CEFET e UFSJ
Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Programa de Mestrado em Engenharia Elétrica
Modelagem e Controle de Sistemas - Sistemas de Controle

André Francisco Caldeira

Análise de desempenho e controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas incertos discretos no tempo com atraso variante no vetor de estado

Belo Horizonte
2011

André Francisco Caldeira

Análise de desempenho e controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas incertos discretos no tempo com atraso variante no vetor de estado

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, associação ampla entre CEFET-MG e UFSJ como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Modelagem e Controle de Sistemas - MCS. Linha de pesquisa: Sistemas de Controle - SC.

Orientador: Prof. Dr. Valter J. S. Leite
Co-orientador: Prof. Dr. Eduardo N. Gonçalves

CEFET-MG

Belo Horizonte
2011

André Francisco Caldeira
Engenheiro Eletricista – Unileste-MG

Análise de desempenho e controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas incertos discretos no tempo com atraso variante no vetor de estado

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, associação ampla entre CEFET-MG e UFSJ como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Modelagem e Controle de Sistemas - MCS. Linha de pesquisa: Sistemas de Controle - SC.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Daniel Ferreira Coutinho
PPGEAS/UFSC

Prof. Dr. Eduardo Nunes Gonçalves
PPGEL/CEFET-MG

Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite
PPGEL/CEFET-MG

Prof. Dr. Márcio Falcão Santos Barroso
PPGEL/UFSJ

Belo Horizonte
2011

Para meus pais, José M. Caldeira e Izaneth M. Caldeira

Agradecimentos

Agradeço,

ao Professor Valter J. S. Leite pela paciência, dispor, competência e amizade. Divido os méritos da realização do trabalho à excelente qualidade da orientação recebida.

ao Professor Eduardo Nunes Gonçalves que, na posição de co-orientação deste trabalho, mostrou-se sempre disponível.

ao Professor Márcio F. Miranda pela participação nas discussões técnicas e nos artigos fruto deste trabalho.

aos professores do PPGEL: Sidelmo e Ursula pelos ótimos cursos oferecidos.

aos meus pais, o apoio incondicional e a felicidade de tê-los.

aos meus irmãos: Bruno e Débora também pelo grande apoio.

aos meus sobrinhos: Yuri e Ryan pela alegria e afetividade.

aos amigos de mestrado: Adriana, Bachur, Cassius, Camila, Clarisse, Fábio, Anderson "Conan", João Victor, Paganotti e Maicon as trocas de experiências. Em especial ao Cláudio, Luís Filipe e suas respectivas familias, que em algumas ocasiões me hospedaram em suas casas, onde recebi ótimo tratamento. Também pelas brincadeiras que tornaram o convívio diário super prazeroso.

aos demais amigos do LEACOPI pela ótima convivência.

ao CEFET-MG pelo apoio financeiro concedido durante todo o período de mestrado e pela ótima estrutura que oferece aos estudantes e pesquisadores.

à todos portais de periódicos, revistas, jornais e livros eletrônicos, que permitiram o acesso rápido e eficiente ao conhecimento científico.

ao Google, Bing e Wikipedia o complemento que faz ao item anterior.

a todos que de alguma forma contribuíram com o meu progresso como aluno e como Ser.

O segredo da genialidade está na disciplina e dedicação.

Resumo

Neste trabalho é abordada a aplicação de funções de Lyapunov-Krasovskii dependentes de parâmetro e o uso de variáveis de folga via Lema de Finsler para o tratamento de problemas que envolvem a estimação do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ e a síntese de ganhos robustos de realimentação de estados que asseguram desempenho $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas lineares incertos invariantes no tempo, a tempo discreto, sujeitos a atraso variante nos estados. As incertezas são assumidas em um domínio politópico. Para essa classe de sistemas são obtidas formulações convexas e não convexas, dependentes do intervalo de variação do atraso tanto para estimação do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ quanto para a síntese de ganhos robustos de realimentação de estados. As formulações convexas são obtidas na forma de desigualdades matriciais lineares (LMIs), suficientes para a solução dos problemas em questão. Para as formulações não convexas, são propostos: um método de estimação de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ que combina o algoritmo *branch-and-bound* com formulações de estimação descritas por LMIs. Este método permite o cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ com qualquer precisão requerida. Outro método proposto refere-se à síntese de ganhos robustos de realimentação de estados e baseia-se em um problema de otimização em que os elementos do controlador são os parâmetros de otimização e o objetivo e a restrição de síntese são verificados em um conjunto finito de pontos. O conjunto inicial de pontos é formado pelos vértices do politopo, com uma inclusão iterativa, quando necessária, de pontos interiores. O projeto é validado para todo politopo através do método de estimação do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ proposto. Utilizam-se as formulações não convexas com objetivo de obter soluções menos conservadoras ou que obtenham resultados factíveis em situações nas quais formulações LMIs não apresentam soluções. Para as condições convexas e não convexas várias simulações são apresentadas ao longo da dissertação e são comparadas com outras abordagens recentes encontradas na literatura.

Palavras-chave: Sistemas discretos no tempo com atraso variante no vetor de estados. Condições dependentes do atraso. Desigualdades matriciais lineares. Domínio politópico. Custo garantido $\mathcal{H}_\infty$. Funções de Lyapunov-Krasovskii. Lema de Finsler. Otimização.

Abstract

In this work, it is discussed the application of parameter dependent Lyapunov-Krasovskii functions and the use of slack variables, via Finsler's Lemma, to deal with problems involving the estimation of the $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed cost and the synthesis of robust state feedback gains providing $\mathcal{H}_\infty$ performance to linear time invariant uncertain discrete time systems subject to time varying delay in the state. The uncertainties are assumed to be constrained to a polytopic domain. For this class of systems, convex and nonconvex formulations are obtained, depending on the delay interval variation of the delay, for both the $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed cost estimation and the synthesis of robust state feedback gains. The convex formulations are obtained in terms of linear matrix inequalities (LMIs), that are sufficient conditions to solve considered problems. They are proposed for the nonconvex formulations: a method of estimation of the $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed cost, which combines the branch-and-bound algorithm with formulations for $\mathcal{H}_\infty$ estimation described by LMIs. This method allows calculation of the $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed cost with any required precision. Another proposed method refers to the synthesis of robust state feedback gains, being based on an optimization problem where the parameters of the controller are the optimization variable and the objective and the restriction of synthesis are checked in a finite set of points. The initial set of points is composed by the vertices of the polytope, with an iterative inclusion whenever it is necessary, of interior points. The project is validated for the whole polytope by using the proposed method of estimation of the $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed cost. Nonconvex formulations are used to obtain less conservative solutions or feasible results in case where LMIs formulations do not achieve feasible solutions. For both conditions, convex and nonconvex, several simulations are presented throughout the text and they are compared with other recent approaches found in the literature.

Key-words: Uncertain linear systems. Discrete-time systems with time-varying delay in state vector. Delay-dependent conditions. Linear matrix inequalities. Polytopic domains. Guaranteed cost $\mathcal{H}_\infty$. Functions Lyapunov-Krasovskii. Finsler's lemma. Optimization.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Acrônimos e Notação

Acrônimos

LMI	Linear Matrix Inequality (desigualdade matricial linear)
LMIs	Linear Matrix Inequalities (desigualdades matriciais lineares)
EQ	Estabilidade Quadrática
L-K	Lyapunov-Krasovskii
RMS	Root Mean Squared (Raiz quadrada do valor médio ao quadrado)
SeDuMi	Self-Dual-Minimization
BnB	Branch-and-Bound

Notação

$\triangleq$	igual por definição
$\exists$	existe
$\in$	pertence a
$\notin$	não pertence a
$\cup$	união
$\subset$	está contido em
$\otimes$	Produto de Kronecker
∇f	gradiente (ou subgradiente) da função f
$\mathbf{z}$	operador avanço
Υ	domínio politópico de incerteza
$\tilde{\Upsilon}$	conjunto finito de pontos do domínio politópico de incerteza
γ	custo garantido $\mathcal{H}_\infty$
γ_c	custo ε-garantido $\mathcal{H}_\infty$
$\gamma_{c.g}$	custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ no conjunto Υ
$\gamma_{p.c}$	pior caso da norma $\mathcal{H}_\infty$ no conjunto Υ
$\tilde{\gamma}_{p.c}$	pior caso da norma $\mathcal{H}_\infty$ no conjunto $\tilde{\Upsilon}$
ε	precisão relativa usada como critério de parada no algoritmo BnB
ϵ	precisão relativa usada como critério de parada no algoritmo elipsoidal
ε_δ	precisão relativa usada no critério de parada do procedimento de projeto (síntese)

$\lambda_i(A)$	i-ésimo autovalor da matriz A
$\bar{\sigma}$	valor singular máximo, da relação entre a entrada de pertubação, w_k, e a saída de ponderação, z_k. Calculados como $\bar{\sigma}(\omega) = \max\limits_{\substack{i \in \mathcal{I}[1,n] \\ \omega \in [0, \frac{\pi}{T_s}]}} \sqrt{\lambda_i(G(j\omega,d)G(j\omega,d)^H)}$, sendo $G(j\omega,d) = (C + C_d(j\omega)^{-d})(j\omega I - A - A_d(j\omega)^{-d})^{-1}B_w + D_w$
ω	frequência angular calculada no intervalo $[0, \frac{\pi}{T_s}]$
T_s	período de amostragem
$\hat{\sigma}$	$\max\limits_{d \in \mathcal{I}[\underline{d},\overline{d}]} \bar{\sigma}(\omega)$
α	vetor de coeficientes da combinação convexa
$\alpha_{(\infty)}$	vetor de coordenadas correspondente ao valor $\gamma_{p.c}$
$\mathbf{Co}\{\cdot\}$	casca convexa do argumento que lista os vértices do politopo
N_ε	número de iterações observado no critério de parada do algoritmo elipsoidal
$\mathfrak{O}$	utilizado para descrever complexidade computacional
$\mathrm{Vert}(\cdot)$	conjunto de vértices do argumento (politopo)
$\mathrm{Vol}(\cdot)$	volume do argumento (elipsóide)
$\mathcal{D}$	politopo de matrizes (sistema em malha aberta)
$\tilde{\mathcal{D}}$	politopo de matrizes (sistema em malha fechada)
Ω	indica as matrizes dos sistemas tratados nesse trabalho
Ω_i	indica as matrizes do i-ésimo vértice do sistema em malha aberta, $\Omega_i = \left[\begin{array}{cc\|c\|c} A_i & A_{di} & B_i & B_{wi} \\ \hline C_i & C_{di} & D_i & D_{wi} \end{array}\right]$
$\tilde{\Omega}_i$	indica as matrizes do i-ésimo vértice do sistema em malha fechada, $\tilde{\Omega}_i = \left[\begin{array}{cc\|c} \tilde{A}_i & \tilde{A}_{di} & B_{wi} \\ \hline \tilde{C}_i & \tilde{C}_{di} & D_{wi} \end{array}\right]$
$\star$	indica bloco simétrico nas LMIs em relação à diagonal principal
A	notação para matrizes (letras maiúsculas do alfabeto latino)
A^T	indica a operação de transposição em um vetor ou matriz
$A > 0$	indica que a matriz A é simétrica definida positiva
$A \geq 0$	indica que a matriz A é simétrica semi-definida positiva
A^H	indica matriz transposta conjugada de A
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{R}_+$	conjunto dos números reais não negativos
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais (incluindo o zero)
$\mathbb{N}_*$	conjunto dos números naturais (excluindo o zero)
$\mathbf{I}$	matriz identidade de dimensão apropriada
$\mathbf{0}$	matriz de zeros de dimensão apropriada
N	especialmente utilizada para denotar o número de vértices de um politopo
k	número da amostragem
d_k	valor do atraso no instante de amostragem k
$\underline{d}$	valor mínimo do atraso
$\overline{d}$	valor máximo do atraso
$\mathcal{I}[\underline{d},\overline{d}]$	Intervalo de variação do atraso
$\ell_2[0,\infty)$	espaço dos sinais discretos de energia limitada, isto é, $\sum\limits_0^\infty f_k^T f_k < \infty$

Φ_d	espaço das funções vetoriais discretas que mapeiam o intervalo $\mathcal{I}[-d,0]$ em $\mathbb{R}^n$ com $d \in \mathbb{N}_*$ finito
$\phi^d_{t,j}(k) \in \Phi_d$	denota a sequência de $d+1$ vetores x_k com $k \in \mathcal{I}[t-d,t]$. O j-ésimo termo dessa sequência é $x_{t+j-1-d} = \phi^d_{t,j}(k) \in \mathbb{R}^n$
$\parallel \phi^d_t(k) \parallel_D$	$\max\limits_{j \in \mathcal{I}[1,(d+1)]} \parallel \phi^d_{t,j}(k) \parallel$
$\parallel \cdot \parallel$	norma euclidiana de um vetor no $\mathbb{R}^n$
Φ^δ_d	conjunto definido por $\Phi^\delta_d = \{\phi^d_t(k) \in \Phi_d \ : \parallel \phi^d_t(k) \parallel_D < \ \delta\}$, com $\delta \in \mathbb{R}_+$
$\hat{\phi}_d$	representa a sequência nula $\hat{\phi}_d = \underbrace{\{\mathbf{0} \ ... \ \mathbf{0}\}}_{(d+1)\text{termos}}$

Capítulo 1

Introdução Geral

1.1 Problema Estudado

A presença de atrasos em sistemas controlados digitalmente é inevitável. Sistemas robóticos, processos de usinagem, redes de comunicação de dados são exemplos de processos que partilham de atrasos, que interferem tanto na estabilidade quanto no desempenho desses sistemas. Em especial, a investigação de sistemas lineares sujeitos a atrasos nos estados tem recebido grande atenção nos últimos anos, como pode ser observado em vários livros nessa área. Veja, os trabalhos de [MZJ87], [DV97], [Mah00], [Nic01], [GKC03], [NG04].

Os primeiros registros de equações com atraso foram feitos no século *XVIII* e são creditados a Bernoulli e Euler. Uma análise mais elaborarada foi feita na década de 1920 por Volterra [Vol28] em seus estudos sobre dinâmica populacional e avanço de epidemias. O estudo da estabilidade de tais sistemas com a abordagem de Lyapunov só foi possível com as idéias de Krasovskii [Kra63], que propôs, nesse caso, que o funcional de Lyapunov deveria ponderar os valores do estado entre o instante atual e o instante atrasado que influencia o comportamento atual do sistema. Para apresentação dessa teoria indica-se a referência [HVL93]. Nas últimas décadas têm-se percebido um aumento considerável do interesse por sistemas com atrasos, principalmente devido ao fato de que, tais sistemas podem ser melhores controlados por leis de controle projetadas a partir de modelos não simplificados pela desconsideração do atraso.

Condições para análise de estabilidade e para síntese de controladores estabilizantes para tais sistemas podem ser classificadas em dependentes ou independentes do atraso. Observa-se que a utilização de condições independentes do atraso, para análise de sistemas estáveis com atrasos limitados, pode levar a resultados muito conservadores. Por outro lado, condições dependentes do atraso levam, em geral, a resultados conservadores se aplicadas em sistemas cuja estabilidade independe do valor do atraso [ML08b]. As técnicas mais utilizadas para investigar sistemas com atrasos são as baseadas em funções de Razumikhin ou de Lyapunov-Krasovskii (L-K)(no caso de sistemas discretos ou funcionais no caso contínuo no tempo), sendo que as funções de L-K têm sido mais utilizadas a partir da década de 1990 [Nic01]. O estudo de sistema contínuos no tempo com atrasos nos estados recebeu muito mais atenção nos últimos anos do que os sistemas discretos no tempo com atrasos nos estados. Veja por exemplo os trabalhos de [Ric03], [XL08] e referências internas. O trabalho de [Ld97] apresenta resultados

que tornaram-se um marco no contexto de sistemas contínuos no tempo com atrasos nos estados. Em [dOG04] é apresentado um estudo para a síntese de compensadores dinâmicos para sistemas contínuos no tempo com atrasos nos estados. Nessa síntese, a estrutura do sistema é reproduzida no controlador que resulta em uma função de transferência não-racional. Esse mesmo tipo de controlador é investigado por [GBdSJ08] considerando a saturação no sinal de controle. Condições baseadas no teorema do ganho pequeno são investigadas por [VLP07], estendendo-se os resultados de [ZKT01]. Nesse caso, o atraso é interpretado como uma perturbação limitada em norma que afeta o sistema. Em [LPCT07] é investigada uma classe mais geral de sistemas com atrasos nos estados, denominada sistemas neutrais, e são fornecidas condições independentes do atraso para a análise de estabilidade robusta.

Uma das razões para o maior investimento da comunidade acadêmica em sistemas contínuos no tempo com atrasos nos estados vem do fato de que a estabilidade de sistemas discretos no tempo com atrasos invariantes no tempo e precisamente conhecidos pode ser investigada utilizando-se um sistema aumentado livre de atrasos [KH98]. Porém, essa técnica apresenta limitações importantes para o estudo da estabilidade de sistemas com incertezas, sistemas de grandes dimensões, sistemas com atrasos variantes no tempo e para síntese de controladores robustos. Além disso, grande parte das condições encontradas na literatura são independente do atraso e são baseadas na estabilidade quadrática [ZY08]. Nas condições baseadas em estabilidade quadrática, emprega-se uma função de L-K cujas matrizes são independentes da incerteza, o que pode levar a resultados conservadores [Lei05].

