

Modelo preditor de intervalos para sistemas com duas entradas e saída singular

Raphael D. F. Gomes Márcio J. Lacerda

* *GCOM - Grupo de Controle e Modelagem*
Departamento de Engenharia Elétrica
UFSJ - Universidade Federal de São João del-Rei
Pça. Frei Orlando, 170 - Centro - 36307-352 - São João del-Rei, MG,
Brasil (e-mails:pphael@hotmail.com, lacerda@ufsj.edu.br).

Abstract: This paper proposes a new method to design an interval predictor model (IPM) for systems with two inputs and singular output. The IPM predicts the range of an system output variable inside an interval, from the analysis of the input-output data. The proposed approach for the IPM design is based on semidefinite programming and sum of squares techniques. Two optimization problems are presented and the goal is to minimize the region generated by the IPM. The first optimization problem aims to minimize the point-to-point distance between the surfaces that describe the IPM. The second optimization problem aims to minimize the volume integral of the difference between the surfaces that describe the IPM. Numerical experiments were performed to illustrate the performance of the proposed method and to compare the optimization strategies employed in the construction of the IPM.

Resumo: Este artigo propõe um novo método para projetar um modelo preditor de intervalos (IPM do inglês, *Interval Predictor Model*) para sistemas com dupla entrada e saída singular. O IPM prevê o alcance de uma variável do sistema dentro de uma faixa, por meio da análise dos dados de entrada e saída. A abordagem proposta para o projeto de um IPM é baseada em programação semidefinida e técnicas de soma de quadrados. São apresentados dois problemas de otimização que tem o objetivo de minimizar a região gerada pelo IPM. O primeiro problema de otimização tem como função objetivo minimizar a distância ponto a ponto entre as superfícies que descrevem o IPM. O segundo tem como função objetivo minimizar a integral de volume da diferença entre as superfícies que descrevem o IPM. Experimentos numéricos foram realizados para ilustrar o desempenho do método proposto e comparar as estratégias de otimização empregadas na construção do IPM.

Keywords: Interval predictor model; sum of squares; optimization; system identification; semidefinite programming.

Palavras-chaves: Modelo preditor de intervalo; soma de quadrados; otimização; identificação de sistemas; programação semidefinida.

1. INTRODUÇÃO

Um sistema dinâmico pode ser definido como um conjunto de elementos que interagem entre si. Este conjunto é composto por variáveis e parâmetros que podem se alterar com o tempo, os quais em conjunto determinam relações de causa e efeito (Monteiro, 2006). A partir dessa definição, muitos fenômenos podem ser classificados como sistemas dinâmicos, sejam eles meteorológicos, econômicos, biológicos, entre outros. Isso implica a relevância do estudo de métodos de identificação de sistemas, pois nessa área são feitas pesquisas em relação à modelagem matemática desses fenômenos, permitindo que eventos futuros possam ser previstos e eventos passados possam ser compreendidos.

Existem diversas alternativas para modelagem de sistemas, entre elas pode-se citar três em especial (Aguirre, 2007).

- Modelagem caixa branca: técnica na qual é de extrema importância conhecer a maior quantidade possível de características do sistema escolhido. Esse método nem sempre é viável, pois nem sempre existe o conhecimento da física do processo a ser modelado.
- Modelagem caixa preta: nesta técnica não é necessário o conhecimento de todo o comportamento do sistema. A obtenção do modelo é baseada na informação dos dados entrada-saída do sistema.
- Modelagem caixa cinza: esse método está entre a caixa branca e a caixa preta. São usadas técnicas semelhantes à caixa preta, porém com o uso das variáveis do sistema real que estão ao alcance do modelador.

