

## FILTRAGEM $\mathcal{H}_\infty$ PARA SISTEMAS MARKOVIANOS COM PROBABILIDADES INCERTAS POR MEIO DE LMIS COM ESCALARES

CECÍLIA F. MORAIS\*, MÁRCIO F. BRAGA\*, MÁRCIO J. LACERDA\*,  
RICARDO C. L. F. OLIVEIRA\*, PEDRO L. D. PERES\*

\*Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação,  
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, 13083-852, Campinas, SP, Brasil.

Emails: {cfmorais, marciofb, marciojr, ricfow, peres}@dt.fee.unicamp.br

**Abstract**— This paper addresses the problem of  $\mathcal{H}_\infty$  filter design for discrete-time Markov jump linear systems (MJLS) with transition probability matrix affected by uncertainties. The proposed methodology allows to take into account the different types of uncertainties usually considered in MJLS in a systematic way. New conditions are given for  $\mathcal{H}_\infty$  filter design with partial, complete or null Markov mode availability. Less conservative results can be obtained due to the presence of slack variables, a scalar parameter in the synthesis conditions, and also to the use of linear matrix inequality relaxations of increasing precision. Numerical experiments illustrate the better performance and efficiency of the proposed approach when compared to other strategies available in the literature.

**Keywords**— Markov jump linear systems; Discrete-time systems; Uncertain transition probability;  $\mathcal{H}_\infty$  filtering; Linear matrix inequalities.

**Resumo**— Este artigo investiga o problema de filtragem  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos discretos no tempo com matriz de probabilidades de transição incerta. A metodologia proposta permite tratar os diferentes tipos de incerteza usualmente consideradas em sistemas markovianos de maneira sistemática. Novas condições para o projeto de filtros  $\mathcal{H}_\infty$  independentes, parcialmente dependentes ou completamente dependentes de modos são apresentadas. Resultados menos conservadores podem ser obtidos graças à presença das variáveis de folga e de um parâmetro escalar nas condições de síntese, e também pelo uso de relaxações de precisão crescente na forma de desigualdades matriciais lineares. Experimentos numéricos ilustram o melhor desempenho e eficiência da abordagem proposta quando comparada a outras estratégias disponíveis na literatura.

**Palavras-chave**— Sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos; Sistemas discretos no tempo; Probabilidades de transição incertas; Filtragem  $\mathcal{H}_\infty$ ; Desigualdades matriciais lineares.

### 1 Introdução

Na literatura de controle e processamento de sinais, o problema de filtragem é um dos temas mais abordados. Quando não há informação sobre as propriedades estatísticas da entrada de ruído que atua no sistema, o critério de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  é usualmente empregado. Nos últimos anos, foram publicados vários resultados de projeto de filtros  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas lineares incertos (Duan et al., 2006), sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo (de Souza, Barbosa e Trofino, 2006), sistemas com atraso (Lacerda et al., 2013), sistemas não lineares (Li et al., 2012) e sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos, do inglês *Markovian Jump Linear Systems* – MJLS (de Souza e Fragoso, 2003). Especificamente no contexto de sistemas markovianos, o problema de filtragem tem sido investigado para sistemas discretos (de Souza e Fragoso, 2003), sistemas contínuos (de Souza, Trofino e Barbosa, 2006), considerando o projeto de filtros dependentes (Zhang e Boukas, 2009a) e independentes de modos (Li e Shi, 2012).

Os MJLS são uma categoria de sistemas híbridos na qual múltiplos modos de operação podem ocorrer. Cada modo individual é linear, descrito por equações a diferenças no caso discreto, ou equações diferenciais no caso contínuo no tempo, as quais dependem de uma variável aleatória. O chaveamento entre os diferentes modos é governado por um processo estocástico representado por uma cadeia de Mar-

kov associada à matriz de probabilidades de transição. Essa classe de sistemas dinâmicos pode representar apropriadamente plantas sujeitas a mudanças abruptas no modo de operação ou estrutura (veja (Costa et al., 1999; Costa et al., 2005) e suas referências). É importante mencionar que, em problemas práticos, obter uma informação precisa relacionada às probabilidades de transição pode ser uma tarefa árdua e dispendiosa. Sendo assim, para superar tal desafio, algumas pesquisas tratam o conhecimento parcial das probabilidades de transição considerando, por exemplo, que a matriz de probabilidades incerta seja: i) politópica (Gonçalves et al., 2011); ii) parcialmente conhecida com elementos limitados (Luan et al., 2010); iii) parcialmente conhecida sem qualquer estrutura particular para as entradas desconhecidas (Zhang e Boukas, 2009b; Zhang e Boukas, 2009a); enquanto outros resultados lidam apenas com matrizes de probabilidades precisamente conhecidas (Gonçalves et al., 2009).

Neste artigo, investiga-se o problema de projeto de filtros de ordem completa para MJLS discretos no tempo com matriz de probabilidades de transição incerta, garantindo um limitante superior para a norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Os três tipos de incertezas, usualmente estudados na literatura, são modelados por meio da metodologia multi-simplex (Oliveira et al., 2008). Para isso, cada linha da matriz de probabilidades de transição contendo algum tipo de incerteza é descrita em termos de parâmetros pertencentes a um simplex unitário. Por conseguinte, todos os parâmetros incertos são combinados em um único domínio gerado pelo produto

cartesiano de simplejos. Explorando adequadamente essa representação, condições suficientes para filtragem  $\mathcal{H}_\infty$  são propostas em termos de desigualdades matriciais lineares, do inglês *Linear Matrix Inequalities* – LMIs, associadas com busca em um parâmetro escalar. Tais condições podem lidar com projeto de filtros  $\mathcal{H}_\infty$  para MJLS sob as hipóteses de observação completa, parcial ou nula dos modos. Experimentos numéricos mostram que as condições propostas podem prover resultados menos conservadores do que os apresentados na literatura, ao preço de um acréscimo no esforço computacional ocasionado pelo uso de variáveis de folga, de maiores graus nas matrizes de Lyapunov e da busca em um parâmetro escalar.

