pela interseção dos elipsoides $\mathcal{E}(P_1)$ e $\mathcal{E}(P_2)$ para as quais a trajetória do sistema sob saturação convergem, como esperado, para a origem. Uma trajetória externa à região de condições iniciais e bem próxima à região delimitada pelo elipsoide $\mathcal{E}(P_1)$ é também escolhida, marcada com \times , ficando clara a divergência da trajetória em relação à origem. Os sinais de controle de cada uma

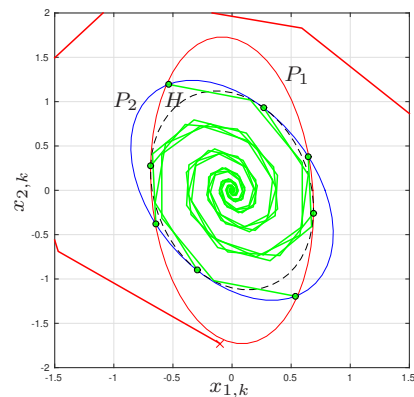


Figura 1. \mathcal{L}_V e a trajetória das condições iniciais para o Exemplo 1.

dessas trajetórias são mostrados na Figura (2), onde fica evidente a saturação do sinal de controle e, no caso da trajetória divergente, a insuficiência de esforço de controle para levar a trajetória para a origem. Em todos os casos,

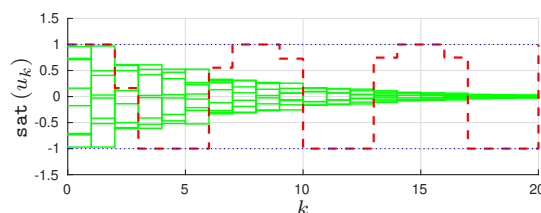


Figura 2. Sinal de controle para o Exemplo 1.

os valores de $\alpha(k)$ utilizados são mostrados na Figura 3, parte superior. Na parte inferior dessa mesma figura, são mostrados os ganhos de $K(\alpha(k))$ para a condição inicial $x_0 = -[0,2925 \ 0,9017]^T$.

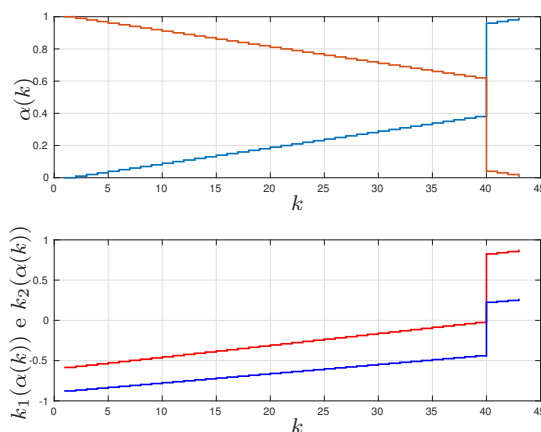


Figura 3. Valores de α_k (superior) e ganhos $k_1(k)$ e $k_2(k)$ para condição inicial $x_0 = -[0,2925 \ 0,9017]^T$ (inferior).

Exemplo 2: Considere o sistema com $n = 3$, $N = 2$ e matrizes adaptadas de Oliveira et al. (2009):

$$A_1 = \gamma \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \\ B_1 = [1 \ 0 \ 0]^T, \quad B_2 = [0 \ 0 \ 1]^T \quad (32)$$

Como no exemplo anterior, busca-se o maior valor de γ para o qual o sistema (1) é localmente estabilizável. Utilizando o ganho robusto, isto é, $K(\alpha(k)) = K$ para todo $\alpha(k)$ foi aplicado o procedimento de otimização (30) e um algoritmo de bisseção para determinar o maior valor de γ . Foi obtido um $\gamma = 0,6431$. Por outro lado, com o ganho LPV, foi obtido $\gamma = 0,7480$.

Fixando o γ em $\gamma = 0,5$ e resolvendo o sistema (32) com um ganho LPV, determinou-se uma estimativa da região de atração. Os resultados obtidos podem ser observados na Figura 4 em que são observados os conjuntos elipsoidais $\mathcal{E}(P_1)$ e $\mathcal{E}(P_2)$ e a interseção desses dois conjuntos identificada pela cor vermelha.

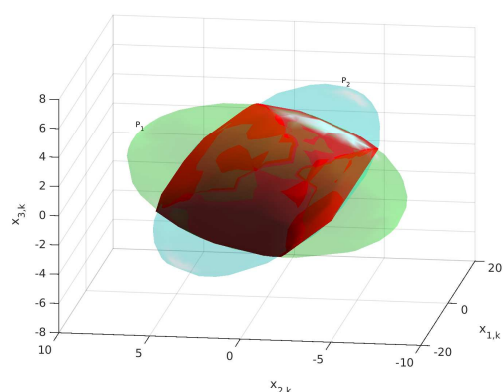


Figura 4. Região de atração para o Exemplo 2 com $\gamma = 0,5$.

