

Computação Aritmética

Aula Introdutória

Erivelton Geraldo Nepomuceno

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade Federal de São João del-Rei

9 de Agosto de 2017

Números

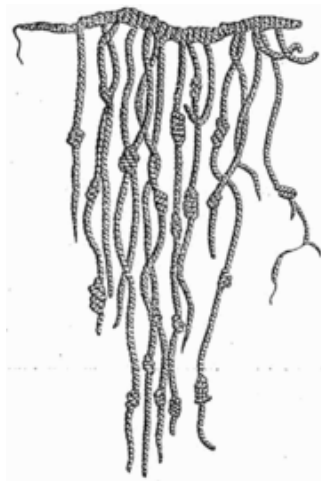


Figura 1: Representação de um **quipu**: Dispositivo para guardar um número usado desde 3000 a.C. na América do Sul. Fonte: Wikipedia.

Números

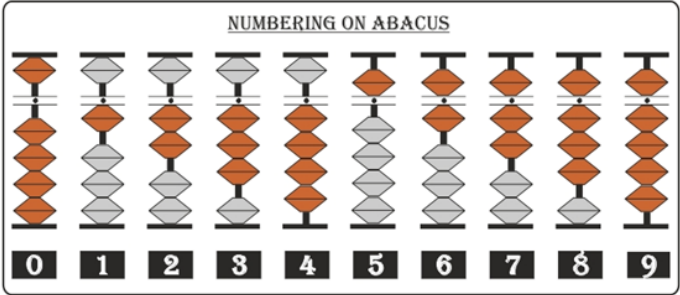


Figura 2: Representação de números em um ábaco. Fonte: www.abacus-maths.com

Números

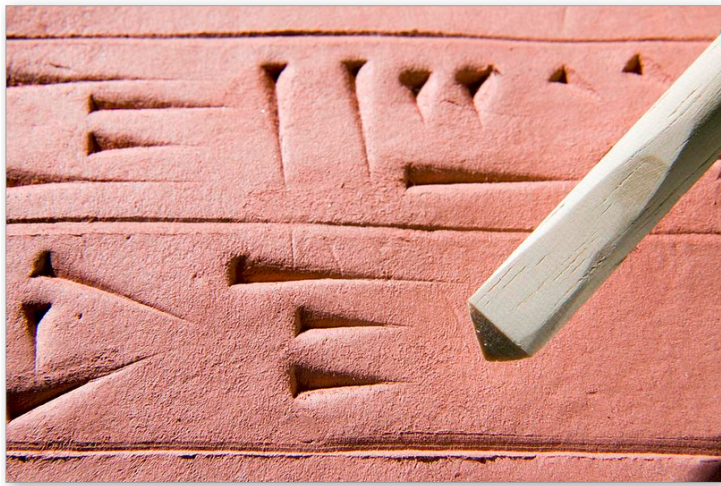


Figura 3: Representação de números em base 60 na Babilônia por volta de 900 a.C. Fonte: British Museum.

Números

- Números Romanos: I, II, III, IV, V, ...
- Números fracionários: base 12.

Tabela 1: Números fracionários romanos.

Número	Símbolo
$1/12$	•
$1/6$	••
$1/4$	•••
$1/2$	S
$7/12$	S •

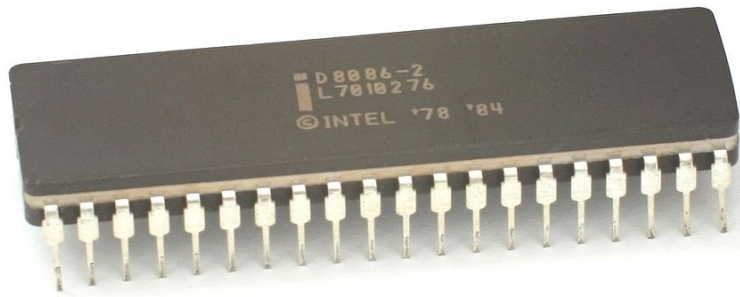


Figura 5: Processador Intel 8086 de 1978. Fonte: Wikipedia.

