

FILTROS NEBULOSOS \mathcal{H}_∞ MULTI-POLINOMIAIS COM MEMÓRIA PARA SISTEMAS NEBULOSOS DE TAKAGI-SUGENO DISCRETOS NO TEMPO

LUCIANO FREZZATTO*, MÁRCIO J. LACERDA*, PEDRO L. D. PERES*, RICARDO C. L. F. OLIVEIRA*

**Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação,
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, 13083-852, Campinas, SP, Brasil.*

Emails: {luciano, marciojr, peres, ricfow}@dt.fee.unicamp.br

Abstract— This paper is concerned with the problem of \mathcal{H}_∞ fuzzy filter design for discrete-time Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy systems. The novelty of the proposed method, in the context of T-S systems, is the inclusion of an arbitrary number of past information (states and output measurements) in the structure of the filter, producing a memory T-S fuzzy filter. The design of this class of filters is done through Linear Matrix Inequalities based on multi-polynomial Lyapunov fuzzy functions, producing filters that provide lower bounds for the \mathcal{H}_∞ performance criterion when compared to other approaches available in the literature that employ memoryless filters. The advantages of the proposed approach are illustrated by a numerical example.

Keywords— Fuzzy systems, \mathcal{H}_∞ filtering, Takagi-Sugeno, Discrete-time systems.

Resumo— Este trabalho trata o problema de projeto de filtros nebulosos \mathcal{H}_∞ para sistemas nebulosos de Takagi-Sugeno (T-S) discretos no tempo. A novidade da metodologia proposta, no contexto de sistemas T-S, é a inclusão de um número arbitrário de informações passadas (estados do filtro e saídas medidas) na estrutura do filtro, produzindo assim um filtro nebuloso T-S com memória. O projeto dessa classe de filtros é realizado por meio de desigualdades matriciais lineares baseadas em funções de Lyapunov nebulosas multi-polinomiais, provendo filtros com menores limitantes para o critério de desempenho \mathcal{H}_∞ quando comparados a outras estratégias disponíveis na literatura que não utilizam memória. As vantagens do método proposto são ilustradas por meio de um exemplo numérico.

Palavras-chave— Sistemas nebulosos, Filtragem \mathcal{H}_∞ , Takagi-Sugeno, Sistemas discretos no tempo.

1 Introdução

A capacidade de representar sistemas não-lineares por meio de modelos lineares locais relacionados por funções de pertinência é uma das principais virtudes dos modelos nebulosos de Takagi-Sugeno (T-S) (Takagi e Sugeno, 1985). Utilizando a teoria de estabilidade de Lyapunov, a linearidade dos modelos locais possibilita o emprego de ferramentas de otimização convexa como as desigualdades matriciais lineares (do inglês *Linear Matrix Inequalities* — LMIs) para a análise de estabilidade e síntese de filtros para sistemas T-S. O estudo do problema de filtragem \mathcal{H}_∞ para sistemas nebulosos T-S discretos no tempo é recente na literatura. Abordagens baseadas na existência de uma função de Lyapunov constante e em funções de Lyapunov com dependência afim nas funções de pertinência nebulosas foram estudadas por Teixeira et al. (2003), Tseng (2006), Zhou et al. (2007), Zhang e Xia (2009), Zhang et al. (2012) e referências. Funções de Lyapunov nebulosas polinomiais homogêneas dependentes de parâmetros (PHDP) que estendem os métodos citados anteriormente foram empregadas no projeto de filtros, controladores e na análise de estabilidade de sistemas nebulosos T-S por Kruszewski et al. (2008), Zhang et al. (2011), Tognetti et al. (2015).

Uma técnica de projeto para auxiliar na redução do conservadorismo nos problemas de projeto de filtros para sistemas lineares invariantes no tempo incertos foi introduzida recentemente por Lee e Joo (2014) e Frezzatto et al. (2015). A

estratégia é baseada na inclusão de estados passados na estrutura do filtro a ser projetado, o que proporciona um grau de liberdade extra na busca por filtros com melhores desempenhos. Apesar de funções de Lyapunov nebulosas PHDP em múltiplos instantes de tempo terem sido empregadas na literatura de sistemas nebulosos (Tognetti et al., 2015), o projeto de filtros que utilizam informações passadas permanece inexplorado no contexto de sistemas nebulosos T-S.