O Modelo Preditor de Intervalos (IPM, do inglês *Interval Predictor Model*) pode ser visto como uma ferramenta para a modelagem caixa preta, pois não requer nenhum conhecimento prévio da física do processo. O IPM se difere dos métodos de identificação convencionais, uma vez que

* O presente trabalho foi realizado com apoio da FAPEMIG APQ-00692-17, CNPq 425800/2018-0 e PPGEL-UFSJ.

o IPM está interessado em prever o alcance dos dados de saída, enquanto os métodos convencionais tentam interpolar esses dados (Campi et al., 2009). A característica citada permite a possibilidade do IPM prever um intervalo no espaço entrada-saída onde os dados de saída serão encontrados (com maior probabilidade). Tal aspecto é relevante para sistemas com incertezas na entrada, as quais podem ser caracterizadas como ruídos ou falhas na medição. A partir disso, com análise dos dados de entrada e saída, pode ser feita a identificação de sistemas que possuem componentes estocásticas, as quais dificultam a predição do valor exato dos dados de saída.

Na literatura podem ser encontrados vários estudos que utilizaram o IPM como ferramenta, como em Crespo et al. (2016b), em que o IPM foi usado em problemas de blindagem contra radiação em exploração espacial e em Lacerda et al. (2018) em que o IPM foi usado no problema de seleção de estruturas para a recuperação de não linearidades estáticas a partir de dados caóticos. Em Sadeghi et al. (2018) e Sadeghi et al. (2019), o conceito de IPM foi usado em redes neurais intervalares treinadas com dados imprecisos. Também são encontradas diversas maneiras de se construir um IPM, em Campi et al. (2009) foram propostas condições na forma de desigualdades matriciais lineares para o projeto de um IPM. Em Crespo et al. (2016a), uma formulação convexa foi apresentada para gerar um IPM que depende da entrada x e depende linearmente de um vetor de parâmetros p usado para modelar a saída $y = M(x, p)$ em que M é a função que relaciona entradas e saídas. Vale a pena mencionar também o trabalho apresentado em Crespo et al. (2013), que realiza uma análise de confiabilidade para sistemas que dependem polinomialmente de parâmetros incertos. Assume-se que as distribuições de probabilidade dos parâmetros incertos pertençam a uma caixa de probabilidade (também conhecida como p -box).

Neste artigo são empregadas técnicas de soma de quadrados (SOS do inglês, *Sum of Squares*) para a modelagem do problema considerado de encontrar um IPM. Programas na forma de SOS, são problemas convexos que podem ser resolvidos por meio da programação semidefinida (SDP do inglês, *Semidefinite Programming*). Técnicas de SOS podem ser empregadas na busca por um certificado de não negatividade de um polinômio dentro de uma região. Esse certificado é dado na forma de uma decomposição do problema original na forma de soma de quadrados. A formulação SOS tem sido usada na solução de diversos problemas, pode-se citar, análise de sistemas polinomiais lineares com parâmetros variantes no tempo (Wu and Prajna, 2004), cômputo da região de atração de sistemas não lineares (Topcu et al., 2010; Henrion and Korda, 2014), projeto de controle para sistemas polinomiais (Prajna et al., 2004), problemas de filtragem para sistemas polinomiais (Li et al., 2012; Lacerda et al., 2015) entre outros (Blekherman et al., 2012). Técnicas de SOS também foram usadas em Magnani et al. (2005) para reforçar a convexidade de uma função em uma região específica, no problema de ajuste de dados. Em Jones and Peet (2018) a programação SOS foi usada para encontrar representações semi algébricas de conjuntos, incluindo uma envoltória para atratores de sistemas não lineares. Foi empregada uma função objetivo do tipo determinante na solução do problema de otimização.

A contribuição deste artigo é o desenvolvimento de um IPM por meio de técnicas de soma de quadrados. Serão considerados sistemas com duas entradas e saída singular. O objetivo principal é o projeto de um intervalo que minimize o volume no espaço entrada-saída onde os dados de saída serão encontrados, ou seja, uma envoltória que engloba todos os dados de saída. Este artigo é uma extensão do método apresentado em Lacerda and Crespo (2017), onde o IPM é definido por um intervalo de duas dimensões, pois foram estudados apenas sistemas com entrada singular. O uso da programação SOS permite que sejam obtidas funções polinomiais que conseguem representar os pares entrada-saída do sistema considerado. O aumento do grau na formulação SOS possibilita que intervalos menores sejam obtidos com a técnica proposta. Experimentos numéricos são apresentados para ilustrar a capacidade do método de obter um IPM que contenha todo o conjunto de dados entrada-saída.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere um mecanismo gerador de dados que a partir de um vetor de variáveis de entrada $x \in R^{n_x}$, produz um vetor com as variáveis de saída $y \in R^{n_y}$. Neste artigo a ênfase é dada para sistemas com entradas duplas $n_x = 2$ e saída singular ($n_y = 1$). Seja N conjuntos entrada-saída criados com esse gerador de dados, descrevendo esse conjunto por $Z = z(t)$, em que $z(t) = (x_1(t), x_2(t), y(t))$ para $t = 1, \dots, N$, é a sequência de dados empregados para o projeto do IPM.

