Controle II

Márcio J. Lacerda

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade Federal de São João del-Rei

2º Semestre 2016

- P_3 (100 pontos) - 14 de Fevereiro (Noturno) - 15 de Fevereiro (Integral).
- E Exame (100 pontos) - 16 de Fevereiro.

Lembrando que: a avaliação é baseada em três provas P_1, P_2 e P_3. A média é calculada por

$$M = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{3} \tag{1}$$

$M \geq 60$, aprovado.

$M < 40$, reprovado.

$40 < M < 60$, Exame (Matéria toda!).

$$NF = \frac{M+E}{2}$$

$NF \geq 60$, aprovado, $NF < 60$, reprovado

Pontos de Equilíbrio

- Dizemos que x_e é um ponto de equilíbrio do sistema $\dot{x} = Ax(t)$ se, uma vez que a trajetória de estado $x(t)$, $t \geq 0$ atinja x_e, o estado do sistema permanece em x_e indefinidamente.

- Se x_e é um ponto de equilíbrio do sistema $\dot{x} = Ax(t)$, então existe um tempo $t = t_e$ no qual $x(t_e) = x_e$ para todo $t \geq t_e$. Dessa forma, $\dot{x}(t_e) = Ax(t_e) = Ax_e = 0$ e os pontos de equilíbrio são tais que $Ax_e = 0$.

- Pontos de equilíbrio são soluções constantes de $\dot{x} = Ax(t)$, no sentido de que $x(t) = x_e$, $t \geq 0$ se $x(0) = x_e$. A origem do espaço de estados é sempre um ponto de equilíbrio do sistema. A origem é o único ponto de equilíbrio do sistema se A for uma matriz não singular. O sistema possui infinitos pontos de equilíbrio se A for singular, pois neste caso $Ax_e = 0$ admite infinitas soluções.

Exemplo

Considere a equação diferencial de segunda ordem que representa um duplo integrador: $\ddot{x} = u(t)$. Definindo $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$, a representação de estados correspondente seria:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Pontos de equilíbrio:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_e = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

em que α é qualquer valor real.

Estabilidade assintótica

- Dizemos que um ponto de equilíbrio do sistema dinâmico representado por $\dot{x} = Ax$ é assintoticamente estável se

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$$

qualquer que seja a condição inicial $x(0)$. A quantidade $\|x(t) - x_e\|$ e uma medida da distância entre um ponto qualquer da trajetória do sistema iniciada em $x(0)$ e o ponto de equilíbrio x_e.

$$\|x(t) - x_e\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i(t) - x_{ie})^2}$$

- $\|x(t) - x_e\| = 0$ se e somente se $x(t) = x_e$. Diferentes condições iniciais produzem diferentes trajetórias.

A análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio de um sistema linear depende apenas da análise da estrutura de autovalores-autovetores da matriz de estados A. Para verificar essa propriedade, representaremos a matriz A por meio da sua forma de Jordan $A = T\Lambda_J T^{-1}$ e dessa forma tem-se $\exp(At) = T\exp(\Lambda_J)T^{-1}$.

Exemplo

Para a forma de Jordan:

$$\Lambda_J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Exemplo

A matriz exponencial $\exp(\Lambda_J t)$ é dada por

$$\exp(\Lambda_J t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{1}{2}t^2 e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} & te^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix}$$

Um elemento genérico de $\exp(\Lambda_J t)$ é da forma $t^k e^{\lambda t}$, com $\lambda = \sigma + j\omega$, sendo σ a parte real e ω a parte imaginária do autovalor λ. Logo pode-se escrever

$$t^k e^{\lambda t} = t^k e^{\sigma t} e^{j\omega t} \tag{2}$$

Se $\sigma < 0$, (2) tende a zero quando $t \to \infty$ independente do valor de k. Dessa forma é possível enunciar a seguinte condição:

Teorema 1

A origem do sistema dinâmico $\dot{x} = Ax(t)$ é assintoticamente estável se e somente se as partes reais dos autovalores de A são estritamente negativas.