Diversas abordagens podem ser encontradas na literatura para a classe dos sistemas discretos no tempo com atrasos nos estados. Algumas delas lidam com sistemas precisamente conhecidos [GLWW04], [ZWH04], [SKYK99]. Em [FS05b] e [FS05a] são propostas condições dependentes do atraso, convexas para análise de estabilidade e não convexas para síntese de controladores. Esses trabalhos utilizam a abordagem de sistemas descritores (singulares) e as incertezas são tratadas como limitadas em norma. Em [OC08] é apresentado um estudo sobre sistemas discretos no tempo, incertos, representados por transformações fracionárias não lineares (NFT, do inglês *nonlinear fractional transformation*). Nesse caso, os autores consideram que o atraso nos estados é invariante no tempo. Em [XC04] é utilizada uma abordagem não convexa para a síntese de controladores robustos $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas discretos no tempo com atrasos variantes no tempo e incertezas limitadas em norma. Em [DJZ08] são tratadas condições para a estabilização robusta de sistemas chaveados com atrasos nos estados e incertezas limitadas em norma. As condições de síntese não são convexas. Condições para controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ são propostas para sistemas discretos no tempo precisamente conhecidos com atraso variante no tempo nos estados em [HWHS08] e [PCE$^+$05]. Nesse último, são também considerados os sistemas contínuos no tempo e incertezas politópicas afetando todas as matrizes do sistema. Diferentemente da proposta deste trabalho, as condições de síntese em [HWHS08] não são convexas, ainda que tratem apenas de sistemas precisamente conhecidos. Condições convexas independentes do atraso para análise de estabilidade robusta e para a síntese robusta de sistemas discretos no tempo e incertezas politópicas foram propostas em [LTP09] para atraso invariante no tempo presente nos estados e em [LM08] para atraso variante no tempo. A estabilização robusta com desempenho $\mathcal{H}_\infty$ aliada à estabilidade exponencial é tratada no contexto de sistemas com atrasos variantes no

tempo em [HYX07]. Porém, a condição de síntese proposta não é convexa. Em [HARY07], é considerada a classe dos sistemas descritores (ou singulares) com atraso variante no tempo nos estados e incertezas limitadas em norma, sendo propostas condições convexas de análise e de síntese robustas.

Assim, neste trabalho são estudadas técnicas para a estimação do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ e para a síntese de ganhos robustos de realimentação de estados que assegurem um desempenho $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas incertos discretos no tempo e invariantes no tempo, com atraso variante no tempo afetando o vetor de estados. As incertezas são invariante no tempo e assumidas em um domínio politópico.

1.2 Motivação

Uma grande vantagem do uso de funções de L-K dependentes de parâmetros para a estimação do custo $\mathcal{H}_\infty$ e para síntese de ganhos robustos, por realimentação de estados com minimização do custo $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas lineares incertos e invariantes no tempo, a tempo discreto, com atraso variante no vetor de estados, é que, com essas, podem ser obtidas condições convexas de dimensão finita descritas em termos de desigualdades matriciais lineares (em inglês, LMIs - *Linear Matrix Inequalities*)[BGFB94]. A utilização de LMIs começou a se desenvolver a partir de 1980 com a criação e aperfeiçoamento de algoritmos de otimização convexa, como os de pontos interiores. A partir de então, com o surgimento de pacotes computacionais especializados, por exemplo, o LMI *Control Toolbox* [GNLC95], e o SeDuMi [Stu99], ambos para o uso do *software* $MATLAB^{\circledR}$, resolver LMIs tornou-se um problema de fácil solução numérica. A formulação de um problema na forma de LMIs é interessante pois a resolução de LMIs é feita com algoritmos de tempo polinomial (em função do número de variáveis e de linhas de LMIs). Conforme dito em [BGFB94], formular o problema como uma LMI, equivale a resolvê-lo. Uma vez formulado o problema como LMI, outra ferramenta que pode ser empregada para a redução de conservadorismo da análise é a inserção de variáveis extras ao problema de otimização [dOS01]. Com isso são obtidas condições convexas em que as matrizes de L-K não estão acopladas com as matrizes do sistema, sendo possível tratar a presença de incertezas politópicas em todas as matrizes do sistema. O Lema de Finsler é utilizado para tal fim. A utilização da desigualdade de Jensen permite uma majoração das funções empregadas de maneira menos conservadoras que outras abordagens disponíveis na literatura [ZY08], sendo também empregada neste trabalho.

Em geral ao se caracterizar problemas da teoria de controle robusto na forma de problemas de otimização convexos, baseados em LMIs, se introduz algum grau de conservadorismo na formulação, a solução obtida pode ser um subótimo do problema original. Assim, o trabalho [Gon06] é outra motivação para tratar os problemas aqui estudados, permitindo desenvolver um procedimento de análise de estabilidade robusta com desempenho robusto $\mathcal{H}_\infty$ e um procedimento de projeto, ambos não convexos, que proporcionem resultados menos conservadores que as formulações LMIs, ou que obtenham resultados em casos nos quais formulações LMIs não apresentem soluções factíveis.

1.3 Objetivos

O objetivo deste trabalho é propor condições convexas baseadas no trabalho de [ZY08] e não convexas baseadas em [Gon06], utilizando funções de L-K dependente de parâmetro para a estimação do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ e para síntese de ganhos robustos, por realimetação de estados, com minimização do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas discretos no tempo com atraso variante no vetor de estados. Através dos procedimentos não convexos, busca-se obter resultados menos conservadores do que os obtidos por formulações LMIs, ou que obtenha resultados viáveis em casos nos quais formulações LMIs não apresentem soluções factíveis.

1.4 Escopo

As estratégias de análise e de projeto desenvolvidas neste trabalho são destinados a sistemas incertos lineares invariantes no tempo, a tempo discreto, com atraso no vetor de estados e domínio politópico de incerteza, dados por:

$$\Omega(\alpha) : \left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & A(\alpha)x_k + A_d(\alpha)x_{k-d_k} + B(\alpha)u_k + B_w(\alpha)w_k, \\ z_k & = & C(\alpha)x_k + C_d(\alpha)x_{k-d_k} + D(\alpha)u_k + D_w(\alpha)w_k, \end{array} \right. \tag{1.1}$$

em que k é o instante de amostragem e as matrizes $A(\alpha)$, $A_d(\alpha)$, $B(\alpha)$, $B_w(\alpha)$, $C(\alpha)$, $C_d(\alpha)$, $D(\alpha)$ e $D_w(\alpha)$ são matrizes incertas, invariantes no tempo, adequadamente definidas em termos de $x_k = x(k) \in \mathbb{R}^n$, o vetor de estados no instante k, $u_k = u(k) \in \mathbb{R}^m$, que representa os m sinais de controle, $w_k = w(k) \in \mathbb{R}^v$, que contém v entradas exógenas, e $z_k = z(k) \in \mathbb{R}^p$, o vetor de p sinais de saída de ponderação. Essas matrizes podem ser descritas por um politopo $\mathcal{D}$ com vértices conhecidos:

$$\mathcal{D} = \left\{ \Omega(\alpha) \in \mathbb{R}^{n+p\times 2n+m+v} : \Omega(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \Omega_i,\ \alpha \in \Upsilon \right\}, \tag{1.2}$$

em que:

$$\Omega_i = \left[\begin{array}{cc|c|c} A_i & A_{di} & B_i & B_{wi} \\ \hline C_i & C_{di} & D_i & D_{wi} \end{array} \right], \quad i \in \mathcal{I}[1, N], \tag{1.3}$$

$$\Upsilon = \left\{ \alpha : \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 0, \quad i \in \mathcal{I}[1, N] \right\}, \tag{1.4}$$

O conjunto Υ também pode ser representado como um simplexo no espaço de dimensão $N-1$:

$$\Upsilon = \left\{ \tilde{\alpha} \in \mathbb{R}^{N-1} \ :\ \alpha_i \geq 0, \quad i \in \mathcal{I}[1, N-1], \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \leq 1, \ \right\}, \tag{1.5}$$

com $\alpha_N = 1 - \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i$.

O atraso, denotado por d_k, é suposto variante no tempo, sendo dado por:

$$d_k \in \mathcal{I}\left[\underline{d}, \overline{d}\right], (\underline{d}, \overline{d}) \in \mathbb{N}_*^2 \tag{1.6}$$

com $\underline{d}$, $\overline{d}$ representando os valores mínimo e máximo de d_k, respectivamente. Qualquer $\Omega(\alpha) \in \mathcal{D}$ pode ser escrito como uma combinação convexa dos N vértices Ω_i, $i \in \mathcal{I}[1, N]$, de $\mathcal{D}$.

A lei de controle considerada é:

$$u_k = Kx_k + K_d x_{k-d_k} \tag{1.7}$$

com $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $K_d \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
Usando (1.7) em (1.1)-(1.3), o sistema incerto em malha fechada resultante é dado por

$$\tilde{\Omega}(\alpha) : \left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & \tilde{A}(\alpha)x_k + \tilde{A}_d(\alpha)x_{k-d_k} + B_w(\alpha)w_k, \\ z_k & = & \tilde{C}(\alpha)x_k + \tilde{C}_d(\alpha)x_{k-d_k} + D_w(\alpha)w_k, \end{array} \right. \tag{1.8}$$

com $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathcal{D}}$,

$$\tilde{\mathcal{D}} = \left\{ \tilde{\Omega}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n+p\times 2n+v} : \tilde{\Omega}(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \tilde{\Omega}_i, \quad \alpha \in \Upsilon \right\}, \tag{1.9}$$

em que

$$\tilde{\Omega}_i = \left[\begin{array}{cc|c} \tilde{A}_i & \tilde{A}_{di} & B_{wi} \\ \hline \tilde{C}_i & \tilde{C}_{di} & D_{wi} \end{array} \right], \quad i \in \mathcal{I}[1, N], \tag{1.10}$$

em que as matrizes $\tilde{A}_i$, $\tilde{A}_{di}$, $\tilde{C}_i$ e $\tilde{C}_{di}$ são definidas como

$$\tilde{A}_i = A_i + B_i K, \quad \tilde{A}_{di} = A_{di} + B_i K_d, \tag{1.11}$$

$$\tilde{C}_i = C_i + D_i K, \quad \tilde{C}_{di} = C_{di} + D_i K_d. \tag{1.12}$$

1.5 Metodologia

Para o estudo da estimação do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas discretos no tempo com atraso variante no vetor de estados, elaboram-se primeiro condições convexas baseadas em funções de L-K [ZY08] e formuladas em termos de LMIs. A partir dessas condições, derivam-se condições para síntese de controladores robustos, também formuladas em termos de LMIs. A condição de síntese LMI é utilizada para obter ganhos robustos por realimetação de estados que além de garantir a estabilidade robusta, minimizam o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ da classe de sistemas estudados.

Uma revisão da literatura foi realizada, sobre os conceitos fundamentais da teoria de controle robusto, sistemas discretos com atrasos nos estados e algumas ferramentas matemáticas necessárias para lidar com o problema em questão. Em seguida uma candidata a função de L-K é proposta a satisfazer as condições de estabilidade estabelecidas pelo método de L-K [Kra63]. Os coeficientes das equações que regem os sistemas estudados devem ser incorporados às especificações de estabilidade e desempenho de tais funções. Esse procedimento, dentre outras maneiras, é realizado com auxílio de ferramentas da álgebra linear como o Lema de Finsler. Para tratar os termos cruzados que aparecem no desenvolvimento da condição, a desigualdade de Jensen é empregada fornecendo uma majoração menos conservadora que outras encontradas na literatura. Veja o Apêndice A para mais detalhes dessas ferramentas.

Grande parte das pesquisas na área de estimação do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ e controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ são baseadas em problemas de otimização convexos em termos de LMIs. Como uma forma alternativa, são propostas neste trabalho, baseado em [Gon06], procedimentos não convexos, buscando obter resultados menos conservadores do que os obtidos por formulações LMIs, ou que obtenha resultados em casos nos quais formulações LMIs não apresentem soluções factíveis. O conservadorismo das condições na forma de LMIs, está ligado a relaxação para obtenção de condições convexas. Para o problema de estimação do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, propõe-se uma estratégia que combina o algoritmo *branch-and-bound* (BnB) com formulações LMI de estimação do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$. A idéia básica desse algoritmo é a de divisão sucessiva do politopo. Ao se dividir o politopo, as formulações LMIs produzem resultados menos conservadores por tratarem regras mais restritas do espaço de incerteza. A possibilidade de determinação da precisão do cálculo é devida à característica do algoritmo BnB de utilizar duas funções que convergem para o valor ótimo, uma aproximando por valores inferiores e outra por valores superiores ao do máximo (ou mínimo) global. Na estimação do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, a função limitante inferior é escolhida como a norma $\mathcal{H}_\infty$, calculada nos vértices do politopo e de suas partições e a função limitante superior é o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, calculado com formulações LMIs, para o politopo e suas partições geradas por sucessivas divisões. Uma técnica de partição de politopos desenvolvida por [Gon06] é utilizada, permitindo que politopos de qualquer formato, em qualquer dimensão, sejam particionados de forma eficiente e que garantam a convergência do algoritmo BnB [GPTM06].

Para o problema de controle robusto $\mathcal{H}_\infty$, propõe-se um problema de otimização mono-objetivo não convexo, cujos parâmetros de otimização são os próprios parâmetros dos controladores. No caso de sistemas incertos, esse problema requer a otimização do pior caso de um número infinito de sistemas pertencentes ao domínio da incerteza. Para viabilizar a solução desse problema, primeiro a função objetivo e a restrição são verificadas em um conjunto finito de pontos, definidos inicialmente pelos vértices do politopo. Depois, é necessário uma validação do resultado obtido pelo processo de otimização para todo o politopo. Se na validação for verificado que o pior caso da função objetivo ocorre fora dos vértices ou a restrição não é atendida em todo politopo, os pontos de pior caso são incluídos no conjunto finito de pontos avaliados e o processo de otimização é repetido. Os passos de otimização e validação são repetidos até a restrição seja atendida e que a função objetivo convirja para um valor com determinada precisão relativa.

As condições convexas e não convexas são implementadas computacionalmente, permitindo a avaliação das mesmas. A avaliação e discussão dos resultados, baseiam-se em simulações, realizadas a partir de modelos estudados na literatura para a classe de sistemas abordados nesse trabalho.

1.6 Estrutura da dissertação

O **Capítulo** 2 apresenta conceitos fundamentais necessários para desenvolvimento e compreensão do trabalho, dentre eles: controle robusto, sistemas com atraso nos estados, estabilidade de sistemas com atraso nos estados, estabilidade quadrática, funções dependentes de parâmetros,

norma $\mathcal{H}_\infty$, custo garantido $\mathcal{H}_\infty$.

No **Capítulo** 3 é investigado o uso de funções de L-K dependentes de parâmetros e variáveis extras para obter condições convexas para a estimação do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, e o projeto de ganhos robustos por realimetação de estados, que além de garantirem a estabilidade robusta, minimizem o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ da classe de sistemas estudados nesse trabalho. As condições propostas são do tipo dependentes do atraso. Exemplos ilustrativos, incluindo testes exaustivos, são apresentados para demonstrar a eficácia das condições propostas.

O **Capítulo** 4 apresenta procedimentos alternativos não convexos para a estimação do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ e controle robusto $\mathcal{H}_\infty$. O capítulo divide-se em duas partes: a primeira apresenta resultados na área de análise de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ da classe de sistemas estudados. É proposta uma estratégia de cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ com uma precisão ε especificada, denominados ε-garantidos, baseada na combinação de formulações LMIs de análise de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ e do algoritmo BnB. Com isso, é possível calcular o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ com qualquer precisão requerida, o pior caso da norma $\mathcal{H}_\infty$ no espaço de incerteza e a coordenada do ponto de pior caso; e segundo, para o controle robusto $\mathcal{H}_\infty$, uma proposta de projeto mono-objetivo $\mathcal{H}_\infty$ será aplicada a síntese de controladores por realimentação de estados para sistemas lineares invariantes no tempo, a tempo discreto, com atrasos no estados e domínios politópicos da incerteza. A estratégia de projeto é baseada em um procedimento iterativo de dois passos: o cálculo do controlador por algoritmo de otimização, diretamente no espaço dos parâmetros do controlador, considerando um conjunto finito de pontos do politopo (os vértices), e depois uma validação do projeto para todo o politopo utilizando os procedimentos de análise de desempenho, que determinam se existe a necessidade de acrescentar novos pontos no conjunto finito para nova rodada do procedimento. Exemplos ilustrativos são apresentados, comparando os resultados com estratégias baseadas em LMIs.

No **Capítulo** 5, são apresentados alguns comentários sobre os estudos desenvolvidos, e também algumas propostas de trabalhos futuros.

O **Apêndice** A contém as provas das ferramentas da álgebra linear e matemática frequentemente utilizadas no desenvolvimento das condições convexas para a estimação do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ e controle robusto $\mathcal{H}_\infty$. Apresenta também uma breve definição de desigualdades matriciais lineares (LMIs).

Em cada capítulo é apresentada uma breve revisão bibliográfica específica sobre o assunto tratado.

1.7 Comentários Gerais

Supõe-se que todos sistemas incertos investigados neste trabalho possuem matrizes incertas que pertencem a politopos convexos com número de vértices finitos e conhecidos.

Os resultados dos exemplos numéricos apresentados neste trabalho foram obtidos a partir da programação das condições LMIs, utilizando-se o *software* $MATLAB$®, o *parser* YALMIP e o toolbox SeDuMi [Stu99]. Mais detalhes sobre resolvedores de programação semidefinida podem ser encontradas no *website* do YALMIP, seção *solvers*. Os testes foram feitos em um *notebook* com processador $INTEL$® de núcleo duplo ($2 \times 2.26\ GHz$), e $2.95\ GB$ de memória RAM.