É desejado construir um modelo matemático do gerador de dados baseado em z , o qual irá prever a saída correspondente de uma realização não observada da entrada. Seja $X \subseteq R^{n_x}$ um conjunto de variáveis de entrada, e $Y \subseteq R^{n_y}$ um conjunto de variáveis de saída que são resultados da avaliação do modelo no conjunto X . O objetivo é selecionar um modelo $y = M(x, p)$ em que $p \in R^{n_p}$ é um parâmetro que depende polinomialmente em x . Em contraste com técnicas convencionais que buscam interpolar os dados, para a obtenção de uma única curva de resposta, o IPM busca um intervalo que contém todos os dados entrada-saída. A incerteza existente na maioria dos processos e a variabilidade intrínseca dos sistemas estocásticos, podem ser melhor modelados por meio de um intervalo, por exemplo. Antes de definir o IPM, vamos apresentar a formulação SOS que será utilizada no trabalho.

2.1 Soma de quadrados

Um polinômio $F(x)$ de grau $2d$ possui uma decomposição SOS se ele pode ser escrito da seguinte forma

$$F(x) = \sum_i^k f_i^2(x) \quad (1)$$

em que cada f_i possui grau menor ou igual a d . Se a decomposição existir, então $F(x)$ pode ser escrita em uma forma quadrática

$$F(x) = u^T Q u \quad (2)$$

em que u é um vetor de monômios com grau menor ou igual a d nas variáveis x e Q é uma matriz constante. Se na representação (2) Q é uma matriz semidefinida positiva, então $F(x)$ é não negativa para todo o domínio

x . A existência de Q semidefinida positiva, garante uma decomposição na forma $Q = VV^T$.

Para ilustrar a decomposição SOS de um polinômio de duas variáveis, vamos considerar o exemplo apresentado originalmente em Parrilo (2000). Considere o seguinte polinômio:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^4 + 2x_1^3x_2 - x_1^2x_2^2 + 5x_2^4.$$

Note que $2d = 4$. O polinômio pode ser escrito como uma função quadrática dos monômios como

$$f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1x_2 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Como a matriz Q é semidefinida positiva, ela pode ser fatorada usando, por exemplo, a fatoração de Cholesky

$$Q = L^T L, \quad L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

e com isso,

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}((2x_1^2 - 3x_2^2 + x_1x_2)^2 + (x_2^2 + 3x_1x_2)^2). \quad (5)$$

Pode ser observado que a função foi decomposta em uma soma de fatores elevados ao quadrado, que garante que $f(x_1, x_2)$ será positiva para quaisquer valores de x_1 e de x_2 .

Uma vez que a soma de quadrados implica não negatividade, uma questão natural é quando um polinômio não negativo pode ser expresso como soma de quadrados (Blekherman et al., 2012). Hilbert mostrou que em três casos o conjunto de polinômios não negativos é equivalente ao conjunto de polinômios na forma SOS: i) polinômios de uma variável ($n = 1$); ii) polinômios quadráticos ($2d = 2$); iii) polinômios quárticos de duas variáveis ($2d = 4, n = 2$).