Este trabalho investiga o problema do projeto de filtros \mathcal{H}_∞ para sistemas nebulosos T-S discretos no tempo. A principal novidade do método proposto, no contexto T-S, é o emprego de um número arbitrário de informações passadas (estados do filtro e saídas medidas do sistema) na estrutura do filtro, produzindo um filtro nebuloso T-S com memória. O filtro a ser projetado, as matrizes de Lyapunov e as variáveis extras são considerados como multi-polinômios de graus arbitrários nas funções de pertinência nebulosas. A síntese é realizada por meio da solução de um conjunto de LMIs obtidas com a utilização do Lema de Finsler (de Oliveira e Skelton, 2001). Um exemplo numérico da literatura ilustra que o método proposto pode prover resultados menos conservadores em termos dos limitantes da norma \mathcal{H}_∞ , quando comparados com as técnicas clássicas existentes, isto é, que não fazem uso de informações passadas na estrutura do filtro.

Notação. Por simplicidade, a seguinte notação é adotada: $h(z(t+m)) = h(z+m)$, $m \in \mathbb{N}$,

$A(h) = A(h(z)) = \sum_{i=1}^r h_i(z)A_i$ e $A(h+1) = A(h(z+1)) = \sum_{i=1}^r h_i(z+1)A_i$. Para uma matriz simétrica, $A, A > 0$ ($A < 0$) implica que A é positiva (negativa) definida. Para matrizes ou vetores ($'$) indica transposto. $A \otimes B$ é o produto de Kronecker (Horn e Johnson, 1991) das matrizes A e B . A notação $He(Z) = Z + Z'$ é usada para encurtar fórmulas. A matriz bloco-diagonal obtida das matrizes X_1, \dots, X_n é expressa como $\text{diag}(X_1, \dots, X_n)$. O símbolo \star indica um bloco simétrico em uma matriz. A^\perp é o espaço nulo à direita da matriz A . As matrizes identidade (nula) de dimensão $n \times n$ ($n \times m$) são denotadas por \mathbf{I}_n ($\mathbf{O}_{n \times m}$). As seguintes matrizes também são utilizadas ao longo deste trabalho ($d \in \mathbb{N}$):

$$L_d \triangleq [\mathbf{I}_d \quad \mathbf{0}_{d \times 1}], \quad R_d \triangleq [\mathbf{0}_{d \times 1} \quad \mathbf{I}_d], \quad (1)$$

$$T_d \triangleq \begin{bmatrix} L_d \otimes \mathbf{I}_{2n_x} \\ R_d \otimes \mathbf{I}_{2n_x} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

2 Definição do Problema

Considere um sistema não-linear discreto no tempo descrito pelo seguinte modelo nebuloso T-S:

Regra i da planta: SE $z_1(t)$ for \mathcal{M}_{i1} , e $z_2(t)$ for \mathcal{M}_{i2}, \dots e $z_s(t)$ for \mathcal{M}_{is} , ENTÃO

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A_i x(t) + B_{1i} w(t) \\ y_1(t) &= C_{1i} x(t) + D_{11i} w(t) \\ y_2(t) &= C_{2i} x(t) + D_{21i} w(t) \end{aligned} \quad (3)$$

$i = 1, \dots, r$

sendo que \mathcal{M}_{ij} , para $j = 1, \dots, s$, são conjuntos de pertinência nebulosos, $z(t) = [z_1(t) \quad \dots \quad z_s(t)]$ é o vetor de variáveis-premissa, sendo s o número de variáveis-premissa e r o número de regras nebulosas. O vetor de estados é $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ é um ruído de entrada, $y_1(t) \in \mathbb{R}^{n_{y1}}$ é o sinal a ser estimado e $y_2(t) \in \mathbb{R}^{n_{y2}}$ é a saída medida. $A_i, B_{1i}, C_{1i}, C_{2i}, D_{11i}, D_{21i}$ são matrizes de dimensões apropriadas representando o i -ésimo subsistema linear. As funções-peso normalizadas são definidas por

$$h_i(z(t)) = \frac{\prod_{j=1}^s \theta_{ij}(z_j(t))}{\sum_{i=1}^r \prod_{j=1}^s \theta_{ij}(z_j(t))}, \quad i = 1, \dots, r \quad (4)$$

sendo que $\theta_{ij}(z_j(t))$ é o grau de pertinência de $z_j(t)$ na i -ésima regra nebulosa. Portanto, as funções-peso normalizadas satisfazem

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1, \quad h_i(z(t)) \geq 0, \quad i = 1, \dots, r.$$

Por simplicidade, as matrizes do sistema são genericamente descritas por:

$$\mathbb{X}(h) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \mathbb{X}_i.$$

Dessa forma, o modelo nebuloso T-S dado em (3) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A(h)x(t) + B_1(h)w(t) \\ y_1(t) &= C_1(h)x(t) + D_{11}(h)w(t) \\ y_2(t) &= C_2(h)x(t) + D_{21}(h)w(t) \end{aligned} \quad (5)$$