A organização desse artigo segue a seguinte estrutura: a Seção 2 apresenta as notações e os resultados preliminares relacionados ao desenvolvimento das condições LMIs, a modelagem multi-simplex das probabilidades de transição incertas e o tratamento de matrizes polinomiais; a Seção 3 introduz os principais resultados para projeto de filtros  $\mathcal{H}_\infty$ ; a Seção 4 fornece exemplos e comparações numéricas com outras condições da literatura; e, por fim, a Seção 5 conclui o artigo.

## 2 Preliminares

Considere o espaço de probabilidades fundamental  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_k\}, \Gamma)$  e o MJLS discreto no tempo  $\mathcal{G}$  definido pelas seguintes equações estocásticas:

$$\mathcal{G} = \begin{cases} x(k+1) = A(\theta_k)x(k) + E(\theta_k)w(k) \\ z(k) = C_z(\theta_k)x(k) + E_z(\theta_k)w(k) \\ y(k) = C_y(\theta_k)x(k) + E_y(\theta_k)w(k) \end{cases} \quad (1)$$

em que  $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$  é o estado,  $w(k) \in \mathbb{R}^{n_w}$  é a perturbação externa,  $z(k) \in \mathbb{R}^{n_z}$  é o sinal a ser estimado e  $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$  é a saída medida. Supõe-se também que a energia do sinal  $w(k)$  é limitada, i.e.,  $w(k) \in \ell_2$ . A cadeia de Markov homogênea discreta no tempo é representada por  $\{\theta(k); k \geq 0\}$ , cujos modos de operação do sistema  $\mathcal{G}$  pertencem ao conjunto finito  $\mathbb{K} \triangleq \{1, \dots, \sigma\}$ , associado a uma matriz de probabilidades de transição  $\Gamma = [p_{ij}]$ , com  $p_{ij} \geq 0$ ,  $\sum_{j=1}^{\sigma} p_{ij} = 1$ ,  $\forall i, j \in \mathbb{K}$ , na qual

$$p_{ij} = \Pr(\theta(k+1) = j \mid \theta(k) = i), \quad \forall k \geq 0.$$

Sempre que possível,  $\theta(k)$  será substituído por  $i$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , de forma que as matrizes do sistema são apresentadas como  $A_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $E_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$ ,  $C_{z_i} \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$ ,  $E_{z_i} \in \mathbb{R}^{n_z \times n_w}$ ,  $C_{y_i} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ ,  $E_{y_i} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_w}$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ .

Em Costa e Fragoso (1993) e Costa et al. (2005), condições necessárias e suficientes que generalizam o conceito de estabilidade aplicada a MJLS, estabilidade por média quadrática, do inglês *Mean Square Stability* – MSS, são provadas e definidas como

$$\mathcal{E}[\|x(k)\|] \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty$$

para qualquer condição inicial  $x(0) \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $\theta_0 \in \mathbb{K}$ . Consequentemente, para tratar o problema de filtragem  $\mathcal{H}_\infty$  para o sistema  $\mathcal{G}$ , algumas definições são necessárias. Para o modelo (1), assumindo que  $\mathcal{G}$  seja MSS, a norma  $\mathcal{H}_\infty$ , denotada como  $\|\mathcal{G}\|_\infty$ , é formalmente caracterizada por (Costa e do Val, 1996)

$$\|\mathcal{G}\|_\infty^2 = \sup_{w(k) \in \ell_2, \theta_0 \in \mathbb{K}} \frac{\|z(k)\|_2^2}{\|w(k)\|_2^2}. \quad (2)$$

O problema a ser investigado nesse artigo é: encontrar um filtro linear causal robusto de ordem completa  $\mathcal{F}$  dado por

$$\mathcal{F} = \begin{cases} x_f(k+1) = A_f(\theta_k)x_f(k) + B_f(\theta_k)y(k) \\ z_f(k) = C_f(\theta_k)x_f(k) + D_f(\theta_k)y(k) \end{cases} \quad (3)$$

em que  $x_f(k) \in \mathbb{R}^{n_f}$ ,  $n_f = n_x$ , é o estado estimado,  $z_f(k) \in \mathbb{R}^{n_z}$  é a saída estimada e as matrizes  $A_{f_i} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $B_{f_i} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ ,  $C_{f_i} \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$  e  $D_{f_i} \in \mathbb{R}^{n_z \times n_y}$  são calculadas. Adicionalmente, a dinâmica do erro,  $e(k) = z(k) - z_f(k)$ , é MSS e o ganho de energia da entrada de perturbação externa  $w(k)$ , para todo  $w(k) \in \ell_2$ , com relação ao erro  $e(k)$ , que é um limite para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  (Costa e do Val, 1996; de Souza, 2003; Seiler e Sengupta, 2003), é minimizado.

Conectando o filtro (3) ao MJLS (1), a dinâmica do erro de estimação satisfaz o seguinte modelo de espaço de estados do sistema aumentado:

$$\mathcal{G}_{au} = \begin{cases} \tilde{x}(k+1) = \tilde{A}(\theta_k)\tilde{x}(k) + \tilde{B}(\theta_k)w(k) \\ e(k) = \tilde{C}(\theta_k)\tilde{x}(k) + \tilde{D}(\theta_k)w(k) \end{cases} \quad (4)$$

com  $\tilde{x}(k) = [x(k)^T \quad x_f(k)^T]^T$  e

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i &= \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ B_{f_i}C_{y_i} & A_{f_i} \end{bmatrix}, & \tilde{B}_i &= \begin{bmatrix} E_i \\ B_{f_i}E_{y_i} \end{bmatrix}, \\ \tilde{C}_i &= [C_{z_i} - D_{f_i}C_{y_i} \quad -C_{f_i}], & \tilde{D}_i &= E_{z_i} - D_{f_i}E_{y_i}. \end{aligned} \quad (5)$$

Neste artigo, considera-se o cenário no qual a matriz de probabilidades de transição  $\Gamma = [p_{ij}]$  pode ser afetada por diferentes tipos de incerteza. Analogamente a Boukas (2009), cada elemento  $p_{ij}$  pode variar entre dois limites, i.e.,  $0 \leq \underline{p}_{ij} \leq p_{ij} \leq \bar{p}_{ij} \leq 1$ , ou, como em Zhang e Boukas (2009b) e Zhang e Boukas (2009a), os elementos podem ser completamente desconhecidos, i.e.,  $p_{ij} = ?$ . Note que o último caso pode ser visto como um caso particular do anterior, visto que os limitantes máximo e mínimo de cada elemento podem ser inferidos pela condição da soma unitária das linhas da matriz de probabilidades.