3. RESULTADOS PRINCIPAIS

3.1 Modelo preditor de intervalos

Um IPM é totalmente caracterizado pelos seus limites superior e inferior. Nesse artigo esses limites serão prescritos por duas funções polinomiais, então $I(x_1, x_2) = [f_l(x_1, x_2), f_u(x_1, x_2)]$ em que $f_l(x_1, x_2) < f_u(x_1, x_2)$ para todos os valores de $(x_1, x_2) \in X$. Os polinômios considerados neste trabalho têm a seguinte forma

$$f_u = \bar{a}_0 + \sum_{i=1}^{d_u} (\bar{a}_{1i}x_1^i + \bar{a}_{2i}x_2^i) + \sum_{k=2,4,\dots}^{d_u} \sum_{l=2,4,\dots}^{d_u} \bar{c}_{kl}x_1^kx_2^l, \quad (6)$$

$$f_l = \underline{a}_0 + \sum_{i=1}^{d_l} (\underline{a}_{1i}x_1^i + \underline{a}_{2i}x_2^i) + \sum_{k=2,4,\dots}^{d_l} \sum_{l=2,4,\dots}^{d_l} \underline{c}_{kl}x_1^kx_2^l. \quad (7)$$

Em que d_u e d_l são os maiores expoentes de x_1 e x_2 nos polinômios superior e inferior, respectivamente. As variáveis de decisão são os coeficientes da função superior $\bar{a}_0, \bar{a}_{1i}, \bar{a}_{2i}$ e \bar{c}_{kl} e os coeficientes da função inferior $\underline{a}_0, \underline{a}_{1i}, \underline{a}_{2i}$ e \underline{c}_{kl} . Note que os polinômios f_u como em (6) e f_l como em (7) possuem todos monômios de x_1 e x_2 com expoente d_u e d_l . Para os produtos cruzados entre x_1 e x_2 foram considerados apenas os monômios com expoente par

em cada uma das variáveis. A escolha de não considerar todos os produtos cruzados foi realizada para reduzir o número de variáveis do problema. Note que o produto cruzado faz com que os graus dos polinômios superior e inferior sejam $2d_u$ e $2d_l$ respectivamente. Os valores d_u e d_l não precisam ser iguais. Uma função $f_u(x_1, x_2)$ com $d_u = 4$ pode ser escrita como segue:

$$f_u(x_1, x_2) = \bar{a}_0 + \bar{a}_{11}x_1 + \bar{a}_{12}x_1^2 + \bar{a}_{13}x_1^3 + \bar{a}_{14}x_1^4 + \bar{a}_{21}x_2 + \bar{a}_{22}x_2^2 + \bar{a}_{23}x_2^3 + \bar{a}_{24}x_2^4 + \bar{c}_{22}x_1^2x_2^2 + \bar{c}_{24}x_1^2x_2^4 + \bar{c}_{42}x_1^4x_2^2 + \bar{c}_{44}x_1^4x_2^4.$$

Note que a escolha dos termos que compõem os polinômios, não é única. Além disso, a aplicação de critérios empregados na literatura de identificação de sistemas, como o critério de Akaike, para a determinação dos coeficientes do polinômio não é direta.

As condições para projetar um IPM baseado nos N dados de entrada-saída, $z(t) = (x_1(t), x_2(t), y(t))$ com $t = 1, \dots, N$, são apresentadas na sequência

3.2 Programa de otimização

Lema 1. Se existirem polinômios $f_u(x_1, x_2)$ de grau $2d_u$ como em (6) e polinômios $f_l(x_1, x_2)$ de grau $2d_l$ como em (7) tais que

$$y(t) - f_l(x_1(t), x_2(t)) > 0, \quad t = 1, \dots, N, \quad (8)$$

$$y(t) - f_u(x_1(t), x_2(t)) < 0, \quad t = 1, \dots, N, \quad (9)$$

$$f_u(x_1, x_2) - f_l(x_1, x_2) \text{ é SOS}, \quad (10)$$

então, o IPM que contém todo intervalo é representado por

$$I(x_1, x_2) = [f_l(x_1, x_2), f_u(x_1, x_2)].$$

Prova. Seja $y(t)$ um ponto gerado por um par de dados de entrada $(x_1(t), x_2(t))$. A condição (8) garante que $y(t)$ está acima do limitante inferior do intervalo, enquanto a condição (9) garante que $y(t)$ está abaixo do limitante superior do IPM, para todos valores de N . Uma vez que a condição SOS seja satisfeita, a condição (10) garante que f_u é maior que f_l no intervalo de interesse considerado.

