

# FILTRAGEM MISTA PARA SISTEMAS LINEARES INCERTOS DISCRETOS NO TEMPO

NATÁLIA AUGUSTO KELES\*, MÁRCIO J. LACERDA\*

\*Grupo de Controle e Modelagem (GCoM)

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Universidade Federal de São João del-Rei

Praça Frei Orlando, 170 - Centro- 36307-352 - São João del-Rei, MG, Brasil

Emails: natalia.augusto.keles@hotmail.com, lacerda@ufsj.edu.br

**Abstract**— This paper is concerned with the mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  filtering problem for discrete-time linear time-invariant systems subject to polytopic uncertainties. The approach is based on the use of relaxed conditions for the filter design considering the  $\mathcal{H}_\infty$  and the  $\mathcal{H}_2$  guaranteed cost. The sufficient conditions are given in terms of robust linear matrix inequalities which can be solved by means of available computational packages. Whenever possible the variables in the problem are described as homogeneous polynomials that depends on the uncertain parameter. This degree of freedom for the decision variables allow that less conservative results to be achieved when the uncertainty present in the system grows. A numerical example is considered to illustrate the performance of the method when compared with results from the literature.

**Keywords**—  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  Robust filtering, guaranteed cost, polytopic uncertainties

**Resumo**— Este artigo trata do problema de filtragem robusta mista  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  para sistemas lineares invariantes no tempo sujeitos a incertezas do tipo politópica e discretos no tempo. A abordagem é baseada no uso de condições relaxadas para o projeto de filtros considerando os custos garantido  $\mathcal{H}_\infty$  e  $\mathcal{H}_2$ . As condições suficientes são dadas na forma de desigualdades matriciais lineares robustas que são resolvidas por meio de pacotes computacionais existentes. Sempre que possível as variáveis do problema são descritas como polinômios homogêneos que dependem do parâmetro incerto. Esse grau de liberdade para as variáveis de decisão permite que resultados menos conservadores sejam alcançados quando a incerteza presente no sistema aumenta. Um exemplo numérico é apresentado para ilustrar o desempenho do método quando comparado com resultados existentes na literatura.

**Palavras-chave**— Filtragem robusta  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ , custo garantido, incertezas politópicas

## 1 Introdução

A filtragem é amplamente utilizada para a detecção de falhas (Franzè e Famularo, 2012), em processamento de sinais (de Souza et al., 2001; de Souza et al., 2006; Frezzatto et al., 2015), em aplicações aeroespaciais (Yaesh e Shaked, 1996), dentre outras. Atenuar distúrbios não é tarefa trivial, na literatura é possível encontrar diversas técnicas baseadas em critérios de desempenho como as normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  que são amplamente utilizadas (Lacerda, Tognetti, Oliveira e Peres, 2012; Lacerda, Leite, Oliveira e Peres, 2012; Kim, 2011). A norma  $\mathcal{H}_2$  é usada com sucesso no caso em que o ruído tem densidade espectral conhecida, porém sabe-se que na prática, para maioria dos ruídos existentes, não é possível extrair informações estatísticas sobre seu comportamento e para essas circunstâncias a norma  $\mathcal{H}_\infty$  fornece respostas mais satisfatórias.

Com intuito de usufruir das melhores características da filtragem  $\mathcal{H}_\infty$  e da filtragem  $\mathcal{H}_2$ , a ideia da filtragem mista foi introduzida por Bernstein e Haddad (1989), o qual visava atenuar os dois tipos de ruído simultaneamente. Essa abordagem é expressa por um método de otimização e de acordo com um limitante superior  $\gamma$  estabelecido para norma  $\mathcal{H}_\infty$ , a norma  $\mathcal{H}_2$  é minimizada.

Sabe-se ainda, que existe um agravante que aumenta a complexidade do problema: as incer-

tezas presentes nos sistemas. Na maioria dos casos, técnicas clássicas são incapazes de solucionar problemas com incertezas e, para esse fim, a filtragem robusta é usada. Dessa maneira, existe uma aproximação baseada na existência de uma função de Lyapunov para domínios incertos que assegura a estabilidade do sistema dinâmico associado a estimação do erro e aos valores limitados pelas normas. O benefício do uso da função de Lyapunov está intimamente ligado à aplicação das LMIs (do inglês *Linear Matrix Inequalities* - Desigualdes Matriciais Lineares), que são uma ferramenta matemática numericamente eficiente, usada para resolver problemas da área de sistemas de controle, uma vez que diversas questões apresentam formulações convexas, além de possibilitar a análise de sistemas com incertezas presentes, facilitando a modelagem do problema (Boyd et al., 1994).