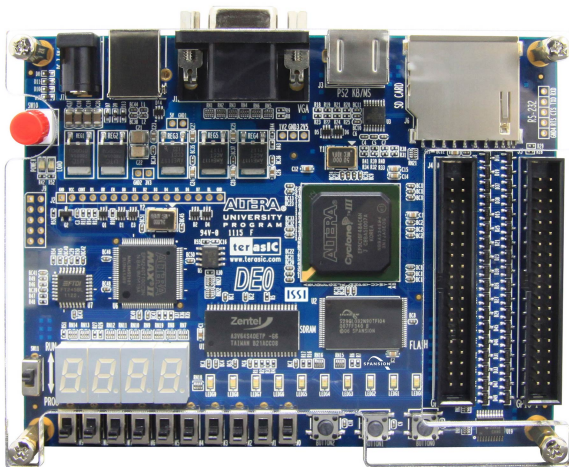


Figura 6: Altera DE0 Board. Kit didático para ensino de dispositivos lógicos reconfiguráveis, tais como o FPGA. Fonte: www.altera.com

Números

- Atitude elementar de contar.

Tabela 2: Conjuntos de números.

Números naturais	\mathbb{N}	$(0), 1, 2, \dots$
Números inteiros	\mathbb{Z}	$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots$
Números racionais	\mathbb{Q}	$-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \dots$
Números irracionais	\mathbb{I}	$\sqrt{2}, \pi, \dots$
Números complexos	\mathbb{C}	$2 + 3i, -i, -2 + i, 1/2 + \sqrt{2}i \dots$
Números no computador	\mathbb{D}	Conforme IEEE 754-2008.

Números

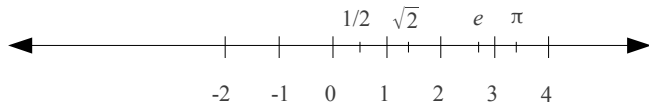


Figura 7: A linha que representa os números reais.

- Considere o seguinte sistema binário:

$$\pm(b_0 b_1 b_2)_2 \times 2^E. \quad (1)$$

- O número E pode ser -1 , 0 ou 1 .

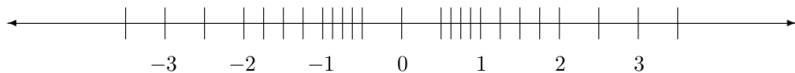


Figura 8: Números representados por (1). Fonte: (Overton, 2001, p. 15).

Números

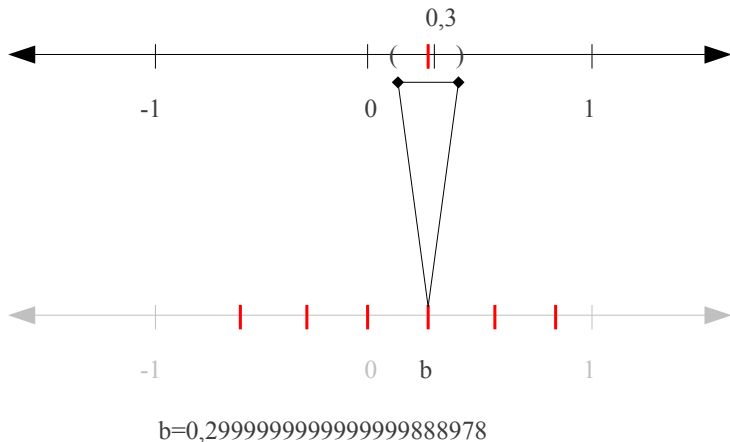


Figura 9: Representação do número 0,3 no computador com 64 bits. O “número” b representa um intervalo dos números reais, que inclui o valor 0,3. Os traços vermelhos representam pontos isolados.

Números

- Seja \mathbb{D} o conjunto de todos os “números” representados no computador.
- Tem-se que $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- \mathbb{D} não é completo e não é um corpo, o que implica que não há propriedades elementares da matemática, tais como associativa e distributiva.