Para minimizar o intervalo gerado pelo IPM, um problema de otimização deve ser considerado. O primeiro caso, minimiza a distância entre os limitantes do IPM em cada um dos pontos amostrados.

Problema de otimização 1

min γ sujeito a

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^N f_u(x_1(t_i), x_2(t_i)) - f_l(x_1(t_i), x_2(t_i)) < \gamma, \\ (8), (9), (10). \end{array} \right.$$

O segundo problema de otimização minimiza a integral de volume, a qual usa todos pontos das funções f_u e f_l . Em contraponto com o problema anterior que usa apenas a quantidades de pontos definidas por N .

Problema de otimização 2

min γ sujeito a

$$\left\{ \int_{\underline{x}_1}^{\bar{x}_1} \int_{\underline{x}_2}^{\bar{x}_2} \int_{f_l(x_1, x_2)}^{f_u(x_1, x_2)} df dx_2 dx_1 < \gamma, \right. \\ (8), (9), (10).$$

em que \underline{x}_i é o mínimo valor de x_i no intervalo considerado e \bar{x}_i é o máximo valor de x_i no intervalo considerado, $i = 1, 2$.

4. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

As rotinas foram implementadas em Matlab versão R2013a, utilizando pacotes computacionais SOSTOOLS (Papachristodoulou et al., 2013) e SeDuMi (F., 1999).

4.1 Exemplo 1

Para efeitos didáticos, vamos considerar o seguinte mecanismo gerador de dados:

$$x_1 = \text{sen}(\beta)\cos(\theta), \quad x_2 = \text{sen}(\beta)\text{sen}(\theta), \quad (11)$$

$$y(t) = \pm \sqrt{-x_1^2 - x_2^2 + 1}. \quad (12)$$

As variáveis β e θ são independentes e identicamente distribuídas (i.i.d. do inglês *Independent and Identically Distributed*). Onde β varia no intervalo $[0, \pi]$ e θ varia no intervalo $[0, 2\pi]$. Esses parâmetros são usados para gerar as variáveis de entrada x_1 e x_2 . O objetivo é gerar um IPM que contenha todo o conjunto de dados $z(t) = (x_1(t), x_2(t), y(t))$. Um conjunto de $N = 200$ observações foi computado para formar a sequência de dados $z(t)$. Como pode ser observado, o modelo matemático do gerador de dados usado neste Exemplo se trata da função de uma esfera com raio $r = 1$. Essa função foi escolhida para facilitar a visualização da técnica.

Para que fosse possível uma comparação direta entre os dois problemas de otimização, foi computado o volume do IPM obtido pelo problema de otimização 1 chamado γ_{po1} . A Tabela 1 apresenta os valores de γ obtidos com a aplicação do problema de otimização 2 (γ_{po2}), bem como os valores do volume obtido pelos IPMs gerados por meio do problema de otimização 1 (γ_{po1}). A Tabela 1 também apresenta o número de variáveis de decisão N_v para os diferentes graus considerados, este número é o mesmo para os dois problemas de otimização. Foram considerados diferentes valores para os graus dos polinômios f_u e f_l . Com a análise dos resultados do problema de otimização 2, é possível observar que o volume decresce significativamente com o aumento do grau das funções. Note que, o volume obtido pelo problema de otimização 2 se aproxima do volume de uma esfera de raio unitário $r = 1$ com o aumento do grau.

Tabela 1. Valores de γ obtidos para o Exemplo 1, considerando diferentes graus das funções f_u e f_l

$d_u = d_l$	4	6	8	10
γ_{po1}	5.0260	4.7548	-	-
γ_{po2}	4.9460	4.5260	4.4000	4.3320
N_v	27	45	67	93

A Figuras 1, 2 e 3 apresentam respectivamente: i) a função inferior do IPM, que está abaixo de todo o conjunto de

dados; ii) a função superior do IPM, que está acima de todo o conjunto de dados; iii) o IPM completo que envolve o conjunto de dados coletados. Nessas figuras foi utilizado $d_u = d_l = 8$ com o problema de otimização 2 e $N = 200$ pontos coletados.