O procedimento para construir uma representação genérica que permite tratar todos os tipos de incertezas é realizado em dois passos. Primeiramente, similar ao que é feito em Gonçalves et al. (2012), cada linha incerta de  $\Gamma$  é modelada por parâmetros pertencentes a um simplex unitário  $(\Lambda_{N_r})$  dado por

$$\Lambda_{N_r} \triangleq \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^{N_r} : \sum_{i=1}^{N_r} \zeta_i = 1, \zeta_i \geq 0, i = 1, \dots, N_r \right\}.$$

Em seguida, utilizando a metodologia de tratamento das matrizes de probabilidades de transição incertas apresentada em Morais et al. (2013), os parâmetros das  $m$  linhas incertas são combinados em um único domínio, criado pelo produto cartesiano de  $m$  simplexes unitários  $\Lambda = \Lambda_{N_1} \times \dots \times \Lambda_{N_m}$ , chamado multi-simplex (Oliveira et al., 2008). A dimensão de  $\Lambda$  é definida pelo índice  $N = (N_1, \dots, N_m)$ . É importante salientar que a abordagem proposta também pode tratar matrizes de probabilidades politópicas (de Souza, 2003; Gonçalves et al., 2011).

O cômputo de um custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  para um MJLS com matriz de probabilidades de transição incerta  $\Gamma(\alpha)$  é apresentado no próximo lema. O resultado pode ser visto como uma extensão do *bounded real lemma* para MJLS discretos no tempo (Seiler e Sengupta, 2003; Costa e do Val, 1996; Gonçalves et al., 2012) com parâmetros incertos pertencentes ao domínio multi-simplex.

**Lema 1** *O sistema (4) é MSS e  $\|\mathcal{G}\|_\infty < \gamma$  se existirem matrizes dependentes de parâmetros, simétricas e definidas positivas  $P_i(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$ ,  $i = 1, \dots, \sigma$ , tais que as desigualdades dependentes de parâmetros*

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_i & \tilde{B}_i \\ \tilde{C}_i & \tilde{D}_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{pi}(\alpha) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}_i & \tilde{B}_i \\ \tilde{C}_i & \tilde{D}_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_i(\alpha) & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (6)$$

sejam asseguradas para cada  $i = 1, \dots, \sigma$  e para todo  $\alpha \in \Lambda$ , sendo  $P_{pi}(\alpha) = \sum_{j=1}^{\sigma} p_{ij}(\alpha) P_j(\alpha)$ . Minimizando  $\gamma$  sob as restrições (6) na forma de LMIs robustas, tem-se a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de pior caso do sistema (4).

Considerando somente o bloco (1,1) da matriz à esquerda da desigualdade (6),  $i = 1, \dots, \sigma$ , as desigualdades no Lema 1 também podem ser usadas para certificar a estabilidade robusta por média quadrática de um MJLS.

Dadas as matrizes do filtro  $A_{f_i}$ ,  $B_{f_i}$ ,  $C_{f_i}$  e  $D_{f_i}$ , o Lema 1 apresenta um problema de dimensão infinita para computar um limitante para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema aumentado (4) com incertezas na matriz de probabilidades de transição (as desigualdades dependentes de parâmetros devem ser verificadas para todo  $\alpha \in \Lambda$ ). Caso uma solução exista, o cálculo do valor mínimo de  $\gamma$  em termos de um conjunto finito de LMIs pode ser obtido aplicando-se relaxações baseadas em polinômios homogêneos de graus arbitrários  $g$  (Bliman, 2004). Quando os parâmetros pertencem ao multi-simplex  $\Lambda$ , a solução pode ser aproximada por um polinômio homogêneo de graus parciais suficientemente grandes  $g_r$ ,  $r = 1, \dots, m$ , sem perda de generalidade (Oliveira et al., 2008).

As notações e definições relacionadas a polinômios homogêneos e um procedimento sistemático para o cômputo dos vértices da matriz de probabilidades de transição<sup>1</sup> no domínio multi-simplex usadas

<sup>1</sup>A rotina que gera automaticamente os vértices de  $\Gamma(\alpha)$  encontra-se disponível para download em [http://www.dt.fee.unicamp.br/~ricfow/programs/Gamma\\_Multi\\_Simplex.m](http://www.dt.fee.unicamp.br/~ricfow/programs/Gamma_Multi_Simplex.m).