Capítulo 2

Preliminares e Definições

2.1 Controle Robusto

Os sistemas físicos e o ambiente externo no qual eles operam não podem ser modelados precisamente, devido ao fato de estarem sujeitos a pertubações significantes [DB09, pág.593]. Consequentemente, o modelo matemático obtido pode apresentar diferentes tipos de incertezas, decorrentes de dinâmicas não modeladas, incertezas paramétricas, ruídos, linearização, etc. Dependendo da sua origem, essas incertezas podem ser classificadas como estruturadas, paramétricas. Assim, é importante que as incertezas sejam levadas em conta na análise de estabilidade, desempenho ou na síntese de controladores para o sistema. Para tal, é conveniente representar o sistema físico por um modelo matemático que represente o sistema nominal e as incertezas em torno desse. A análise ou a síntese são feitas considerando as incertezas desse modelo.

A análise ou a síntese de sistemas de controle na presença de incertezas são denominadas controle robusto, que tem como objetivo manter a estabilidade e ou desempenho do sistema apesar dos erros do modelo em relação ao sistema real [DB09]. O controle robusto também é utilizado para minimizar o efeito sobre certas variáveis do sistema devido a pertubações externas a esse, como ruídos, mudanças de temperatura, pertubações de carga, etc [Tro00].

Os problemas de controle robusto podem ser divididos em dois problemas fundamentais: um problema de estabilização robusta e outro de desempenho robusto. No primeiro caso, busca-se manter o sistema estável para uma dada classe de incertezas e, no segundo, além de assegurar a estabilidade robusta, o sistema em malha fechada deve atender a um conjunto de especificações ou critérios de desempenho [Tro00]. Dentre os critérios de desempenho possíveis estão o custo garantido $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$, alocação regional de polos, estabilização com taxa de decaimento garantida, dentre outros.

Quando se trabalha com sistemas incertos, um problema é a forma de tratar a incerteza, visto que dependendo do tipo de representação matemática adotada para as incertezas, pode-se inserir mais restrições na busca de solução dos problemas de análise de estabilidade ou síntese de compensadores. Neste trabalho, utilizam-se as incertezas caracterizadas na forma de incertezas politópicas.

Um conjunto $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \mathcal{A}x \leq b\}$ é um **poliedro** definido pela matriz $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m\times n} = [a_1, ..., a_m]^T$ e pelo vetor $b \in \mathbb{R}^m$. Se o poliedro é fechado então $\mathcal{P}$ é denominado **politopo**

[Gon06]. Um politopo também pode ser definido como uma combinação convexa, de um número finito de pontos, chamados vértices do politopo. O conjunto de vértices $\{\Omega_1, ..., \Omega_N\}$ resulta em um $\mathcal{P} = \mathbf{Co}(\Omega_1, ..., \Omega_N)$, dado por

$$\mathcal{P} \;=\; \left\{ \Omega(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \Omega_i, \;\; \alpha \in \Upsilon \right\} \tag{2.1}$$

em que

$$\Upsilon = \left\{ \alpha : \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1, \;\; \alpha_i \geq 0, \quad i \in \mathcal{I}[1, N] \right\} \tag{2.2}$$

sendo $\mathbf{Co}(\cdot)$ a casca convexa do argumento.

Nesse caso o conjunto $\mathcal{P}$ é convexo, fechado e as matrizes Ω_i são conhecidas. Assim $\Omega(\alpha) \in \mathcal{P}$ pode ser descrito por uma combinação convexa dos vértices Ω_i.

Uma particularidade importante dessa abordagem para descrever incertezas é a convexidade do conjunto. Por essa propriedade do politopo, busca-se um conjunto de restrições de desigualdades lineares que se é satisfeita nos vértices do politopo, então garante-se que essas mesmas restrições estão satisfeitas no interior da região formada por esses vértices. Essa propriedade da convexidade será explorada neste trabalho, para obter formulações convexas de alguns problemas de controle robusto. Uma desvantagem é o problema do crescimento exponencial das condições a serem testadas, pois ao testar, por exemplo, as condições para um sistema com 5 elementos incertos, tem-se que verificar 2^5 vértices, ou seja, têm-se que testar as condições 32 vezes.

2.2 Sistemas com Atraso nos Estados

A classe de sistemas considerada neste trabalho é aquela formada por sistemas lineares incertos, invariantes e discretos no tempo com atraso variante no vetor de estado, descrito por

$$x_{k+1} = A(\alpha)x_k + A_d(\alpha)x_{k-d_k} \tag{2.3}$$

$$x_k = \phi_0(k), \quad k \in \mathcal{I}[-\overline{d}, 0] \tag{2.4}$$

em que $\phi_0(k)$ é a sequência inicial, $k \in \mathbb{N}$ é o instante de amostragem, e as matrizes $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times n}, A_d(\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ são incertas e invariantes no tempo, adequadamente definidas em termos de $x_k = x(k) \in \mathbb{R}^n$ e dadas por:

$$\begin{bmatrix} A & \vdots & A_d \end{bmatrix}(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \begin{bmatrix} A_i & \vdots & A_{di} \end{bmatrix}, \alpha \in \Upsilon \tag{2.5}$$

O atraso d_k, é suposto limitado e variante no tempo, sendo dado por

$$d_k \in \mathcal{I}\left[\underline{d}, \overline{d}\right], (\underline{d}, \overline{d}) \in \mathbb{N}_*^2 \tag{2.6}$$

com $\underline{d}$, $\overline{d}$ representando os valores mínimo e máximo de d_k, respectivamente. Utilizando a notação de [ML08a], Φ_d denota o espaço das funções vetoriais discretas que mapeiam o intervalo

$\mathcal{I}[t-d,t]$ em $\mathbb{R}^n$ com $d \in \mathbb{N}_*$ finito. $\phi_t(k) \in \Phi_d$ denota uma sequência composta de $d+1$ vetores $x_k \in \mathbb{R}^n$, para $k \in \mathcal{I}[t-d,t]$. O j-ésimo vetor dessa sequência é $\phi_{t,j}(k) \in \mathbb{R}^n$. É definido por

$$\|\phi_t(k)\|_D \;=\; \max_{j\in\mathcal{I}[1,(d+1)]} \|\phi_{t,j}(k)\| \tag{2.7}$$

em que $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana de um vetor no $\mathbb{R}^n$. Φ_d^δ é o conjunto definido por $\Phi_d^\delta = \{\phi_t(k) \in \Phi_d \;:\; \|\,\phi_t(k)\,\|_D < \;\delta\}$, com $\delta \in \mathbb{R}_+$. Em especial, considere a sequência formada por $\overline{d}+1$ vetores nulos:

$$\hat{\phi}_{\overline{d}} = \underbrace{\{\mathbf{0},...,\mathbf{0}\}}_{(\overline{d}+1)\text{ elementos}}$$

Se $\phi_t(k) = \hat{\phi}_{\overline{d}}$, então essa é uma condição de equilíbrio para o sistema (2.3), pois neste caso, $x_{k+1} = x_k = \mathbf{0}$, $\forall k > t$.

Definição 2.1 *Considere o sistema (2.3) para um valor específico de α. A solução trivial desse sistema é dita uniformemente assintoticamente estável se existe $\delta \in \mathbb{R}_+$ tal que para toda condição inicial $\phi_0(k) \in \Phi_{\overline{d}}^\delta$ é verificado*

$$\lim_{t\to\infty} \phi_{t,j}(k) = 0, \quad \forall j \in \mathcal{I}[t-\overline{d},t]$$

Nesse caso, o sistema (2.3) com valor de α dado é dito Schur estável.

Note que a Definição 2.1 assegura que para qualquer condição inicial dada por $\phi_0(k) \in \Phi_{\overline{d}}^\delta$, a sequência $\Phi_t^{\overline{d}}(k)$ aproxima-se da sequência nula $\hat{\phi}_d$ quando t é suficientemente grande.

Definição 2.2 *Considere o sistema (2.3) com $\alpha \in \Upsilon$. Esse sistema é dito robustamente uniformemente assintoticamente estável, se as soluções triviais de (2.3) são uniformemente assintoticamente estáveis para todo $\alpha \in \Upsilon$. Nesse caso o sistema (2.3) é dito robustamente Schur estável.*

2.2.1 Caso com atraso invariante no tempo

O estudo de sistemas com atrasos é, em geral, uma tarefa bem mais complexa que para sistemas livres de atrasos. Para demonstrar esse aumento de dificuldade, considere a avaliação da localização das raízes para esses sistemas. Seja (2.3) com atraso fixo $d_k = d$, temos

$$x_{k+1} = A(\alpha)x_k + A_d(\alpha)x_{k-d} \tag{2.8}$$

cujo polinômio característico é dado por

$$\delta_d(z,\alpha) \triangleq \det(\mathbf{zI} \;-\; A(\alpha) \;-\; A_d(\alpha)\mathbf{z}^{-d}) \tag{2.9}$$

Diz-se que o sistema (2.8) é Schur estável, se todas raízes da função $\delta_d(z,\alpha)$ estão no interior do circulo unitário com centro na origem do plano complexo. Nesse caso, diz-se que as raízes de $\delta_d(z,\alpha)$ são estáveis. A complexidade de avaliar as raízes dessa função é devido ao aumento no grau do polinômio característico em relação ao sistema livre de atraso. No sistema com atraso,

existem $n(d+1)$ raízes no polinômio característico, enquanto que um sistema de mesma ordem e sem atraso possui polinômio característico com apenas n raízes, que terão que ser testadas para todo $\alpha \in \Upsilon$.

Além disso, sistemas discretos no tempo com atraso nos estados podem ter sua estabilidade estudada utilizando-se um sistema aumentado e livre de atraso. Por exemplo, se a dinâmica de um sistema depende do último instante de amostragem, tem-se

$$x_{k+1} = A(\alpha)x_k + A_d(\alpha)x_{k-1}$$

podendo-se fazer

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}\tilde{x}_k \tag{2.10}$$

em que

$$\tilde{x}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}(\alpha, d=1) = \begin{bmatrix} A(\alpha) & A_d(\alpha) \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

Similarmente, se o atraso for igual a dois, tem-se que $x_{k+1} = A(\alpha)x_k + A_d(\alpha)x_{k-2}$ pode ser reescrito como em (2.10) com

$$\tilde{x}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ x_{k-2} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}(\alpha, d=2) = \begin{bmatrix} A(\alpha) & \mathbf{0} & A_d(\alpha) \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

e assim sucessivamente. Como evidenciado, quanto maior for o atraso, maior será a dimensão do sistema aumentado obtido com o uso dessa técnica, dificultando sua utilização para sistemas naturalmente de grande dimensões. A limitação dessa técnica é evidente, visto que não pode ser aplicada para o estudo de sistemas com atraso variante no tempo, proposto neste trabalho.

Uma outra particularidade que pode ocorrer nos sistemas com atraso invariante no tempo são as oscilações que ocorrem no comportamento dos estados nas amostras próximas do valor do atraso invariante no tempo utilizado e seus primeiros múltiplos. A causa desse efeito é devido à utilização do atraso invariante d em um sistema que tem sua dinâmica influenciada por um atraso variante d_k. Para ilustrar esse comportamento, considere o teste de relaxação em que o atraso invariante no tempo $d = 20$, a condição inicial dos estados do sistema $x_k = [10, -10]^T$ para $k \in [-d, 0]$, e o sistema com atraso nos estados é definido como:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.56 & 0.16 \\ 0 & -0.64 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.16 & 0.08 \\ 0 & 0.16 \end{bmatrix} x_{k-d} \tag{2.13}$$

$$y_k = [1 \quad 1]\, x_k$$

A Figura 2.1 evidencia esse efeito que ocorre no comportamento do estado x_{2k} e na saída y_k, que é a soma do estado x_{1k} e x_{2k}. Estas oscilações ocorrem parcialmente em alguns estados do sistema com atraso invariante como na Figura 2.1, ou podem ocorrer em todos estados.

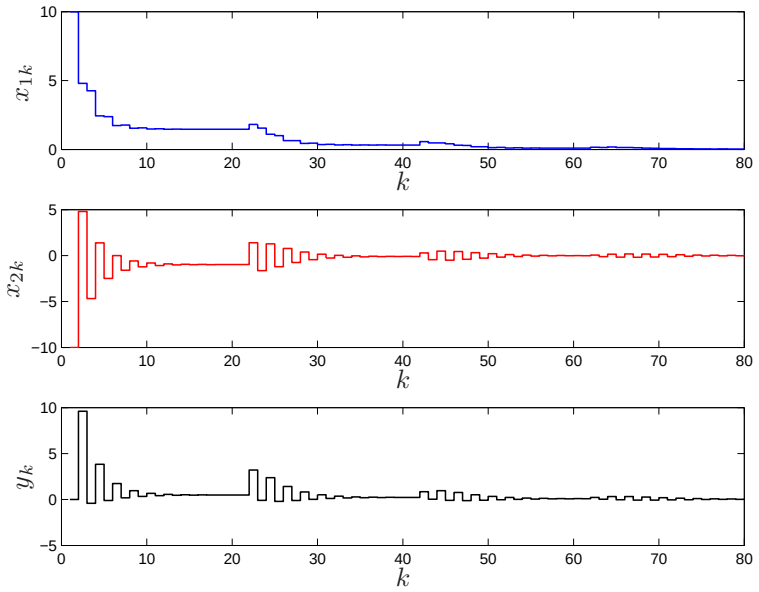


Figura 2.1: Comportamento dos estados e saída para o sistema com atraso invariante no tempo (2.13).

2.3 Método direto de Lyapunov

O Método direto de Lyapunov ou Segundo Método de Lyapunov consiste em uma das abordagens mais utilizadas para tratar a estabilidade de sistemas lineares incertos. Esse método deve-se à genealidade do matemático russo Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857 – 1918) cujo trabalho pioneiro, publicado em 1892 [Lya92], conforme dito em [Bha07] *"revolucionou o estudo de estabilidade e continua inspirando novos enfoques para o estudo deste assunto até os dias de hoje"*. A grande aplicação do Método direto de Lyapunov deve-se ao fato da generalidade das condições para verificar a estabilidade assintótica global, podendo ser aplicado nos casos em que o sistema está sujeito a incertezas descritas por um vetor de parâmetro α_k. Esse resultado é apresentado no teorema seguinte:

Teorema 2.1 *Um sistema incerto é robustamente assintoticamente estável em torno da origem (ponto de equilíbrio do sistema) se existir uma função a valores reais $V(x_k, \alpha_k)$ tal que:*

1. $V(\mathbf{0}, \alpha_k) = 0 \quad \forall k \geq 0$;
2. $V(x_k, \alpha_k) \to \infty \quad$ *quando* $\|x_k\| \to \infty$;
3. $V(x_k, \alpha_k) > 0, \quad \forall x_k \neq \mathbf{0}, \quad \forall k \geq 0$;
4. $\Delta V(x_k, \alpha_k) < 0 \quad \forall x_k \neq \mathbf{0}, \quad \forall k \geq 0$.

em que $\Delta V(\cdot)$ é a variação de $V(\cdot)$ com relação a k ao longo das trajetórias do sistema (2.3), e pode ser descrita por.

$$\Delta V(x_k, \alpha_k) \;=\; V(x_{k+1}, \alpha_{k+1}) \;-\; V(x_k, \alpha_k) \tag{2.14}$$

Uma função $V(x_k, \alpha_k)$ que satisfaça as condições do Teorema 2.1 é dita uma função de Lyapunov. Uma extensão do Teorema 2.1 será usada neste trabalho para obter condições convexas para o estudo de sistemas com atraso nos estados, em que o parâmetro de incerteza é invariante no tempo, isto é, $\alpha_k = \alpha, \forall\ k \geq 0$.

2.4 Estabilidade Quadrática

Um problema de análise de estabilidade utilizando o Método direto de Lyapunov em que um sistema linear incerto discreto no tempo e livre de atraso pode ser definido por

$$x_{k+1} \ = \ A(\alpha)x_k \tag{2.15}$$

como particularidade, suponha que esse sistema possua a seguinte descrição politópica

$$A(\alpha) \ = \ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i A_i, \ \alpha \in \Upsilon \tag{2.16}$$

em que os vértices A_i são conhecidos.

Uma função amplamente utilizada como candidata à função de Lyapunov é dada por

$$V(x_k, \alpha) = x_k^T P(\alpha) x_k \tag{2.17}$$

em que $P(\alpha)$ é uma matriz definida positiva para todos os valores admissíveis de α. Em geral uma escolha bastante comum para $P(\alpha)$ é

$$P(\alpha) = P(\alpha)^T \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad : \quad P(\alpha) \ = \ P > \mathbf{0}, \ \forall\ \alpha \in \Upsilon \tag{2.18}$$

Portanto, a matriz P assume valores fixos e independentes dos valores de α. Nesse caso, a função (2.17) passa a ser apenas *suficiente* para estabilidade robusta do sistema (2.15). Um sistema que admite uma função de Lyapunov dada por (2.17)-(2.18), é dito quadraticamente estável. Esse conceito de estabilidade quadrática (EQ) [Bar85], isto é, a existência de uma mesma matriz de Lyapunov, independente dos parâmetros incertos, assegurando a estabilidade do sistema para todo o domínio de incertezas, provavelmente consiste no resultado mais importante da década de 1980 no contexto de controle robusto[Lei05].