Antes de apresentar a principal contribuição deste trabalho, algumas definições e resultados preliminares são introduzidos (conforme Tognetti et al. (2015) e referências). Para $d \in \mathbb{N}$ e $g = (g_1, \dots, g_d) \in \mathbb{N}^d$, seja $\mathcal{K}_r(g_i)$ dado por

$$\mathcal{K}_r(g_i) = \left\{ k_i = (k_{i1}, k_{i2}, \dots, k_{ir}) \in \mathbb{N}^r : \sum_{j=1}^r k_{ij} = g_i \right\},$$

$i = 1, \dots, d$, o conjunto das r -tuplas obtido de todas as possíveis combinações de r inteiros não-negativos cuja soma é g_i e seja $\mathbb{K}_r(g)$ definido como o produto cartesiano de $\mathcal{K}_r(g_i)$, $i = 1, \dots, d$, ou seja,

$$\mathbb{K}_r(g) = \mathcal{K}_r(g_1) \times \dots \times \mathcal{K}_r(g_d). \quad (6)$$

Uma matriz com dependência multi-polinomial em d funções de pertinência pode ser definida pela seguinte matriz nebulosa polinomial homogênea dependente de parâmetros (PHDP) de graus arbitrários $g = (g_1, \dots, g_d)$

$$\begin{aligned} Z_{(g,d)}^m(h) &= \sum_{k \in \mathbb{K}_r(g)} h(z)^{k_1} \dots h(z-d+1)^{k_d} Z_k^m, \\ k &= (k_1, k_2, \dots, k_d), \\ k_j &= (k_{j1}, k_{j2}, \dots, k_{jr}) \in \mathcal{K}_r(g_j), \\ j &= 1, \dots, d, \end{aligned} \quad (7)$$

sendo que $h(z-j+1)^{k_j} = h_1(z-j+1)^{k_{j1}} h_2(z-j+1)^{k_{j2}} \dots h_r(z-j+1)^{k_{jr}}$, $k_j \in \mathcal{K}_r(g_j)$, $j = 1, \dots, d$, são monômios e Z_k^m , $k \in \mathbb{K}_r(g)$, são coeficientes matriciais.

O objetivo é projetar um filtro PHDP nebuloso T-S com memória descrito pelo seguinte modelo:

Regra i do filtro: SE $z_1(t)$ for \mathcal{M}_{i1} , e $z_2(t)$ for \mathcal{M}_{i2}, \dots e $z_s(t)$ for \mathcal{M}_{is} , ENTÃO

$$\begin{aligned} x_f(t+1) &= \sum_{m=0}^{d-1} (A_{f_i}^m(h)x_f(t-m) \\ &\quad + B_{f_i}^m(h)y_2(t-m)) \\ y_f(t) &= \sum_{m=0}^{d-1} (C_{f_i}^m(h)x_f(t-m) \\ &\quad + D_{f_i}^m(h)y_2(t-m)) \end{aligned} \quad (8)$$

sendo que $x_f(t) \in \mathbb{R}^{n_f}$, $n_f = n_x$, é o estado estimado e $y_f(t) \in \mathbb{R}^{n_{y1}}$ é a saída estimada. As

matrizes do filtro nebuloso T-S a serem projetadas são $A_{f_i}^m(h)$, $B_{f_i}^m(h)$, $C_{f_i}^m(h)$ e $D_{f_i}^m(h)$, com dimensões apropriadas. Além disso, a quantidade de informações passadas utilizadas no filtro nebuloso a ser projetado é dada por $d - 1$ tanto para os estados quanto para as saídas medidas.

Note que as matrizes que definem o filtro nebuloso possuem uma dependência multi-polinomial em instantes anteriores, que corresponde à memória considerada no projeto. Portanto, de acordo com (7), as matrizes do filtro nebuloso são dadas de forma geral por

$$\mathbb{X}_{f(g,d)}^m(h) = \sum_{k \in \mathbb{K}_r(g)} h(z)^{k_1} \dots h(z-d+1)^{k_d} \mathbb{X}_{f_k}^m, \quad (9)$$

levando à seguinte estrutura para o filtro

$$\begin{aligned} x_f(t+1) &= \sum_{m=0}^{d-1} \left(A_{f(g,d)}^m(h) x_f(t-m) \right. \\ &\quad \left. + B_{f(g,d)}^m(h) y_2(t-m) \right) \\ y_f(t) &= \sum_{m=0}^{d-1} \left(C_{f(g,d)}^m(h) x_f(t-m) \right. \\ &\quad \left. + D_{f(g,d)}^m(h) y_2(t-m) \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Definindo o vetor de estados aumentado

$$\hat{x}_d(t) = \begin{bmatrix} x(t-d+1)' & x_f(t-d+1)' & \dots \\ x(t-1)' & x_f(t-1)' & x(t) & x_f(t)' \end{bmatrix}' \in \mathbb{R}^{2dn_x}$$

