Controle II

Márcio J. Lacerda

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade Federal de São João del-Rei

2º Semestre 2016

Realimentação de estados estimados

Se o estado x não está disponível para realimentação, é natural aplicar o ganho de realimentação no estado estimado como

$$u = -K\hat{x} \tag{1}$$

Para analisar os efeitos de considerar a lei de controle com os estados estimados, lembre-se que o projeto do ganho K é feito para x, não para $\hat{x}$, vamos considerar o sistema aumentado composto pelo sistema original e pelo sistema do observador para a lei de controle (1).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax - BK\hat{x}\\ \dot{\hat{x}}(t) &= (A - LC)\hat{x}(t) - BK\hat{x}(t) + LCx(t)\end{aligned}$$

Os estados podem ser combinados como

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A-LC-BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

Introduzindo a transformação de similaridade

$$\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x-\hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

Nesse caso $P^{-1} = P$ e dessa forma podemos computar o sistema similar $\tilde{A} = P^{-1}AP$, $\tilde{C} = CP$ ou

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

A matriz

$$\begin{bmatrix} A-BK & BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix}$$

é bloco triangular, por isso seus autovalores são a união dos autovalores de $A-BK$ com os autovalores de $A-LC$. Dessa forma, a utilização do observador não afeta os autovalores do sistema original realimentado.
Sendo assim, o projeto do observador e o projeto do controlador por realimentação de estados podem ser realizados de forma independente. Esse é o chamado princípio da separação.

- A técnica de controle por realimentação de estados também pode ser utilizada para obter comportamento servo.
- Através de uma escolha adequada é sempre possível definir a saída da planta como sendo uma das variáveis de estado.

Seja o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{2}$$

Sem perda de generalidade definimos $y = x_1$, e supomos que a referência a ser seguida é $r(t) = r_0,\ t > 0$, uma função degrau de amplitude r_0.

A entrada de controle pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} u &= -\bar{K}x + k_1 e \\ &= -\bar{K}x + k_1(r - x_1) \\ &= -Kx + k_1 r \end{aligned}$$

em que $\bar{K} = \begin{bmatrix} 0 & k_2 & k_3 & \dots & k_n \end{bmatrix}$ e $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_n \end{bmatrix}$.
A dinâmica do sistema em malha fechada para a referência degrau de amplitude r_0 aplicada no instante $t = 0$ é governada pela equação de estados:

$$\dot{x} = (A - BK)x + Bk_1 r \tag{3}$$

cuja solução geral é

$$x(t) = e^{(A-BK)t}x(0) + \int_0^t e^{(A-BK)(t-\tau)}Bk_1 r_0 d\tau, \quad t \geq 0.$$

A matriz de ganhos de realimentação K é determinada de forma que o sistema em malha fechada seja assintoticamente estável. Com isso, é possível avaliar o que acontece com o estado do sistema quando t tende ao infinito:

$$\begin{aligned} x(\infty) &= \lim_{t\to\infty} x(t) \\ &= \lim_{t\to\infty} e^{(A-BK)t}x(0) + \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{(A-BK)(t-\tau)}Bk_1 r_0 d\tau \\ &= \int_0^t e^{(A-BK)(t-\tau)}Bk_1 r_0 d\tau \end{aligned}$$

E nesse caso o estado tende a um vetor constante. Logo

$$\dot{x}(\infty) = 0 = (A-BK)x(\infty) + Bk_1 r(\infty), \quad r(\infty) = r_0$$

Como por hipótese todos os autovalores de $(A-BK)$ possuem parte real negativa, a inversa de $(A-BK)$ existe. Dessa forma é possível calcular os valores de regime do vetor de estados.

$$x(\infty) = -(A-BK)^{-1}Bk_1 r_0$$

A entrada de controle será

$$u(\infty) = -Kx(\infty) + k_1 r_0$$

e a saída da planta $y = x_1(\infty)$.