Utilizando a matriz P definida em (2.18) e a candidata à função de Lyapunov para sistemas lineares discretos livres de atraso (2.17), os três primeiros itens do Teorema 2.1 são prontamente atendidos. Do quarto item, obtém-se:

$$\Delta V(x_k, \alpha) \ = \ x_{k+1}^T P x_{k+1} - x_k^T P x_k < \mathbf{0} \tag{2.19}$$

substituindo (2.15) em (2.19), temos:

$$\begin{cases} P > \mathbf{0} \\ A(\alpha)^T P A(\alpha) - P < \mathbf{0} \end{cases} \tag{2.20}$$

Aplicando-se o complemento de Schur (veja Anexo (A.2)) em (2.20), temos a forma equivalente:

$$\begin{bmatrix} P & A(\alpha)^T P \\ \star & P \end{bmatrix} > \mathbf{0} \tag{2.21}$$

Como $A(\alpha)$ pertence a um politopo convexo, apenas a verificação dos vértices é suficiente para garantir a estabilidade de todos sistemas pertencentes ao politopo, desde que a mesma matriz P seja utilizada em todos vértices. Então, pode-se garantir a estabilidade de (2.15) através do teste de factibilidade de

$$\begin{bmatrix} P & A_i^T P \\ \star & P \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad \forall\, i \in \mathcal{I}[1, N] \tag{2.22}$$

que, via complemento de Schur é equivalente a:

$$\begin{cases} P > \mathbf{0} \\ A_i^T P A_i - P < \mathbf{0}, \quad \forall\, i \in \mathcal{I}[1, N] \end{cases} \tag{2.23}$$

Note que a estabilidade de todos sistemas pertencentes a (2.15) - (2.16) pode ser garantida apenas com a verificação de seus vértices, desde que se utilize a mesma matriz P para todos os vértices.

A restrição (2.18) da matriz P para o teste de (2.22) - (2.23), pode limitar bastante o conjunto de soluções factíveis, ou seja, pode não existir uma matriz $P > \mathbf{0}$ que satisfaça as demais desigualdades mesmo que (2.15) seja estável.

A grande vantagem da formulação com essa candidata à função de Lyapunov é que a verificação da estabiidade reduz-se a um teste de factibilidade de LMIs, numericamente simples.

2.5 Funções dependentes de parâmetro

Embora as técnicas que utilizem a abordagem pela EQ sejam numericamente simples e bastante utilizadas para verificar estabilidade e para a síntese de controladores de sistemas incertos, inclusive com parâmetros variantes no tempo e sem restrição do valor da taxa de variação, essas técnicas podem fornecer resultados bastante conservadores, principalmente quando aplicados em sistemas invariantes no tempo. Buscando soluções menos conservadoras, funções de Lyapunov dependentes de parâmetros são cada vez mais estudadas na literatura [Tro99], [MK00].

Considera-se o sistema definido em (2.15) - (2.16) e a candidata à função de Lyapunov (2.17), com a matriz $P(\alpha)$ definida por

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i P_i, \;\; \alpha \in \Upsilon, \;\; P_i > \mathbf{0}, \;\; \forall\, i \in \mathcal{I}[1, N]. \tag{2.24}$$

Os três primeiros itens do Teorema 2.1 são prontamente atendidos. Do quarto item, obtém-se:

$$\Delta V(x_k, \alpha) \;=\; x_{k+1}^T P(\alpha) x_{k+1} - x_k^T P(\alpha) x_k < \mathbf{0} \tag{2.25}$$

substituindo (2.15) em (2.25), pode-se assegurar a estabilidade do sistema descrito por (2.15) - (2.16) através das seguintes desigualdades matriciais

$$\begin{cases} P(\alpha) \;=\; P(\alpha) > \mathbf{0} \\ A(\alpha)^T P(\alpha) A(\alpha) - P(\alpha) < \mathbf{0} \end{cases} \tag{2.26}$$

que, pela aplicação do complemento de Schur, podem ser escritas de forma equivalente como:

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) & A(\alpha)^T P(\alpha) \\ \star & P(\alpha) \end{bmatrix} > \mathbf{0} \tag{2.27}$$

Nota-se que as condições (2.26) e (2.27), ao contrário de (2.22) e (2.23), não são convexas em α, devido aos produtos entre $P(\alpha)$ e $A(\alpha)$. Se $P(\alpha) = P$, então as condições (2.26) e (2.27) recuperam as condições da EQ de (2.22) e (2.23). Porém, as condições (2.26) - (2.27) não podem ser tratadas diretamente como problemas de otimização convexa, necessitando, em ambos os casos, de algum tipo de relaxação. Para maiores detalhes veja [OP06], [RP01] e referências internas. Uma forma de estudar a estabilidade robusta de forma convexa é desacoplando o produto entre $P(\alpha)$ e $A(\alpha)$ aplicando o Lema de Finsler (veja Anexo (A.3)). Para isso são inseridas matrizes de folga dependentes de parâmetro $F(\alpha)$ e $G(\alpha)$ com dimensões apropriadas, resultando em:

$$\begin{bmatrix} A(\alpha)^T F(\alpha)^T + F(\alpha)A(\alpha) - P(\alpha) & F(\alpha) + A(\alpha)^T G(\alpha)^T \\ \star & P(\alpha) - (G(\alpha) + G(\alpha)^T) \end{bmatrix} < \mathbf{0} \tag{2.28}$$

Neste trabalho utilizam-se as matrizes de folga independentes do parâmetro α, ou seja, com a introdução de algum conservadorismo assumem-se $F(\alpha) = F$ e $G(\alpha) = G$. Assim, a condição (2.28) pode ser reescrita na forma

$$\begin{bmatrix} A(\alpha)^T F^T + FA(\alpha) - P(\alpha) & F + A(\alpha)^T G^T \\ \star & P(\alpha) - (G + G^T) \end{bmatrix} < \mathbf{0} \tag{2.29}$$

nesse ponto, é possível perceber que essa condição pode ser testada apenas para os vértices do politopo que define $A(\alpha)$:

$$\begin{bmatrix} A_i^T F^T + FA_i - P_i & F + A_i^T G^T \\ \star & P_i - (G + G^T) \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad \forall\, i \in \mathcal{I}[1, N] \tag{2.30}$$

Assim, (2.29) pode ser recuperada de (2.30) ao se multiplicar essa por α_i e somar o resultado para $i \in \mathcal{I}[1, N]$, conforme definido em (2.2).

O uso de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros para sistemas lineares incertos discretos e invariantes no tempo podem fornecer resultados significativamente menos conservadores que aqueles que utilizam EQ como base. Assim, (2.30) é suficiente porém não necessária para identificar como estáveis um conjunto de sistemas que são assintoticamente estáveis, mas não quadraticamente estáveis.

2.6 Teoria da Estabilidade de Sistemas com atraso

Para estudo da estabilidade neste trabalho é empregado o método de Lyapunov-Krasovskii (L-K) [Kra63], que corresponde à extensão do método direto de Lyapunov para tratar sistemas com atraso no vetor de estado. Esse método, proposto por Nikolai Nikolaevich Krasovskii em 1959, baseia-se na construção de uma função de L-K (funcional no caso contínuo), que leva em conta não só a evolução temporal do sistema em questão, como também seu histórico temporal [Sou08].

Assim, considerando o sistema $x_{k+1} = A(\alpha)x_k + A_d(\alpha)x_{k-d}$ dado em (2.8), uma condição suficiente para que a candidata à função de L-K

$$V(x_k, \alpha) = x_k^T\ P(\alpha)\ x_k + \sum_{j=-d}^{0} x_{k+j}^T\ S(\alpha)\ x_{k+j} \tag{2.31}$$

garanta a estabilidade desse sistema é que (veja artigo [SDM07]):

$$V(x_k, \alpha) > \mathbf{0}, \quad P(\alpha) > \mathbf{0} \quad \text{e} \quad S(\alpha) > \mathbf{0} \tag{2.32}$$

$$\Delta V(x_k, \alpha) < 0 \tag{2.33}$$

Desenvolvendo a candidata à função de L-K (2.31) e fazendo as devidas simplificações, tem-se:

$$\Delta V(x_k, \alpha) \;=\; x_{k+1}^T (P(\alpha) + S(\alpha)) x_{k+1} - x_k^T \; P(\alpha) \; x_k - x_{k-d}^T \; S(\alpha) \; x_{k-d} < 0 \tag{2.34}$$

Substituindo (2.8) em (2.34), tem-se:

$$\begin{bmatrix} A(\alpha)^T (P(\alpha) + S(\alpha)) A(\alpha) - P(\alpha) & A(\alpha)^T (P(\alpha) + S(\alpha)) A_d(\alpha) \\ \star & A_d(\alpha)^T (P(\alpha) + S(\alpha)) A_d(\alpha) - S(\alpha) \end{bmatrix} < \mathbf{0} \tag{2.35}$$

que, pela aplicação do complemento de Schur, podem ser escritas de forma equivalente como:

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) & \mathbf{0} & A(\alpha)^T (P(\alpha) + S(\alpha)) \\ \star & S(\alpha) & A_d(\alpha)^T (P(\alpha) + S(\alpha)) \\ \star & \star & P(\alpha) + S(\alpha) \end{bmatrix} > \mathbf{0} \tag{2.36}$$

Nota-se que as condições (2.35) e (2.36) não são convexas em α, devido aos produtos entre $A(\alpha)$, $A_d(\alpha)$, $P(\alpha)$ e $S(\alpha)$. Se $P(\alpha) = P$ e $S(\alpha) = S$, $\forall \; \alpha \in \Upsilon$ então as condições (2.35) e (2.36) recuperam a EQ de (2.8), ou seja, todos os sistemas pertencentes ao politopo (2.5) são ditos quadraticamente estáveis, apenas com a verificação de seus vértices. Porém, conforme dito anteriormente no caso de sistemas livres de atraso, as condições (2.35) e (2.36) não podem ser tratadas diretamente como problemas de otimização convexa, necessitando, em ambos os casos, de algum tipo de relaxação. Uma forma para estudar a estabilidade robusta de forma convexa, é desacoplando as matrizes com produtos em α aplicando o Lema de Finsler (veja Anexo (A.3)). Utilizando relações equivalentes ao do item **i)** do Lema de Finsler, e definindo as matrizes de folga temos:

$$\begin{aligned} \varphi \;&=\; \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k \\ x_{k-d} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q} \;=\; \begin{bmatrix} P(\alpha) + S(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -P(\alpha) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -S(\alpha) \end{bmatrix} \\ \mathcal{B} \;&=\; \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_n & A(\alpha) & A_d(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X} \;=\; \begin{bmatrix} F(\alpha)^T & G(\alpha)^T & H(\alpha)^T \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{2.37}$$

Assim, utilizando o item **iv)** do Lema de Finsler, após algumas operações algébricas, obtém-se

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) + S(\alpha) - F(\alpha) - F(\alpha)^T & F(\alpha)A(\alpha) - G(\alpha)^T & F(\alpha)A_d(\alpha) - H(\alpha)^T \\ -G(\alpha) + A(\alpha)^T F(\alpha)^T & -P(\alpha) + G(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T G(\alpha)^T & G(\alpha)A_d(\alpha) + A(\alpha)^T H(\alpha)^T \\ -H(\alpha) + A_d(\alpha)^T F(\alpha)^T & H(\alpha)A(\alpha) + A_d(\alpha)^T G(\alpha)^T & -S(\alpha) + H(\alpha)A_d(\alpha) + A_d(\alpha)^T H(\alpha)^T \end{bmatrix} < \mathbf{0} \tag{2.38}$$

Como informado anteriormente, neste trabalho utilizam-se as matrizes de folga independente do parâmetro α, ou seja, $F(\alpha) = F$, $G(\alpha) = G$ e $H(\alpha) = H$. Com isso, a condição (2.38) pode ser reescrita na forma

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) + S(\alpha) - F - F^T & FA(\alpha) - G^T & FA_d(\alpha) - H^T \\ -G + A(\alpha)^T F^T & -P(\alpha) + GA(\alpha) + A(\alpha)^T G^T & GA_d(\alpha) + A(\alpha)^T H^T \\ -H + A_d(\alpha)^T F^T & HA(\alpha) + A_d(\alpha)^T G^T & -S(\alpha) + HA_d(\alpha) + A_d(\alpha)^T H^T \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (2.39)$$

explorando a convexidade do politopo (2.5) e impondo uma estrutura para as matrizes dependentes de parâmetro $P(\alpha)$ e $S(\alpha)$, dadas como:

$$\left\{ P(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i P_i, \quad S(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i S_i, \quad \alpha \in \Upsilon \right\} \quad (2.40)$$

a condição (2.39) pode ser testada apenas para os vértices conforme

$$\begin{bmatrix} P_i + S_i - F - F^T & FA_i - G^T & FA_{di} - H^T \\ -G + A_i^T F^T & -P_i + GA_i + A_i^T G^T & GA_{di} + A_i^T H^T \\ -H + A_{di}^T F^T & HA_i + A_{di}^T G^T & -S_i + HA_{di} + A_{di}^T H^T \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad \forall\, i \in \mathcal{I}[1, N]. \quad (2.41)$$

Assim, (2.39) pode ser recuperada de (2.41) ao se multiplicar essa por α_i e somar o resultado para $i \in \mathcal{I}[1, N]$, conforme definido em (2.2). Similarmente a sistemas livres de atraso, (2.41) é suficiente porém não necessária para identificar como estáveis um conjunto de sistemas que são assintoticamente estáveis, mas não quadraticamente estáveis. Resultados utilizando sistemas incertos discretos no tempo com atraso podem ser vistos em [FS05b], [FS05a], [XY09].

2.7 Norma $\mathcal{H}_\infty$

Considere a seguinte classe de sistemas lineares discretos, invariantes no tempo, livres de atraso e precisamente conhecido

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & Ax_k + B_w w_k, \\ z_k & = & Cx_k + D_w w_k, \end{array} \right. \quad (2.42)$$

Seja $G_{zw} = C(\mathbf{z}\mathbf{I} - A)^{-1}B + D$, a matriz de transferência relacionando o vetor de entradas exógenas w e o vetor de saídas controladas z (o duplo significado da letra z fica nítido de acordo com o contexto). Pode-se definir o custo $\mathcal{H}_\infty$ de uma matriz de transferência de um sistema estável, correspondente ao pico do valor singular máximo na frequência

$$\| G_{zw} \|_\infty \triangleq \sup_{\Omega_k \in [-\pi, \pi]} \overline{\sigma}[G_{zw}(e^{j\Omega_k})] \quad (2.43)$$

sendo $\overline{\sigma}(\cdot)$ o valor singular máximo do argumento.

A norma $\mathcal{H}_\infty$ possui interpretação relacionando os sinais de entrada e saída do domínio do tempo. O ganho ℓ_2 ou ganho RMS de um sistema assintoticamente estável linear invariante no tempo, corresponde ao maior ganho da saída sobre todos os sinais de entrada limitados $w_k \in \ell_2$, dado por

$$\| G_{zw} \|_\infty = \max_{\substack{w_k \in \ell_2 \\ w_k \neq 0}} \frac{\| z_k \|_2}{\| w_k \|_2} \tag{2.44}$$

supondo condições iniciais nulas.

Ainda no contexto de ganho ℓ_2, a norma $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas assintoticamente estáveis é caracterizada pelo menor valor de γ tal que

$$\|z_k\|_2 \leq \gamma \|w_k\|_2, \quad w_k \in \ell_2. \tag{2.45}$$

Similarmente, estabelece-se a seguinte equivalência

$$\|G_{zw}\|_\infty < \gamma \Longleftrightarrow z_k^T z_k < \gamma^2 w_k^T w_k, \quad w_k \in \ell_2 \tag{2.46}$$

Assim, considerando-se um sistema assintoticamente estável, a norma $\mathcal{H}_\infty$ pode ser caracterizada pela função de Lyapunov definida em (2.17), com a matriz P conforme (2.18), impondo-se

$$z_k^T z_k - \gamma^2 w_k^T w_k + \Delta V(x_k) < 0 \tag{2.47}$$

fazendo $\Delta V(x_k)$ definido em (2.14), conforme (2.19), substituindo (2.42) em (2.47) e fazendo as devidas operações, tem-se

$$\begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P A - P + C^T C & A^T P B_w + C^T D_w \\ B_w^T P A + D_w^T C & D_w^T D_w + B_w^T B_w - \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix} < \mathbf{0} \tag{2.48}$$

Esse resultado é uma derivação do "*Bounded real lemma*" [BGFB94], [ZDG96], que pode ser descrito como: A é assintoticamente estável e $\|G_{zw}\|_\infty < \gamma$ se e somente se existir uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}$, com dimensões apropriadas, tal que

$$\begin{bmatrix} A^T P A - P + C^T C & A^T P B_w + C^T D_w \\ B_w^T P A + D_w^T C & D_w^T D_w + B_w^T B_w - \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \tag{2.49}$$

logo, podemos determinar a norma $\mathcal{H}_\infty$ pelo procedimento convexo de otimização. Defina $\mu = \gamma^2$ e resolva

$$\mathcal{H}_\infty : \begin{cases} \min \ \mu \\ P = P^T > \mathbf{0}; \\ \text{tal que} \quad \begin{bmatrix} A^T P A - P + C^T C & A^T P B_w + C^T D_w \\ B_w^T P A + D_w^T C & D_w^T D_w + B_w^T B_w - \mu \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \end{cases} \tag{2.50}$$

Como $\|G_{zw}\|_\infty = \|G_{zw}^T\|_\infty$, a norma $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas assintoticamente estáveis também pode ser calculada a partir do seguinte problema de otimização dual

$$\mathcal{H}_\infty : \begin{cases} \min \ \mu \\ W = W^T > \mathbf{0}; \\ \text{tal que} \quad \begin{bmatrix} A W A^T - W + B_w B_w^T & A W C^T + B_w D_w^T \\ C W A^T + D_w B_w^T & D_w D_w^T + C C^T - \mu \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \end{cases} \tag{2.51}$$

Porém, para sistemas incertos não existe atualmente nenhum método que determine o valor exato do limitante para a norma $\mathcal{H}_\infty$ no conjunto incerto. Existem métodos de cálculo do limitante denominado Custo Garantido $\mathcal{H}_\infty$, baseado em condições suficientes, formuladas por LMIs. As primeiras formulações por LMIs foram baseadas no conceito de estabilidade quadrática [PTP97], mas o uso de uma única função de Lyapunov para todo domínio de incerteza resulta geralmente em resultados conservadores. Com objetivo de reduzir o conservadorismo vários trabalhos utilizam funções de Lyapunov dependentes de parâmentros, variáveis matriciais extras, como por exemplo [dOGB02], [XLZZ04] [TCB05].

