

# Identificação de Sistemas Dinâmicos com Aritmética Intervalar

Márcia L. C. Peixoto  
Marco T. R. Matos  
Wilson R. Lacerda Júnior  
Samir A. M. Martins  
Erivelton G. Nepomuceno

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (UFSJ/CEFET)  
UFSJ - Universidade Federal de São João del-Rei  
GCOM - Grupo de Controle e Modelagem

*Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*  
04 de outubro de 2017

- Identificação de sistemas;
- Tipos de modelos para a identificação;
- Problemas inerentes a identificação;
  - ① Incertezas de medição;
  - ② Incertezas paramétricas;
- Erros numéricos;
- Aritmética Intervalar.

- 1 Coleta de dados;
  - Sinal binário pseudo-aleatório (PRBS);
- 2 Escolha da representação matemática;
- 3 Determinação da Estrutura;
  - Taxa de redução de erro juntamente com o critério de informação de Akaike;
- 4 Estimação dos Parâmetros
  - Mínimos Quadrados Intervalar;
- 5 Validação
  - Raiz do erro quadrado médio Intervalar (RMSE);

## Definição

Um modelo NARMAX (Nonlinear Autoregressive Moving Average model with exogenous variables) pode ser definido por

$$y(k) = F^l[y(k-1), \dots, y(k-n_y), u(k-d), \dots, u(k-n_u), e(k-1), \dots, e(k-n_e)] + e(k), \quad (1)$$

em que  $n_y$ ,  $n_u$ ,  $n_e$ ,  $d$ ,  $u(k)$  e  $y(k)$  são os atrasos em  $y$ , em  $u$ , em  $e$ , o tempo morto, o sinal de entrada e o sinal de saída no instante  $k$ , respectivamente.  $e(k)$  representa ruído,  $F^l$  é uma função polinomial de  $y(k)$ ,  $u(k)$  e  $e(k)$  com grau de não linearidade  $l \in \mathbb{N}$ .

As operações intervalares de adição, subtração e multiplicação são definidas como:

$$X + Y = [\underline{X} + \underline{Y}, \bar{X} + \bar{Y}], \quad (2)$$

$$X - Y = [\underline{X} - \bar{Y}, \bar{X} - \underline{Y}], \quad (3)$$

$$X \cdot Y = [\min(S), \max(S)], \quad (4)$$

onde  $S$  é o conjunto  $\{\underline{X}\underline{Y}, \underline{X}\bar{Y}, \bar{X}\underline{Y}, \bar{X}\bar{Y}\}$ . Se  $Y$  não contém o número zero, então o quociente  $X/Y$  é dado por

$$X/Y = X \cdot (1/Y) \quad (5)$$

onde  $1/Y = [1/\bar{Y}, 1/\underline{Y}]$ .

A adição e a multiplicação são associativas e comutativas, porém a distributividade não é geral para todos os casos.

Por exemplo, seja  $X$  um intervalo, a função

$$f(X) = X(1 - X)$$

e uma extensão intervalar de  $f$

$$F_1(X) = X - X \cdot X.$$

Tem-se que  $f([0,1]) = [0,1] \cdot (1 - [0,1]) = [0,1]$  enquanto  $F_1([0,1]) = [0,1] - [0,1] \cdot [0,1] = [-1,1]$ .

# Metodologia

- Inserção dos intervalos na estimação dos parâmetros;
- Utilização do *toolbox* Intlab;
- Comando `infsup`;
- Mínimos quadrados intervalar;
- Validação RMSE tradicional, intervalar;

Por exemplo se  $x = 0,15$  ele será transformado em:

$$X = [\underline{X}, \bar{X}] = [0,149999999999999; 0,150000000000001]$$

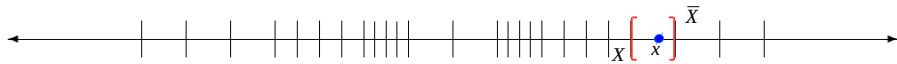


Figura 1: Representação do número como intervalo.