Exemplo

Considere a planta de segunda ordem definida por

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+\alpha)(s+1)} = \frac{1}{s^2 + (1+\alpha)s + \alpha}$$

em que α é um parâmetro real.
Determine a representação do sistema na forma canônica controlável. Compute um ganho de realimentação de estados que aloque os dois polos do sistema em malha fechada em -4.

A representação do sistema na forma canônica controlável é

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -(1+\alpha) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

O polinômio característico de A é dado por

$$\begin{aligned} \det(sI - A) &= s^2 + (1+\alpha)s + \alpha \\ &= s^2 + a_1 s + a_0 \end{aligned}$$

Supondo que o objetivo seja alocar os dois pólos de malha fechada em -4 o polinômio desejado fica sendo $p_c(s) = (s+4)^2$ e a matriz de ganhos K deve ser tal que

$$\begin{aligned} \det(sI - A + BK) &= s^2 + 8s + 16 \\ &= s^2 + q_1 s + q_0 \end{aligned}$$

Como o sistema se encontra na forma canônica os ganhos de realimentação são facimente obtidos

$$k_1 = q_0 - a_0 = 16 - \alpha, \quad k_2 = q_1 - a_1 = 7 - \alpha$$

Neste caso

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -8 \end{bmatrix}, \quad (A - BK)^{-1} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} -8 & -1 \\ 16 & 0 \end{bmatrix}$$

Os valores de regime dos estados são dados por

$$\begin{aligned} x(\infty) = \begin{bmatrix} x_1(\infty) \\ x_2(\infty) \end{bmatrix} &= -(A - BK)^{-1} B k_1 r_0 \\ &= -\frac{1}{16} \begin{bmatrix} -8 & -1 \\ 16 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (16 - \alpha) r_0 \\ &= \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{\alpha}{16}\right) r_0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se $\alpha = 0$, então $y(\infty) = r_0$, indicando que saída do sistema passará a seguir a referência degrau de amplitude r_0 sem erro de regime. Nesta condição, $u(\infty) = 0$. Este resultado era previsível, uma vez que para $\alpha = 0$, o sistema possui um pólo na origem, e sistemas desse tipo (Tipo 1) não apresentam erros de regime para entradas constantes.

Realimentação a partir de estados estimados

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

Novamente o estimador não altera os autovalores nem tem seus autovalores modificados pela conexão com o controlador, graças ao princípio da separação.

1. O sistema aumentado é controlável?
2. Compute a FT de r para y do sistema aumentado. O que pode ser observado?

Construindo a matriz de controlabilidade temos

$$\mathscr{C} = \begin{bmatrix} B & (A-BK)B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathscr{C}) = 0$$

A FT do sistema aumentado é

$$G_f(s) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} sI & 0 \\ 0 & sI \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou ainda

$$G_f(s) = C(sI - A + BK)^{-1}B$$

Note que o estimador não aparece na FT.

Nem todo sistema a controlar possui um integrador natural que anule o erro de regime para entrada degrau. Dessa forma, torna-se necessário inclui-lo adequadamente na malha de controle.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$\dot{\xi} = r - y$$
$$y = Cx$$

em que $u = -Kx + K_I\xi$, e K_I é o chamado ganho integral, uma constante a ser determinada juntamente com K a partir das especificações de desempenho para o sistema em malha fechada.

As equações anteriores podem ser escritas como um sistema aumentado

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$
$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}$$

Dado que $u = -Kx + K_I\xi$, podemos reescrever a equação de estados na forma compacta

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK_I \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}$$

Defina

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} A - BK & BK_I \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e a equação pode ser reescrita como

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}r$$

Supondo que os ganhos K e K_I possam ser escolhidos de tal forma que os autovalores de $\tilde{A}$ possuam partes reais negativas, então com argumentos similares aos utilizados no caso de controle proporcional, pode-se mostrar que o estado do sistema aumentado

$$\tilde{x}(t) = e^{\tilde{A}t}\tilde{x}(0) + \int_0^t e^{\tilde{A}(t-\tau)}\tilde{B}r_0 d\tau, \quad t \geq 0.$$

atinge um valor constante quando t tende ao infinito.