2.8 Desempenho $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas discretos com atraso nos estados

Considere a seguinte classe de sistemas lineares discretos, invariantes no tempo, com atraso no vetor de estados definido por

$$\Omega(\alpha) : \left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & A(\alpha)x_k + A_d(\alpha)x_{k-d} + B(\alpha)u_k + B_w(\alpha)w_k, \\ z_k & = & C(\alpha)x_k + C_d(\alpha)x_{k-d} + D(\alpha)u_k + D_w(\alpha)w_k, \end{array} \right. \tag{2.52}$$

em que k é o instante de amostragem e as matrizes $A(\alpha)$, $A_d(\alpha)$, $B(\alpha)$, $B_w(\alpha)$, $C(\alpha)$, $C_d(\alpha)$, $D(\alpha)$ e $D_w(\alpha)$ são matrizes incertas, invariantes no tempo, adequadamente definidas em termos de $x_k = x(k) \in \mathbb{R}^n$, o vetor de estados no instante k, $u_k = u(k) \in \mathbb{R}^m$, que representa os m sinais de controle, $w_k = w(k) \in \mathbb{R}^v$, que contém v entradas exógenas, e $z_k = z(k) \in \mathbb{R}^p$, o vetor de p sinais de saída de ponderação. Essas matrizes podem ser descritas por um politopo $\mathcal{D}$ com vértices conhecidos:

$$\mathcal{D} = \left\{ \Omega(\alpha) \in \mathbb{R}^{n+p\times 2n+m+v} : \Omega(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \Omega_i, \ \alpha \in \Upsilon \right\}, \tag{2.53}$$

em que

$$\Upsilon = \left\{ \alpha : \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1, \ \alpha_i \geq 0, \quad i \in \mathcal{I}[1, N] \right\} \tag{2.54}$$

e

$$\Omega_i = \left[\begin{array}{cc|c|c} A_i & A_{di} & B_i & B_{wi} \\ \hline C_i & C_{di} & D_i & D_{wi} \end{array} \right], \quad i \in \mathcal{I}[1, N]. \tag{2.55}$$

O atraso, denotado por d, é suposto invariante no tempo. A lei de controle considerada é:

$$u_k = Kx_k + K_d x_{k-d} \tag{2.56}$$

com $[K|K_d] \in \mathbb{R}^{m\times 2n}$. Usando (2.56) em (2.52)-(2.55), o sistema incerto em malha fechada resultante é dado por

$$\tilde{\Omega}(\alpha) : \left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & \tilde{A}(\alpha)x_k + \tilde{A}_d(\alpha)x_{k-d} + B_w(\alpha)w_k, \\ z_k & = & \tilde{C}(\alpha)x_k + \tilde{C}_d(\alpha)x_{k-d} + D_w(\alpha)w_k, \end{array} \right. \tag{2.57}$$

com $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathcal{D}}$,

$$\tilde{\mathcal{D}} = \left\{ \tilde{\Omega}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n+p\times 2n+v} : \tilde{\Omega}(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \tilde{\Omega}_i, \quad \alpha \in \Upsilon \right\} \tag{2.58}$$

com

$$\tilde{\Omega}_i = \left[\begin{array}{c|c|c} \tilde{A}_i & \tilde{A}_{di} & B_{wi} \\ \hline \tilde{C}_i & \tilde{C}_{di} & D_{wi} \end{array}\right], \quad i \in \mathcal{I}[1, N]. \tag{2.59}$$

em que as matrizes $\tilde{A}_i$, $\tilde{A}_{di}$, $\tilde{C}_i$ e $\tilde{C}_{di}$ são definidas como

$$\tilde{A}_i = A_i + B_i K, \quad \tilde{A}_{di} = A_{di} + B_i K_d, \tag{2.60}$$

$$\tilde{C}_i = C_i + D_i K, \quad \tilde{C}_{di} = C_{di} + D_i K_d \tag{2.61}$$

Neste trabalho, tanto o sistema (2.52) quanto o sistema (2.57) são considerados com condições iniciais nulas, isto é,

$$x_k = \mathbf{0}, \quad \forall k \in \mathcal{I}[-d,\ 0] \tag{2.62}$$

2.8.1 Cômputo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$

Dado o sistema incerto $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathcal{D}}$, determine, se possível, um valor estimado para $\gamma > 0$, para todo $w_k \in \ell_2$ exista um $z_k \in \ell_2$, tal que

$$\|z_k\|_2 < \gamma \|w_k\|_2 \tag{2.63}$$

seja verificado para todo $\alpha \in \Upsilon$. Nesse caso, γ é chamado um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema (2.57).

Para esse problema utiliza-se a seguinte candidata à função de L-K:

$$V(\alpha, k) = x_k^T\ P(\alpha)\ x_k + \sum_{j=-d}^{-1} x_{k+j}^T\ S(\alpha)\ x_{k+j} \tag{2.64}$$

as matrizes $P(\alpha)$ e $S(\alpha)$ são dadas por

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i P_i \text{ e } S(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i S_i, \tag{2.65}$$

com $\alpha \in \Upsilon$. Para ser uma função de L-K, é necessário que (2.64) seja definida positiva e satisfaça

$$\Delta V(\alpha, k) = V(\alpha, k+1) - V(\alpha, k) < 0 \tag{2.66}$$

$\forall \ \left[\begin{array}{cc} x_k^T & x_{k-d}^T \end{array}\right]^T \neq \mathbf{0}$ e $\forall\ \alpha \in \Upsilon$. Uma condição suficiente para a positividade de (2.64) é obtida impondo-se $P_i > \mathbf{0}$ e $S_i > \mathbf{0}$, para $i \in \mathcal{I}[1, N]$.

A positividade de (2.64) é claramente assegurada assumindo-se $P_i = P_i^T > \mathbf{0}$, $S_i = S_i^T > \mathbf{0}$, $i \in \mathcal{I}[1, N]$ e a estrutura apresentada em (2.65). Para a estabilidade, é necessário verificar (2.66) que é calculado conforme segue.

$$\Delta V(\alpha, k) \ = \ x_{k+1}^T (P(\alpha) + S(\alpha)) x_{k+1} - x_k^T\ P(\alpha)\ x_k - x_{k-d}^T\ S(\alpha)\ x_{k-d} \tag{2.67}$$

Com isso, através de (2.67), obtém-se $\Delta V(\alpha, k) \leq \tilde{\omega}^T \tilde{M}(\alpha) \tilde{\omega} < 0$, em que $\tilde{M}(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \tilde{M}_i$, $\alpha \in \Upsilon$, $\tilde{M}_i$ é dada em (2.68) e $\tilde{\omega} = \left[\begin{array}{ccc} x_{k+1}^T & x_k^T & x_{k-d}^T \end{array}\right]^T$.

$$\tilde{M}_i = \begin{bmatrix} P_i + S_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -P_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -S_i \end{bmatrix} \tag{2.68}$$

Para o cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, considere o sistema (2.57) robustamente estável com condições iniciais nulas, (2.62), $\mu = \gamma^2$, $w_k \in \ell_2$ e o índice de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ dado por

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left[z_k^T z_k - \mu w_k^T w_k \right] \tag{2.69}$$

Nesse caso, tem-se que $V(\alpha, 0) = 0$ e $V(\alpha, \infty)$ aproxima-se de zero quando w_k tender a zero, na medida em que k aumenta; ou de uma constante $\varphi < \infty$, no caso de w_k tender a $\phi < \infty$. Assim, usando (2.67), J definido em (2.69) pode ser majorado como

$$\begin{aligned} J &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left[z_k^T z_k - \mu w_k^T w_k + \Delta V(\alpha, k) \right] \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left[z_k^T z_k - \mu w_k^T w_k + \tilde{\omega}^T \tilde{M}(\alpha) \tilde{\omega} \right] \end{aligned}$$

que pode ser reescrito como

$$J \leq \sum_{k=0}^{\infty} \omega^T M(\alpha) \omega \tag{2.70}$$

em que

$$M(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i M_i, \tag{2.71}$$

$$M_i = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{M}_i & \mathbf{0} \\ \hline \star & \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \star & -\mu \mathbf{I}_v \end{bmatrix} \end{array} \right] \tag{2.72}$$

e

$$\omega = \left[\begin{array}{c|cc} \tilde{\omega}^T & z_k^T & w_k^T \end{array} \right]^T. \tag{2.73}$$

Assim, uma condição para assegurar a estabilidade robusta de (2.57) com custo $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ é

$$\omega^T M(\alpha) \omega < 0 \text{ sujeito a (2.57)}, \tag{2.74}$$

com $M(\alpha)$ e ω definidos, respectivamente, em (2.71) e (2.73).

A condição (2.74) é, pelo apêndice A.3(Lema de Finsler), equivalente a

$$M(\alpha) + \mathcal{X}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha)^T \mathcal{X}(\alpha)^T < \mathbf{0}, \tag{2.75}$$

com

$$\mathcal{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_n & A(\alpha) & A_d(\alpha) & \mathbf{0} & B_w(\alpha) \\ \mathbf{0} & C(\alpha) & C_d(\alpha) & -\mathbf{I}_p & D_w(\alpha) \end{bmatrix} \tag{2.76}$$

Portanto, a condição de análise (2.77) que pode ser escrita como $M_i + \mathcal{X}\mathcal{B}_i + \mathcal{B}_i^T\mathcal{X}^T < \mathbf{0}$, com

$$\mathcal{X}(\alpha) = \mathcal{X} = \begin{bmatrix} F_1^T & F_2^T & F_3^T & F_4^T & F_5^T \\ G_1^T & G_2^T & G_3^T & G_4^T & G_5^T \end{bmatrix}^T$$

e $\mathcal{B}_i$ obtido pela troca das matrizes dependentes de α em (2.76) pelas respectivas i-ésimas matrizes vértices, é suficiente para recuperar (2.75). Para isso, basta multiplicar cada desigualdade $M_i + \mathcal{X}\mathcal{B}_i + \mathcal{B}_i^T\mathcal{X}^T < \mathbf{0}$ por α_i e somar em $i = 1, \ldots, N$, o que resulta em (2.75) que por sua vez é equivalente a (2.74).

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} P_i + S_i & F_1A_i + G_1C_i - F_2^T & F_1A_{di} + G_1C_{di} - F_3^T & -G_1 - F_4^T & F_1B_{wi} + G_1D_{wi} - F_5^T \\ -F_1 - F_1^T & & & & \\ \star & F_2A_i + A_i^TF_2^T + G_2C_i + C_i^TG_2^T - P_i & F_2A_{di} + G_2C_{di} + A_i^TF_3^T + C_i^TG_3^T & -G_2 + A_i^TF_4^T + C_i^TG_4^T & F_2B_{wi} + G_2D_{wi} + A_i^TF_5^T + C_i^TG_5^T \\ \star & \star & F_3A_{di} + A_{di}^TF_3^T + G_3C_{di} + C_{di}^TG_3^T - S_i & -G_3 + A_{di}^TF_4^T + C_{di}^TG_4^T & F_3B_{wi} + G_3D_{wi} + A_{di}^TF_5^T + C_{di}^TG_5^T \\ \star & \star & \star & \mathbf{I}_p - G_4 - G_4^T & -G_5^T + F_4B_{wi} + G_4D_{wi} \\ \star & \star & \star & \star & -\mu\mathbf{I}_v + F_5B_{wi} + B_{wi}^TF_5^T + G_5D_{wi} + D_{wi}^TG_5^T \end{bmatrix} \tag{2.77}$$

2.8.2 Síntese Robusta

Dado o sistema incerto $\Omega(\alpha) \in \mathcal{D}$ e um escalar $\gamma > 0$ determine, se possível, ganhos robustos K e K_d, tais que o sistema incerto em malha fechada $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathcal{D}}$, dado por (2.57)-(2.61), seja robustamente estável, para todo $w_k \in \ell_2$ e $z_k \in \ell_2$ satisfazendo (2.63). Para um escalar $0 < \theta \leq 1$ e um valor dado $\mu > 0$ tais que $\Xi_i < \mathbf{0}$, $i \in \mathcal{I}[1, N]$ e Ξ_i definido em (2.78)

é verificado, então o sistema incerto (2.52)-(2.55) sujeito à lei de controle (2.56) com

$$K = WF^{-1} \quad \text{e} \quad K_d = W_dF^{-1} \tag{2.79}$$

é robustamente estável, com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma = \sqrt{\mu}$. Além disso, (2.64)-(2.65) é uma função de Lyapunov-Krasovskii que garante a estabilidade do sistema de malha fechada resultante, (2.57)-(2.61).

Para demonstrar a suficiência da condição de síntese (2.78) observa-se, inicialmente, que se essa é verificada, então é assegurada a regularidade de F, uma vez que, do bloco $(1, 1)$ de

$$\Xi_i = \begin{bmatrix} \tilde{P}_i + \tilde{S}_i - F - F^T & A_iF + B_iW & A_{di}F + B_iW_d & \mathbf{0} & FB_{wi} \\ \star & -\tilde{P}_i & \mathbf{0} & F^TC_i^T + W^TD_i^T & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\tilde{S}_i & F^TC_{di}^T + W_d^TD_i^T & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -\theta\mathbf{I}_p & D_{wi} \\ \star & \star & \star & \star & -\mu\mathbf{I}_v \end{bmatrix} \tag{2.78}$$

(2.78), tem-se $F + F^T > \tilde{P}_i + \tilde{S}_i > \mathbf{0}$. Além disso, existe um escalar real $\kappa \in]0, 2[$ tal que, para $\theta \in]0, 1]$, $\kappa(\kappa - 2) = -\theta$. Assim, substituindo o bloco $(4, 4)$ de (2.78) por $\kappa(\kappa - 2)\mathbf{I}_p$, as variáveis de otimização W e W_d por KF e K_dF, respectivamente, usando (2.60)-(2.61) e pré e pós-multiplicando a desigualdade resultante à esquerda por T e à direita por T^T, em que

$$T = \text{bloco-diag}\left\{\mathbf{I}_3 \otimes F^{-T}, G, \mathbf{I}_{p+v}\right\} \tag{2.80}$$

com $G \in \mathbb{R}^{p\times p}$, obtém-se $\hat{\Xi}_i < \mathbf{0}$, com $\hat{\Xi}_i$ definido em (2.81)

$$\hat{\Xi}_i = \begin{bmatrix} F^{-T}\tilde{P}_iF^{-1} + F^{-T}\tilde{S}_iF^{-1} - F - F^T & F^{-T}(A_i + B_iK) & F^{-T}(A_{di} + B_iK_d) & \mathbf{0} & FB_{wi} \\ \star & -F^{-T}\tilde{P}_iF^{-1} & \mathbf{0} & (C_{di}^T + K_d^TD_i^T)G^T & \mathbf{0} \\ \star & \star & -F^{-T}\tilde{S}_iF^{-1} & (C_{di}^T + K_d^TD_i^T)G^T & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & G\left(\kappa^2 - 2\kappa\right)G^T & GD_{wi} \\ \star & \star & \star & \star & -\mu I_v \end{bmatrix} \tag{2.81}$$

Note-se que, assumindo $G = -\dfrac{1}{\kappa}\mathbf{I}_p$, o bloco $(4, 4)$ de (2.81) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} G\left(\kappa^2 - 2\kappa\right)G^T &= \left(-\frac{1}{\kappa}\mathbf{I}_p\right)\left(\kappa^2 - 2\kappa\right)\left(-\frac{1}{\kappa}\mathbf{I}_p\right) \\ &= \left(1 - \frac{2}{\kappa}\right)\mathbf{I}_p \\ &= \mathbf{I}_p - \frac{1}{\kappa}\mathbf{I}_p - \frac{1}{\kappa}\mathbf{I}_p \\ &= \mathbf{I}_p + G + G^T \end{aligned} \tag{2.82}$$

o que assegura a verificação de (2.77), com $P_i = F^{-T}\tilde{P}_i F^{-1}$, $S_i = F^{-T}\tilde{S}_i F^{-1}$, $i \in \mathcal{I}[1, N]$, $F_1 = F^{-1}$, $G_4 = -G$ e matrizes F_2, F_3, F_4, F_5, G_1, G_2, G_3 e G_5 nulas.