e o erro de filtragem $e(t) = y_1(t) - y_f(t)$, o sistema nebuloso aumentado composto pelo sistema nebuloso original (5) e o filtro nebuloso a ser projetado (10) é dado por

$$\begin{aligned} \hat{x}_d(t+1) &= A_a(h) \hat{x}_d(t) + B_a(h) \hat{w}(t) \\ e(t) &= C_a(h) \hat{x}_d(t) + D_a(h) \hat{w}(t) \end{aligned} \quad (11)$$

com

$$\begin{aligned} A_a(h) &= \begin{bmatrix} \tilde{A}^{d-1}(h) & R_{d-1} \otimes \mathbf{I}_{2n_x} & & \\ \tilde{A}^{d-2}(h) & & \dots & \tilde{A}^0(h) \end{bmatrix}, \\ B_a(h) &= \begin{bmatrix} \tilde{B}^{d-1}(h) & \mathbf{0}_{2(d-1)n_x \times dn_w} & & \\ \tilde{B}^{d-2}(h) & & \dots & \tilde{B}^0(h) \end{bmatrix}, \\ C_a(h) &= [\tilde{C}^{d-1}(h) \quad \tilde{C}^{d-2}(h) \quad \dots \quad \tilde{C}^0(h)], \\ D_a(h) &= [\tilde{D}^{d-1}(h) \quad \tilde{D}^{d-2}(h) \quad \dots \quad \tilde{D}^0(h)], \\ \hat{w}(t) &= [w(t-d+1)' \quad \dots \quad w(t-1)' \quad w(t)'] \end{aligned}$$

e sendo $\tilde{A}^m(h)$, $\tilde{B}^m(h)$, $\tilde{C}^m(h)$ e $\tilde{D}^m(h)$ da forma:

- $m = 0$

$$\begin{aligned} \tilde{A}^0(h) &= \begin{bmatrix} A(h) & \mathbf{0}_{n_x \times n_x} \\ B_{f(g,d)}^0(h) C_2(h) & A_{f(g,d)}^0(h) \end{bmatrix}, \\ \tilde{B}^0(h) &= \begin{bmatrix} B_1(h) \\ B_{f(g,d)}^0(h) D_{21}(h) \end{bmatrix}, \\ \tilde{C}^0(h) &= \begin{bmatrix} C_1(h) - D_{f(g,d)}^0(h) C_2(h) \\ -C_{f(g,d)}^0(h) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\tilde{D}^0(h) = \left[D_{11}(h) - D_{f(g,d)}^0(h) D_{21}(h) \right]$$

- $m \in [1, d-1]$

$$\tilde{A}^m(h) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_x \times n_x} & \mathbf{0}_{n_x \times n_x} \\ B_{f(g,d)}^m(h) C_2(h) & A_{f(g,d)}^m(h) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}^m(h) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_x \times n_w} \\ B_{f(g,d)}^m(h) D_{21}(h) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C}^m(h) = \begin{bmatrix} -D_{f(g,d)}^m(h) C_2(h) & -C_{f(g,d)}^m(h) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{D}^m(h) = \begin{bmatrix} -D_{f(g,d)}^m(h) D_{21}(h) \end{bmatrix}.$$

3 Resultados principais

A seguir, a principal contribuição deste trabalho é apresentada. Nas condições propostas, $d - 1$, $d \geq 1$, é o tamanho de memória desejado e g é o grau das variáveis PHDP envolvidas nos problemas de otimização.

Teorema 1 *Se existirem matrizes nebulosas multi-polinomiais homogêneas $W_{(g,d)}(h) = W_{(g,d)}(h)' > 0$, $X_{r(g,d)}(h)$, $X_{f(g,d)}(h)$, matrizes $S_{1(g,d)}^m(h) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $S_{2(g,d)}^m(h) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_{y_2}}$, $C_{f(g,d)}^m(h) \in \mathbb{R}^{n_{y_1} \times n_x}$, $D_{f(g,d)}^m(h) \in \mathbb{R}^{n_{y_1} \times n_{y_2}}$ de grau $g \geq 0$, para todo $m \in [0, d-1]$ e um escalar $\gamma > 0$ tais que o problema*

$$\min \gamma^2$$

$$Q(h) + He(X_f(h) B_{fr}(h) + X_r(h) B_{ct}) < 0 \quad (12)$$

é satisfeito com

$$Q(h) = \begin{bmatrix} T_d' \text{diag}(-W_{(g,d)}(h), W_{(g,d)}(h+1)) T_d & & & \\ & \mathbf{0}_{dn_w \times 2(d+1)n_x} & & \\ & [C_a(h) \quad \mathbf{0}_{n_{y_1} \times 2n_x}] & & \\ & & \star & \star \\ & & -\mathbf{I}_{dn_w} & \star \\ & & D_a(h) & -\gamma^2 \mathbf{I}_{n_{y_1}} \end{bmatrix}$$