neste artigo seguem as mesmas linhas apresentadas em Morais et al. (2013). Além disso, as condições LMIs propostas na Seção 3 requerem uma representação polinomial homogênea de  $\Gamma(\alpha)$  com grau 1 em  $\Lambda_{N_r}$ ,  $r = 1, \dots, m$ . Com esse intuito, a  $s$ -ésima linha de cada vértice  $v$  de  $\Gamma(\alpha)$  é agrupada como

$$Y_s^{(v)} = \begin{bmatrix} p_{s1}^{(v)} I_n & p_{s2}^{(v)} I_n & \dots & p_{s\sigma}^{(v)} I_n \end{bmatrix}$$

em que  $v \in \mathcal{K}_N(\mathbb{1}) = \mathcal{K}_{N_1}(1) \times \dots \times \mathcal{K}_{N_m}(1)$  e  $\mathbb{1}$  é definido como  $\mathbb{1} = (1, \dots, 1)$ , com  $m$  elementos, e o coeficiente  $\pi(k)$  como

$$\pi(k) = (k_{11}!) \dots (k_{1N_1}!) \dots (k_{m1}!) \dots (k_{mN_m}!).$$

Quando  $P_i(\alpha)$  de grau  $g_r$ , para cada  $i = 1, \dots, \sigma$  e  $r = 1, \dots, m$ , são consideradas, os seguintes coeficientes matriciais são usados

$$\mathcal{X}_k = [P_{1k} \quad P_{2k} \quad \dots \quad P_{\sigma k}]^T.$$

A seção seguinte apresenta um procedimento sistemático, baseado em uma sequência de condições LMIs, para a busca de soluções polinomiais homogêneas de grau arbitrário no multi-simplex (Oliveira e Peres, 2007; Oliveira et al., 2008).

### 3 Principais resultados

Condições LMIs suficientes, associadas com uma busca em parâmetro escalar, para a existência de um filtro dependente de modos assegurando a MSS robusta e um limitante superior para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema (4) com matriz de probabilidades de transição incerta, são apresentadas no teorema a seguir. Tais condições são dadas em termos de graus parciais das soluções polinomiais  $g = (g_1, \dots, g_m)$  e  $h = (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{N}^m$ , de um grau de relaxação de Pólya  $d \in \mathbb{N}$  (Scherer, 2003; Scherer, 2005; Oliveira e Peres, 2007; Oliveira et al., 2008) e de variáveis de folga com restrições estruturais para prover condições numericamente tratáveis (Duan et al., 2006; Lacerda et al., 2011).

**Teorema 1** *Se existirem matrizes simétricas  $P_k \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$ ,  $k \in \mathcal{K}_N(g)$ , matrizes  $K_{11_k} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $K_{21_k} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $k \in \mathcal{K}_N(h)$ ,  $H_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $Z_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ ,  $\hat{K}_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $C_{f_i} \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$ ,  $D_{f_i} \in \mathbb{R}^{n_z \times n_y}$ ,  $i = 1, \dots, \sigma$ , graus parciais  $g = (g_1, \dots, g_m)$ ,  $h = (h_1, \dots, h_m)$  com  $g_r$  e  $h_r \in \mathbb{N}$ , um grau  $d \in \mathbb{N}$  e um dado escalar  $\xi \in (-1, 1)$  tais que para  $i = 1, \dots, \sigma$ , as seguintes LMIs sejam asseguradas<sup>2</sup>*

$$\Xi_k = \sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}_N(\mathbb{1}d) \\ k \geq k'}} \frac{(d!)^m}{\pi(k')} (P_{i_{k-k'}}) > 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N(g + \mathbb{1}d) \quad (7)$$

$$\Theta_k + \Psi_k + \Phi_k > 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N(w) \quad (8)$$

<sup>2</sup>O símbolo  $\star$  representa um bloco simétrico na LMI.

com

$$\Theta_k = \sum_{\substack{k' \in \mathcal{K}_N(w-g-1) \\ k \geq k'}} \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}_N(1) \\ k \geq k' + \hat{k}}} \frac{\pi(w-g-1)!}{\pi(k')} \text{Diag} \left( -P_{i_{k-k'-\hat{k}}}, \Upsilon_i^{(\hat{k})} \mathcal{X}_{k-k'-\hat{k}}, 0, 0 \right), \quad (9)$$

$\Psi_k$  e  $\Phi_k$  dadas, respectivamente, por (10) e (11), em que  $w = \max\{g+1(d+1), h+1d\}$ , então

$$A_{f_i} = \hat{K}_i^{-1} H_i, \quad B_{f_i} = \hat{K}_i^{-1} Z_i, \quad C_{f_i} \quad \text{e} \quad D_{f_i} \quad (12)$$

são as matrizes do filtro assegurando a MSS robusta e um custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$ , dado por  $\gamma$ , para o sistema aumentado (4).

**Prova:** Primeiramente, note que o termo  $\Upsilon_i^{(\hat{k})} \mathcal{X}_{k-k'-\hat{k}}$  de (9) é equivalente ao somatório  $\sum_{i=1}^{\sigma} P_{ij}^{(\hat{k})} P_{i_{k-k'-\hat{k}}}$  e  $\prod_{r=1}^m \left( \sum_{t=1}^{N_r} \alpha_{rt} \right)^d = 1$  para qualquer  $d \in \mathbb{N}$ , então (7) pode ser reescrita como

$$\prod_{r=1}^m \left( \sum_{t=1}^{N_r} \alpha_{rt} \right)^d P_i(\alpha) = \sum_{k \in \mathcal{K}_N(g+1d)} \alpha^k \Xi_k, \quad i = 1, \dots, \sigma. \quad (13)$$

Em seguida, usando  $H_i, Z_i, \hat{K}_i, C_{f_i}, D_{f_i}, P_i(\alpha) = P_i^T(\alpha), P_{pi}(\alpha) = \sum_{j=1}^{\sigma} p_{ij}(\alpha) P_j(\alpha)$ ,

$$K_i(\alpha) = \begin{bmatrix} K_{11i}(\alpha) & \hat{K}_i \\ K_{21i}(\alpha) & \hat{K}_i \end{bmatrix}$$

e escolhendo

$$Q = \begin{bmatrix} -P_i(\alpha) & \star & \star & \star \\ 0 & P_{pi}(\alpha) & \star & \star \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & \star \\ \tilde{C}_i(\alpha) & 0 & \tilde{D}_i(\alpha) & -I \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} \tilde{A}_i(\alpha)^T \\ -I \\ \tilde{B}_i(\alpha)^T \\ 0 \end{bmatrix}^T, \quad N_U = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ \tilde{A}_i(\alpha) & \tilde{B}_i(\alpha) & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} \xi I \\ I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T, \quad N_V = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ \xi I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