Capítulo 3

Análise de desempenho e controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ usando LMIs

3.1 Introdução

Neste capítulo são investigados sistemas lineares incertos e discretos no tempo com atraso variante no tempo afetando o vetor de estado. É considerado que as incertezas são representadas em um domínio politópico e que elas podem estar presentes em todas as matrizes do modelo do sistema. Condições expressas como Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*), baseadas no trabalho de [ZY08], são propostas para o cômputo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ e para a síntese de ganhos robustos, por realimentação de estado, com minimização do custo $\mathcal{H}_\infty$ entre a entrada de pertubação e a saída do sistema. Essas condições são estabelecidas com a utilização de funções de Lyapunov-Krasovskii (L-K) dependentes de parâmetro. Variáveis matriciais de folga via Lema de Finsler — veja [dO04] e [dOS01] — são empregadas para desacoplar as matrizes do sistema das matrizes da função de L-K. A desigualdade de Jensen é usada para manipular os termos cruzados que aparecem no desenvolvimento das condições, fornecendo uma majoração menos conservadora que outras encontradas na literatura. As condições propostas são dependentes do atraso. Exemplos numéricos são apresentados para ilustrar a eficácia da proposta e para estabelecer comparações com outras condições disponíveis na literatura. Alguns dos resultados apresentados neste capítulo podem ser encontrados em [CLMG11] e [CLM+11].

3.2 Preliminares

Considere o sistema linear incerto discreto no tempo sujeito a atraso nos estados dado por

$$\Omega(\alpha) : \left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & A(\alpha)x_k + A_d(\alpha)x_{k-d_k} + B(\alpha)u_k + B_w(\alpha)w_k, \\ z_k & = & C(\alpha)x_k + C_d(\alpha)x_{k-d_k} + D(\alpha)u_k + D_w(\alpha)w_k, \end{array} \right. \tag{3.1}$$

em que k é o instante de amostragem e as matrizes $A(\alpha)$, $A_d(\alpha)$, $B(\alpha)$, $B_w(\alpha)$, $C(\alpha)$, $C_d(\alpha)$, $D(\alpha)$ e $D_w(\alpha)$ são matrizes incertas, invariantes no tempo, adequadamente definidas em termos de $x_k = x(k) \in \mathbb{R}^n$, o vetor de estados no instante k, $u_k = u(k) \in \mathbb{R}^m$, que representa os m

sinais de controle, $w_k = w(k) \in \mathbb{R}^v$, que contém v entradas exógenas, e $z_k = z(k) \in \mathbb{R}^p$, o vetor de p sinais de saída de ponderação. Essas matrizes podem ser descritas por um politopo $\mathcal{D}$ com vértices conhecidos:

$$\mathcal{D} = \left\{ \Omega(\alpha) \in \mathbb{R}^{n+p\times 2n+m+v} : \Omega(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \Omega_i,\ \alpha \in \Upsilon \right\}, \tag{3.2}$$

em que

$$\Upsilon = \left\{ \alpha : \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 0, \quad i \in \mathcal{I}[1,N] \right\} \tag{3.3}$$

e

$$\Omega_i = \left[\begin{array}{cc|c|c} A_i & A_{di} & B_i & B_{wi} \\ \hline C_i & C_{di} & D_i & D_{wi} \end{array} \right], \quad i \in \mathcal{I}[1,N]. \tag{3.4}$$

O atraso, denotado por d_k, é suposto variante no tempo, sendo dado por:

$$d_k \in \mathcal{I}\left[\underline{d}, \overline{d}\right], (\underline{d}, \overline{d}) \in \mathbb{N}_*^2 \tag{3.5}$$

com $\underline{d}$, $\overline{d}$ representando os valores mínimo e máximo de d_k, respectivamente. Qualquer $\Omega(\alpha) \in \mathcal{D}$ pode ser escrito como uma combinação convexa dos N vértices Ω_i, $i \in \mathcal{I}[1,N]$, de $\mathcal{D}$. A lei de controle considerada é:

$$u_k = Kx_k + K_d x_{k-d_k} \tag{3.6}$$

com $[K|K_d] \in \mathbb{R}^{m\times 2n}$.

Observe que a lei de controle (3.6) depende do conhecimento do valor de d_k a cada amostragem. O valor de d_k pode ser conhecido utilizando, por exemplo, algum tipo de registro de tempo nas medidas ou estimativas dos valores dos estados [SSJ04]. No caso de não ser possível conhecer o atraso d_k, é suficiente fazer $K_d = \mathbf{0}$ e a lei de controle recupera a forma mais comumente usada na literatura, dada por $u_k = Kx_k$. Usando (3.6) em (3.1)-(3.4), o sistema incerto em malha fechada resultante é dado por

$$\tilde{\Omega}(\alpha) : \left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & \tilde{A}(\alpha)x_k + \tilde{A}_d(\alpha)x_{k-d_k} + B_w(\alpha)w_k, \\ z_k & = & \tilde{C}(\alpha)x_k + \tilde{C}_d(\alpha)x_{k-d_k} + D_w(\alpha)w_k, \end{array} \right. \tag{3.7}$$

com $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathcal{D}}$,

$$\tilde{\mathcal{D}} = \left\{ \tilde{\Omega}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n+p\times 2n+v} : \tilde{\Omega}(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \tilde{\Omega}_i, \quad \alpha \in \Upsilon \right\} \tag{3.8}$$

com

$$\tilde{\Omega}_i = \left[\begin{array}{cc|c} \tilde{A}_i & \tilde{A}_{di} & B_{wi} \\ \hline \tilde{C}_i & \tilde{C}_{di} & D_{wi} \end{array} \right], \quad i \in \mathcal{I}[1,N]. \tag{3.9}$$

em que as matrizes $\tilde{A}_i$, $\tilde{A}_{di}$, $\tilde{C}_i$ e $\tilde{C}_{di}$ são definidas como

$$\tilde{A}_i = A_i + B_i K, \quad \tilde{A}_{di} = A_{di} + B_i K_d, \tag{3.10}$$

$$\tilde{C}_i = C_i + D_i K, \quad \tilde{C}_{di} = C_{di} + D_i K_d \tag{3.11}$$

Neste capítulo, tanto o sistema (3.1) quanto o sistema (3.7) são considerados com condições iniciais nulas, isto é,

$$x_k = \mathbf{0}, \quad \forall k \in \mathcal{I}[-\overline{d},\ 0]. \tag{3.12}$$

O principal objetivo neste capítulo é o de prover soluções convexas, dependentes do valor do atraso, para os seguintes problemas:

Problema 3.1 (Estimação do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$) *Dado o sistema incerto $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathcal{D}}$, determine, se possível, um valor para $\gamma > 0$, tal que, para todo $w_k \in \ell_2$ exista um $z_k \in \ell_2$, satisfazendo*

$$\|z_k\|_2 < \gamma \|w_k\|_2 \tag{3.13}$$

para todo $\alpha \in \Upsilon$. Nesse caso, γ é chamado um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema (3.7).

Problema 3.2 (Síntese robusta $\mathcal{H}_\infty$) *Dado o sistema incerto $\Omega(\alpha) \in \mathcal{D}$ e um escalar $\gamma > 0$ determine, se possível, ganhos robustos K e K_d, tais que o sistema incerto em malha fechada $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathcal{D}}$, dado por (3.7)-(3.11), seja robustamente estável e, para todo $w_k \in \ell_2$ e $z_k \in \ell_2$, satisfaça (3.13).*

No caso do sistema possuir condições iniciais não-nulas, o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ deve satisfazer $\|z_k\|_2 < \gamma\|w_k\|_2 + \gamma\bar{V}(\alpha, 0)$, em que $\bar{V}(\alpha, 0) = \max_{\alpha\in\Upsilon} V(\alpha, 0)$ é a função de L-K avaliada em $k = 0$ para uma dada condição inicial. Para a definição de $V(\alpha, k)$ veja, mais adiante, equação (3.14).

Nos problemas (3.1) e (3.2) é necessário que o sistema $\tilde{\Omega}(\alpha)$ seja assintoticamente estável. Em sistemas com atrasos nos estados, as condições para verificar que um ponto de equilíbrio foi atingido e caracterizar a estabilidade são mais elaboradas que no caso de sistemas sem atrasos. Por exemplo, em sistemas livres de atrasos, $x_k = \mathbf{0}$ assegura que $x_{k+1} = Ax_k = \mathbf{0}$, o que nem sempre é verdade para $x_{k+1} = Ax_k + A_d x_{k-d_k}$. Uma caracterização da estabilidade assintótica para sistemas com atrasos é dada em [ML08b].

Para a investigação desses problemas utiliza-se a seguinte candidata à função de L-K:

$$V(\alpha, k) = \sum_{v=1}^{8} V_v(\alpha, k) > 0 \tag{3.14}$$

com

$$V_1(\alpha, k) = x_k^T P(\alpha) x_k; \quad V_2(\alpha, k) = \sum_{j=k-d_k}^{k-1} x_j^T Q_1(\alpha) x_j; \tag{3.15}$$

$$V_3(\alpha, k) = \sum_{j=k-\overline{d}}^{k-1} x_j^T Q_2(\alpha) x_j; \quad V_4(\alpha, k) = \sum_{j=k-\underline{d}}^{k-1} x_j^T Q_3(\alpha) x_j; \tag{3.16}$$

$$V_5(\alpha, k) = \sum_{\ell=2-\overline{d}}^{1-\underline{d}} \sum_{j=k+\ell-1}^{k-1} x_j^T Q_1(\alpha) x_j; \quad V_6(\alpha, k) = \delta \sum_{\ell=-\overline{d}}^{-1-\underline{d}} \sum_{m=k+\ell}^{k-1} y_m^T Q_4(\alpha) y_m; \tag{3.17}$$

$$V_7(\alpha, k) = \overline{d} \sum_{\ell=-\overline{d}}^{-1} \sum_{m=k+\ell}^{k-1} y_m^T Z_1(\alpha) y_m; \quad V_8(\alpha, k) = \underline{d} \sum_{\ell=-\underline{d}}^{-1} \sum_{m=k+\ell}^{k-1} y_m^T Z_2(\alpha) y_m; \tag{3.18}$$

em que

$$y_j = x_{j+1} - x_j; \quad \delta = \overline{d} - \underline{d} \tag{3.19}$$

e as matrizes $P(\alpha)$, $Q_j(\alpha)$, $j \in \mathcal{I}[1,4]$, e $Z_\ell(\alpha)$, $\ell \in \mathcal{I}[1,2]$, são dadas por

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i P_i, \quad Q_j(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i Q_{ji}, \text{ e } \quad Z_\ell(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i Z_{\ell i} \tag{3.20}$$

com $\alpha \in \Upsilon$. Essa candidata à função de L-K é baseada em [ZY08], em que as matrizes definidas em (3.20) são consideradas independentes do parâmetro α. Além disso, em [ZY08] as incertezas que afetam o sistema são do tipo limitadas em norma. Na presente proposta, a dependência em α de (3.20) permite que a função de L-K (3.14)-(3.19) seja aplicada a sistemas com incertezas do tipo politópica. Isso possibilita a obtenção de procedimentos de análise ou de síntese que podem ser menos conservadores. Note que resultados mais gerais podem ser obtidos se $P(\alpha)$, $Q(\alpha)$ e $Z(\alpha)$ são descritas de forma polinomialmente homogênea no parâmetro de incertezas α [OP06]. Para ser uma função de L-K, é necessário que (3.14)-(3.19) sejam definidas como positivas e satisfaçam

$$\Delta V(\alpha, k) = V(\alpha, k+1) - V(\alpha, k) < 0 \tag{3.21}$$

$\forall \begin{bmatrix} x_k^T & x_{k-d_k}^T \end{bmatrix}^T \neq \mathbf{0}$ e $\forall\ \alpha \in \Upsilon$. Uma condição suficiente para a positividade de (3.14)-(3.19) é obtida impondo-se $P_i > \mathbf{0}$, $Q_{ji} > \mathbf{0}$ e $Z_{\ell i} > \mathbf{0}$, para $j \in \mathcal{I}[1,4]$, $\ell \in \mathcal{I}[1,2]$ e $i \in \mathcal{I}[1,N]$.

3.3 Estimação do custo $\mathcal{H}_\infty$

Nesta seção são apresentados resultados para estimação do custo $\mathcal{H}_\infty$ de (3.7).

Teorema 3.1 *Se existirem matrizes $\mathbf{0} < P_i = P_i^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < Q_{ji} = Q_{ji}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < Z_{\ell i} = Z_{\ell i}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $j \in \mathcal{I}[1,4]$, $\ell \in \mathcal{I}[1,2]$, e um escalar $\mu > 0$ tais que $\Lambda_i < \mathbf{0}$, $i \in \mathcal{I}[1,N]$, Λ_i definido em (3.22), então, o sistema linear incerto com atraso nos estados (3.7)-(3.9) é robustamente estável com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ entre a entrada w_k e a saída z_k dado por $\gamma = \sqrt{\mu}$. Além disso, (3.14)-(3.20) são funções de L-K para esse sistema.*

Prova: A positividade de (3.14) é claramente assegurada assumindo-se $P_i = P_i^T > \mathbf{0}$, $Q_{ji} = Q_{ji}^T > \mathbf{0}$, $Z_{\ell i} = Z_{\ell i}^T > \mathbf{0}$, $i \in \mathcal{I}[1,N]$, $j \in \mathcal{I}[1,4]$, $\ell \in \mathcal{I}[1,2]$ e a estrutura apresentada em (3.20). Para a estabilidade, é necessário verificar (3.21) que é calculado conforme segue. Por conveniência, a dependência de $\Delta V(\alpha, k)$ de α poderá ser omitida a partir deste ponto.

$$\Delta V(k) = \Delta V_1(k) + \Delta V_2(k) + \Delta V_3(k) + \Delta V_4(k) + \Delta V_5(k) + \Delta V_6(k) + \Delta V_7(k) + \Delta V_8(k) \tag{3.23}$$

em que,

$$\Delta V_1(k) = x_{k+1}^T P(\alpha) x_{k+1} - x_k^T P(\alpha) x_k \tag{3.24}$$

$$\Delta V_2(k) \leq x_k^T Q_1(\alpha) x_k - x_{k-d_k}^T Q_1(\alpha) x_{k-d_k} + \sum_{i=k+1-d_{k+1}}^{k-1} x_i^T Q_1(\alpha) x_i - \sum_{i=k+1-d_k}^{k-1} x_i^T Q_1(\alpha) x_i \tag{3.25}$$

$$
\Lambda_i = \left[\begin{array}{cc}
P_i + \overline{d}^2 Z_{1i} + \delta^2 Q_{4i} + \underline{d}^2 Z_{2i} - F_1 - F_1^T & \begin{array}{c} -\overline{d}^2 Z_{1i} - \delta^2 Q_{4i} - \underline{d}^2 Z_{2i} \\ +F_1 A_i + G_1 C_i - F_2^T \end{array} \\
\star & \begin{array}{c} (\delta+1)Q_{1i} + Q_{2i} + Q_{3i} + \overline{d}^2 Z_{1i} \\ +\delta^2 Q_{4i} + \underline{d}^2 Z_{2i} - P_i - Z_{1i} - Z_{2i} \\ +F_2 A_i + A_i^T F_2^T + G_2 C_i + C_i^T G_2^T \end{array} \\
\star & \star \\
\star & \star \\
\star & \star \\
\star & \star \\
\star & \star
\end{array}\right.
$$

$$
\begin{array}{ccc}
F_1 A_{di} + G_1 C_{di} - F_3^T & -F_4^T & -F_5^T \\
\begin{array}{c} F_2 A_{di} + G_2 C_{di} + A_i^T F_3^T \\ +C_i^T G_3^T \end{array} & Z_{1i} + A_i^T F_4^T + C_i^T G_4^T & Z_{2i} + A_i^T F_5^T + C_i^T G_5^T \\
\begin{array}{c} -Q_{1i} - 2Q_{4i} + F_3 A_{di} \\ +A_{di}^T F_3^T + G_3 C_{di} + C_{di}^T G_3^T \end{array} & Q_{4i} + A_{di}^T F_4^T + C_{di}^T G_4^T & Q_{4i} + A_{di}^T F_5^T + C_{di}^T G_5^T \\
\star & -Q_{2i} - Z_{1i} - Q_{4i} & \mathbf{0} \\
\star & \star & -Q_{3i} - Z_{2i} - Q_{4i} \\
\star & \star & \star \\
\star & \star & \star
\end{array}
$$

$$
\left.\begin{array}{cc}
-G_1 - F_6^T & F_1 B_{wi} + G_1 D_{wi} - F_7^T \\
-G_2 + A_i^T F_6^T + C_i^T G_6^T & F_2 B_{wi} + G_2 D_{wi} + A_i^T F_7^T + C_i^T G_7^T \\
-G_3 + A_{di}^T F_6^T + C_{di}^T G_6^T & F_3 B_{wi} + G_3 D_{wi} + A_{di}^T F_7^T + C_{di}^T G_7^T \\
-G_4 & F_4 B_{wi} + G_4 D_{wi} \\
-G_5 & F_5 B_{wi} + G_5 D_{wi} \\
\mathbf{I}_p - G_6 - G_6^T & -G_7^T + F_6 B_{wi} + G_6 D_{wi} \\
\star & -\mu \mathbf{I}_v + F_7 B_{wi} + B_{wi}^T F_7^T + G_7 D_{wi} + D_{wi}^T G_7^T
\end{array}\right] \tag{3.22}
$$

Seja o primeiro somatório que aparece em (3.25) denotado por $\displaystyle\sum_{i=k+1-d_{k+1}}^{k-1} x_i^T Q_1(\alpha) x_i$. Esse somatório pode ser reescrito como

$$
\Pi_k = \sum_{i=k+1-d_{k+1}}^{k-\underline{d}} x_i^T Q_1(\alpha) x_i + \sum_{i=k-(\underline{d}-1)}^{k-1} x_i^T Q_1(\alpha) x_i \tag{3.26}
$$

Sabendo que $d_{k+1} \leq \overline{d}$ e que $\underline{d} \leq d_k$, pode-se majorar (3.26) como

$$
\Pi_k = \sum_{i=k+1-\overline{d}}^{k-\underline{d}} x_i^T Q_1(\alpha) x_i + \sum_{i=k+1-d_k}^{k-1} x_i^T Q_1(\alpha) x_i \tag{3.27}
$$