Os valores de regime podem ser determinados a partir das equações de estados do sistema aumentado:

$$\dot{x}(\infty) = 0 = Ax(\infty) + Bu(\infty)$$
$$\dot{\xi}(\infty) = 0 = r_0 - Cx(\infty)$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -r_0 \end{bmatrix}$$

Se a matriz à esquerda for não singular, isto é, se $\text{rank}(\tilde{A}) = n+1$, então $x(\infty)$ e $u(\infty)$ serão calculados através de

$$\begin{bmatrix} x(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -r_0 \end{bmatrix}$$

Teorema 1

Se o sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ *é controlável e*

$$rank\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}\right) = n+1$$

então os autovalores de $\tilde{A}$ *podem ser alocados arbitrariamente por meio de escolhas apropriadas de* K *e* K_I.

Exemplo

Considere a planta de primeira ordem definida por

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0.25}{s+0.1}$$

Uma representação do sistema na forma de estados é

$$\dot{x} = -0.1x + 0.25u, \quad y = x$$

Verifique se os pólos do sistema aumentado podem ser alocados arbitrariamente. Se possível, os dois pólos do sistema aumentado devem ser alocados em -2. Logo o polinômio desejado é $p_c(s) = (s+2)^2$. Encontre as constantes K e K_I. Compute os valores em regime do estado e da entrada.

Desigualdade de Lyapunov

O sistema linear autônomo

$$\dot{v} = Av$$

é assintoticamente estável se e somente se existir $P = P' > 0$ tal que

$$A'P + PA < 0, \quad \text{definida negativa}$$

A suficiência é consequência da escolha da função de Lyapunov

$$\phi(v) = v'Pv \Rightarrow \dot{\phi}(v) = \dot{v}'Pv + v'P\dot{v} = v'(A'P + PA)v$$

e, portanto,

$$\phi(v) > 0 e \dot{\phi}(v) < 0, \quad v \neq 0 \Rightarrow P > 0, \quad A'P + PA < 0$$

A determinação de uma matriz simétrica definida positiva P que satisfaz a desigualdade acima pode ser feita pela solução da equação de Lyapunov.

$$A'P + PA = -Q$$

com $Q = Q' > 0$ arbitrária, por exemplo, igual à matriz identidade.

Teorema 2

Para qualquer matriz $Q = Q' > 0$, *a solução da equação de Lyapunov*

$$A'P + PA = -Q$$

é única simétrica e definida positiva se e somente se todos os autovalores da matriz A tiverem parte real negativa.

Matriz definida positiva

Uma matriz simétrica $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é definida positiva se e somente se qualquer uma das condições for verificada

- $v'Pv > 0, \forall v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$;
- Todos os autovalores são positivos;
- Todos os menores principais líderes são positivos;
- Existe $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não singular tal que $P = R'R$.

Note que uma condição necessária para que uma matriz seja definida positiva é que todos os elementos da diagonal sejam positivos. Uma matriz $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é definida negativa se $-Q$ for definida positiva.

Exemplo 1

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ *uma matriz simétrica com dimensão* 2×2.

- *Os menores principais líderes de* A *são* $L_1 = a$ *e* $L_2 = ac - b^2$.
- *Os menores principais são dados por* $M_1 = a$ *e* $M_1 = c$ *(ordem um) além de* $M_2 = ac - b^2$ *(ordem dois).*

Exercício

Determine se a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ é definida positiva.

Exemplo 2

Determine o sinal da forma quadrática

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 6x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3 + 8x_3^2$$

Solução: Encontre a matriz simétrica A associada com a forma quadrática Q.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Exercício

Determine se a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ é definida positiva.

Exemplo 2

Determine o sinal da forma quadrática

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 6x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3 + 8x_3^2$$

Solução: Encontre a matriz simétrica A associada com a forma quadrática Q.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Considere os sistemas

1. $$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} v$$

2. $$\dot{v} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} v$$

Para cada caso, verifique se o sistema é estável usando a equação de Lyapunov.