em que  $N_U$  e  $N_V$  denotam bases arbitrárias do espaço nulo de  $U$  e  $V$  respectivamente, tem-se que

$$Q + U^T K_i(\alpha)^T V + V^T K_i(\alpha) U < 0 \quad (14)$$

que é (8), multiplicada por  $\alpha^k$ , somada para todo  $k \in \mathcal{K}_N(w)$ . Essas condições são equivalentes, pelo Lema da Projeção (Boyd et al., 1994; Gahinet e Apkarian, 1994), a

$$N_V^T Q N_V = \begin{bmatrix} -P_i(\alpha) + \xi^2 P_{pi}(\alpha) & \star & \star \\ 0 & -\gamma^2 I & \star \\ \tilde{C}_i(\alpha) & \tilde{D}_i(\alpha) & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

que permite inferir os limitantes para o parâmetro escalar  $\xi$ , pois somando o termo (1,1) de (15) para todo  $i \in \mathbb{K}$ , tem-se

$$\sum_{j=1}^{\sigma} \left( -1 + \xi^2 \sum_{i=1}^{\sigma} p_{ij}(\alpha) \right) P_j(\alpha) < 0 \Leftrightarrow \xi^2 < \frac{1}{\max_{j \in \mathbb{K}} S_j(\alpha)} \quad (16)$$

com  $S_j(\alpha) = \sum_{i=1}^{\sigma} p_{ij}(\alpha)$ . Sabe-se que

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{\sigma} \sum_{j=1}^{\sigma} p_{ij}(\alpha)}_{=1} = \sum_{j=1}^{\sigma} \sum_{i=1}^{\sigma} p_{ij}(\alpha) = \sum_{j=1}^{\sigma} S_j(\alpha) = \sigma. \quad (17)$$

Sendo assim, se pelo menos um somatório  $S_j(\alpha)$  for menor que 1, então existirá pelo menos um outro  $S_j(\alpha)$  maior do que 1, para que a relação mostrada em (17) seja válida. Como o intervalo de factibilidade do parâmetro  $\xi$  (16) depende do máximo de  $S_j(\alpha)$  tem-se que

$$\max_{j \in \mathbb{K}} S_j(\alpha) > 1 \Rightarrow \xi^2 < \frac{1}{\max_{j \in \mathbb{K}} S_j(\alpha)} < 1 \Rightarrow -1 < \xi < 1.$$

Para casos extremos em que a matriz de probabilidades de transição é totalmente desconhecida, a soma máxima dos elementos de uma mesma coluna de  $\Gamma(\alpha)$  é  $\sigma$ . Então, a busca do melhor  $\xi$  pode ser restrita ao intervalo  $(-1/\sqrt{\sigma}, 1/\sqrt{\sigma})$ . Por fim, utilizando a segunda condição do Lema da Projeção,  $N_U^T Q N_U < 0$  e, em seguida, aplicando o complemento de Schur, obtém-se o *bounded real lemma* (6).  $\square$

Pode-se estender a condição do Teorema 1 para prover filtros parcialmente dependentes de modos (observação por *clusters* (do Val et al., 2002)). Com esse intuito, considere o conjunto  $\mathbb{Q} = \{1, 2, \dots, \sigma_c\}$ ,  $\sigma_c \leq \sigma$ , que contém os índices  $q$  dos *clusters*, e o conjunto  $\mathbb{U}_q$ , que agrupa os modos pertencentes ao *cluster*  $q$ , de forma que os *clusters* sejam grupos mutuamente exclusivos cuja união gera o conjunto dos modos  $\mathbb{K}$ . Em outras palavras,  $\mathbb{K} \equiv \cup_{q \in \mathbb{Q}} \mathbb{U}_q$  tal que  $\cap_{q \in \mathbb{Q}} \mathbb{U}_q \equiv \emptyset$ . O resultado é apresentado no corolário seguinte.

**Corolário 1** *Se as condições do Teorema 1 são satisfeitas com  $H_i, Z_i, \hat{K}_i, C_{f_i}$  e  $D_{f_i}$  substituídas por  $H_q, Z_q, \hat{K}_q, C_{f_q}$  e  $D_{f_q}$  para todo  $q \in \mathbb{Q}$  e  $i \in \mathbb{U}_q \subset \mathbb{K}$ , respectivamente, então  $A_{f_i} = \hat{K}_q^{-1} H_q, B_{f_i} = \hat{K}_q^{-1} Z_q, C_{f_i}$  e  $D_{f_i}$  são matrizes do filtro parcialmente dependentes dos modos. Adicionalmente,  $\gamma$  é um limitante superior para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema (4), garantindo a MSS.*

## 4 Exemplos Numéricos

Nesta seção, apresentam-se comparações numéricas entre a abordagem proposta neste artigo e outros