Portanto, usando-se (3.27) em (3.25), obtém-se

$$\Delta V_2(k) \leq x_k^T Q_1(\alpha) x_k - x_{k-d_k}^T Q_1(\alpha) x_{k-d_k} + \sum_{i=k+1-\overline{d}}^{k-\underline{d}} x_i^T Q_1(\alpha) x_i \tag{3.28}$$

$$\Delta V_3(k) = x_k^T Q_2(\alpha) x_k - x_{k-\overline{d}}^T Q_2(\alpha) x_{k-\overline{d}} \tag{3.29}$$

$$\Delta V_4(k) = x_k^T Q_3(\alpha) x_k - x_{k-\underline{d}}^T Q_3(\alpha) x_{k-\underline{d}} \tag{3.30}$$

$$\Delta V_5(k) = (\overline{d} - \underline{d}) x_k^T Q_1(\alpha) x_k - \sum_{i=k+1-\overline{d}}^{k-\underline{d}} x_i^T Q_1(\alpha) x_i \tag{3.31}$$

Usando δ dado em (3.19), $\Delta V_6(k)$ pode ser dado por

$$\begin{aligned}\Delta V_6(k) &= \delta^2 y_k^T Q_4(\alpha) y_k - \delta \sum_{m=k-\overline{d}}^{k-\underline{d}-1} y_m^T Q_4(\alpha) y_m \\ &= \delta^2 y_k^T Q_4(\alpha) y_k \underbrace{-\delta \sum_{m=k-\overline{d}}^{k-d_k-1} y_m^T Q_4(\alpha) y_m}_{S_1} \underbrace{-\delta \sum_{m=k-d_k}^{k-\underline{d}-1} y_m^T Q_4(\alpha) y_m}_{S_2}\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Jensen (veja apêndice A.4), é possível obter

$$S_1 \leq -(\overline{d} - d_k) \sum_{m=k-\overline{d}}^{k-d_k-1} y_m^T Q_4(\alpha) y_m \leq -(x_{k-d_k} - x_{k-\overline{d}})^T Q_4(\alpha)(x_{k-d_k} - x_{k-\overline{d}})$$

$$S_2 \leq -(d_k - \underline{d}) \sum_{m=k-d_k}^{k-\underline{d}-1} y_m^T Q_4(\alpha) y_m \leq -(x_{k-\underline{d}} - x_{k-d_k})^T Q_4(\alpha)(x_{k-\underline{d}} - x_{k-d_k})$$

o que permite escrever

$$\begin{aligned}\Delta V_6(k) \leq \delta^2 y_k^T Q_4(\alpha) y_k &- (x_{k-d_k} - x_{k-\overline{d}})^T Q_4(\alpha)(x_{k-d_k} - x_{k-\overline{d}}) \\ &- (x_{k-\underline{d}} - x_{k-d_k})^T Q_4(\alpha)(x_{k-\underline{d}} - x_{k-d_k})\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\Delta V_7(k) = \overline{d}^2 y_k^T Z_1(\alpha) y_k \underbrace{-\overline{d} \sum_{j=k-\overline{d}}^{k-1} y_j^T Z_1(\alpha) y_j}_{S_3} \tag{3.33}$$

Aplicando a desigualdade de Jensen (veja apêndice A.4) em S_3 e considerando y_j dado em (3.19) tem-se

$$S_3 \leq -\left(\sum_{j=k-\overline{d}}^{k-1} y_j\right)^T Z_1(\alpha) \left(\sum_{j=k-\overline{d}}^{k-1} y_j\right) = -(x_k - x_{k-\overline{d}})^T Z_1(\alpha)(x_k - x_{k-\overline{d}})$$

o que leva a

$$\Delta V_7(k) \leq \overline{d}^2 y_k^T Z_1(\alpha) y_k - (x_k - x_{k-\overline{d}})^T Z_1(\alpha)(x_k - x_{k-\overline{d}}) \tag{3.34}$$

A diferença $\Delta V_8(k)$ pode ser computada por procedimento semelhante ao adotado para o cálculo de $\Delta V_7(k)$, resultando em

$$\Delta V_8(k) \leq \underline{d}^2 y_k^T Z_2(\alpha) y_k - (x_k - x_{k-\underline{d}})^T Z_2(\alpha)(x_k - x_{k-\underline{d}}) \tag{3.35}$$

Portanto, somando-se (3.24)-(3.35), obtém-se $\Delta V(\alpha, k) \leq \tilde{\omega}^T \tilde{M}(\alpha)\tilde{\omega} < 0$, em que $\tilde{M}(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \tilde{M}_i$, $\alpha \in \Upsilon$, $\tilde{M}_i$ é dada por

$$\tilde{M}_i = \begin{bmatrix} P_i + \overline{d}^2 Z_{1i} + \delta^2 Q_{4i} + \underline{d}^2 Z_{2i} & -\overline{d}^2 Z_{1i} - \delta^2 Q_{4i} - \underline{d}^2 Z_{2i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \begin{array}{c}(\delta+1)Q_{1i} + Q_{2i} + Q_{3i} + \overline{d}^2 Z_{1i} \\ +\delta^2 Q_{4i} + \underline{d}^2 Z_{2i} - P_i - Z_{1i} - Z_{2i}\end{array} & \mathbf{0} & Z_{1i} \\ \star & \star & -Q_{1i} - 2Q_{4i} & Q_{4i} \\ \star & \star & \star & -Q_{2i} - Z_{1i} - Q_{4i} \\ \star & \star & \star & -Q_{3i} - Z_{2i} - Q_{4i} \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

e
$\tilde{\omega} = \begin{bmatrix} x_{k+1}^T & x_k^T & x_{k-d_k}^T & x_{k-\overline{d}}^T & x_{k-\underline{d}}^T \end{bmatrix}^T$.

Para o cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, considere o sistema (3.7) robustamente estável com condições iniciais nulas, (3.12), $\mu = \gamma^2$, $w_k \in \ell_2$ e o índice de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ dado por

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left[z_k^T z_k - \mu w_k^T w_k \right] \tag{3.37}$$

Neste caso, tem-se que $V(\alpha, 0) = 0$ e na medida em que k aumenta $V(\alpha, \infty)$ aproxima-se de zero quando w_k tender a zero; ou de uma constante $\varphi < \infty$, no caso de w_k tender a $\phi < \infty$. Assim, usando (3.21), J definido em (3.37) pode ser majorado como

$$\begin{aligned} J &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left[z_k^T z_k - \mu w_k^T w_k + \Delta V(\alpha, k) \right] \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left[z_k^T z_k - \mu w_k^T w_k + \tilde{\omega}^T \tilde{M}(\alpha)\tilde{\omega} \right] \end{aligned}$$

que pode ser reescrito como

$$J \leq \sum_{k=0}^{\infty} \omega^T M(\alpha) \omega \tag{3.38}$$

em que

$$M(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i M_i, \tag{3.39}$$

$$M_i = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{M}_i & \mathbf{0} \\ \hline \star & \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \star & -\mu\mathbf{I}_v \end{bmatrix} \end{array}\right] \tag{3.40}$$

e

$$\omega = \left[\begin{array}{c|cc} \tilde{\omega}^T & z_k^T & w_k^T \end{array}\right]^T. \tag{3.41}$$

Assim, uma condição para assegurar a estabilidade robusta de (3.7) com custo $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ é

$$\omega^T M(\alpha)\omega < 0 \text{ sujeito a (3.7)}, \tag{3.42}$$

com $M(\alpha)$ e ω definidos, respectivamente, em (3.39) e (3.41). A condição (3.42) é, pelo Lema de Finsler (veja apêndice A.3), equivalente a

$$M(\alpha) + \mathcal{X}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha)^T\mathcal{X}(\alpha)^T < \mathbf{0}, \tag{3.43}$$

com

$$\mathcal{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_n & A(\alpha) & A_d(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_w(\alpha) \\ \mathbf{0} & C(\alpha) & C_d(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_p & D_w(\alpha) \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

Portanto, a condição de análise (3.22), que pode ser escrita como $M_i + \mathcal{X}\mathcal{B}_i + \mathcal{B}_i^T\mathcal{X}^T < \mathbf{0}$, com

$$\mathcal{X}(\alpha) = \mathcal{X} = \begin{bmatrix} F_1^T & F_2^T & F_3^T & F_4^T & F_5^T & F_6^T & F_7^T \\ G_1^T & G_2^T & G_3^T & G_4^T & G_5^T & G_6^T & G_7^T \end{bmatrix}^T$$

e $\mathcal{B}_i$ obtido pela troca das matrizes dependentes de α em (3.44) pelas respectivas i-ésimas matrizes vértices, é suficiente para recuperar (3.43). Para isso, basta multiplicar cada desigualdade (3.22) por α_i e somar em $i = 1, \ldots, N$, o que resulta em (3.43) que por sua vez é equivalente a (3.42). Logo, se (3.22) é factível, então o sistema (3.7) é robustamente estável com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma = \sqrt{\mu}$. ■

É possível utilizar as condições estabelecidas no Teorema 3.1 para formular o seguinte problema convexo para a busca do menor valor de $\mu = \gamma^2$ tal que (3.22) seja factível:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{H}_\infty} : \left\{ \begin{array}{cc} \min & \mu \\ P_i > \mathbf{0}; Q_{ji} > \mathbf{0}; Z_{\ell i} > \mathbf{0}, & \\ i \in \mathcal{I}[1,N], j \in \mathcal{I}[1,4], \ell \in \mathcal{I}[1,2] & \\ F_h, G_h, h \in \mathcal{I}[1,7] & \\ \text{tal que} & \Lambda_i < \mathbf{0}, i \in \mathcal{I}[1,N] \end{array} \right. \tag{3.45}$$

em que Λ_i é dado em (3.22).

No caso de sistemas com incertezas variantes no tempo, isto é, $\alpha = \alpha_k = \alpha(k)$, as condições aqui formuladas podem ser diretamente adaptadas considerando a abordagem da estabilidade quadrática. Nesse caso, os termos da função de L-K são obtidos usando $P_i = P$, $Q_{ji} = Q_j$, $Z_{\ell i} = Z_\ell$, $j \in \mathcal{I}[1,4]$, $\ell \in \mathcal{I}[1,2]$, o que resulta em condições similares às do Teorema 3.1 com essas matrizes independentes do parâmetro incerto. A condição assim obtida, por tratar a estabilidade quadrática com variáveis matriciais extras, é dita *EQ-extra* sendo apresentada em (3.46).

Uma outra abordagem, considerando sistemas com incertezas variantes no tempo, pode ser diretamente adaptada considerando também a abordagem da estabilidade quadrática. Ou seja,

$$
\left[\begin{array}{cc}
P+\overline{d}^2 Z_1+\delta^2 Q_4+\underline{d}^2 Z_2-F_1-F_1^T & \begin{array}{c}-\overline{d}^2 Z_1-\delta^2 Q_4-\underline{d}^2 Z_2\\ +F_1A_i+G_1C_i-F_2^T\end{array} \\
\star & \begin{array}{c}(\delta+1)Q_1+Q_2+Q_3+\overline{d}^2 Z_1\\ +\delta^2 Q_4+\underline{d}^2 Z_2-P-Z_1-Z_2\\ +F_2A_i+A_i^TF_2^T+G_2C_i+C_i^TG_2^T\end{array} \\
\star & \star \\
\star & \star \\
\star & \star \\
\star & \star \\
\star & \star
\end{array}\right.
$$

$$
\begin{array}{ccc}
F_1A_{di}+G_1C_{di}-F_3^T & -F_4^T & -F_5^T \\
\begin{array}{c}F_2A_{di}+G_2C_{di}+A_i^TF_3^T\\ +C_i^TG_3^T\end{array} & Z_1+A_i^TF_4^T+C_i^TG_4^T & Z_2+A_i^TF_5^T+C_i^TG_5^T \\
\begin{array}{c}-Q_1-2Q_4+F_3A_{di}\\ +A_{di}^TF_3^T+G_3C_{di}+C_{di}^TG_3^T\end{array} & Q_4+A_{di}^TF_4^T+C_{di}^TG_4^T & Q_4+A_{di}^TF_5^T+C_{di}^TG_5^T \\
\star & -Q_2-Z_1-Q_4 & \mathbf{0} \\
\star & \star & -Q_3-Z_2-Q_4 \\
\star & \star & \star \\
\star & \star & \star
\end{array}
$$

$$
\left.\begin{array}{cc}
-G_1-F_6^T & F_1B_{wi}+G_1D_{wi}-F_7^T \\
-G_2+A_i^TF_6^T+C_i^TG_6^T & F_2B_{wi}+G_2D_{wi}+A_i^TF_7^T+C_i^TG_7^T \\
-G_3+A_{di}^TF_6^T+C_{di}^TG_6^T & F_3B_{wi}+G_3D_{wi}+A_{di}^TF_7^T+C_{di}^TG_7^T \\
-G_4 & F_4B_{wi}+G_4D_{wi} \\
-G_5 & F_5B_{wi}+G_5D_{wi} \\
\mathbf{I}_p-G_6-G_6^T & -G_7^T+F_6B_{wi}+G_6D_{wi} \\
\star & -\mu\mathbf{I}_v+F_7B_{wi}+B_{wi}^TF_7^T+G_7D_{wi}+D_{wi}^TG_7^T
\end{array}\right] < \mathbf{0} \quad (3.46)
$$

os termos da função de L-K são obtidos usando $P_i = P$, $Q_{ji} = Q_j$, $Z_{\ell i} = Z_\ell$, $j \in \mathcal{I}[1,4]$, $\ell \in \mathcal{I}[1,2]$, o que resulta em condições similares às do Teorema 3.1 com essas matrizes independentes do parâmetro incerto. Essa condição difere da *EQ-extra* , por não utilizar variáveis matriciais extras, é tratada neste trabalho como *EQ-direta* e apresentada em (3.47).

3.4 Controle robusto $\mathcal{H}_\infty$

Nesta seção são apresentados resultados para síntese de ganhos robustos $\mathcal{H}_\infty$ tais que a lei de controle (3.6) aplicada em (3.1) resulte em um sistema robustamente estável em malha fechada.

Teorema 3.2 *Se existirem matrizes* $W \in \mathbb{R}^{p\times m}$, $W_d \in \mathbb{R}^{p\times m}$, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < \tilde{P}_i = \tilde{P}_i^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < \tilde{Q}_{ji} = \tilde{Q}_{ji}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < \tilde{Z}_{\ell i} = \tilde{Z}_{\ell i}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $j \in \mathcal{I}[1,4]$, $\ell \in \mathcal{I}[1,2]$, $d_k \in \mathcal{I}[\underline{d},\overline{d}]$ *com* $\overline{d}$ *e* $\underline{d}$ *pertencentes a* $\mathbb{N}_*$, *um escalar* $0 < \theta \leq 1$ *e um valor dado* $\mu > 0$ *tais que* $\Xi_i < \mathbf{0}$, $i \in \mathcal{I}[1,N]$ *e*

$$
\begin{bmatrix}
\begin{array}{c}(\delta+1)Q_1+Q_2+Q_3+\overline{d}^2Z_1\\ +\delta^2Q_4+\underline{d}^2Z_2-\overline{d}^2Z_1^TA_i-\overline{d}^2A_i^TZ_1\\ -\delta^2Q_4^TA_i-\delta^2A_i^TQ_4-\underline{d}^2A_i^TZ_2-\underline{d}^2Z_2^TA_i\\ -P-Z_1-Z_2+A_i^TPA_i\\ +\overline{d}^2(A_i^TZ_1A_i)+\delta^2(A_i^TQ_4A_i)\\ +\underline{d}^2(A_i^TZ_2A_i)+C_i^TC_i\end{array} & \begin{array}{c}A_i^TPA_{di}+\overline{d}^2(A_i^TZ_1A_{di})+\delta^2(A_i^TQ_4A_{di})\\ +\underline{d}^2(A_i^TZ_2A_{di})+C_i^TC_{di}-\overline{d}^2Z_1^TA_{di}\\ -\delta^2Q_4^TA_{di}-\underline{d}^2Z_2^TA_{di}\end{array} & Z_1 & Z_2 & \begin{array}{c}A_i^TPB_{wi}+\overline{d}^2(A_i^TZ_1B_{wi})\\ +\delta^2(A_i^TQ_4B_{wi})+\underline{d}^2(A_i^TZ_2B_{wi})\\ +C_i^TD_{wi}-\overline{d}^2Z_1^TB_{wi}\\ -\delta^2Q_4^TB_{wi}-\underline{d}^2Z_2^TB_{wi}\end{array}\\
\star & \begin{array}{c}-Q_1-2Q_4+A_{di}^TPA_{di}\\ +\overline{d}^2(A_{di}^TZ_1A_{di})+\delta^2(A_{di}^TQ_4A_{di})\\ +\underline{d}^2(A_{di}^TZ_2A_{di})+C_{di}^TC_{di}\end{array} & Q_4 & Q_4 & \begin{array}{c}A_{di}^TPB_{wi}+\overline{d}^2(A_{di}Z_1B_{wi})\\ +\delta^2(A_{di}^TQ_4B_{wi})+\underline{d}^2(A_{di}^TZ_2B_{wi})\\ +C_{di}^TD_{wi}\end{array}\\
\star & \star & -Q_2-Z_1-Q_4 & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\
\star & \star & \star & -Q_3-Z_2-Q_4 & \mathbf{0}\\
\star & \star & \star & \star & \begin{array}{c}-\mu\mathbf{I}_v+B_{wi}^TPB_{wi}\\ +\overline{d}^2(B_{wi}^TZ_1B_{wi})+\delta^2(B_{wi}^TQ_4B_{wi})\\ +\underline{d}^2(B_{wi}^TZ_2B_{wi})+D_{wi}^TD_{wi}\end{array}
\end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (3.47)
$$

Ξ_i definido em (3.48) é verificado, então o sistema incerto (3.1)-(3.5) sujeito à lei de controle (3.6) com

$$K = WF^{-1} \quad e \quad K_d = W_dF^{-1} \tag{3.49}$$

é robustamente estável, com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma = \sqrt{\mu}$. Além disso, (3.14)-(3.20) são funções de Lyapunov-Krasovskii que garantem a estabilidade do sistema de malha fechada resultante, (3.7)-(3.11).