De fato, se as partes reais dos n autovalores de A são negativas, todos os elementos da matriz $\exp(\Lambda_J t)$ tendem a zero quando $t \to \infty$ e $\exp(\Lambda_J t)$ tende à matriz nula. Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \|x(t) - 0\| &= \lim_{t\to\infty} \| T \exp(\Lambda_J t) T^{-1} x(0) - 0\| \\ &= \| T 0 T^{-1} x(0)\| \\ &= 0\end{aligned}$$

para qualquer condição inicial $x(0)$. Portanto, a origem do sistema é assintoticamente estável.

Se pelo menos um autovalor de A possui parte real positiva, a matriz $\exp(\Lambda_J t)$ contem pelo menos um elemento da forma $t^k e^{\lambda t}$ cujo valor cresce indefinidamente quando $t \to \infty$. Nesse caso, qualquer ponto de equilíbrio será instável, pois sempre poderemos escolher uma condição inicial $x(0)$ de tal forma que

$$\|x(t) - x_e\| = \|T \exp(\Lambda_J t) T^{-1} x(0) - 0\| \to \infty$$

quando $t \to \infty$, qualquer que seja o ponto de equilíbrio considerado.

Se um autovalor ou mais possuirem parte real nula deve-se proceder uma análise mais detalhada.

Caso 1: Se as multiplicidades algébricas e geométricas dos autovalores com partes reais nulas são iguais a matriz $\exp(\Lambda_J t)$ é diagonal.

Os elementos associados aos autovalores com partes reais nulas são genericamente da forma $e^{j\omega t}$, fazendo com que $\exp(\Lambda_J t)$ tenda a:

1. uma matriz constante se as partes imaginárias também forem nulas.
2. uma matriz periódica se uma ou mais das partes imaginárias forem diferentes de zero.

Assim, para cada condição inicial, a trajetória de estados $x(t) = T\exp(\Lambda_J t)T^{-1}x(0)$ tende a um ponto ou a uma curva periódica no espaço de estados, qualquer que seja a condição inicial $x(0)$. Nesse caso dizemos que o sistema é marginalmente estável.

Caso 2: Se a multiplicidade geométrica de pelo menos um autovalor com parte real nula for menor que sua multiplicidade algébrica, a matriz $\exp(\Lambda_J t)$ conterá elementos da forma $te^{j\omega t}$, os quais (para qualquer ω) assumirão valores arbitrariamente grandes quando $t \to \infty$. Neste último caso, o sistema será instável, pois uma escolha apropriada da condição inicial fará a trajetória de estado se afastar indefinidamente de qualquer ponto de equilíbrio.

Exemplo

Assuma que a matriz A de um sistema hipotético seja descrita por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

A equação característica $\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - a_{12}a_{21} = 0$. 4 cenários possíveis nesse caso:

1. $a_{12}a_{21} > 0$
2. $a_{12}a_{21} < 0$
3. $a_{12} = a_{21} = 0$
4. $a_{12} = 0,\ a_{21} \neq 0$

Compute os autovalores para cada um dos cenários e classifique o sistema quanto a sua estabilidade.

Relação com estabilidade entrada-saída

Considere o sistema LIT, SISO descrito por

$$\dot{v} = Av + bx, \quad y = cv + dx$$

A função de transferência é dada por

$$H(s) = c(sI - A)^{-1}b + d$$

- Todo polo de $H(s)$ é também autovalor de A. Portanto, a estabilidade assintótica implica em estabilidade entrada-saída (BIBO estabilidade).
- Nem sempre todos os autovalores de A são polos de $H(s)$ pois pode haver cancelamento de polos e zeros. Portanto, a BIBO estabilidade não necessariamente implica em estabilidade assintótica do estado.