O presente trabalho utiliza a norma  $\mathcal{H}_2$  e a norma  $\mathcal{H}_\infty$  com abordagem pelo Lema de Finsler para a formulação do problema de síntese de filtros robustos via LMIs, o presente caso trata-se da síntese de um filtro robusto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  misto para sistemas lineares invariantes no tempo sobre influência de incertezas. Além disso, a metodologia apresenta uma nova condição menos conservadora devido ao uso de estruturas polinômiais homogêneas que possibilita o aumento no espaço de busca da solução com a inserção de variáveis ex-

tras. Por meio de um exemplo numérico será feita uma comparação da metodologia apresentada com um exemplo da literatura, será verificado o comportamento do custo garantido da norma  $\mathcal{H}_\infty$  e analisados casos de como a alocação das variáveis extras de maneiras diferentes afeta o cômputo final do custo garantido  $\mathcal{H}_2$  para valores de incertezas indicados.

## 2 Resultados Preliminares

Seja o sistema linear incerto, invariante e discreto no tempo expresso por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\alpha)x(k) + B_{w_1}(\alpha)w_1(k) \\ &\quad + B_{w_2}(\alpha)w_2(k) \\ y(k) &= C_y(\alpha)x(k) + D_{w_1}(\alpha)w_1(k) + D_{w_2}(\alpha)w_2(k) \\ z(k) &= C_z(\alpha)x(k) \end{aligned} \quad (1)$$

em que  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $w_1(k) \in \mathbb{R}^{n_{w_1}}$  é a entrada de ruído a ser atenuado pela norma  $\mathcal{H}_2$ ,  $w_2(k) \in \mathbb{R}^{n_{w_2}}$  é a entrada de ruído a ser atenuado pela norma  $\mathcal{H}_\infty$ ,  $z(k) \in \mathbb{R}^{n_z}$  é o sinal a ser estimado e  $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$  é a saída medida do sistema discreto especificado. Dessa forma, as matrizes apresentam as seguintes dimensões:  $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_{w_1}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n_{w_1}}$ ,  $B_{w_2}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n_{w_2}}$ ,  $C_y(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$ ,  $D_{w_1}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_{w_1}}$ ,  $D_{w_2}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_{w_2}}$  e  $C_z(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$ . As matrizes do sistema (1) pertencem a um domínio politópico e cada uma delas pode ser definida como uma combinação convexa em termos do parâmetro  $\alpha$ , da seguinte forma

$$Z(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i Z_i, \quad \alpha \in \Lambda_N \quad (2)$$

em que  $Z(\alpha)$  é uma matriz qualquer do sistema (1),  $Z_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  são os vértices do politopo,  $N$  é o número de vértices do politopo e  $\Lambda_N$  é o conjunto simplex unitário que é definido como

$$\Lambda_N \triangleq \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}.$$

O número de vértices do politopo é dependente do número de incertezas ( $\eta$ ) presentes no sistema e pode ser calculado como

$$N = 2^\eta, \quad \eta \in \mathbb{R}.$$

O sistema (1) apresenta função transferência denotada por  $H(z)$  e normas  $\mathcal{H}_\infty$  e  $\mathcal{H}_2$  representadas por  $\|H(z)\|_\infty$  e  $\|H(z)\|_2$  respectivamente.

É importante lembrar que, para que o projeto do filtro seja realizado, a matriz  $A(\alpha)$  do sistema (1) deve ser Schur estável. Em outras palavras,  $A(\alpha)$  deve ter todos os autovalores dentro do círculo de raio unitário  $\forall \alpha \in \Lambda_N$ .