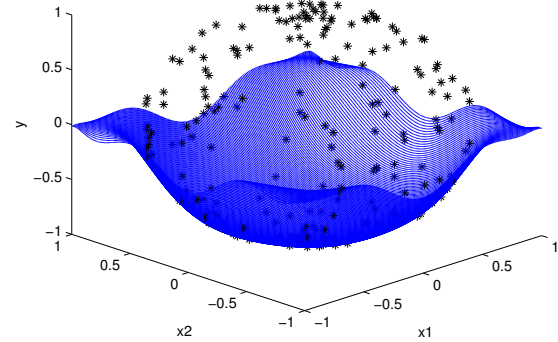


Figura 1. Superfície inferior do IPM gerada pelo problema de otimização 2 com $d_u = d_l = 8$ para o Exemplo 1.

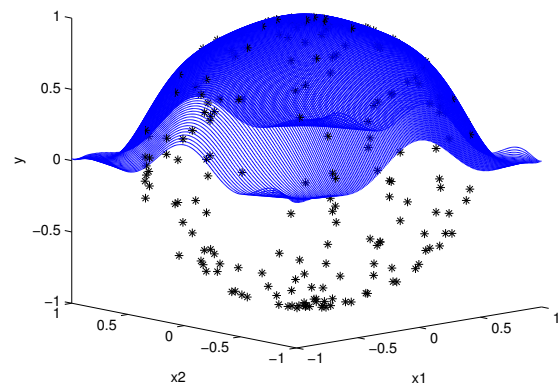


Figura 2. Superfície superior do IPM gerada pelo problema de otimização 2 com $d_u = d_l = 8$ para o Exemplo 1.

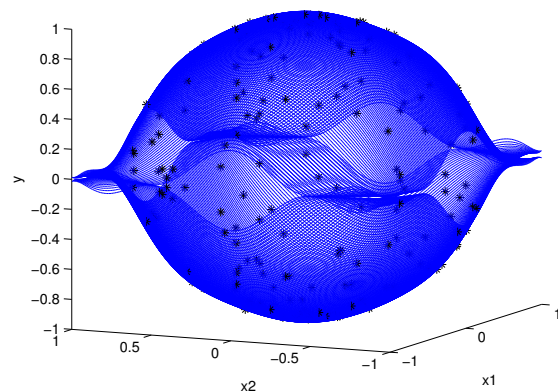


Figura 3. IPM gerado pelo problema de otimização 2 com $d_u = d_l = 8$ para o Exemplo 1.

A análise dos gráficos gerados no experimento, em conjunto com a comparação dos valores de γ apresentados na Tabela 4.1, permitem concluir que o problema de otimização 2 é capaz de projetar uma envoltória mais precisa, ou seja, que possui um menor volume em relação ao problema de otimização 1. Outra vantagem do problema de otimização 2 é a estabilidade numérica. Na Tabela 4.1 não são apresentados resultados para o problema de otimização 1 quando $d_u = d_l = 8, 10$, pois para esses casos, a presença de erros numéricos impossibilita o cômputo do IPM.

4.2 Exemplo 2

O modelo matemático do gerador de dados é descrito como um sistema dinâmico de três dimensões que exhibe características caóticas sob certos parâmetros. Considere o atrator de Lorenz definido pelas equações diferenciais

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma(x_2(t) - x_1(t)), \\ \dot{x}_2 &= \rho x_1(t) - x_2(t) - x_1(t)x_3(t), \\ \dot{x}_3 &= x_1(t)x_2(t) - \beta x_3(t).\end{aligned}$$

Os pontos de equilíbrio podem ser encontrados escrevendo as equações na forma $\dot{x}(t) = f(x(t))$ e resolvendo as equações $f(x(t)) = (0, 0, 0)^T$. O atrator de Lorenz descrito acima possui três pontos de equilíbrio em

$$(0, 0, 0)^T, \quad (\pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)^T.$$

Neste artigo é considerado o caso em que $\sigma = 10$, $\rho = 28$ e $\beta = \frac{8}{3}$ como considerado em Lorenz (1963). Nos resultados numéricos foram feitas mudanças de coordenadas para que o atrator seja encontrado em uma caixa unitária. As mudanças são descritas como

$$\begin{aligned}x_1 &= 50\bar{x}_1, \\ x_2 &= 50\bar{x}_2, \\ x_3 &= 50\bar{x}_3 + 25.\end{aligned}$$