- Controle ótimo em relação a qual critério?
- Como escolher um bom critério de desempenho?
- Precisamos de um critério que leve a problemas de otimização simples de serem resolvidos.
- Seja uma função contínua e que possua derivadas contínuas.
- Tenha um único ponto de mínimo.
- Não contenha não linearidades.
- Funções que são sempre positivas.

- Controle ótimo em relação a qual critério?
- Como escolher um bom critério de desempenho?
- Precisamos de um critério que leve a problemas de otimização simples de serem resolvidos.
- Seja uma função contínua e que possua derivadas contínuas.
- Tenha um único ponto de mínimo.
- Não contenha não linearidades.
- Funções que são sempre positivas.

- Controle ótimo em relação a qual critério?
- Como escolher um bom critério de desempenho?
- Precisamos de um critério que leve a problemas de otimização simples de serem resolvidos.
- Seja uma função contínua e que possua derivadas contínuas.
- Tenha um único ponto de mínimo.
- Não contenha não linearidades.
- Funções que são sempre positivas.

Controle Ótimo

- Controle ótimo em relação a qual critério?
- Como escolher um bom critério de desempenho?
- Precisamos de um critério que leve a problemas de otimização simples de serem resolvidos.
- Seja uma função contínua e que possua derivadas contínuas.
- Tenha um único ponto de mínimo.
- Não contenha não linearidades.
- Funções que são sempre positivas.

- Controle ótimo em relação a qual critério?
- Como escolher um bom critério de desempenho?
- Precisamos de um critério que leve a problemas de otimização simples de serem resolvidos.
- Seja uma função contínua e que possua derivadas contínuas.
- Tenha um único ponto de mínimo.
- Não contenha não linearidades.
- Funções que são sempre positivas.

Controle Ótimo

- Controle ótimo em relação a qual critério?
- Como escolher um bom critério de desempenho?
- Precisamos de um critério que leve a problemas de otimização simples de serem resolvidos.
- Seja uma função contínua e que possua derivadas contínuas.
- Tenha um único ponto de mínimo.
- Não contenha não linearidades.
- Funções que são sempre positivas.

- Controle ótimo em relação a qual critério?
- Como escolher um bom critério de desempenho?
- Precisamos de um critério que leve a problemas de otimização simples de serem resolvidos.
- Seja uma função contínua e que possua derivadas contínuas.
- Tenha um único ponto de mínimo.
- Não contenha não linearidades.
- Funções que são sempre positivas.

Solução

Qual função satisfaz todos os critérios anteriores?

Solução

Qual função satisfaz todos os critérios anteriores?

Funções quadráticas!

Função custo

O objetivo do controle ótimo para horizonte infinito é minimizar uma função custo

$$J = \int_0^\infty L(x,u)dt \tag{4}$$

- Problema Erro de rastreamento mínimo- Nesse caso o objetivo é levar o estado para um valor x_d desejado.

$$L(x,u) = (x - x_d)^T Q (x - x_d), \quad Q = Q^T > 0$$

- Problema de energia mínima- Usar o mínimo de energia para controlar o sistema.

$$L(x,u) = u^T R u, \quad R = R^T > 0$$

- Problema de Minimização combinada

$$L(x,u) = (x - x_d)^T Q (x - x_d) + u^T R u$$

Onde Q e R são pesos para os estados e entrada respectivamente.

$Q \uparrow$ implica em rastreamento preciso.

$R \uparrow$ implica em maior economia de energia.

LQR - Regulador Linear Quadrático

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$x_d = 0$$
$$J(x,u) = \int_0^{\infty} \left(x^T Q x + u^T R u \right) dt$$

Princípio da Otimalidade

Suponha que a solução ótima de um problema passe por um ponto intermediário (x_1, t_1), então, a solução ótima para o mesmo problema começando em (x_1, t_1) deve ser a continuação do mesmo caminho.