O filtro robusto projetado neste trabalho tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} x_f(k+1) &= A_f x_f(k) + B_f y(k) \\ z_f(k) &= C_f x(k) \end{aligned} \quad (3)$$

em que  $x_f(k) \in \mathbb{R}^{n_f}$  ( $n_f = n$ ) é o estado do filtro e  $z_f(k) \in \mathbb{R}^{n_z}$  é a saída estimada, se necessário (3) pode ser adaptado de modo a considerar uma matriz  $D_f$ , fazendo com que o filtro projetado não tenha a necessidade de ser estritamente próprio. A entrada do filtro é o sinal de saída medida do sistema (1), ou seja  $y(k)$ . Definindo o sinal de erro  $e(k) = z(k) - z_f(k)$  e o vetor aumentado composto pelo estado do sistema (1),  $x(k)$ , e pelo estado do filtro (3),  $x_f(k)$ , tem-se<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(k+1) \\ x_f(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_f C_y & A_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_f(k) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} B_{w_1} \\ B_f D_{w_1} \end{bmatrix} w_1(k) + \begin{bmatrix} B_{w_2} \\ B_f D_{w_2} \end{bmatrix} w_2(k) \\ e(k) &= \begin{bmatrix} C_z & -C_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_f(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

fazendo  $\tilde{x}(k) = [x(k)' \quad x_f(k)']'$  é possível escrever o sistema aumentado em uma forma compacta como

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1) &= \tilde{A}(\alpha)\tilde{x} + \tilde{B}_1(\alpha)w_1 + \tilde{B}_2(\alpha)w_2 \\ e(k) &= \tilde{C}(\alpha)\tilde{x} \end{aligned} \quad (5)$$

em que  $\tilde{A}(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $\tilde{B}_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times n_{w_1}}$ ,  $\tilde{B}_2(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times n_{w_2}}$  e  $\tilde{C}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_z \times 2n}$ .

O projeto do filtro robusto misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  consiste em encontrar uma estimativa  $z_f(k)$  do sinal  $z(k)$  minimizando o custo garantido  $\mathcal{H}_2$  da entrada  $w_1(k)$  para o sinal  $e(k)$  ao mesmo tempo que o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  da entrada  $w_2(k)$  para o sinal de erro  $e(k)$  seja satisfeito.

### 2.1 Análise $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$

Antes de introduzir as condições de projeto que serão utilizadas na filtragem mista, vamos apresentar as condições relaxadas para análise do custo garantido  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ . O Lema a seguir apresenta uma condição para a análise do custo  $\mathcal{H}_2$ . A notação  $He(X) = X + X'$  será usada para simplificar a escrita das condições, além de  $w_1$  e  $w_2$  serem consideradas com a mesma dimensão, isto é,  $n_w = n_{w_1} = n_{w_2}$ .

**Lema 1** *Seja  $\tilde{A}(\alpha)$  uma matriz Schur estável. A desigualdade  $\|H(z)\|_2 < \mu$  é válida para todo  $\alpha \in \Lambda_N$  se e somente se existirem matrizes simétricas dependentes de parâmetros definidas*

<sup>1</sup>As dependências de  $\alpha$  das matrizes  $A$ ,  $B_{w_1}$ ,  $B_{w_2}$ ,  $C_y$ ,  $D_{w_1}$ ,  $D_{w_2}$  e  $C_z$  foram omitidas para simplificar a notação.

positivas  $W(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $M(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_w \times n_w}$  e matrizes dependentes de parâmetros  $E(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $Q(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_w \times 2n}$  tais que<sup>2</sup>

$$\text{Tr}(M(\alpha)) < \mu^2 \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} M(\alpha) & \tilde{C}(\alpha) \\ \star & W(\alpha) \end{bmatrix} > 0 \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} W(\alpha) + He \left( K(\alpha) \tilde{A}(\alpha) \right) & \star \\ E(\alpha) \tilde{A}(\alpha) - K(\alpha)' & -W(\alpha) - He(E(\alpha)) \\ \tilde{B}_1(\alpha)' K(\alpha)' + Q(\alpha) \tilde{A}(\alpha) & \tilde{B}_1(\alpha)' E(\alpha)' - Q(\alpha) \\ \star & \star \\ \star & \star \\ He \left( Q(\alpha) \tilde{B}_1(\alpha) \right) + I_{n_w} \end{bmatrix} > 0, \quad \forall \alpha \in \Lambda_N. \quad (8)$$

**Prova:** A prova do Lema 1 para o custo garantido  $\mathcal{H}_2$  pode ser encontrada em Lacerda et al. (2011).  $\square$

Para a análise do custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  o seguinte Lema é considerado