Exemplo 1

A operação $0,3 - 0,2$ realizada em \mathbb{D} é imprecisa, e assim:

$$0,1 \neq 0,3 - 0,2. \quad (2)$$

Exemplo 2

Não há propriedade distributiva:

$$0,1 \times (0,3 - 0,2) > 0,1 \times 0,3 - 0,1 \times 0,2. \quad (3)$$

Convergência

- Uma função recursiva pode ser definida como

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (4)$$

que reescrita como o resultado de funções compostas fica

$$x_{n+1} = f_1(x_n) = f_2(x_{n-1}) = \dots = f_{n+1}(x_0). \quad (5)$$

- Uma série de dados é gerada pela simples iteração de (4).

Exemplo 3

Conjectura de Collatz: Para qualquer $x_0 \in \mathbb{N}$, x_{n+1} tende ao ciclo $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ quando $n \geq N \in \mathbb{N}$.

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n/2 & \text{se } x_n \text{ for par} \\ 3x_n + 1 & \text{se } x_n \text{ for ímpar} \end{cases}.$$

Por exemplo: $5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \dots$

Ninguém até hoje soube explicar a razão desta convergência!

Convergência

Exemplo 4

Na otimização, tem-se o **Método do Gradiente**:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \gamma_n \nabla F(\mathbf{x}_n), \quad n \geq 0.$$

em que γ deve ser suficientemente pequeno.

Exemplo 5

Os modelos polinomiais NAR são definidos da seguinte forma:

$$y(k) = F^l[y(k-1), \dots, y(k-n_y)],$$

sendo que n_y é o maior atraso de saída e F é uma função polinomial de grau l que relaciona os termos de saída $y(k-1), \dots, y(k-n_y)$.

Convergência

Teorema 1

A sequência de funções $\{f_n\}$, definida em E , converge uniformemente em E se e somente se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um inteiro N tal que $m \geq N$, $n \geq N$, $x \in E$ implica

$$d(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon. \quad (6)$$

Exemplo 6

Método de Newton para encontrar a raiz quadrada de um número positivo a . Inicia-se com algum valor, $x_0 > 0$ e em seguida realiza-se a seguinte função **recursivamente**:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad (7)$$

tal que $x_n \rightarrow \sqrt{a}$ a medida que $n \rightarrow \infty$.

Convergência

- Realização numérica para $a = 2$ e $x_0 = 3$ do Exemplo 6.

$$x_0 = 3$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{a}{x_0} \right)$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{2}{3} \right) \approx 1,8333333333333332593185$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(1,8333333333333332593185 + \frac{2}{3} \right)$$

$$x_2 \approx 1,4621212121212121548552$$

$$x_3 \approx 1,4149984298948030669862$$

$$x_4 \approx 1.41421378004719766608$$

$$x_5 \approx 1.4142135623731117988200$$

$$x_6 \approx 1.4142135623730949234300$$

$$x_7 = x_6 \approx 1.4142135623730949234300 \quad \text{Convergiu!} \quad \text{Em } \mathbb{D}!$$

Convergência

- O mapa logístico investigado por May¹ é definido como

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n). \quad (8)$$

- Alguns exemplos
 - ▶ Sensibilidade a propriedade matemática.
 - ▶ Período 2, mas converge para ponto fixo.
 - ▶ Região de caos, mas converge para ponto fixo de período 2.
- **Matlab** é um dos software mais utilizados no mundo. Há pelo menos 1 milhão de licenças vendidas. Escrito em C, C++ e Java.²

¹May, R. M. (1976). Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261,459–467.

²Fonte: <http://www.mathworks.com/company/aboutus/>

Convergência

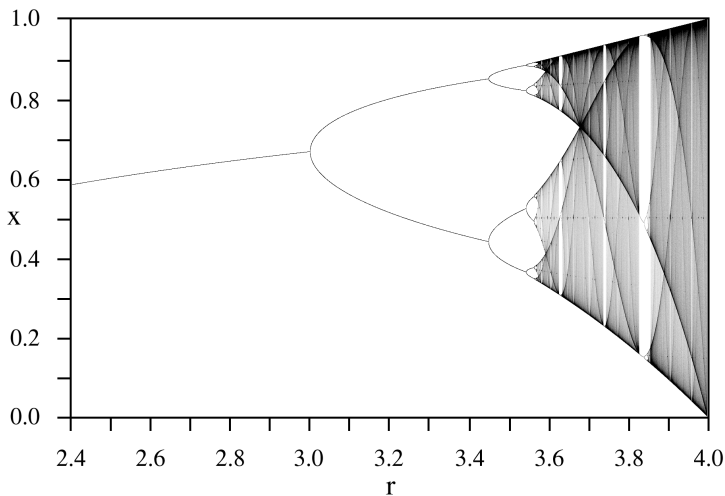


Figura 10: Diagrama de Bifurcação de (8). O eixo horizontal é o parâmetro r e o eixo vertical é o x . O valor inicial é $x_0 = 0,25$. Fonte: Domínio Público.