Como a matriz inversa de $(sI - A)$ pode ser escrita na forma

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}$$

na qual $\text{adj}(sI - A)$ denota a matriz adjunta de $(sI - A)$, obtemos

$$G(s) = \frac{c\,\text{adj}(sI - A)b + \det(sI - A)d}{\det(sI - A)}$$

em que

$$N(s) = c\,\text{adj}(sI - A)b + \det(sI - A)d, \quad D(s) = \det(sI - A)$$

representam os polinômios do numerador e do denominador de $G(s)$. As raízes de $D(s)$ são os autovalores da matriz A. Se $N(s) = 0$ e $D(s) = 0$ não possuem raízes comuns, então $G(s) = H(s)$ caracteriza a função de transferência do ssitema.

Transformações de similaridade

Diferentes representações por variáveis de estado de um mesmo sistema estão relacionadas por meio de transformações de similaridade. Se

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

é uma dada representação do sistema e definimos $x = T\tilde{x}$, T não singular, obtemos

$$\begin{aligned} T\dot{\tilde{x}} &= AT\tilde{x} + Bu \\ y &= CT\tilde{x} + Du \end{aligned}$$

como T é não-singular

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= T^{-1}AT\tilde{x} + T^{-1}Bu \\ y &= CT\tilde{x} + Du \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}\tilde{x} + \tilde{D}u \end{aligned}$$

com $\tilde{A} = T^{-1}AT$, $\tilde{A} = T^{-1}B$, $\tilde{C} = CT$, $\tilde{D} = D$.

Sejam $G(s)$ e $\tilde{G}(s)$ as funções de transferência do sistema quando representados pelos estados x e $\tilde{x}$ respectivamente. Por definição:

$$
\begin{aligned}
\tilde{G}(s) =& \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D} \\
=& CT(sI - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B + D \\
=& CT\left[T^{-1}(sI - A)T\right]^{-1}T^{-1}B + D \\
=& CTT^{-1}(sI - A)^{-1}TT^{-1}B + D \\
=& C(sI - A)^{-1}B + D \\
=& G(s)
\end{aligned}
$$

Diferentes representações por variáveis de estado estão relacionadas por transformações de similaridade e a estrutura de autovalores e autovetores do sistema é preservada sempre que se passa de uma representação para outra. Algumas transformações de similaridade são especialmente úteis porque evidenciam propriedades importantes do sistema, tanto do ponto de vista de análise quanto de projeto. Entre estas, encontram-se transformações que levam a formas canônicas, como as formas canônicas controláveis e observáveis.

Controlabilidade

A equação de estados de um sistema dinâmico linear invariante no tempo representado por meio de n variáveis de estado é

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0$$

As matrizes A e B, assim como a condição inicial x_0 são quantidades conhecidas. A solução geral da equação de estados é, como sabemos,

$$x(t) = e^{At}x_o + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \quad t \geq 0$$

A controlabilidade de um sistema está relacionada a existência de entradas de controle capazes de transferir um sistema de um estado inicial qualquer para um estado final qualquer. Buscamos caracterizar sob quais condições existe um tempo finito t_f e uma entrada $u(t)$, $0 \leq t \leq t_f$ tais que

$$x^* = e^{At_f}x_o + \int_0^{t_f} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau,$$

para quaisquer estados inicial x_0 e final $x^* = x(t_f)$ especificados.

Definição 1

O sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ é (completamente) controlável se para x_0 (estado inicial) e x^* (estado final) quaisquer, existe um tempo finito t_f e uma entrada $u(t)$, $0 \leq t \leq t_f$ tais que $x(t_f) = x^*$

A controlabilidade completa implica na existência de uma trajetória ligando dois pontos (estado inicial e estado final), quaisquer do espaço de estados. A controlabilidade é uma propriedade relacionada apenas às matrizes A e B.

Teorema 2

O sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ é controlável se e somente se o rank da matriz de controlabilidade

$$\mathscr{C} = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

for igual a n.

No caso de sistemas SISO, a matriz de controlabilidade $\mathscr{C}$ é uma matriz quadrada de ordem n e a condição de $\text{rank}(\mathscr{C}) = n$ é equivalente a $\det(\mathscr{C}) \neq 0$.