**Lema 2** *Seja  $\tilde{A}(\alpha)$  uma matriz Schur estável. A desigualdade  $\|H(z)\|_\infty < \gamma$  é válida para todo  $\alpha \in \Lambda_N$  se somente se existirem matrizes simétricas dependentes de parâmetros definidas positivas  $W(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  e matrizes dependentes de parâmetros  $E(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $K(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $Q(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_w \times 2n}$  e  $F(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_z \times 2n}$*

$$\begin{bmatrix} W(\alpha) + He \left( K(\alpha) \tilde{A}(\alpha) \right) & \star \\ -K(\alpha)' + E(\alpha) \tilde{A}(\alpha) & -W(\alpha) - He(E(\alpha)) \\ \tilde{B}_2(\alpha)' K(\alpha)' + Q(\alpha) \tilde{A}(\alpha) & \tilde{B}_2(\alpha)' E(\alpha)' - Q(\alpha) \\ F(\alpha) \tilde{A}(\alpha) + \tilde{C}(\alpha) & -F(\alpha) \\ \star & \star \\ \star & \star \\ He \left( Q(\alpha) \tilde{B}_2(\alpha) \right) + I_{n_w} & \star \\ F(\alpha) \tilde{B}_2(\alpha) & \gamma^2 I_{n_z} \end{bmatrix} > 0, \quad (9)$$

para todo  $\alpha \in \Lambda_N$

**Prova:** A prova do Lema 2 pode ser vista em Lacerda et al. (2011).  $\square$

Note que as condições apresentadas nos Lemas 1 e 2 apresentam produtos entre as variáveis do filtro, que estão contidas nas matrizes  $\tilde{A}(\alpha)$ ,  $\tilde{B}_1(\alpha)$ ,  $\tilde{B}_2(\alpha)$  e  $\tilde{C}(\alpha)$  com as variáveis extras introduzidas no problema  $K(\alpha)$ ,  $E(\alpha)$ ,  $Q(\alpha)$  e  $F(\alpha)$ . Dessa forma, para linearizar o problema e realizar o projeto do filtro, uma restrição de estrutura será imposta em cada uma das variáveis. É importante ressaltar que a matriz de Lyapunov  $W(\alpha)$  não aparece multiplicando nenhuma variável do

<sup>2</sup> $\star$  representa um bloco simétrico nas LMIs.

filtro. Sendo assim, sua estrutura é preservada intacta.

Seguindo os passos de Duan et al. (2006), a seguinte estrutura foi escolhida

$$K(\alpha) = \begin{bmatrix} K_{11}(\alpha) & \lambda_1 \hat{K} \\ K_{21}(\alpha) & \lambda_2 \hat{K} \end{bmatrix}, E(\alpha) = \begin{bmatrix} E_{11}(\alpha) & \hat{K} \\ E_{21}(\alpha) & \hat{K} \end{bmatrix}, \\ Q(\alpha) = [Q_1(\alpha) \ 0], F(\alpha) = [F_1(\alpha) \ 0] \quad (10)$$

em que  $\hat{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz constante e  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  são variáveis escalares pré-determinadas. Além disso, a seguinte mudança de variáveis é aplicada

$$K_1 = \hat{K} A_f, \quad K_2 = \hat{K} B_f$$

implicando que  $K_1$  e  $K_2$  tem a mesma forma de  $A_f$  e  $B_f$ , isto é, matrizes constantes. Essa escolha para a estrutura das variáveis em conjunto com a mudança de variáveis proposta, permite que os Lemas 1 e 2 sejam utilizados para o projeto do filtro robusto. A matriz  $C_f$  não multiplica outra variável do problema e por este motivo ela será recuperada diretamente da solução da LMI. Para a simplificação na montagem da LMI, a matriz  $W(\alpha)$  foi particionada em blocos:

$$W(\alpha) = \begin{bmatrix} W_{11}(\alpha) & W_{12}(\alpha) \\ W_{12}(\alpha)' & W_{22}(\alpha) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

A próxima seção apresenta as condições de projeto.