Artigo no Journal of Engineering

- Seja $x(t_1) = 4 \pm 2$, $x(t_2) = 7 \pm 2$, $x(t_3) = 3 \pm 1$ e $x(t_4) = 7 \pm 1$ Não podemos afirmar que $x(t_1) \neq x(t_2)$. Mas, $x(t_3) \neq x(t_4)$.

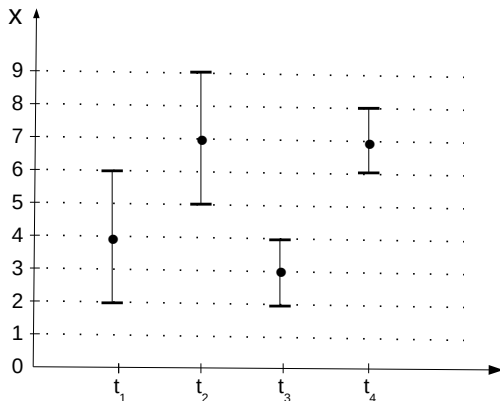


Figura 11: Ilustração da **idéia elementar**: computador como instrumento!

Artigo no Journal of Engineering

Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo, seja $x \in I$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Seja $J \subseteq \mathbb{D}$ um intervalo, $\hat{x} \in J$ a representação de x e \hat{f} uma aproximação de f . Seja $\delta \geq 0$, tem-se

$$d(f(x), \hat{f}(\hat{x})) \leq \delta. \quad (9)$$

Funções compostas são definidas como:

$$d(f_n(x), \hat{f}_n(\hat{x})) \leq \delta_n. \quad (10)$$

De (10), pode-se afirmar que $f_m(x) \neq f_n(x)$ apenas se

$$d(\hat{f}_m(\hat{x}), \hat{f}_n(\hat{x})) > \delta_n + \delta_m. \quad (11)$$

Definição 1

Ponto fixo em \mathbb{D} : Se $d(\hat{f}_n(\hat{x}^*), \hat{f}_{n-1}(\hat{x}^*)) \leq \delta_n + \delta_{n-1}$ então \hat{x}^* é um ponto fixo.

Para qualquer f_n há um erro associado δ_n . Seja $\hat{\varepsilon}$ tal que

$$\hat{\varepsilon} > \kappa = \sup(\delta_n) + \sup(\delta_m). \quad (12)$$

Teorema 2

Se a sequência de funções $\{f_n\}$ definidas em E , converge em E então para cada $\hat{\varepsilon} > \kappa$ há um inteiro N tal que $m \geq N, n \geq N, x \in I$ e $\hat{x} \in J$ que implica

$$\kappa < d(\hat{f}_n(\hat{x}), \hat{f}_m(\hat{x})) \leq \hat{\varepsilon}. \quad (13)$$

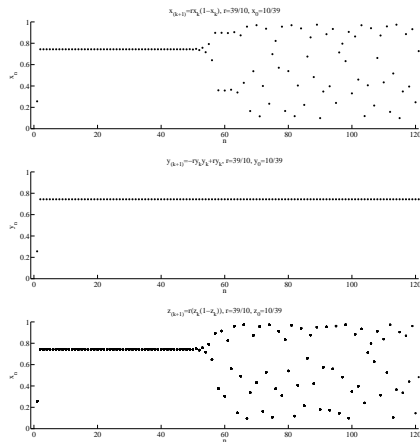


Figura 12: Simulação de x_n em (8) com $r = 327/100$ e $x_0 = 100/327$ (representado por um \circ em volta do ponto.).