5. CONCLUSÕES

Este trabalho apresenta uma nova metodologia para o projeto de controle por realimentação de estados para sistemas LPV de tempo discreto sujeitos a atuadores saturantes. As condições convexas estabelecidas, são formuladas em termos de LMIs, que se satisfizes, asseguram que as trajetórias do sistema LPV de malha fechada estejam limitadas. Dois exemplos numéricos são explorados para ilustrar a eficácia desta abordagem.

REFERÊNCIAS

Almeida, H.L.S., Bhaya, A., Falcao, D.M., e Kaszkurewicz, E. (2001). A team algorithm for robust stability analysis and control design of uncertain time-varying linear systems using piecewise quadratic Lyapunov functions. *International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal*, 11(4), 357–371.

Bertolin, A.L.J., Oliveira, R.C.L.F., de Oliveira, M.C., e Peres, P.L.D. (2018). LMI-based stability tests for LPV and switched discrete-time linear systems through redundant equations. *IFAC-PapersOnLine*, 51(26), 149–154.

Binazadeh, T. e Bahmani, M. (2017). Design of robust controller for a class of uncertain discrete-time systems subject to actuator saturation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(3), 1505–1510.

Briat, C. (2014). *Linear parameter-varying and time-delay systems*, volume 3. Springer.

Chesi, G., Garulli, A., Tesi, A., e Vicino, A. (2007). Robust stability of time-varying polytopic systems via

parameter-dependent homogeneous Lyapunov functions. *Automatica*, 43(2), 309–316.

Cui, L., Chen, L., e Duan, D. (2015). Gain-scheduling model predictive control for unmanned airship with LPV system description. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 26(5), 1043–1051.

Daafouz, J. e Bernussou, J. (2001). Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. *Systems & Control Letters*, 43(5), 355–359.

De Souza, C., Leite, V.J.S., Castelan, E.B., e Silva, L.F.P. (2018). ISS Stabilization of discrete-time LPV systems with interval time-varying state delay and saturating actuators. *IFAC-PapersOnLine*, 51(26), 143–148.

Ghiggi, I.M.F. (2008). *Controle de sistemas com atrasos no tempo na presença de atuadores saturantes*. Ph.D. thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS.

Gomes da Silva Jr., J.M. e Tarbouriech, S. (2005). Antiwindup design with guaranteed regions of stability: an LMI-based approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(1), 106–111.

Jungers, M. e Castelan, E.B. (2011). Gain-scheduled output control design for a class of discrete-time nonlinear systems with saturating actuators. *Systems & Control Letters*, 60(3), 169–173.

Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear systems*. Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 3 edition.

Leite, V.J.S. e Peres, P.L.D. (2004). Robust control through piecewise lyapunov functions for discrete time-varying uncertain systems. *International Journal of Control*, 77(3), 230–238.

Lopes, A.N.D., Leite, V.J.S., e Silva, L.F.P. (2018). On the integral action of discrete-time fuzzy ts control under saturated actuator. In *Proceedings of the 2018 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 1596–1603.

Montagner, V.F., Oliveira, R.C.L.F., Peres, P.L.D., Tarbouriech, S., e Queinnec, I. (2007). Gain-scheduled controllers for linear parameter-varying systems with saturating actuators: LMI-based design. In *American Control Conference, 2007. ACC'07*, 6067–6072. IEEE.

Oliveira, R.C.L.F., Oliveira, M.C.D., e Peres, P.L.D. (2009). Special time-varying Lyapunov function for robust stability analysis of linear parameter varying systems with bounded parameter variation. *IET Control Theory & Applications*, 3(10), 1448–1461.

Pandey, A.P. e de Oliveira, M.C. (2017). A new discrete-time stabilizability condition for Linear Parameter-Varying systems. *Automatica*, 79, 214–217.

Rosa, T.E., Morais, C.F., e Oliveira, R.C.L.F. (2017). \mathcal{H}_∞ output-Feedback Gain-scheduled control for discrete-time linear systems affected by time-varying parameters. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1), 8618–8623.

Saberi, A., Lin, Z., e Teel, A.R. (1996). Control of linear systems with saturating actuators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3), 368–378.

Sename, O., Gaspar, P., e Bokor, J. (2013). *Robust control and linear parameter varying approaches: application to vehicle dynamics*, volume 437. Springer.

Tarbouriech, S., Garcia, G., Gomes da Silva Jr., J.M., e Queinnec, I. (2011). *Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators*. Springer Science & Business Media.