Se um controle é ótimo para um estado inicial deve satisfazer a seguinte propriedade: Após o período inicial , o controle para o período restante deve ser também ótimo com relação ao estado resultante do controle do estado inicial.

Problema 1

Selecionar entradas de controle para minimizar

$$J = \int_0^{\infty} \left(x^T Q x + u^T R u \right) dt \tag{5}$$

sujeito a

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{6}$$

$u = -Kx$ *e considerando* $Q = Q^T > 0$ *e* $R = R^T > 0$.

Substituindo a lei de controle $u = -Kx$ na equação do sistema podemos escrever

$$\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x \tag{7}$$

Vamos considerar que $(A - BK)$ seja estável, isto é, autovalores com parte real negativa. Substituindo u na equação do custo temos

$$J = \int_0^\infty \left(x^T Q x + x^T K^T R K x \right) dt = \int_0^\infty x^T \left(Q + K^T R K \right) x dt$$

Fazendo

$$x^T \left(Q + K^T R K \right) x dt = -\frac{d}{dt}(x^T P x)$$

onde P é uma matriz simétrica definida positiva, obtemos.

$$\begin{aligned} x^T \left(Q + K^T R K \right) x dt &= -\dot{x}^T P x - x^T P \dot{x} \\ &= -x^T \left[(A - BK)^T P + P(A - BK) \right] x \end{aligned}$$

Substituindo a lei de controle $u = -Kx$ na equação do sistema podemos escrever

$$\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x \tag{7}$$

Vamos considerar que $(A - BK)$ seja estável, isto é, autovalores com parte real negativa. Substituindo u na equação do custo temos

$$J = \int_0^\infty \left(x^T Q x + x^T K^T R K x\right) dt = \int_0^\infty x^T \left(Q + K^T R K\right) x dt$$

Fazendo

$$x^T \left(Q + K^T R K\right) x dt = -\frac{d}{dt}(x^T P x)$$

onde P é uma matriz simétrica definida positiva, obtemos.

$$\begin{aligned} x^T \left(Q + K^T R K\right) x dt &= -\dot{x}^T P x - x^T P \dot{x} \\ &= -x^T \left[(A - BK)^T P + P(A - BK)\right] x \end{aligned}$$

Substituindo a lei de controle $u = -Kx$ na equação do sistema podemos escrever

$$\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x \tag{7}$$

Vamos considerar que $(A - BK)$ seja estável, isto é, autovalores com parte real negativa. Substituindo u na equação do custo temos

$$J = \int_0^\infty \left(x^T Q x + x^T K^T R K x \right) dt = \int_0^\infty x^T \left(Q + K^T R K \right) x dt$$

Fazendo

$$x^T \left(Q + K^T R K \right) x dt = -\frac{d}{dt}(x^T P x)$$

onde P é uma matriz simétrica definida positiva, obtemos.

$$\begin{aligned} x^T \left(Q + K^T R K \right) x dt &= -\dot{x}^T P x - x^T P \dot{x} \\ &= -x^T \left[(A - BK)^T P + P(A - BK) \right] x \end{aligned}$$

A igualdade deve ser verdadeira para qualquer x, ou seja.

$$-\left(Q+K^TRK\right)=(A-BK)^TP+P(A-BK)$$

O procedimento consiste em determinar a matriz P que satisfaça a equação anterior.

O índice de desempenho pode ser calculado como

$$J=\int_0^\infty \left(x^TQx+u^TRu\right)dt=-x^TPx\Big|_0^\infty=-x^T(\infty)Px(\infty)+x^T(0)Px(0)$$

Como $A-BK$ é estável, $x(\infty)\rightarrow 0$ e dessa forma $J=x^T(0)Px(0)$.

A igualdade deve ser verdadeira para qualquer x, ou seja.

$$-\left(Q+K^T RK\right)=(A-BK)^T P+P(A-BK)$$

O procedimento consiste em determinar a matriz P que satisfaça a equação anterior.
O índice de desempenho pode ser calculado como

$$J=\int_0^\infty \left(x^T Qx+u^T Ru\right) dt = -x^T Px\Big|_0^\infty = -x^T(\infty)Px(\infty)+x^T(0)Px(0)$$

Como $A-BK$ é estável, $x(\infty)\to 0$ e dessa forma $J=x^T(0)Px(0)$.