### 3 Resultados Principais

A condição para o projeto do filtro robusto com custo garantido  $\mathcal{H}_2$  é dada pelo seguinte Teorema:

**Teorema 3** *Se existirem matrizes simétricas dependentes de parâmetros definidas positivas  $W(\alpha)$  como em (11) e  $M(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $Q(\alpha)$ ,  $K(\alpha)$ ,  $E(\alpha)$  como em (10),  $K_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $K_2 \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$ ,  $C_f \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$ ,  $\mu > 0$ , escalares  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  conhecidos tais que as condições (6), (7) e*

$$\Psi(B_{w_1}, D_{w_1}) > 0, \quad (12)$$

com  $\Psi(B_{w_1}, D_{w_1})$  definido em (13) sejam satisfeitas para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ . Então,  $A_f = \hat{K}^{-1} K_1$ ,  $B_f = \hat{K}^{-1} K_2$  e  $C_f$  são as matrizes do filtro robusto estável que garantem o custo  $\mathcal{H}_2$  definido por  $\mu$ .

Para o caso  $\mathcal{H}_\infty$ , o seguinte Teorema pode ser enunciado

**Teorema 4** *Se existirem matrizes simétricas dependentes de parâmetros definida positiva  $W(\alpha)$  como em (11) e matrizes  $Q(\alpha)$ ,  $K(\alpha)$ ,  $E(\alpha)$  e  $F(\alpha)$  como em (10),  $K_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $K_2 \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$ ,  $C_f \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$ ,  $\gamma > 0$  e escalares  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  conhecidos tais que*

$$\Phi(\alpha) = \begin{bmatrix} \Psi(B_{w_2}, D_{w_2}) & G' \\ G & \gamma^2 I_{n_z} \end{bmatrix} > 0 \quad (14)$$

$$\Psi(B_{w_1}, D_{w_1}) = \begin{bmatrix} W_{11}(\alpha) + He(K_{11}(\alpha)A(\alpha)) & W_{12}(\alpha) + A(\alpha)'K_{21}(\alpha)' + \lambda_2 C_y(\alpha)'K_2' + \lambda_1 K_1 \\ + \lambda_1 He(K_2 C_y(\alpha)) & W_{22}(\alpha) + \lambda_2 He(K_1) \\ \star & \star \\ \star & \star \\ \star & \star \\ -K_{11}(\alpha) + A(\alpha)'E_{11}(\alpha)' + C_y(\alpha)'K_2' & -\lambda_1 \hat{K} + A(\alpha)'E_{21}(\alpha)' + C_y(\alpha)'K_2' \\ -K_{21}(\alpha) + K_1' & -\lambda_2 \hat{K} + K_1' \\ -W_{11}(\alpha) - He(E_{11}(\alpha)) & -W_{12}(\alpha) - \hat{K} - E_{21}(\alpha)' \\ \star & -W_{22}(\alpha) - He(\hat{K}) \\ \star & \star \\ K_{11}(\alpha)B_{w_1}(\alpha) + \lambda_1 K_2 D_{w_1}(\alpha) + A(\alpha)'Q_1(\alpha)' & \\ K_{21}(\alpha)B_{w_1}(\alpha) + \lambda_2 K_2 D_{w_1}(\alpha) & \\ E_{11}(\alpha)B_{w_1}(\alpha) + K_2 D_{w_1}(\alpha) - Q_1(\alpha)' & \\ E_{21}(\alpha)B_{w_1}(\alpha) + K_2 D_{w_1}(\alpha) & \\ He(Q_1(\alpha)B_{w_1}(\alpha)) + I_{n_w} & \end{bmatrix} \quad (13)$$

seja satisfeita para todo  $\alpha \in \Lambda_N$  com  $\Psi(B_{w_2}, D_{w_2})$  obtido de (13),  $G = \begin{bmatrix} G_1 & -C_f & -F_1(\alpha) & 0 & G_5 \end{bmatrix}$ . Sendo

$$G_1 = F_1(\alpha)A(\alpha) + C_z(\alpha) \\ G_5 = F_1(\alpha)B_{w_1}(\alpha)$$

Então,  $A_f = \hat{K}^{-1}K_1$ ,  $B_f = \hat{K}^{-1}K_2$  e  $C_f$  são as matrizes do filtro robusto estável que garantem o custo  $\mathcal{H}_\infty$  definido por  $\gamma$ .

O Lema a seguir explana o problema de otimização que deve ser resolvido para a síntese do filtro robusto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  misto.

**Lema 5** Dado um limitante para o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$ ,  $\gamma > 0$ , se as condições (6), (7), (12) para o  $\mathcal{H}_2$  e (14) para o  $\mathcal{H}_\infty$ , forem satisfeitas, então  $\mu$  é o custo garantido  $\mathcal{H}_2$  e  $A_f = \hat{K}^{-1}K_1$ ,  $B_f = \hat{K}^{-1}K_2$  e  $C_f$  as matrizes da filtragem mista.