As variáveis x_1 e x_2 foram consideradas como entradas e $y = x_3$ como saída do sistema. Assim, o IPM deve cobrir o volume dos dados do vetor x_3 . O problema de otimização 2 foi considerado com $N = 200$ pontos e considerando $d_u = d_l = 5$. A condição inicial utilizada para gerar os dados foi $\bar{x} = [0 \ 1 \ 1.05]^T$. O sistema foi simulado usando a função ode45 do Matlab. Neste Exemplo foram considerados produtos cruzados de graus pares e ímpares nos monômios dos termos cruzados dos polinômios (6) e (7), ou seja k e l variam de $1, \dots, d$, em que d é o grau do polinômio. Essa escolha propiciou a diminuição do volume do IPM encontrado. Considerando $d_u = d_l = 5$ foi observado um valor $\gamma = 0.04782$ com o novo formato de f_u e f_l , enquanto nas formas (6) e (7) em f_u e f_l foi obtido $\gamma = 0.1138$.

A Figura 4 apresenta o conjunto de dados considerados e o polinômio superior do IPM f_u . A Figura 5 apresenta a superfície gerada pelo polinômio inferior do IPM f_l . Note que as superfícies limitam todas observações geradas para o sistema de Lorenz considerado.

5. CONCLUSÕES

Este trabalho apresenta estratégias baseadas em otimização para o projeto de modelos preditores de intervalos, a partir de um número limitado de observações. Os

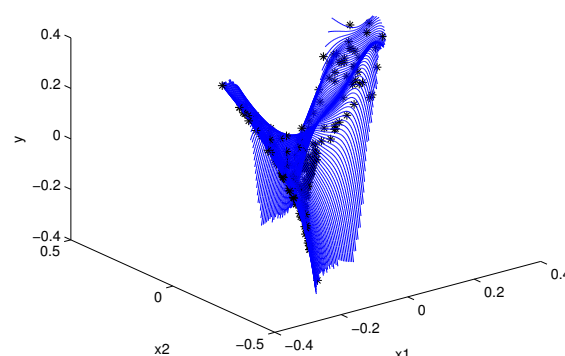


Figura 4. Superfície superior do IPM para o Exemplo 2, gerada pelo problema de otimização 2 com $d_u = d_l = 5$ e $N = 200$ pontos.

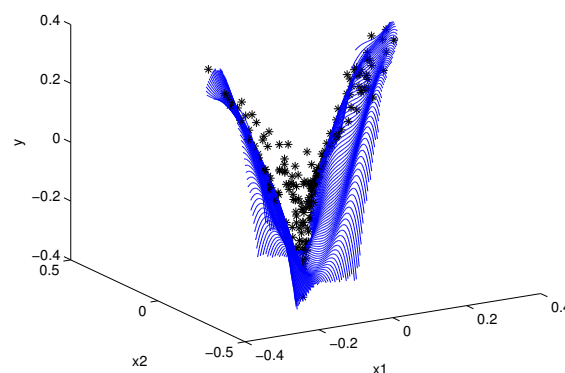


Figura 5. Superfície inferior do IPM para o Exemplo 2, gerada pelo problema de otimização 2 com $d_u = d_l = 5$ e $N = 200$ pontos.

problemas foram formulados explorando a convexidade advinda de técnicas de soma de quadrados, que podem ser resolvidas por meio da programação semidefinida. Dois problemas de otimização foram definidos para minimizar a região encontrada pelo IPM. O primeiro problema foi baseado na minimização da distância entre os polinômios superior e inferior do IPM nos pontos amostrados, enquanto o segundo problema de otimização considerou a minimização do volume do IPM. O segundo problema se mostrou mais eficiente e estável numericamente. Exemplos numéricos foram considerados para ilustrar o desempenho do método proposto. Em trabalhos futuros pretende-se considerar a presença de incerteza nos dados coletados.