Para obter a solução do controle vamos fatorar a matriz $R > 0$ como $R = T^T T$ e então podemos escrever

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) + Q + K^T T^T TK = 0$$

ou ainda

$$A^T P + PA + \left[TK - (T^T)^{-1} B^T P\right]^T \left[TK - (T^T)^{-1} B^T P\right] - PBR^{-1} B^T P + Q = 0$$

A minimização de J em relação a K requer a minimização do termo

$$x^T \left[TK - (T^T)^{-1} B^T P\right]^T \left[TK - (T^T)^{-1} B^T P\right] x$$

em relação a K.

Para obter a solução do controle vamos fatorar a matriz $R > 0$ como $R = T^T T$ e então podemos escrever

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) + Q + K^T T^T TK = 0$$

ou ainda

$$A^T P + PA + \left[TK - (T^T)^{-1} B^T P\right]^T \left[TK - (T^T)^{-1} B^T P\right] - PBR^{-1} B^T P + Q = 0$$

A minimização de J em relação a K requer a minimização do termo

$$x^T \left[TK - (T^T)^{-1} B^T P\right]^T \left[TK - (T^T)^{-1} B^T P\right] x$$

em relação a K.

Como a última expressão é não negativa, o mínimo ocorre em zero ou quando

$$TK = (T^T)^{-1}B^T P$$

ou

$$K = T^{-1}(T^T)^{-1}B^T P = R^{-1}B^T P$$

Assim, tem-se

$$u = -Kx = -R^{-1}B^T Px \tag{8}$$

A matriz P deve satisfazer a equação

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \tag{9}$$

também conhecida como equação reduzida de Riccati.

Como a última expressão é não negativa, o mínimo ocorre em zero ou quando

$$TK = (T^T)^{-1} B^T P$$

ou

$$K = T^{-1}(T^T)^{-1} B^T P = R^{-1} B^T P$$

Assim, tem-se

$$u = -Kx = -R^{-1} B^T P x \tag{8}$$

A matriz P deve satisfazer a equação

$$A^T P + PA - PBR^{-1} B^T P + Q = 0 \tag{9}$$

também conhecida como equação reduzida de Riccati.

Algoritmo

1. Resolva a equação matricial reduzida de Riccati (9).

2. Substitua essa matriz P na equação (8) para computar o ganho ótimo.

Teorema 3

Para o problema LQR com

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$J(x,u) = \int_0^{\infty} \left(x^T Q x + u^T R u \right) dt$$

se $Q \geq 0$, $R > 0$ *e* (A, B) *é estabilizável, então a solução para o problema é dada por*

$$u* = -R^{-1} B^T P x$$

em que P *é a solução definida positica da equação de Riccati*

$$A^T P + PA - PBR^{-1} B^T P + Q = 0$$

Exemplo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$J(x,t) = \int_0^{\infty} \left(x_1^2 + \rho u^2 \right) dt, \quad \rho > 0$$

A solução é

$$P = \begin{bmatrix} 2^{\frac{1}{2}}\rho^{\frac{1}{4}} & \rho^{\frac{1}{2}} \\ \rho^{\frac{1}{2}} & 2^{\frac{1}{2}}\rho^{\frac{3}{4}} \end{bmatrix}$$

A ação de controle é

$$u^* = -\rho^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^{\frac{1}{2}}\rho^{\frac{1}{4}} & \rho^{\frac{1}{2}} \\ \rho^{\frac{1}{2}} & 2^{\frac{1}{2}}\rho^{\frac{3}{4}} \end{bmatrix} x = -\begin{bmatrix} \rho^{\frac{-1}{2}} & 2^{\frac{1}{2}}\rho^{\frac{-1}{4}} \end{bmatrix} x$$