As matrizes de folga dependentes do parâmetro  $\alpha$  e a matriz de Lyapunov  $W(\alpha)$  são consideradas como polinômios homogêneos de grau genérico, seguindo Oliveira e Peres (2007). Essa estrutura polinomial para as variáveis permite que resultados menos conservadores sejam obtidos. As LMIs apresentadas nesse artigo se encontram na forma robusta, isto é, dependentes de  $\alpha$ . As condições finitas em termos dos vértices do sistema são obtidas com o auxílio do ROLMIP (Agulhari et al., 2012).

## 4 Experimentos Numéricos

Realizando um comparativo entre as condições propostas neste artigo com outras presentes na literatura, as simulações foram realizadas em Matlab versão R2015a, utilizando pacotes computacionais YALMIP (Löfberg, 2004), SeDuMi (Sturm,

1999) e ROLMIP (Agulhari et al., 2012). O computador utilizado possui um processador Intel Core i5 4200, 1.6 Ghz, 4 Gb de RAM com sistema operacional Windows 8.1. Os exemplos utilizados foram retirados de Palhares e Peres (2001).

Dessa forma, considere o sistema incerto cujo intervalo descrito por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0,8 \\ 1,2 - \delta & -0,5 \end{bmatrix}; \quad B_{w_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$B_{w_2} = \begin{bmatrix} -0,45 \\ 0,35 \end{bmatrix}; \quad C_y = [0,35 + \beta \quad -0,65];$$

$$C_z = [0,2 \quad 0]; \quad D_{w_1} = 1,3; \quad D_{w_2} = 0,4;$$

$$0 \leq \delta \leq 0,1; \quad 0 \leq \beta \leq 1.$$

Para solucionar o problema de otimização exposto no Lema 5 foi necessário determinar os escalares  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ , pois o valor a eles atribuído influenciam no cômputo do custo garantido  $\mathcal{H}_2$ . Para isso, uma busca linear foi realizada para definir os valores de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  que retornasse o menor  $\mu$  possível, sendo que os melhores valores encontrados foram  $\lambda_1 = 0,34$  e  $\lambda_2 = 0,22$ , sendo esses valores aplicados para todas as simulações efetuadas.

### 4.1 Variação do valor mínimo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ ( $\gamma_{min}$ ) a partir do incremento da incerteza

O valor de  $\mu$  é minimizado a partir do valor atribuído à  $\gamma$ , desse modo foi realizada uma busca para determinar qual o menor valor do custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  ( $\gamma$ ) tornava o problema factível para cada incerteza tratada. A Figura 1 mostra o comportamento de  $\gamma$  conforme a incerteza foi incrementada (sendo  $\delta_{max} = 1.8$ , valor máximo que permite que o sistema continue estável), para

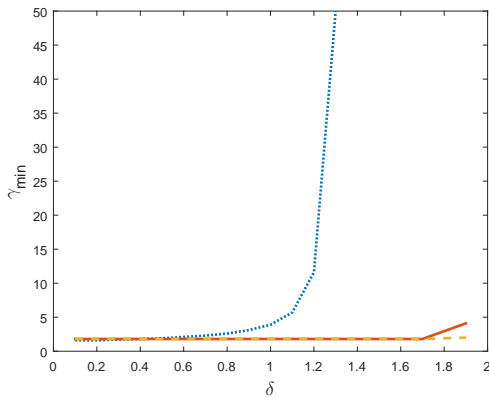


Figura 1: Variação do custo  $\mathcal{H}_2$  a partir do incremento da incerteza. Metodologia usada por Palhares e Peres (2001)(curva pontilhada), metodologia apresentada no Lema 5 e  $g = 1$  (curva contínua), para  $g = 2$  (curva tracejada).

a metodologia apresentada por Palhares e Peres (2001), e para as metodologias apresentadas neste trabalho.

Nota-se que a influência das incertezas é evidente no método de Palhares e Peres (2001), uma vez que  $\gamma_{min}$  cresce rapidamente com a variação de  $\delta$ , tornando a solução infactível para valores de  $\delta$  acima de 1,2.