e

$$B_{fr}(h) = \begin{bmatrix} \hat{A}(h) & \mathbf{0}_{2n_x} & \hat{B}(h) & \mathbf{0}_{2n_x \times n_{y_1}} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$B_{ct} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2n_x \times 2dn_x} & -\mathbf{I}_{2n_x} \\ \mathbf{0}_{2n_x \times dn_w} & \mathbf{0}_{2n_x \times n_{y_1}} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$\hat{A}(h) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_x \times n_x} & \mathbf{0}_{n_x \times n_x} \\ S_{2(g,d)}^{d-1}(h) C_2(h) & S_{1(g,d)}^{d-1}(h) \end{bmatrix} & \dots \\ \begin{bmatrix} A(h) & \mathbf{0}_{n_x \times n_x} \\ S_{2(g,d)}^0(h) C_2(h) & S_{1(g,d)}^0(h) \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$\hat{B}(h) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_x \times n_w} \\ S_{2(g,d)}^{d-1}(h) D_{21}(h) \end{bmatrix} & \dots \\ \begin{bmatrix} B_1(h) \\ S_{2(g,d)}^0(h) D_{21}(h) \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$X_r(h) = \begin{bmatrix} X_{11(g,d)}(h) & \mathbf{0}_{2dn_x \times n_x} \\ X_{21(g,d)}(h) & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \hat{K} \\ X_{31(g,d)}(h) & \mathbf{0}_{dn_w \times n_x} \\ X_{41(g,d)}(h) & \mathbf{0}_{n_{y_1} \times n} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$X_f(h) = \begin{bmatrix} X_{11(g,d)}(h) & \mathbf{0}_{2dn_x \times n_x} \\ X_{21(g,d)}(h) & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_{n_x} \\ X_{31(g,d)}(h) & \mathbf{0}_{dn_w \times n_x} \\ X_{41(g,d)}(h) & \mathbf{0}_{n_{y_1} \times n} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

sendo $X_{11(g,d)}(h) \in \mathbb{R}^{2dn_x \times n_x}$, $X_{21(g,d)}(h) \in \mathbb{R}^{2n_x \times n_x}$, $X_{31(g,d)}(h) \in \mathbb{R}^{dn_w \times n_x}$, $X_{41(g,d)}(h) \in \mathbb{R}^{n_{y_1} \times n_x}$ e $\hat{K} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, então $A_{f(g,d)}^m(h) = \hat{K}^{-1} S_{1(g,d)}^m(h)$, $B_{f(g,d)}^m(h) = \hat{K}^{-1} S_{2(g,d)}^m(h)$, $C_{f(g,d)}^m(h)$ e $D_{f(g,d)}^m(h)$ são as matrizes multi-polinomiais do filtro nebuloso T-S com memória que garantem um desempenho \mathcal{H}_∞ dado por γ .

Prova: Por simplicidade de notação a dependência das variáveis com respeito às funções-peso $h(z)$ é omitida nesta prova. Dessa forma, $W_{(g,d)}(h+1)$ é denotado por $W_{(g,d)}^+$. Realizando a troca de variáveis $S_{1(g,d)}^m = \hat{K} A_{f(g,d)}^m$ e $S_{2(g,d)}^m = \hat{K} B_{f(g,d)}^m$, a desigualdade (12) é reescrita como

$$Q + He \left(X_r \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{A} & -\mathbf{I}_{2n_x} & \mathbb{B} & \mathbf{0}_{2n_x \times n_{y_1}} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} \right) < 0$$

com

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_x \times n_x} & \mathbf{0}_{n_x \times n_x} \\ B_{f(g,d)}^{d-1} C_2 & A_{f(g,d)}^{d-1} \end{bmatrix} & \cdots \\ \begin{bmatrix} A & \mathbf{0}_{n_x \times n_x} \\ B_{f(g,d)}^0 C_2 & A_{f(g,d)}^0 \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_x \times n_w} \\ B_{f(g,d)}^{d-1} D_{21} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} B_1 \\ B_{f(g,d)}^0 D_{21} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Assumindo que

$$\mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2dn_x} & \mathbf{0}_{2dn_x \times dn_w} & \mathbf{0}_{2dn_x \times n_{y_1}} \\ \mathbb{A} & \mathbb{B} & \mathbf{0}_{2n_x \times n_{y_1}} \\ \mathbf{0}_{dn_w \times 2dn_x} & \mathbf{I}_{dn_w} & \mathbf{0}_{dn_w \times n_{y_1}} \\ \mathbf{0}_{n_{y_1} \times 2dn_x} & \mathbf{0}_{n_{y_1} \times dn_w} & \mathbf{I}_{n_{y_1}} \end{bmatrix}$$

e por meio do Lema de Finsler (de Oliveira e Skelton, 2001) tem-se

$$\mathcal{B}^{\perp'} Q \mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} A_a' W_{(g,d)}^+ A_a - W_{(g,d)} \\ B_a' W_{(g,d)}^+ A_a \\ C_a \\ \star \\ B_a' W_{(g,d)}^+ B_a - \mathbf{I}_{dn_w} \\ D_a \quad \star \\ \star \\ -\gamma^2 \mathbf{I}_{n_{y_1}} \end{bmatrix} < 0.$$