Realimentação de estados

É a principal estratégia para o controle de sistemas modelados através de variáveis de estado. Pressupõe-se que todos os estados do sistema estão acessíveis para realimentação. Deseja-se obter um comportamento regulador para o sistema, no sentido de que seu estado tenda de forma pré-determinada, ao estado de equilíbrio $x^* = 0$, a partir de qualquer estado inicial $x(0) \neq 0$. A entrada de controle no instante t assume a forma

$$u(t) = -k_1x_1(t) - k_2x_2(t) - \ldots - k_nx_n(t)$$

onde $k_1, k_2, \ldots, k_n$ são os ganhos de realimentação constantes a serem determinados. Definindo a matriz de ganhos de realimentação K como

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \ldots & k_n \end{bmatrix},$$

a entrada de controle pode ser reescrita na forma matricial como $u(t) = -Kx(t)$.

Quando a entrada $u(t) = -Kx(t)$ é substituída na equação de estado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

obtemos a equação em malha fechada

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t)$$

A aplicação da transformada de Laplace a ambos os lados da equação anterior com condição inicial $x(0)$ permite caracterizar o estado do sistema na forma

$$X(s) = (sI - A + BK)^{-1}x(0) = \frac{\text{adj}(sI - A + BK)}{\det(sI - A + BK)}x(0)$$

O estado, assim como a saída do sistema, é fundamentalmente influenciado pelas raízes da equação característica de malha fechada $\det(sI - A + BK) = 0$, isto é, pelos autovalores de $A - BK$. Os autovalores de $A - BK$ serão quase sempre os pólos do sistema em malha fechada.

Alocação de pólos

O princípio da técnica de controle por alocação de pólos é casar o polinômio característico de malha fechada $\det(sI - A + BK)$ com um certo polinômio $p_c(s)$. As raízes de $p_c(s) = 0$ representam os pólos de malha fechada responsáveis pelo comportamento desejado para os estados (saída) do sistema. Resolvemos então a seguinte equação algébrica em termos de K, dados A, B e $p_c(s)$:

$$\det(sI - A + BK) = p_c(s)$$

Se o sistema for controlável, qualquer conjunto de pólos de malha fechada especificado pode ser alocado.

Teorema 3

Assuma que o sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ seja controlável. Então, existe uma matriz K tal que

$$det(sI - A + BK) = p_c(s)$$

para qualquer polinômio $p_c(s)$ de grau n especificado.

A determinação de K pode ser feita igualando-se os coeficientes do polinômio $\det(sI - A + BK)$, os quais serão funções de $k_1, k_2, \ldots, k_n$, com os coeficientes de mesmo grau do polinômio $p_c(s)$, cujas raízes são os pólos desejados de malha fechada. Desta forma, obtemos um sistema de n equações lineares e n incógnitas $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$.

Exemplo

Considere a equação de estado representada pelas matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de A é $\det(sI - A) = s^2 + 3s + 2$. Os pólos do sistema em malha aberta (raízes da equação característica) são -1 e -2. Supondo que os polos de malha fechada devam ter fator de amortecimento $\xi = 0.5$ e frequencia natural $\omega_n = 4\text{rad/s}$, desejamos então que o polinômio característico de malha fechada seja

$$p_c(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 4s + 16$$

Exemplo

Por outro lado,

$$\det(sI - A + BK) = \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}\right)$$

Efetuando as operações indicadas,

$$\begin{aligned} \det(sI - A + BK) &= \det\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ (2+k_1) & s+(3+k_2) \end{bmatrix}\right) \\ &= s\,[s+(3+k_2)] + (2+k_1) \\ &= s^2 + (3+k_2)s + (2+k_1) \end{aligned}$$

Da identidade $\det(sI - A + BK) = p_c(s)$ obtemos um sistema com duas equações lineares e duas incógnitas

$$3 + k_2 = 4$$
$$2 + k_1 = 16$$

Logo $k_1 = 14,\ k_2 = 1$

Exemplo

Considere a equação de estado representada pelas matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Verifique o polinômio característico do sistema em malha fechada $A - BK$. O que pode ser observado nesse caso?