$$\Psi_k = \sum_{\substack{\check{k} \in \mathcal{X}_N(w-h) \\ k \geq \check{k}}} \frac{\pi(w-h)!}{\pi(\check{k})} \begin{bmatrix} \xi K_{11_{i_{k-\check{k}}}} A_i + \xi A_i^T K_{11_{i_{k-\check{k}}}}^T & * & * & * & * & * \\ \xi K_{21_{i_{k-\check{k}}}} A_i & 0 & * & * & * & * \\ K_{11_{i_{k-\check{k}}}} A_i - \xi K_{11_{i_{k-\check{k}}}}^T & -\xi K_{21_{i_{k-\check{k}}}}^T & -K_{11_{i_{k-\check{k}}}} - K_{11_{i_{k-\check{k}}}}^T & * & * & * \\ K_{21_{i_{k-\check{k}}}} A_i & 0 & -K_{21_{i_{k-\check{k}}}} & 0 & * & * \\ \xi E_i^T K_{11_{i_{k-\check{k}}}}^T & \xi E_i^T K_{21_{i_{k-\check{k}}}}^T & E_i^T K_{11_{i_{k-\check{k}}}}^T & E_i^T K_{21_{i_{k-\check{k}}}}^T & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\Phi_k = \frac{\pi(w)!}{\pi(k)} \begin{bmatrix} \xi Z_i C_{y_i} + \xi C_{y_i}^T Z_i^T & * & * & * & * & * \\ \xi H_i^T + \xi Z_i C_{y_i} & \xi H_i + \xi H_i^T & * & * & * & * \\ Z_i C_{y_i} & H_i & 0 & * & * & * \\ -\xi \hat{K}_i^T + Z_i C_{y_i} & -\xi \hat{K}_i^T + H_i & -\hat{K}_i^T & -\hat{K}_i - \hat{K}_i^T & * & * \\ \xi E_{y_i}^T Z_i^T & \xi E_{y_i}^T Z_i^T & E_{y_i}^T Z_i^T & E_{y_i}^T Z_i^T & -\gamma^2 \mathbf{I} & * \\ C_{z_i} - D_{f_i} C_{y_i} & -C_{f_i} & 0 & 0 & E_{z_i} - D_{f_i} E_{y_i} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (11)$$

métodos da literatura. Todas as rotinas foram implementadas em Matlab, versão 7.10 (R2010a) usando Yalmip (Löfberg, 2004) e SeDuMi (Sturm, 1999). Utilizou-se um computador AMD Phenon (TM) II X6 1090T (3.2GHz), 4GB RAM, com Windows 7.

*Exemplo 1*

O objetivo desse exemplo é projetar filtros  $\mathcal{H}_\infty$  dependentes de modo (DM) e independentes de modo (IM), próprios (P) e estritamente próprios (EP) para um MJLS discreto considerando quatro tipos de matrizes de probabilidades de transição incertas: Completamente Conhecida (CC), Parcialmente Conhecida Caso 1 (C1), Parcialmente Conhecida Caso 2 (C2) e Completamente Desconhecida (CD). Os dados numéricos podem ser encontrados em Zhang e Boukas (2009a).

Na Tabela 1, comparam-se os custos garantidos  $\mathcal{H}_\infty$  obtidos com o Teorema 1 (T1) e o Corolário 1 (C1) propostos neste artigo com o Teorema 1 de Zhang e Boukas (2009a) (ZB). Nota-se que o Teorema 1 e o Corolário 1 podem prover menores níveis de atenuação da norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Além disso, mesmo no caso em que projetam-se filtros estritamente próprios independentes de modos, os resultados obtidos com o Corolário 1 são melhores do que os resultados de Zhang e Boukas (2009a) para o projeto de filtros próprios dependentes de modos, enfatizando a superioridade da abordagem proposta.

*Exemplo 2*

Considere o MJLS com dois modos de operação (de Souza, 2003), cujas matrizes do sistema são dadas por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.33 \\ 1 & 1.40 \end{bmatrix}, \\ E_1 = E_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Tabela 1: Custos garantidos  $\mathcal{H}_\infty$  dos filtros dependentes de modo (DM) e independentes de modo (IM), próprios (P) e estritamente próprios (EP) para o Exemplo 1 projetados com o Teorema 1 (T1), o Corolário 1 (C1), ambos com  $d = g = h = \xi = 0$ , e o Teorema 1 (ZB) de (Zhang e Boukas, 2009a).

Método		CC	C1	C2	CD	
DM	P	ZB	1.855	3.821	4.729	4.462
		T1	1.189	1.642	1.644	3.810
	EP	T1	1.246	1.755	1.756	3.812
IM	P	C1	1.236	1.736	1.762	4.025
	EP	C1	1.292	1.869	1.901	4.342

$$C_{z1} = C_{z2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{z1} = E_{z2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ C_{y1} = C_{y2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{y1} = E_{y2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e com matriz de transição de probabilidades pertencente ao politopo de dois vértices,

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.50 & 0.50 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.15 \\ 0.30 & 0.70 \end{bmatrix}.$$

O menor limitante superior para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  obtida com o filtro estritamente próprio independente de modo projetado com o Teorema 3.3 de (de Souza, 2003) é  $\gamma = 9.8247$ . O resultado obtido pelo Teorema 3 de (Gonçalves et al., 2011) é  $\gamma = 7.8252$ . Usando Corolário 1, com  $d = g = \xi = 0$ , o valor do custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  é igual a  $\gamma = 7.8171$ . Este resultado pode ser melhorado aumentando os graus da matriz de Lyapunov. Por exemplo, empregando  $g = 1$ , o Corolário 1 provê  $\gamma = 7.2940$  com as seguintes matrizes para o filtro

$$A_f = \begin{bmatrix} -1.362 & -0.562 \\ 2.416 & 0.909 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} -1.067 \\ 1.927 \end{bmatrix}, \\ C_f = \begin{bmatrix} 0 & -1.000 \end{bmatrix}.$$

Embora as condições apresentadas em de Souza (2003) tratem apenas do projeto de filtros estritamente

próprios, o Teorema 3 de Gonçalves et al. (2011) e a técnica proposta neste artigo são capazes de projetar filtros próprios, que podem reduzir o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$ . Neste caso, o Teorema 3 de Gonçalves et al. (2011) provê um filtro próprio com  $\gamma = 5.968$ , enquanto o Corolário 1 com  $h = d = \xi = 0$  e  $g = 1$  produz um limitante  $\mathcal{H}_\infty$  igual a 5.610, sendo as matrizes do filtro dadas por

$$A_f = \begin{bmatrix} -1.220 & -0.523 \\ 2.491 & 1.066 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} -0.991 \\ 1.701 \end{bmatrix}, \\ C_f = [-2.323 \quad -1.000], \quad D_f = -2.323.$$