Multiplicando a última desigualdade em ambos os lados por $\mathcal{T} = \text{diag}(\gamma \mathbf{I}_{2dn_x}, \gamma \mathbf{I}_{dn_w}, \gamma^{-1} \mathbf{I}_{n_{y_1}})$

e aplicando um complemento de Schur chega-se a

$$\begin{bmatrix} A_a' W_{(g,d)}^+ A_a - W_{(g,d)} + C_a' C_a \\ B_a' W_{(g,d)}^+ A_a + D_a' C_a \\ \star \\ B_a' W_{(g,d)}^+ B_a + D_a' D_a - \gamma^2 \mathbf{I}_{dn_w} \end{bmatrix} < 0$$

que pode ser reconhecido como o *Bounded Real Lemma* para o sistema nebuloso T-S aumentado discreto no tempo (11) (Tognetti et al., 2015) concluindo, assim, a prova. \square

As condições LMI propostas no Teorema 1 possuem dimensão infinita e são de difícil solução. Como é padrão atualmente e conforme o método proposto por Oliveira e Peres (2007), uma estrutura particular é imposta às variáveis do problema (polinomial de grau fixo g) e as condições do Teorema 1 são convertidas em um conjunto finito de LMIs, que são apenas suficientes para a determinação do custo garantido \mathcal{H}_∞ . Tal conjunto de LMIs é obtido por meio do pacote computacional ROLMIP (*Robust LMI Parser*) (Aguilhari et al., 2012) para MATLAB após se fixar a estrutura descrita na Seção 2 às variáveis de otimização do problema. Além disso, na simulação numérica apresentada na próxima seção são utilizados, também, o *parser* de LMIs YALMIP (Löfberg, 2004) e o resolvidor MOSEK (MOSEK ApS, 2015).

4 Experimento numérico

Considere o seguinte exemplo acadêmico proposto por Zhang e Xia (2009) de um sistema nebuloso T-S discreto no tempo descrito por

Regra 1. Se $x_1(t)$ for $\mathcal{M}_{11}(x_1(t))$, então

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1.05 & 0.35 \\ -0.42 & 0.07 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -0.1 \\ -0.004 \end{bmatrix} w(t)$$

$$y_1(t) = [0.81 \quad 0.27] x(t)$$

$$y_2(t) = [1.71 \quad 2.85] x(t) + 0.005w(t)$$

Regra 2. Se $x_1(t)$ for $\mathcal{M}_{21}(x_1(t))$, então

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0.792 & -0.432 \\ -0.36 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.1 \end{bmatrix} w(t)$$

$$y_1(t) = [0.4 \quad 1.2] x(t)$$

$$y_2(t) = [-1.9 \quad 2.28] x(t) + 0.005w(t)$$

As funções de pertinência são dadas como:

$$\mathcal{M}_{21}(x_1(t)) = 1 - \mathcal{M}_{11}(x_1(t)),$$

$$\mathcal{M}_{11}(x_1(t)) = \begin{cases} \left| \frac{\sin(x_1(t))}{x_1(t)} \right|, & \text{para } x_1(t) \neq 0 \\ 1, & \text{para } x_1(t) = 0. \end{cases}$$

O objetivo é projetar um filtro nebuloso T-S com memória na forma (10) com um custo garantido \mathcal{H}_∞ dado por γ . Os resultados de desempenho \mathcal{H}_∞ obtidos aplicando os métodos propostos

por Zhang e Xia (2009), por Zhang et al. (2011) (com $\alpha_1 = 0.5$ e $\alpha_2 = 10$) e o Teorema 1 para vários valores de d e g são apresentados na Tabela 1. O número de linhas de LMI (L) e de variáveis escalares (V) envolvidas nos problemas de otimização também são apresentados na tabela, fornecendo uma estimativa da complexidade computacional necessária para determinar uma solução. Pode-se notar que, neste exemplo, não é possível obter melhores resultados apenas aumentando o grau g das variáveis polinomiais. Por outro lado, a utilização de memória nas condições de síntese auxilia na redução dos limitantes da norma \mathcal{H}_∞ , ao custo de uma maior complexidade computacional, como evidenciado pelo número de variáveis V envolvidas em cada caso.