Forma canônica controlável

A forma canônica controlável associada à função de transferência

$$G(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

é

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_n & b_1 - a_1 b_n & \ldots & b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{bmatrix} x + b_n u$$

A matriz de estados A encontra-se numa forma denominada de forma companheira, a partir da qual podemos obter facilmente o polinômio característico de A:

$$\det(sI - A) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

Supondo realimentação de estados $u = -Kx$, a matriz de estados do sistema em malha fechada pode ser escrita como

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -(a_0 + k_1) & -(a_1 + k_2) & -(a_2 + k_3) & \dots & -(a_{n-1} + k_n) \end{bmatrix}$$

Como $A-BK$ também se encontra numa forma companheira, o polinômio característico do sistema em malha fechada é

$$\det(sI-A+BK)=s^n+(a_{n-1}+k_n)s^{n-1}+\ldots+(a_1+k_2)s+(a_0+k_1)$$

Definindo o polinômio desejado como

$$p_c(s)=s^n+q_{n-1}s^{n-1}+\ldots+q_1s+q_0$$

na identidade $\det(sI-A+BK)=p_c(s)$ resulta em um sistema de n equações lineares e n incógnitas, que quando resolvido fornece os ganhos de realimentação:

$$\begin{aligned} k_1 &= q_0-a_0 \\ k_2 &= q_1-a_1 \\ &\vdots \\ k_n &= q_{n-1}-a_{n-1} \end{aligned}$$

Exemplo

Note que no exemplo analisado anteriormente

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

as matrizes encontram-se na forma canônica controlável. Assim, $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $q_0 = 16$ e $q_1 = 4$. Logo os ganhos podem ser obtidos diretamente:

$$k_1 = q_0 - a_0 = 16 - 2 = 14$$
$$k_2 = q_1 - a_1 = 4 - 3 = 1$$

Fórmula de Ackerman

Considere o sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

em que $u = -Kx$ é o controle por realimentação de estados. Vamos supor que o sistema seja completamente controlável. Vamos supor também que os polos desejados de malha fechada estejam em $s = \mu_1$, $s = \mu_2$, ..., $s = \mu_n$. O uso do controle por realimentação de estados modifica a equação do sistema para

$$\dot{x} = (A - BK)x$$

vamos definir $\tilde{A} = A - BK$. Logo a equação característica desejada é

$$\begin{aligned} \|sI - A + BK\| = \|sI - \tilde{A}\| &= (s - \mu_1)(s - \mu_2)\ldots(s - \mu_n) \\ &= s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0 \end{aligned}$$

Como o Teorema de Cayley-Hamilton estabelece que $\tilde{A}$ satisfaz sua própria equação característica, temos

$$\phi(\tilde{A}) = \tilde{A}^n + \alpha_1 \tilde{A}^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}\tilde{A} + \alpha_n I = 0 \tag{3}$$

A equação acima será usada na obtenção da fórmula de Ackerman. Para simplificar o procedimento vamos considerar o caso $n = 3$. O procedimento pode ser estendido para qualquer outro n, positivo e inteiro. Considere as identidades

$$\begin{aligned} I &= I \\ \tilde{A} &= A - BK \\ \tilde{A}^2 &= A^2 - ABK - BK\tilde{A} \\ \tilde{A}^3 &= A^3 - A^2BK - ABK\tilde{A} - BK\tilde{A}^2 \end{aligned}$$

Multiplicando as equações respectivamente por α_3, α_2, α_1 e α_0 onde $\alpha_0 = 1$ e somando os resultados, obtemos

$$\begin{aligned} &\alpha_3 I + \alpha_2\tilde{A} + \alpha_1\tilde{A}^2 + \tilde{A}^3 \\ &= \alpha_3 I + \alpha_2(A - BK) + \alpha_1(A^2 - ABK - BK\tilde{A}) + A^3 - A^2BK - ABK\tilde{A} - BK\tilde{A}^2 \\ &= \alpha_3 I + \alpha_2 A + \alpha_1 A^2 + A^3 - \alpha_2 BK - \alpha_1 ABK - \alpha_1 BK\tilde{A} - A^2BK - ABK\tilde{A} - BK\tilde{A}^2 \end{aligned}$$