Devido ao uso do ROLMIP(Agulhari et al., 2012), foi possível considerar diferentes graus para as variáveis polinomiais. A Figura 1 apresenta os resultados considerando o Lema 5 com variáveis polinomiais de grau  $g = 1$  e para grau  $g = 2$ . É possível verificar que mesmo com o aumento da incerteza, ainda é possível computar o valor de  $\gamma_{min}$ . Nesse experimento os valores de  $\lambda$  encontrados anteriormente foram utilizados.

#### 4.2 Análise da custo garantido $\mathcal{H}_2$ a partir do incremento da incerteza

Para a análise do comportamento do custo garantido  $\mathcal{H}_2$ , adotou-se o valor de  $\gamma = 2$  fixo e as incertezas foram incrementadas. Como esperado, para o método de Palhares e Peres (2001) foram obtidos valores de custo garantido  $\mathcal{H}_2$  para um  $\delta_{max} = 0,5$ , uma vez que os valores de  $\gamma_{min}$  cresceram exponencialmente com o incremento da incerteza, inviabilizando o cálculo do  $\mu$ . Para o procedimento apresentado pelo Lema 5, tanto para o grau 1 como para o grau 2 foram obtidos valores consistentes para o custo garantido  $\mathcal{H}_2$ , com uma ligeira melhora quando utiliza-se o matrizes polinomiais de ordem 2, validando a robustez do procedimento. A comparação entre os valores do custo garantido  $\mathcal{H}_2$  pode ser verificada na Figura 2.

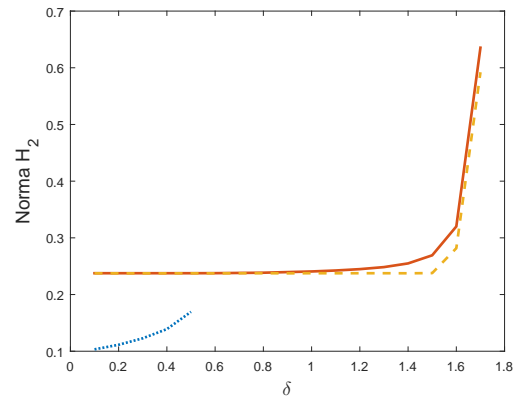


Figura 2: Variação do custo  $\mathcal{H}_\infty$  a partir do incremento da incerteza, considerando  $\gamma = 2$ . Metodologia usada por Palhares e Peres (2001)(curva pontilhada), metodologia apresentada no Lema 5 e  $g = 1$  (curva contínua), para  $g = 2$  (curva tracejada).

#### 4.3 Resultados menos conservadores

Para as próximas simulações, permaneceu-se adotando  $\gamma = 2$  para efeito comparativo. Inicialmente, o método apresentado no Lema 5 utiliza os mesmos valores de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  e variáveis de folga para o cálculo dos custos garantidos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ . Com o intuito de aumentar o grau de liberdade do método em estudo optou-se, primeiramente, por utilizar quatro escalares distintos para os Teoremas 3 e 4, sendo eles  $\lambda_1 = 0.34$  e  $\lambda_2 = 0.22$  para a síntese do  $\mathcal{H}_2$  e  $\lambda_3 = 0.34$  e  $\lambda_4 = 0.16$  para a síntese do  $\mathcal{H}_\infty$ . Observou-se certa melhora para os valores de custo garantido  $\mathcal{H}_2$  para todas as incertezas trabalhadas quando se compara o uso da metodologia com apenas dois valores distintos de  $\lambda$ . Porém relacionando os resultados encontrados com a faixa de valores factíveis da metodologia do Palhares e Peres (2001) a melhora foi observada somente quando a incerteza  $\delta = [0, 0.5]$  em que a metodologia desse artigo encontra o valor de custo garantido  $\mathcal{H}_2$  de 0,1574 enquanto para o método apresentado por Palhares e Peres (2001) obteve o valor de 0,1695.