Tabela 1: Limitantes da norma \mathcal{H}_∞ obtidos para o filtro nebuloso T-S utilizando o Teorema 1 e os métodos propostos de Zhang e Xia (2009) e Zhang et al. (2011). V é o número de variáveis escalares e L o número de linhas de LMIs.

Método	γ	L	V
(Zhang e Xia, 2009)	0.5675	68	59
(Zhang et al., 2011) ($g = 1$)	0.5602	80	79
(Zhang et al., 2011) ($g = 2$)	0.5602	278	2576
Teorema 1 ($d = 1, g = 1$)	0.5602	88	83
Teorema 1 ($d = 2, g = 1$)	0.5485	392	341
Teorema 1 ($d = 3, g = 1$)	0.5450	1536	1165
Teorema 1 ($d = 1, g = 2$)	0.5602	192	122
Teorema 1 ($d = 2, g = 2$)	0.5340	1422	761
Teorema 1 ($d = 3, g = 2$)	0.5289	9324	3920

Para efeito de comparação, uma simulação temporal ilustrando o valor absoluto do erro de estimação $e(t)$, é apresentada na Figura 1. O desempenho do filtro nebuloso T-S com memória projetado pelo método proposto (linha azul sólida), com $g = 2$ e $d = 3$, é comparado com o filtro obtido pelo método proposto por Zhang et al. (2011) (linha vermelha ponto-tracejada), projetado com $g = 2$, $\alpha_1 = 0.5$ e $\alpha_2 = 10$. O sinal de ruído externo é escolhido como

$$w(t) = \frac{1}{2 + t^{1.3}}. \quad (19)$$

Sob condições iniciais nulas, o valor máximo encontrado para o ganho ℓ_2 , definido por

$$\gamma(t) = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^t e(i)'e(i)}{\sum_{i=0}^t w(i)'w(i)}}, \quad (20)$$

para o método proposto é $\gamma(150) = 0.2901$. Este valor é inferior ao limitante da norma \mathcal{H}_∞ prescrito, $\gamma = 0.5289$, e, também, inferior ao ganho ℓ_2 determinado pelo método de Zhang et al. (2011), $\gamma(150) = 0.3984$, assegurando que o filtro nebuloso T-S sintetizado atende as especificações de

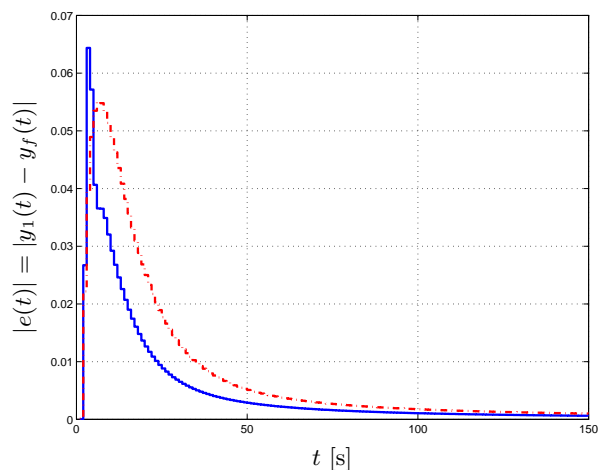


Figura 1: Valores absolutos do erro de estimação obtidos por filtros nebuloso T-S projetados pelo Teorema 1 com $g = 2$ e $d = 3$ (linha azul sólida) e pelo método de Zhang et al. (2011) com $g = 2$, $\alpha_1 = 0.5$ e $\alpha_2 = 10$ (linha vermelha ponto-tracejada).

projeto e que seu desempenho é melhor do que outros métodos da literatura.

O diagrama de valores singulares da função de transferência do erro de estimação do sistema nebuloso T-S é apresentado na Figura 2 para $g = 2$ e $d = 3$. O diagrama foi construído considerando as funções de pertinência como valores fixos dentro do domínio normalizado. Como esperado, todos os valores singulares encontram-se abaixo do custo garantido γ determinado. Note também que o valor do limitante γ obtido pelo método proposto é muito próximo da norma \mathcal{H}_∞ de pior caso no diagrama. O limitante determinado pelo método de Zhang et al. (2011) também é apresentado na figura.

5 Conclusões

Condições LMIs para o projeto de filtros nebulosos \mathcal{H}_∞ multi-polinomiais com memória para sistemas nebulosos T-S discretos no tempo foram propostas neste trabalho. A eficácia da utilização de tais filtros foi ilustrada por meio de um exemplo numérico da literatura, mostrando que a estrutura com memória e as condições de síntese propostas são capazes de prover resultados menos conservadores do que outros métodos existentes que não fazem uso de informações passadas. Vale a pena salientar que o alto custo computacional demandado pelo aumento da memória ocorre durante a fase de projeto, que é realizada *offline*. Não obstante, para implementações práticas, a quantidade de memória necessária para armazenar as informações passadas pode ser facilmente suprida pelas plataformas digitais disponíveis atualmente.