Com relação à Equação (3), temos

$$\alpha_3 I + \alpha_2 \tilde{A} + \alpha_1 \tilde{A}^2 + \tilde{A}^3 = \phi(\tilde{A}) = 0$$

Temos também que

$$\alpha_3 I + \alpha_2 A + \alpha_1 A^2 + A^3 = \phi(A) \neq 0$$

Substituindo as duas equações no termo anterior, temos

$$\phi(\tilde{A}) = \phi(A) - \alpha_2 BK - \alpha_1 BK\tilde{A} - BK\tilde{A}^2 - \alpha_1 ABK - ABK\tilde{A} - A^2 BK$$

Como $\phi(\tilde{A}) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \phi(A) &= B(\alpha_2 K + \alpha_1 K\tilde{A} + K\tilde{A}^2) + AB(\alpha_1 K + K\tilde{A}) + A^2 BK \\ &= \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 K + \alpha_1 K\tilde{A} + K\tilde{A}^2 \\ \alpha_1 K + K\tilde{A} \\ K \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

Uma vez que o sistema é completamente controlável, a inversa da matriz de controlabilidade

$$\begin{bmatrix} B & AB & A^2 B \end{bmatrix}$$

existe.

Pré-multiplicando ambos os lados da Equação (4) pela inversa da matriz de controlabilidade, obtemos

$$\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}^{-1} \phi(A) = \begin{bmatrix} \alpha_2 K + \alpha_1 K\tilde{A} + K\tilde{A}^2 \\ \alpha_1 K + K\tilde{A} \\ K \end{bmatrix}$$

Pré-multiplicando ambos os lados da equação anterior por $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}^{-1} \phi(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 K + \alpha_1 K\tilde{A} + K\tilde{A}^2 \\ \alpha_1 K + K\tilde{A} \\ K \end{bmatrix} = K$$

que pode ser reescrita como

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}^{-1} \phi(A)$$

que fornece a matriz de ganho K de realimentação de estado requerida.

Para um n inteiro, positivo e arbitrário, temos

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}^{-1} \phi(A)$$

que é conhecida como fórmula de Ackermann para a determinação da matriz de ganho K de realimentação de estado.

Exemplo

Retomando o exemplo anterior e ignorando o fato de que o sistema se encontra na forma canônica controlável, compute o controlador usando a fórmula de Ackermann.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$p_c(s) = s^2 + 4s + 16$$

Observabilidade

A estratégia de controle por realimentação de estados pressupõe que todos os n estados do sistema estão disponíveis para realimentação, o que raramente ocorre em situações práticas. Conhecemos (medimos) em geral apenas a quantidade escolhida como saída do sistema. Para que seja possível implementar a realimentação de estados faz-se necessário estimar os estados internos do sistema. Vamos analisar a observabilidade de um sistema dinâmico linear invariante no tempo representado por meio de n variáveis de estado da seguinte forma

$$\dot{x} = Ax, \quad y = Cx$$

As matrizes A e C são quantidades conhecidas, mas não a condição inicial $x(0) = x_0$. Se x_0 fosse conhecida, então o estado do sistema em qualquer instante de tempo futuro também seria conhecido a partir da solução da equação de estados:

$$x(t) = e^{At}x_0, \quad t \geq 0$$

A ideia por trás do estudo de observabilidade é determinar x_0 através da saída do sistema

$$y(t) = Ce^{At}x_0, \quad t \geq 0$$

Definição 2

O sistema $\dot{x} = Ax$, $y = Cx$ é (completamente) observável se existe um tempo finito t_f tal que o conhecimento da saída $y(t)$ no intervalo $0 \leq t \leq t_f$ é suficiente para se determinar a condição inicial x_0

Teorema 4

O sistema $\dot{x} = Ax$, $y = Cx$ é (completamente) observável se e somente se o rank da matriz de observabilidade

$$\mathscr{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

for igual a n.