### Exemplo 3

Considere o seguinte exemplo adaptado de de Souza e Fragoso (2003) (com um parâmetro adicional  $\beta$ ) cujas matrizes do sistema são

$$A_1 = \begin{bmatrix} \beta & 5.2529 \times 10^{-2} \\ 1.5146 \times 10^{-3} & 1.1022 \end{bmatrix}, \\ A_2 = \begin{bmatrix} 0.9955 & 4.9660 \times 10^{-2} \\ -0.2669 & 0.8075 \end{bmatrix}, \\ E_1 = E_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_{z1} = C_{z2} = [0 \quad 1], \quad E_{z1} = E_{z2} = [0 \quad 0], \\ C_{y1} = C_{y2} = [-1 \quad 1], \quad E_{y1} = E_{y2} = [0 \quad 1],$$

e a matriz de probabilidades de transição completamente conhecida é dada por

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

Com respeito ao projeto de filtros estritamente próprios e independentes de modo, fixando  $\beta = 1$ , as condições LMIs apresentadas em de Souza e Fragoso (2003) são infactíveis, enquanto a abordagem utilizada em Gonçalves et al. (2011) provê um custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  de 25.137. Por outro lado, o Corolário 1 fornece 22.550 com  $\xi = g = h = d = 0$ . Melhores resultados podem ser alcançados realizando uma busca no parâmetro escalar como pode ser visto na Figura 1. Por exemplo, o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  encontrado pelo Corolário 1 para  $\xi = -0.4$  é 21.509 ( $g = h = d = 0$ ), com as seguintes matrizes para o filtro

$$A_f = \begin{bmatrix} 0.401 & 0.753 \\ 0.491 & 0.243 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} 0.690 \\ -0.696 \end{bmatrix}, \quad (18) \\ C_f = [-0.033 \quad -1.001]^T.$$

Considere que  $\beta$  possa assumir valores fixos no intervalo  $[-1.0, -0.8]$ . Assim, pretende-se avaliar a redução do conservadorismo do Corolário 1 com a variação do parâmetro escalar  $\xi$ . Com este objetivo, foram testados 19 valores no intervalo  $[-0.9, 0.9]$  igualmente espaçados. Na Figura 2, apresenta-se uma comparação entre os valores do custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  obtido com a abordagem apresentada em Gonçalves et al. (2011) (curva em azul – GFG:11),

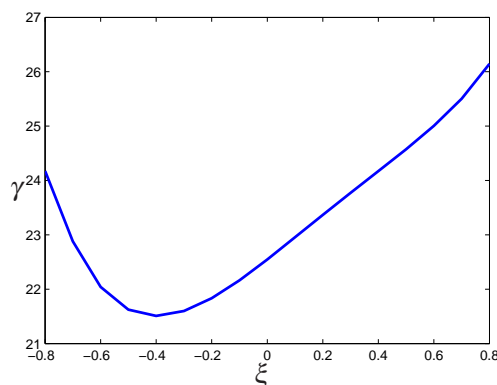


Figura 1: Custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  ( $\gamma$ ) versus parâmetro escalar ( $\xi$ ) para o Exemplo 3 com  $\beta = 1$  obtido com o Corolário 1 com  $g = h = d = 0$ .

o Corolário 1 com  $\xi = 0$  (curva em vermelho – C1) e o Corolário 1 com busca em  $\xi$  (curva em preto – C1\*), ambos com  $g = h = d = 0$ . Como pode ser observado na figura, a busca no parâmetro escalar  $\xi$ , embora aumente a complexidade computacional, permite fornecer resultados com menores níveis de atenuação da norma  $\mathcal{H}_\infty$ .

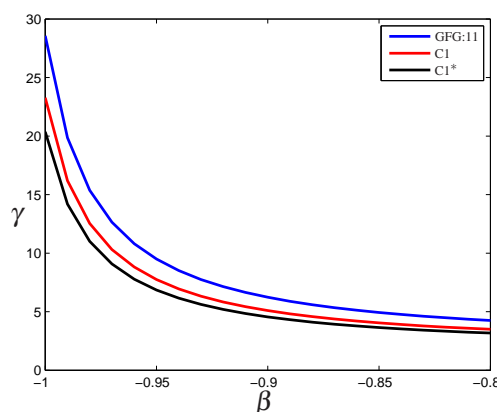


Figura 2: Comparação entre os valores do custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  ( $\gamma$ ) para o Exemplo 3 com  $\beta$  variando entre  $[-1.0, -0.8]$  obtidos com a abordagem apresentada em Gonçalves et al. (2011) (curva em azul – GFG:11), o Corolário 1 com  $\xi = 0$  (curva em vermelho – C1) e o Corolário 1 com busca em  $\xi$  (curva em preto – C1\*), ambos com  $g = h = d = 0$ .

## 5 Conclusões

Este artigo investigou o problema de filtragem  $\mathcal{H}_\infty$  para MJLS discretos no tempo com matriz de probabilidades de transição incerta. Explorando convenientemente a representação multi-simplex da matriz de probabilidade conseguiu-se trabalhar com diferentes tipos de incerteza de maneira sistemática. Diferentemente de outras abordagens existentes na literatura,

foram apresentadas relaxações LMIs baseadas em polinômios homogêneos de graus arbitrários. Os experimentos numéricos ilustraram as vantagens do método proposto, o qual possibilita o projeto de filtros com menores níveis de atenuação  $\mathcal{H}_\infty$ , em comparação com outras técnicas disponíveis na literatura, ao custo do aumento dos graus nas variáveis de decisão e da realização de uma busca no parâmetro escalar.

### Agradecimentos

Às agências CAPES, CNPq e FAPESP (Processos 2011/08312-6 e 2014/03669-1).