Ainda objetivando a melhora dos resultados, adicionou-se um maior grau de liberdade para as variáveis extras, ou seja, utilizando variáveis de folgas distintas para o cômputo dos Teoremas 3 e 4, dessa maneira aumentando o espaço de busca do sistema. Destaca-se que  $\hat{K}$  deve permanecer o mesmo nos dois teoremas, devido à essa variável ser necessária para recuperar as matrizes do filtro. Com essa abordagem os valores para  $\lambda$  permaneceram os mesmos excetuando  $\lambda_4$ , que foi alterado para para 0.18, dessa maneira verificou-se que os valores do custo garantido  $\mathcal{H}_2$  reduziram ainda mais e houve uma melhora nos valores de  $\mu$  quando a incerteza  $\delta = [0, 0.4]$  e  $\delta = [0, 0.5]$ , sendo

eles de 0,1312 para ambos os casos enquanto os valores obtidos por Palhares e Peres (2001) foram de 0,1398 e 0,1695 respectivamente.

## 5 Conclusão

Este artigo apresentou o projeto de um filtro robusto misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  para sistemas lineares incertos invariantes no tempo. Graças ao uso de uma estrutura específica para as variáveis extras inseridas no problema, foi possível realizar o projeto por meio da resolução de um problema convexo. As variáveis do problema apresentado tem estrutura polinomial o que possibilita a redução do conservadorismo. A técnica apresentada foi testada em um exemplo numérico retirado da literatura, onde pode-se observar a robustez do método perante a incertezas.

## Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPEMIG APQ-0069217 pelo apoio financeiro, ao PPGEL-UFSJ/CEFET-MG e ao grupo GCOM pelo suporte.

## Referências

- Agulhari, C. M., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2012). Robust LMI parser: A computational package to construct LMI conditions for uncertain systems, *XIX CBA*, Campina Grande, PB, Brasil, pp. 2298–2305.
- Bernstein, D. S. e Haddad, W. M. (1989). Steady-state Kalman filtering with an  $\mathcal{H}_\infty$  error bound, *Systems & Control Letters* **12**(1): 9–16.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. e Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA.
- de Souza, C. E., Barbosa, K. A. e Trofino, A. (2006). Robust  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for discrete-time linear systems with uncertain time-varying parameters, *IEEE Trans. Signal Process.* **54**(6): 2110–2118.
- de Souza, C. E., Palhares, R. M. e Peres, P. L. D. (2001). Robust  $\mathcal{H}_\infty$  filter design for uncertain linear systems with multiple time-varying state delays, *IEEE Trans. Signal Process.* **49**(3): 569–576.
- Duan, Z. S., Zhang, J. X., Zhang, C. S. e Mosca, E. (2006). Robust  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for uncertain linear systems, *Automatica* **42**(11): 1919–1926.
- Franzè, G. e Famularo, D. (2012). A robust fault detection filter for polynomial nonlinear systems via sum-of-squares decompositions, *Syst. Control Lett.* **61**(8): 839–848.
- Frezzatto, L., Lacerda, M. J., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2015). Robust  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  memory filter design for linear uncertain discrete-time delay systems, *Signal Process.* **117**: 322–332.
- Kim, J. H. (2011). Reduced-order delay-dependent  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for uncertain discrete-time singular systems with time-varying delay, *Automatica* **47**(12): 2801–2804.
- Lacerda, M. J., Leite, V. J. S., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2012). Filtragem  $\mathcal{H}_\infty$  dependente de parâmetros para sistemas LPV discretos com atraso nos estados, *XIX CBA*, Campina Grande, PB, Brasil, pp. 2425–2431.
- Lacerda, M. J., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2011). Robust  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  filter design for uncertain linear systems via LMIs and polynomial matrices, *Signal Process.* **91**(5): 1115–1122.
- Lacerda, M. J., Tognetti, E. S., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2012). Filtragem seletiva  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas lineares com parâmetros variantes contínuos no tempo, *XIX CBA*, Campina Grande, PB, Brasil, pp. 4666–4673.
- Löfberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *Proc. 2004 IEEE Int. Symp. on Comput. Aided Control Syst. Des.*, Taipei, Taiwan, pp. 284–289.
- Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2007). Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations, *IEEE Trans. Autom. Control* **52**(7): 1334–1340.
- Palhares, R. M. e Peres, P. L. D. (2001). LMI approach to the mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  filtering design for discrete-time uncertain systems, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* **37**(1): 292–296.
- Sturm, J. F. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optim. Method Softw.* **11**(1–4): 625–653. <http://sedumi.ie.lehigh.edu/>.
- Yaesh, I. e Shaked, U. (1996). Design of linear tracking filters via robust  $\mathcal{H}_2$  optimization, *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* **32**(1): 388–394.