Como a matriz de observabilidade $\mathscr{O}$ é uma matriz quadrada de ordem n (sistema SISO), a condição de $\mathrm{rank}(\mathscr{O}) = n$ é equivalente a $\det(\mathscr{O}) \neq 0$[1].

[1] Exemplo do circuito

Estimador (observador) de estados

A realimentação de estados foi realizada considerando que todas as variáveis de estado estão disponíveis para realimentação. Na prática, nem sempre os estados estão acessíveis para realimentação. Os estados podem não estar disponíveis para conexão direta ou pode ser muito caro medir todos os estados do sistema. Neste caso, para aplicar a realimentação de estados, devemos projetar um dispositivo chamado observador de estados ou estimador de estados. Vamos apresentar o projeto de observadores de estado de ordem completa que tem a mesma dimensão do sistema original. Usamos o circunflexo sobre uma variável para denotar uma variável de estado estimada. Por exemplo, $x(t)$ é o estado real e sua estimativa é $\hat{x}(t)$.

Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y &= Cx(t) \end{aligned} \tag{5}$$

O problema é estimar $x(t)$ a partir de $u(t)$ e $y(t)$. O chamado estimador de ordem completa é descrito pela equação de estados estimados

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ &= (A - LC)\hat{x}(t) + Ly(t) + Bu(t) \end{aligned} \tag{6}$$

A dimensão do vetor de estados estimados $\hat{x}$ é a mesma do vetor de estados original $x(t)$. A equação do estimador possui duas entradas independentes $y(t)$ e $u(t)$. A diferença entre a saída medida da planta $y(t)$ e a saída do estimador $C\hat{x}(t)$ é ponderada pela matriz L, de dimensão $n \times 1$ denominada matriz de ganhos do estimador.

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}$$

O estimador possui duas entradas u e y e sua saída é o estado estimado. Vamos definir

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

como o erro entre o estado verdadeiro e o estado estimado. Derivando o erro temos

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)$$

Substituindo as equações do sistema original e do observador obtemos a seguinte equação dinâmica para o erro

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ &= Ax + Bu - [A\hat{x} + L(y - C\hat{x}) + Bu] \\ &= Ax - A\hat{x} - LCx + LC\hat{x} \\ &= (A - LC)(x - \hat{x}) \\ &= (A - LC)e, \quad e(0) = x(0) - \hat{x}(0)\end{aligned}$$

Considerando $\tilde{A} = (A - LC)$, a solução para a equação do erro é

$$e(t) = \exp(\tilde{A}t)e(0), \quad t \geq 0$$

Se todos os autovalores de $(A - LC)$ podem ser alocados arbitrariamente, então podemos controlar a taxa que $e(t)$ se aproxima de zero, ou de forma equivalente a rapidez com que o estado estimado se aproxima do estado real. Se todos autovalores de $(A - LC)$ possuem partes reais estritamente negativas, então $e(t) \to 0$ quando $t \to \infty$ qualquer que seja o erro inicial $e(0)$.

Para garantir que o observador funcione satisfatoriamente devemos atender inicialmente duas condições

1. O observador deve ser mais rápido do que a planta que ele tenta estimar. Se possível, todos os pólos do observador devem estar à esquerda dos polos da planta.
2. O observador deve funcionar bem para qualquer condição inicial de erro

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \neq 0$$

   É importante que as condições iniciais do observador sejam diferentes das condições iniciais da planta.

Para determinar L, usamos um procedimento análogo ao utilizado para a determinação do ganho de realimentação K. As raízes do polinômio característico de $A-LC$ determinam como $\hat{x}$ responde às entradas $y(t)$ e $u(t)$. A transformada de Laplace de (6) é dada por

$$\begin{aligned} \hat{X}(s) &= (sI-A+LC)^{-1}LY(s)+(sI-A+LC)^{-1}BU(s) \\ &= \frac{\text{adj}(sI-A+LC)}{\det(sI-A+LC)}LY(s)+\frac{\text{adj}(sI-A+LC)}{\det(sI-A+LC)}BU(s) \end{aligned}$$

Escolhemos as raízes desejadas para $\det(sI-A+LC)$ na forma de um polinômio $p_o(s)$ e em seguida resolvemos

$$\det(sI-A+LC) = p_o(s)$$

em termos de L. Se o sistema for observável, qualquer conjunto de pólos para o estimador pode ser alocado.