### Referências

- Bliman, P.-A. (2004). An existence result for polynomial solutions of parameter-dependent LMIs, *Syst. Control Letts.* **51**(3-4): 165–169.
- Boukas, E. K. (2009).  $\mathcal{H}_\infty$  control of discrete-time Markov jump systems with bounded transition probabilities, *Optim. Control Appl. Meth.* **30**(5): 477–494.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. e Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA.
- Costa, O. e do Val, J. (1996). Full information  $\mathcal{H}_\infty$ -control for discrete-time infinite markov jump parameter systems, *J. Math. Anal. Appl.* **202**(2): 578–603.
- Costa, O. L. V., Assumpção Filho, E. O., Boukas, E. K. e Marques, R. P. (1999). Constrained quadratic state feedback control of discrete-time Markovian jump linear systems, *Automatica* **35**(4): 617–626.
- Costa, O. L. V. e Fragoso, M. D. (1993). Stability results for discrete-time linear systems with Markovian jumping parameters, *J. Math. Anal. Appl.* **179**: 154–178.
- Costa, O. L. V., Fragoso, M. D. e Marques, R. P. (2005). *Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems*, Springer-Verlag, New York, NY, USA.
- de Souza, C. (2003). A mode-independent  $\mathcal{H}_\infty$  filter design for discrete-time Markovian jump linear systems, *Proc. 42nd IEEE Conf. Decision Control*, Vol. 3, pp. 2811–2816.
- de Souza, C. E., Barbosa, K. A. e Trofino, A. (2006). Robust  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for discrete-time linear systems with uncertain time-varying parameters, *IEEE Trans. Signal Process.* **54**(6): 2110–2118.
- de Souza, C. E. e Fragoso, M. D. (2003).  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for discrete-time linear systems with Markovian jumping parameters, *Int. J. Robust Nonlinear Control* **13**(14): 1299–1316.
- de Souza, C. E., Trofino, A. e Barbosa, K. A. (2006). Mode-independent  $\mathcal{H}_\infty$  filters for Markovian jump linear systems, *IEEE Trans. Autom. Control* **51**(11): 1837–1841.
- do Val, J. B. R., Geromel, J. C. e Gonçalves, A. P. (2002). The  $\mathcal{H}_2$ -control for jump linear systems: cluster observations of the Markov state, *Automatica* **38**(2): 343–349.
- Duan, Z. S., Zhang, J. X., Zhang, C. S. e Mosca, E. (2006). Robust  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for uncertain linear systems, *Automatica* **42**(11): 1919–1926.
- Gahinet, P. e Apkarian, P. (1994). A linear matrix inequality approach to  $\mathcal{H}_\infty$  control, *Int. J. Robust Nonlinear Control* **4**(4): 421–448.
- Gonçalves, A. P. C., Fioravanti, A. R. e Geromel, J. C. (2011). Filtering of discrete-time Markov jump linear systems with uncertain transition probabilities, *Int. J. Robust Nonlinear Control* **21**(6): 613–624.
- Gonçalves, A. P. C., Fioravanti, A. R. e Geromel, J. C. (2012).  $\mathcal{H}_\infty$  robust and networked control of discrete-time MJLS through LMIs, *J. Franklin Inst.* **349**(6): 2171–2181.
- Gonçalves, A. P., Fioravanti, A. R. e Geromel, J. C. (2009).  $\mathcal{H}_\infty$  filtering of discrete-time Markov jump linear systems through linear matrix inequalities, *IEEE Trans. Autom. Control* **54**(6): 1347–1351.
- Lacerda, M. J., Leite, V. J. S., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2013). Delay-dependent robust  $\mathcal{H}_\infty$  filter design for state-delayed discrete-time linear systems via homogeneous polynomial matrices, *IET Control Theory & Appl.* **7**(1): 125–135.
- Lacerda, M. J., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2011). Robust  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  filter design for uncertain linear systems via LMIs and polynomial matrices, *Signal Process.* **91**(5): 1115–1122.
- Li, H. e Shi, Y. (2012). Robust  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for nonlinear stochastic systems with uncertainties and Markov delays, *Automatica* **48**(1): 159–166.
- Li, P., Lam, J. e Chesi, G. (2012). On the synthesis of linear  $\mathcal{H}_\infty$  filters for polynomial systems, *Syst. Control Letts.* **61**(1): 31–36.
- Löfberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *Proc. 2004 IEEE Int. Symp. on Comput. Aided Control Syst. Des.*, Taipei, Taiwan, pp. 284–289. <http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/>.

- Luan, X., Liu, F. e Shi, P. (2010). Finite-time filtering for non-linear stochastic systems with partially known transition jump rates, *IET Control Theory & Appl.* **4**(5): 735–745.
- Morais, C. F., Braga, M. F., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2013).  $\mathcal{H}_2$  control of discrete-time Markov jump linear systems with uncertain transition probability matrix: improved linear matrix inequality relaxations and multi-simplex modeling, *IET Control Theory & Appl.* **7**: 1665–1674.
- Oliveira, R. C. L. F., Bliman, P.-A. e Peres, P. L. D. (2008). Robust LMIs with parameters in multi-simplex: Existence of solutions and applications, *Proc. 47th IEEE Conf. Decision Control*, Cancun, Mexico, pp. 2226–2231.
- Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2007). Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations, *IEEE Trans. Autom. Control* **52**(7): 1334–1340.
- Scherer, C. W. (2003). Higher-order relaxations for robust LMI problems with verifications for exactness, *Proc. 42nd IEEE Conf. Decision Control*, Maui, HI, USA, pp. 4652–4657.
- Scherer, C. W. (2005). Relaxations for robust linear matrix inequality problems with verifications for exactness, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **27**(2): 365–395.
- Seiler, P. e Sengupta, R. (2003). A bounded real lemma for jump systems, *IEEE Trans. Autom. Control* **48**(9): 1651–1654.
- Sturm, J. F. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optim. Method Softw.* **11**(1–4): 625–653. <http://sedumi.ie.lehigh.edu/>.
- Zhang, L. e Boukas, E. K. (2009a). Mode-dependent  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for discrete-time Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities, *Automatica* **45**(6): 1462–1467.
- Zhang, L. e Boukas, E. K. (2009b). Stability and stabilization of Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities, *Automatica* **45**(2): 463–468.