- Valor correto:

$$x_2 = \frac{\cancel{327} \cancel{100}}{\cancel{100} \cancel{327}} \left(1 - \frac{100}{327} \right) = \frac{327 - 100}{327} = \frac{227}{327} \quad (14)$$

e

$$x_3 = \frac{\cancel{327} \cancel{227}}{\cancel{100} \cancel{327}} \left(1 - \frac{227}{327} \right) = \frac{\cancel{227} \cancel{100}}{\cancel{100} \cancel{327}} = \frac{227}{327} \quad (15)$$

e então $x_2 = x_3, \dots, x_n = 227/327$. Isso ilustra uma situação em que a **computação do ponto fixo foi errada**.

Artigo no Journal of Engineering

A partir de (13) para todo m e n deve-se atender a $d(\hat{f}_n(\hat{x}), \hat{f}_m(\hat{x})) > \kappa$, o que tem uma implicação prática em limitar o número de iterações. Isso está expresso no Colorário 1.

Colorário 1

O número máximo de iterações $k = \max(m, n)$ está sujeito a $d(\hat{f}_n(\hat{x}), \hat{f}_m(\hat{x})) \leq (\delta_n + \delta_m)$ para todo n e m .

Tabela 3: Simulação de (8) para as 3 primeiras iterações.

n	\hat{x}_n	$d(\hat{x}_n, \hat{x}_{n-1})$	δ_n
0	0.305810397553517	0	2.77555756156289e-17
1	0.694189602446483	0.388379204892966	3.25197734863617e-16
2	0.694189602446483	2.22044604925031e-16	1.52284898079424e-15
3	0.694189602446483	3.33066907387547e-16	5.43916855498739e-15

Resultado principal

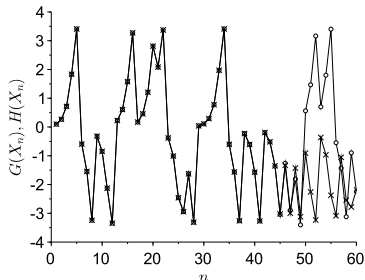
Nepomuceno e Martins (2016)^a apresentam o conceito *lower bound error* ou limite inferior do erro, no qual por meio da análise intervalar e conhecimento da norma IEEE 754 elaboram uma metodologia para calcular um valor mínimo do erro para simulação de funções recursivas.

^aNepomuceno, E. G., & Martins, S. A. M. (2016). A lower bound error for free-run simulation of the polynomial NARMAX. *Systems Science & Control Engineering*, 4(1), 50–58.

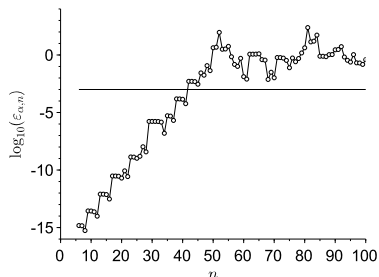
Exemplo 7

$$G(X_n) = 2.6868X_n - \underline{0.2462X_n^3} \quad (16)$$

$$H(X_n) = 2.6868X_n - \underline{(0.2462X_n)X_n^2}, \quad (17)$$



(a) Simulação da Eq. (16) e (17), com resultados para $G(X_n)$ ($- \times -$) e $H(X_n)$ ($- o -$) and e mesma condição inicial $X_0 = 0,1$. n é o número de iterações.



(b) Evolução do erro relativo (em logaritmo) $\varepsilon_{\alpha,n}$ da Eq. (16). Quando $n \geq 44$ o $\varepsilon_{\alpha,n} > \varepsilon = \log_{10}(0,001) = -3$.

Figura 13: Mapa senoidal: (a) Simulação livre (b) Evolução do erro.

Artigo no Congresso NSC 2016 (INPE)

Resultado Principal

Simulação do circuito de Chua apresenta dois resultados diferentes. Ainda não sabemos qual resultado é o correto. Trabalho da aluna de mestrado Melanie Rodrigues .