Teorema 5

Assuma que o sistema $\dot{x} = Ax, \quad y = Cx$ *seja observável. Então, existe uma matriz* L *tal que*

$$det(sI - A + LC) = p_o(s)$$

para qualquer polinômio $p_o(s)$ *de grau* n *especificado.*

A determinação de L pode ser feita igualando-se os coeficientes do polinômio $\det(sI - A + LC)$, os quais serão funções de $l_1, l_2, \ldots, l_n$, com os coeficientes de mesmo grau do polinômio $p_o(s)$, cujas raízes são os pólos desejados para o estimador. Desta forma, obtemos um sistema de n equações lineares e n incógnitas $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$.

Exemplo

Considere o sistema representado pelas matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Os pólos do sistema em malha fechada foram alocados por meio de realimentação de estados em $-2 \pm j2\sqrt{3}$. Escolhendo os pólos do estimador com constantes de tempo 5 vezes mais rápidas, $-10 \pm j2\sqrt{3}$, obtemos o polinômio característico para o estimador:

$$p_o(s) = (s + 10 - j2\sqrt{3})(s + 10 + j2\sqrt{3}) = s^2 + 20s + 112$$

Compute o ganho L do estimador.

Forma canônica observável

Assim como a forma canônica controlável, a forma canônica observável simplifica o cálculo dos ganhos do observador.
A forma canônica observável associada à função de transferência

$$G(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

é

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_n \\ b_1 - a_1 b_n \\ \vdots \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} x + b_n u$$

A matriz de estados A encontra-se numa forma denominada de forma companheira, a partir da qual podemos obter facilmente o polinômio característico de A:

$$\det(sI - A) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

Com o sistema representado na forma canônica observável a matriz $A-LC$ do estimador assume a forma

$$A-LC=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & -a_0\\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\\ \vdots\\ l_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & -(a_0+l_1)\\ 1 & 0 & \dots & 0 & -(a_1+l_2)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & -(a_{n-1}+l_n)\end{bmatrix}$$

Como $A-LC$ também se encontra numa forma companheira, o polinômio característico de $A-LC$ é

$$det(sI-A+LC)=s^n+(a_{n-1}+l_n)s^{n-1}+\ldots+(a_1+l_2)s+(a_0+l_1)$$

Definindo o polinômio desejado como

$$p_o(s) = s^n + q_{n-1}s^{n-1} + \ldots + q_1 s + q_0$$

da identidade $\det(sI - A + LC) = p_o(s)$ resulta em um sistema de n equações lineares a n incógnitas, que quando resolvido fornece os ganhos do estimador:

$$\begin{aligned} l_1 &= q_0 - a_0 \\ l_2 &= q_1 - a_1 \\ &\vdots \\ l_n &= q_{n-1} - a_{n-1} \end{aligned}$$

Fórmula de Ackermann

Com a mesma motivação que levou à fórmula de Ackermann para o cálculo dos ganhos de realimentação de estados, é possível mostrar que se o sistema não se encontra na forma canônica observável, mas é observável $\text{rank}(\mathscr{O}) = n$, existe uma transformação de similaridade que leva o sistema a ser representado na forma canônica observável.

Para um n inteiro, positivo e arbitrário, temos

$$L = \phi(A) \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

que é conhecida como fórmula de Ackermann para a determinação da matriz L de ganhos do estimador, em que

$$\phi(A) = A^n + qn - 1A^{n-1} + \ldots + q_1 A + q_0 I$$

e $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$ são os coeficientes do polinômio característico desejado para o observador.

Exemplo

Considere o sistema representado pelas matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico desejado para o estimador: é

$$\phi(s) = s^2 + 20s + 112$$

Compute o ganho L do estimador usando a Fórmula de Ackermann.