# Resultados: Circuito RLC

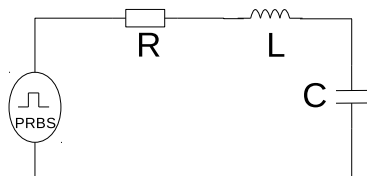


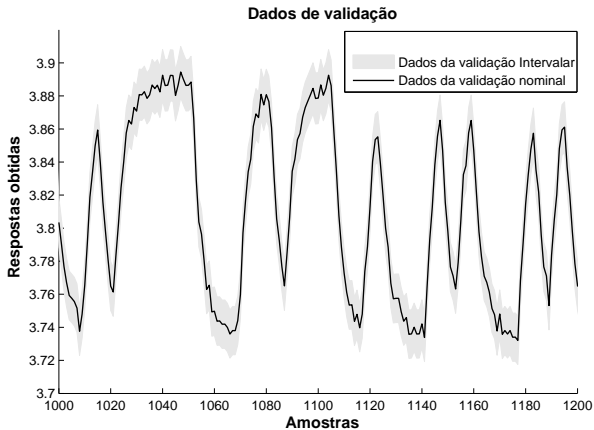
Figura 2: Circuito RLC série.

$$\Psi = \begin{bmatrix} y(k-1) & y(k-1)y(k-2) \\ y(k-1)u(k-2) & u(k-1) \end{bmatrix}.$$

$$\theta = \begin{bmatrix} [0,86273744299150; & 0,86526925655267] \\ [-0,02018490110934; & -0,01956475067962] \\ [0,01184094798064; & 0,01214790319626] \\ [0,12910251755609; & 0,13041151943168] \end{bmatrix}$$



# Resultados Circuito RLC Série



**Figura 3:** Identificação Intervalar do sistema RLC. (-) Dados de validação nominal do modelo identificado. (■) dados de validação intervalar do modelo identificado.

# Resultados: Sistema Eletromecânico

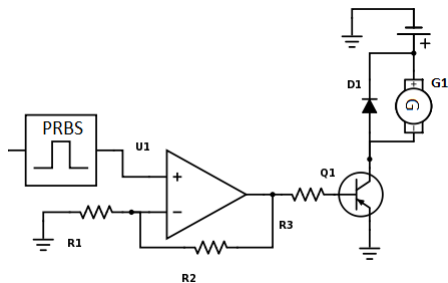
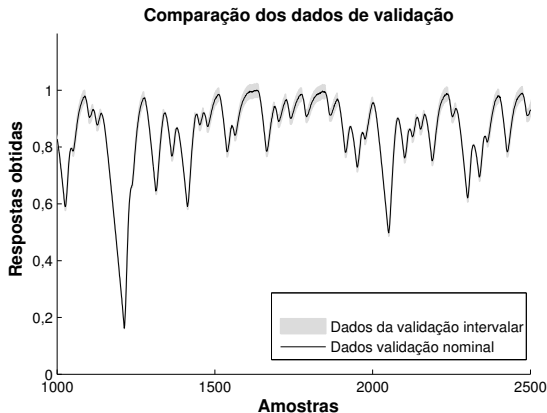


Figura 4: Esquema do sistema proposto.

$$\Psi = \begin{bmatrix} y(k-1) & y(k-2) & u(k-1) \\ u(k-1)y(k-1) & u(k-2) \\ u(k-1)y(k-2) & u(k-2)y(k-1) \\ u(k-2)y(k-2) & y(k-2)^2 \end{bmatrix}.$$

$$\theta = \begin{bmatrix} [1,86983289867678; & 1,87052216754597] \\ [-0,87500271106274; & -0,87433604737629] \\ [0,00877520297552; & 0,00879549049917] \\ [-0,07754127207970; & -0,07522496598523] \\ [0,01156721443224; & 0,01159157820069] \\ [0,06736048557893; & 0,06969424138646] \\ [-0,09177956625574; & -0,08882860964415] \\ [0,07814928825619; & 0,08111662045620] \\ [0,00273140158559; & 0,00275676329139] \end{bmatrix}.$$

# Resultados: Sistema Eletromecânico



**Figura 5:** Identificação Intervalar do sistema eletromecânico. (-) Dados de validação nominal do modelo identificado. (■) dados de validação intervalar do modelo identificado.