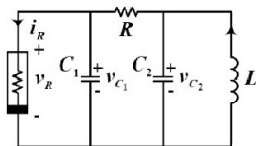
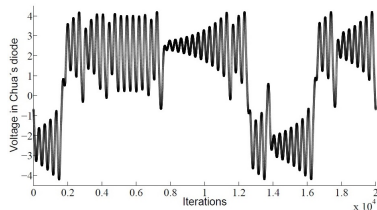
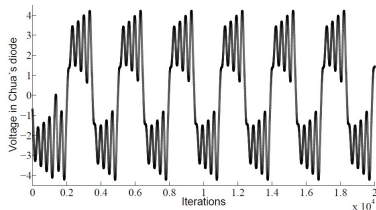


Figura 14: Circuito de Chua³

³Silva, M. R., Nepomuceno, E. G., Amaral, G. F. V., & Martins, S. A. M. (2017). Exploiting the rounding mode of floating-point in the simulation of Chua's circuit. Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity, (Accepted), 1–10.



(a)



(b)

Figura 15: Tensão no diodo de Chua. (a) Tensão usando simulação padrão RK-4. (b) Tensão trabalhando análise intervalar e modo de arredondamento para IEEE 754 m.

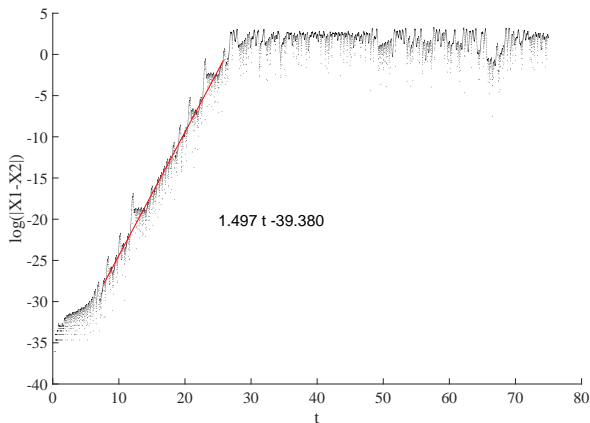


Figura 16: Cálculo do expoente de Lyapunov e tempo máximo de simulação associado ao Limite Inferior do Erro.⁴

⁴Mendes, E. M. A. M., & Nepomuceno, E. G. (2016). A Very Simple Method to Calculate the (Positive) Largest Lyapunov Exponent Using Interval Extensions. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 26(13), 1650226.

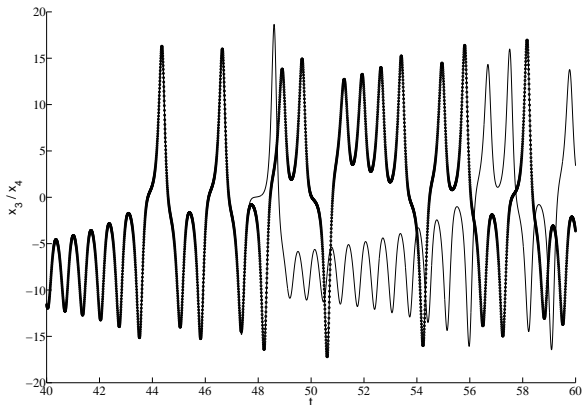


Figura 17: Resultados divergentes devido a computação aritmética.⁵

⁵Nepomuceno, E. G., & Mendes, E. M. A. M. A. M. (2017). On the analysis of pseudo-orbits of continuous chaotic nonlinear systems simulated using discretization schemes in a digital computer. *Chaos, Solitons & Fractals*, 95, 21–32.

- Síntese de sistemas caóticos⁶

Tabela 1 – Informações sobre o consumo de recursos e frequência máxima de operação do hardware proposto.

	Consumo do <i>hardware</i>	Recursos da Placa
Elementos lógicos	1471	114480
Multiplicadores de 9-bits	16	532
Registradores	1358	114480
Frequência máxima de operação	166,83 MHz	50 MHz
Bits de memória	320	3981312
Consumo de potência	171,47mW	

⁶Silva, D. A., Nepomuceno, E. G., & Pereira, E. B. (2017). Realização do Mapa Logístico em FPGA Usando Padrão Ponto Fixo de 32 Bits. In Simpósio Brasileiro de Sistemas Elétricos, Porto Alegre (pp. 1–6).

Obrigado pela atenção!

www.ufsj.edu.br/nepomuceno