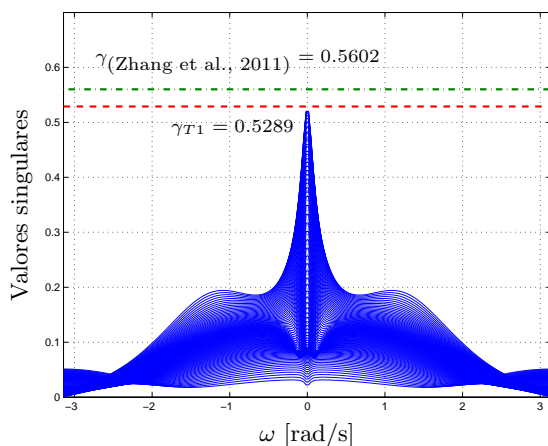


Figura 2: Máximos valores singulares (considerando as funções de pertinência como valores fixos dentro do domínio normalizado) da função de transferência do erro de estimação do sistema nebuloso T-S. Os limitantes encontrados para os filtros nebulosos T-S projetados pelo método de Zhang et al. (2011) (linha verde pontilhada) e pelo Teorema 1 (linha vermelha traçada) também são apresentados.

Agradecimentos

À FAPESP, processos 2013/05957-1 e 2014/03669-1, à CAPES e ao CNPq.

Referências

Agulhari, C. M., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2012). Robust LMI parser: A computational package to construct LMI conditions for uncertain systems, *XIX CBA*, Campina Grande, PB, Brasil, pp. 2298–2305.

de Oliveira, M. C. e Skelton, R. E. (2001). Stability tests for constrained linear systems, in S. O. Reza Moheimani (ed.), *Perspectives in Robust Control*, Vol. 268 of *Lecture Notes in Control and Information Science*, Springer-Verlag, New York, NY, pp. 241–257.

Frezza, L., Lacerda, M. J., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2015). Robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ memory filter design for linear uncertain discrete-time delay systems, *Signal Process.* **117**: 322–332.

Horn, R. A. e Johnson, C. R. (1991). *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press.

Kruszewski, A., Wang, R. e Guerra, T. M. (2008). Nonquadratic stabilization conditions for a class of uncertain nonlinear discrete time TS fuzzy models: A new approach, *IEEE Trans. Autom. Control* **53**(2): 606–611.

Lee, D. H. e Joo, Y. H. (2014). Extended robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ filter design for discrete time-invariant linear systems with polytopic uncertainty, *Circ. Syst. Signal Process.* **33**(2): 393–419.

Löfberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *Proc. 2004 IEEE Int. Symp. on Comput. Aided Control Syst. Des.*, Taipei, Taiwan, pp. 284–289.

MOSEK ApS (2015). *The MOSEK optimization toolbox for MATLAB manual. Version 7.1 (Revision 42)*. <http://docs.mosek.com/7.1/toolbox/index.html>.

Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2007). Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations, *IEEE Trans. Autom. Control* **52**(7): 1334–1340.

Takagi, T. e Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control, *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.* **SMC-15**(1): 116–132.

Teixeira, M. C. M., Assunção, E. e Avellar, R. G. (2003). On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **11**(5): 613–623.

Tognetti, E. S., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2015). \mathcal{H}_∞ and \mathcal{H}_2 nonquadratic stabilisation of discrete-time Takagi-Sugeno systems based on multi-instant fuzzy Lyapunov functions, *Int. J. Syst. Sci.* **46**(1): 76–87.

Tseng, C.-S. (2006). Robust fuzzy filter design for nonlinear systems with persistent bounded disturbances, *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B, Cybern.* **36**(4): 940–945.

Zhang, H., Shi, Y. e Mehr, A. S. (2012). On \mathcal{H}_∞ filtering for discrete-time Takagi-Sugeno fuzzy systems, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **20**(2): 396–401.

Zhang, H., Xie, X. e Tong, S. (2011). Homogeneous polynomially parameter-dependent \mathcal{H}_∞ filter designs of discrete-time fuzzy systems, *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B, Cybern.* **41**(5): 1313–1322.

Zhang, J. e Xia, Y. (2009). New LMI approach to fuzzy \mathcal{H}_∞ filter designs, *IEEE Trans. Circuits & Syst. II: Exp. Briefs* **56**(9): 739–743.

Zhou, S., Lam, J. e Xue, A. (2007). \mathcal{H}_∞ filtering of discrete-time fuzzy systems via basis-dependent Lyapunov function approach, *Fuzzy Sets & Syst.* **158**(2): 180–193.