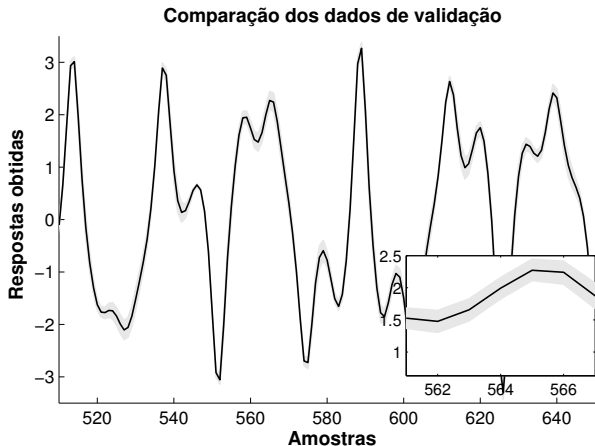
$$\frac{d^2y}{dt^2} + k\frac{dy}{dt} + \mu y^3 = A \cos(t). \quad (6)$$

$$\Psi = [y(k-1) \quad y(k-2) \quad y(k-3) \quad y(k-4) \quad y(k-5) \quad y(k-6) \\ y(k-6)y(k-1)^2 \quad y(k-3)^3 \quad y(k-1)^3 \quad y(k-5)^3 \quad y(k-6)^3 \\ y(k-4)^3 \quad y(k-2)^3 \quad y(k-1)y(k-2)^2 \quad y(k-5)y(k-1)^2 \\ y(k-3)y(k-2)y(k-1) \quad y(k-4)y(k-2)y(k-1) \\ y(k-6)y(k-2)y(k-1)].$$

# Oscilador *Duffing-Ueda*

$$\theta = \begin{bmatrix} [1,90951882008706; & 1,92646936612689] \\ [0,95365151698072; & 1,00561820035704] \\ [-4,02822487143497; & -3,98587426164288] \\ [1,44903214765727; & 1,46867281254767] \\ [1,48314782828422; & 1,52347135562097] \\ [-0,7118736563343; & -0,85672358123898] \\ [0,00225668759061; & 0,00236179315233] \\ [0,09300223610061; & 0,09376532378801] \\ [-0,06490883382016; & -0,06488422870018] \\ [-0,04798316559129; & -0,04727455439529] \\ [-0,00481684838248; & -0,00473039445345] \\ [-0,00453674339896; & -0,00386579675030] \\ [-0,01222583485781; & -0,01167347526245] \\ [0,03487125603343; & 0,03545208952191] \\ [-0,00540498279559; & -0,00528812953758] \\ [-0,00852990539515; & -0,00786729826986] \\ [0,00545335825399; & 0,00583508548234] \\ [-0,00118117654226; & -0,00107715645748] \end{bmatrix} .$$

# Resultados: Oscilador *Duffing-Ueda*



**Figura 6:** Identificação Intervalar do oscilador Duffing-Ueda. (-) Em preto dados do sistema do modelo identificado. (■) dados de validação intervalar do modelo identificado.

Tabela 1: Cálculo da raiz quadrada do erro quadrático médio (RMSE).

Caso	RMSE 1	RMSE 2	RMSE Intervalar
1	0,1099	0,1060	[0,0040; 0,3677]
2	0,1233	0,0079	[0,0016; 0,1030]
3	0,1776	0,0071	[0,0003; 0,0987]

- Propagação de erros;
- Confiabilidade nos parâmetros;
- Trabalhos Futuros.



- Aos presentes,
- CAPES, CNPq/INERGE, FAPEMIG e à Universidade Federal de São João del-Rei pelo apoio.

Contato:

`marciapeixoto93@hotmail.com`