REFERÊNCIAS

- Aguirre, L.A. (2007). *Introdução à Identificação de Sistemas - Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. Editora da UFMG. 3ª edição.
- Blekherman, G., Parrilo, P.A., and Thomas, R.R. (eds.) (2012). *Semidefinite Optimization and Convex Algebraic Geometry*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA. doi:10.1137/1.9781611972290.

- Campi, M.C., Galafiore, G., and Garatti, S. (2009). Interval predictor models : identification and reliability. *Automatica*, 45(2), 382–392.
- Crespo, L.G., Kenny, S.P., and Giesy, D.P. (2013). Reliability analysis of polynomial systems subject to p-box uncertainties. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 37(1–2), 121–136.
- Crespo, L.G., Kenny, S.P., and Giesy, D.P. (2016a). Interval predictor models with a linear parameter dependency. *ASME Journal of verification, validation and uncertainty quantification*, 1(2), 1–10.
- Crespo, L.G., Kenny, S.P., Giesy, D.P., Norman, R.B., and Blattnig, S.R. (2016b). Application of interval predictor models to space radiation shielding. In *Proceedings of the 18th AIAA Non-Deterministic Approaches Conference*, 1–23. San Diego, CA, USA.
- F., S.J. (1999). Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11(1-4), 625–653.
- Henrion, D. and Korda, M. (2014). Convex computation of the region of attraction of polynomial control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(2), 297–312.
- Jones, M. and Peet, M.M. (2018). Using SOS for optimal semialgebraic representation of sets: Finding minimal representations of limit cycles, chaotic attractors and unions. *arXiv*.
- Lacerda, M.J. and Crespo, L.G. (2017). Interval predictor models for data with measurement uncertainty. In *Proceedings of the 2017 American Control Conference*, 1487–1492. Seattle, USA.
- Lacerda, M.J., Martins, S.A.M., and Nepomuceno, E.G. (2018). Structure selection based on interval predictor model for recovering static nonlinearities from chaotic data. *IET Control Theory & Applications*, 12(13), 1889–1894.
- Lacerda, M.J., Valmorbidia, G., and Peres, P.L.D. (2015). Linear filter design for continuous-time polynomial systems with l_2 -gain guaranteed bound. In *Proceedings of IEEE 54th Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, 5026– 5030. Osaka, Japan.
- Li, P., Lama, J., and Chesi, G. (2012). On the synthesis of linear h_∞ filters for polynomial systems. *Automatica*, 61(1), 31– 36.
- Lorenz, E.N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20, 130–141.
- Magnani, A., Lall, S., and Boyd, S. (2005). Tractable fitting with convex polynomials via sum-of-squares. In *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference*, 1672– 1677. Seville, Spain.
- Monteiro, L.H.A. (2006). *Sistemas Dinâmicos*, volume 1. Livraria da Física, SP, Brasil, 2 edition.
- Papachristodoulou, A., Anderson, J., Valmorbidia, G., Prajna, S., Seiler, P., and Parrilo, P.A. (2013). *SOS-TOOLS: Sum of squares optimization toolbox for MATLAB*. <http://arxiv.org/abs/1310.4716>. Available from <http://www.eng.ox.ac.uk/control/sostools>.
- Parrilo, P.A. (2000). *Structured Semidefinite Programs and Semialgebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization*. Ph.D. thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California.
- Prajna, S., Parrilo, P.A., and Rantzer, A. (2004). Non-linear control synthesis by convex optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(2), 310–314.
- Sadeghi, J.C., de Angelis, M., and Patelli, E. (2018). Efficient training of neural networks with interval uncertainty. In *8th International Workshop on Reliable Computing*, 137–146. Liverpool, UK.
- Sadeghi, J.C., de Angelis, M., and Patelli, E. (2019). Efficient training of interval neural networks for imprecise training data. *Neural Networks*, 118, 338–351.
- Topcu, U., Packard, A.K., Seiler, P., and Balas, G.J. (2010). Robust region-of-attraction estimation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(1), 137– 142.
- Wu, F. and Prajna, S. (2004). A new solution approach to polynomial LPV system analysis and synthesis. In *Proceeding of the 2004 American Control Conference*, 1362– 1367. Boston, MA, USA.