Prova: Para demonstrar a suficiência da condição de síntese (3.48) observa-se, inicialmente, que se essa é verificada, então é assegurada a regularidade de F, uma vez que, do bloco $(1,1)$ de (3.48), tem-se $F+F^T > \tilde{P}_i + \overline{d}^2\tilde{Z}_{1i} + \delta^2\tilde{Q}_{4i} + \underline{d}^2\tilde{Z}_{2i} > \mathbf{0}$. Além disso, existe um escalar real $\kappa \in]0,2[$ tal que, para $\theta \in]0,1]$, $\kappa(\kappa-2) = -\theta$. Assim, substituindo o bloco $(6,6)$ de (3.48) por $\kappa(\kappa-2)\mathbf{I}_p$, as variáveis de otimização W e W_d por KF e K_dF, respectivamente, usando (3.10)-(3.11) e pré e pós-multiplicando a desigualdade resultante à esquerda por T e à direita por T^T, em que

$$T = \text{bloco-diag}\left\{\mathbf{I}_5 \otimes F^{-T}, G, \mathbf{I}_{p+v}\right\} \tag{3.50}$$

com $G \in \mathbb{R}^{p\times p}$, obtém-se $\hat{\Xi}_i < \mathbf{0}$, com $\hat{\Xi}_i$ definido em (3.51), na próxima página. Note-se que,

$$
\Xi_i = \left[\begin{array}{ccccccc}
\begin{array}{c}\tilde{P}_i - F - F^T + \overline{d}^2\tilde{Z}_{1i}\\ +\delta^2\tilde{Q}_{4i} + \underline{d}^2\tilde{Z}_{2i}\end{array} & -\overline{d}^2\tilde{Z}_{1i} - \delta^2\tilde{Q}_{4i} - \underline{d}^2\tilde{Z}_{2i} + A_iF + B_iW & A_{di}F + B_iW_d & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & FB_{wi}\\
\star & \begin{array}{c}(\delta+1)\tilde{Q}_{1i} + \tilde{Q}_{2i} + \tilde{Q}_{3i} + \overline{d}^2\tilde{Z}_{1i}\\ +\delta^2\tilde{Q}_{4i} + \underline{d}^2\tilde{Z}_{2i} - \tilde{P}_i - \tilde{Z}_{1i} - \tilde{Z}_{2i}\end{array} & \mathbf{0} & \tilde{Z}_{1i} & \tilde{Z}_{2i} & F^TC_i^T + W^TD_i^T & \mathbf{0}\\
\star & \star & -\tilde{Q}_{1i} - 2\tilde{Q}_{4i} & \tilde{Q}_{4i} & \tilde{Q}_{4i} & F^TC_{di}^T + W_d^TD_i^T & \mathbf{0}\\
\star & \star & \star & -\tilde{Q}_{2i} - \tilde{Z}_{1i} - \tilde{Q}_{4i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\
\star & \star & \star & \star & -\tilde{Q}_{3i} - \tilde{Z}_{2i} - \tilde{Q}_{4i} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\
\star & \star & \star & \star & \star & -\theta\mathbf{I}_p & D_{wi}\\
\star & \star & \star & \star & \star & \star & -\mu\mathbf{I}_v
\end{array}\right] \tag{3.48}
$$

assumindo $G = -\dfrac{1}{\kappa}\mathbf{I}_p$, o bloco $(6,6)$ de (3.51) pode ser reescrito como

$$
\begin{aligned}
G\left(\kappa^2 - 2\kappa\right)G^T &= \left(-\frac{1}{\kappa}\mathbf{I}_p\right)\left(\kappa^2 - 2\kappa\right)\left(-\frac{1}{\kappa}\mathbf{I}_p\right)\\
&= \left(1 - \frac{2}{\kappa}\right)\mathbf{I}_p\\
&= \mathbf{I}_p - \frac{1}{\kappa}\mathbf{I}_p - \frac{1}{\kappa}\mathbf{I}_p\\
&= \mathbf{I}_p + G + G^T
\end{aligned} \tag{3.52}
$$

o que assegura a verificação de (3.22), com $P_i = F^{-T}\tilde{P}_iF^{-1}$, $Q_{ji} = F^{-T}\tilde{Q}_{ji}F^{-1}$, $Z_{\ell i} = F^{-T}\tilde{Z}_{\ell i}F^{-1}$, $i \in \mathcal{I}[1,N]$, $j \in \mathcal{I}[1,4]$, $\ell \in \mathcal{I}[1,2]$, $F_1 = F^{-1}$, $G_6 = -G$ e matrizes F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 e G_7 nulas.

■

As condições estabelecidas no Teorema 3.2 proporcionam uma solução convexa para o Problema 3.2. Esse tipo de solução pode ser eficientemente obtida usando-se, por exemplo, algoritmos de pontos interiores [BGFB94].

Nesta proposta, a convexidade foi obtida, dentre outras técnicas, pela supressão de parte das variáveis de folga que faziam produto com os ganhos K e K_d que devem ser determinados. Esse procedimento assegura a convexidade ao custo da introdução de algum conservadorismo. Portanto, o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ obtido no projeto de K e K_d via Teorema 3.2 é sempre maior ou igual ao obtido pelo Teorema 3.1 aplicado ao sistema incerto em malha fechada resultante.

Destaca-se também que todas as matrizes do sistema podem possuir incertezas politópicas, o que difere esta proposta do que é frequentemente encontrado na literatura, em que, geralmente

$$
\hat{\Xi}_i = \left[\begin{array}{cccccc}
\begin{array}{c} F^{-T}\tilde{P}_iF^{-1} - F^{-T} - F^{-1} \\ +\overline{d}^2F^{-T}\tilde{Z}_{1i}F^{-1} + \delta^2F^{-T}\tilde{Q}_{4i}F^{-1} \\ +\underline{d}^2F^{-T}\tilde{Z}_{2i}F^{-1} \end{array} & \begin{array}{c} -\overline{d}^2F^{-T}\tilde{Z}_{1i}F^{-1} - \delta^2F^{-T}\tilde{Q}_{4i}F^{-1} \\ -\underline{d}^2F^{-T}\tilde{Z}_{2i}F^{-1} + F^{-T}(A_i + B_iK) \end{array} & F^{-T}(A_{di} + B_iK_d) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & F^{-T}\tilde{Z}_{2i}F^{-1} \\
\star & \begin{array}{c} (\delta+1)F^{-T}\tilde{Q}_{1i}F^{-1} + F^{-T}\tilde{Q}_{2i}F^{-1} \\ +F^{-T}\tilde{Q}_{3i}F^{-1} + \overline{d}^2F^{-T}\tilde{Z}_{1i}F^{-1} \\ +\delta^2F^{-T}\tilde{Q}_{4i}F^{-1} + \underline{d}^2F^{-T}\tilde{Z}_{2i}F^{-1} \\ -F^{-T}\tilde{P}_iF^{-1} - F^{-T}\tilde{Z}_{1i}F^{-1} - F^{-T}\tilde{Z}_{2i}F^{-1} \end{array} & \mathbf{0} & F^{-T}\tilde{Z}_{1i}F^{-1} & (C_i^T + K^TD_i^T)G^T & F^{-T}\tilde{Q}_{4i}F^{-1} \\
\star & \star & -F^{-T}\tilde{Q}_{1i}F^{-1} - 2F^{-T}\tilde{Q}_{4i}F^{-1} & F^{-T}\tilde{Q}_{4i}F^{-1} & (C_{di}^T + K_d^TD_i^T)G^T & F^{-T}\tilde{Q}_{4i}F^{-1} \\
\star & \star & \star & -F^{-T}\tilde{Q}_{2i}F^{-1} - F^T\tilde{Q}_{4i}F^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\star & \star & -F^{-T}\tilde{Z}_{1i}F^{-1} & \star & -F^{-T}\tilde{Q}_{3i}F^{-1} - F^{-T}\tilde{Q}_{4i}F^{-1} - F^{-T}\tilde{Z}_{2i}F^{-1} & \mathbf{0} \\
\star & \star & \star & \star & \star & G\left(\kappa^2 - 2\kappa\right)G^T \\
\star & \star & \star & \star & \star & \star
\end{array}\right.
$$

$$
\left.\begin{array}{ccc}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & FB_{wi} \\
\mathbf{0} & (C_i^T + K^TD_i^T)G^T & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & (C_{di}^T + K_d^TD_i^T)G^T & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
GD_{wi} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
-\mu\mathbf{I}_v & \star & GD_{wi} \\
\star & \star & -\mu\mathbf{I}_v
\end{array}\right] \tag{3.51}
$$

apenas as matrizes A, A_d, B e B_w são consideradas incertas. A síntese de ganhos robustos K e K_d pode ser feita de forma a minimizar o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, $\gamma = \sqrt{\mu}$, do sistema em malha fechada. Nesse caso, pode-se resolver o seguinte problema convexo de otimização:

$$
\mathcal{S}_{\mathcal{H}_\infty} : \left\{\begin{array}{cc}
\min & \mu \\
\tilde{P}_i > \mathbf{0}; \tilde{Q}_{ji} > \mathbf{0}; \tilde{Z}_{\ell i} > \mathbf{0}, & \\
i \in \mathcal{I}[1,N], j \in \mathcal{I}[1,4], \ell \in \mathcal{I}[1,2] & \\
F; W; W_d; 0 < \theta \leq 1 & \\
\text{tal que} & \Xi_i < \mathbf{0}, i \in \mathcal{I}[1,N]
\end{array}\right. \tag{3.53}
$$

em que Ξ_i é dado em (3.48).

É interessante notar que as condições propostas no Teorema 3.2 e no problema de otimização convexa $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_\infty}$ dado em (3.53) podem ser utilizadas para a síntese de ganhos descentralizados. Para isso, basta seguir passos semelhantes aos apresentados em [ML08b].

De forma semelhante ao que foi observado no caso da estimação do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, podem-se obter formulações convexas baseadas na estabilidade quadrática, isto é, usando-se matrizes independentes de parâmetro em (3.14)-(3.20). Nesse caso, os resultados obtidos tanto na estimação do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ quanto na síntese de ganhos robustos que minimizam o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ serão, em geral, mais conservadores. As variáveis de folga podem ser úteis na síntese de ganhos descentralizados baseados na estabilidade quadrática, uma vez que não será necessário impor nenhum tipo de estrutura adicional nas matrizes da função.

Para sistemas com incertezas variantes no tempo, isto é, $\alpha = \alpha_k = \alpha(k)$, as condições aqui formuladas podem ser diretamente adaptadas considerando a abordagem da estabilidade quadrática. Nesse caso, os termos da função de L-K são obtidos usando $\tilde{P}_i = \tilde{P}$, $\tilde{Q}_{ji} = \tilde{Q}_j$, $\tilde{Z}_{\ell i} = \tilde{Z}_\ell$, $i \in \mathcal{I}[1,N]$, $j \in \mathcal{I}[1,4]$, $\ell \in \mathcal{I}[1,2]$, o que resulta em condições similares às do Teorema 3.2 com essas matrizes independentes do parâmetro incerto. Essa condição, por tratar a estabilidade quadrática com variáveis matriciais extras, são ditas *EQ-extra* para síntese, e dada por (3.54).

$$\Xi_i = \begin{bmatrix} \begin{array}{c} \tilde{P} - F - F^T + \overline{d}^2\tilde{Z}_1 \\ +\delta^2\tilde{Q}_4 + \underline{d}^2\tilde{Z}_2 \end{array} & -\overline{d}^2\tilde{Z}_1 - \delta^2\tilde{Q}_4 - \underline{d}^2\tilde{Z}_2 + A_iF + B_iW & A_{di}F + B_iW_d & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & FB_{wi} \\ \star & \begin{array}{c} (\delta+1)\tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_2 + \tilde{Q}_3 + \overline{d}^2\tilde{Z}_1 \\ +\delta^2\tilde{Q}_4 + \underline{d}^2\tilde{Z}_2 - \tilde{P} - \tilde{Z}_1 - \tilde{Z}_2 \end{array} & \mathbf{0} & \tilde{Z}_1 & \tilde{Z}_2 & F^TC_i^T + W^TD_i^T & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\tilde{Q}_{1i} - 2\tilde{Q}_{4i} & \tilde{Q}_4 & \tilde{Q}_4 & F^TC_{di}^T + W_d^TD_i^T & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -\tilde{Q}_2 - \tilde{Z}_1 - \tilde{Q}_4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & -\tilde{Q}_3 - \tilde{Z}_2 - \tilde{Q}_4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & \star & -\theta\mathbf{I}_p & D_{wi} \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & -\mu\mathbf{I}_v \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (3.54)$$

Observação 3.1 *O procedimento para síntese de ganhos robustos que minimizam o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, sem utilizar variáveis matriciais extras não é trivial. Ao fechar a malhar, em que troca-se A por $A + BK$ e A_d por $A + BK_d$, o K e o K_d farão produtos com as matrizes de L-K $\tilde{P}$, $\tilde{Q}_j$, $\tilde{Z}_\ell$, $j \in \mathcal{I}[1,4]$, $\ell \in \mathcal{I}[1,2]$ sendo necessário impor estruturas nestas matrizes. Essa condição não será tratada neste trabalho.*

3.5 Complexidade Numérica

As complexididades numéricas das condições propostas podem ser determinadas pela quantidade de variáveis escalares $\mathcal{V}$ e o número de linhas nas LMIs $\mathcal{L}$, conforme os problemas de otimização que as mesmas representam. Para a condição de análise de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ proposta pelo Teorema 3.1, (3.22) ($\mathcal{L} = N(12n+p+v)$, $\mathcal{V} = 3.5Nn(n+1) + (5n+p+v)(n+p)$), *EQ-extra*, (3.46) ($\mathcal{L} = (12n+p+v)$, $\mathcal{V} = 3.5n(n+1) + (5n+p+v)(n+p)$) e *EQ-direta*, (3.47) ($\mathcal{L} = 7n$, $\mathcal{V} = 3.5n(n+1)+1$). E para a condição de síntese proposta pelo Teorema 3.2, (3.48)($\mathcal{L} = N(12n+p+v)$, $\mathcal{V} = 3.5Nn(n+1) + n(n+2m)+1$) e *EQ-extra* para síntese, (3.54) ($\mathcal{L} = (12n+p+v)$, $\mathcal{V} = 3.5n(n+1)+n(n+2m)+1$). Com o SeDuMi a complexidade numérica é $\mathfrak{O}(\mathcal{V}^2\mathcal{L}^{2.5} + \mathcal{L}^{3.5})$. Atualmente algoritmos eficientes podem resolver esses problemas em tempo polinomial.

3.6 Exemplos

Exemplo 3.1 (Precisamente Conhecido) *Considere o problema de estabilização robusta com minimização do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, γ, do sistema estudado em [HWHS08] e representado por (3.1) com:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ -0.14 & 0.9 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, B = B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{0.1} \end{bmatrix}, C_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Utilizando esse sistema são realizados dois experimentos numéricos. Primeiramente, utiliza-se o problema de otimização $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_\infty}$ dado em (3.53), para a síntese de ganhos robustos K e K_d em duas situações: i) $d_k \in \mathcal{I}[1,3]$ *e* ii) $d_k \in \mathcal{I}[1,4]$, *conforme [HWHS08]. No segundo experimento buscou-se determinar o maior valor de $\overline{d}$ tal que, para $d_k \in \mathcal{I}[1,\overline{d}]$ o problema de otimização $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_\infty}$, (3.53), seja factível.*

Experimento 1

São calculados os pares de ganhos robustos K e K_d com aplicação do Teorema 3.2 e pela síntese (EQ-extra). Como o sistema apresentado em [HWHS08] é precisamente conhecido, os ganhos robustos (em relação ao atraso) apresentaram os mesmos valores para ambas as condições de síntese. Os ganhos robustos para o intervalo de variação do atraso $d_k \in \mathcal{I}[1,3]$ e $d_k \in \mathcal{I}[1,4]$, em ambos casos de síntese são:

$$[K|K_d]_{i)} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0.2308 & -0.3585 & 0.4362 & -0.0966 \end{array}\right] \tag{3.55}$$

$$[K|K_d]_{ii)} = \left[\begin{array}{cc|cc} -0.0168 & -0.3120 & 0.3639 & -0.0954 \end{array}\right] \tag{3.56}$$

Utiliza-se também o problema de otimização $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_\infty}$ dado em (3.53), para a síntese de ganhos robustos K e $K_d = 0$ nas mesmas condições i) *e* ii). *O uso de $K_d = 0$ deve ser considerado em situações em que não é possível obter o valor do atraso em todos instantes de amostragem. Essa abordagem é mais utilizada na literatura, mas os resultados podem ser mais conservadores do que quando é utilizado $K_d \neq \mathbf{0}$. Os ganhos robustos são obtidos utilizando o Teorema 3.2 e*

pela síntese (EQ-extra), os casos i) *e* ii) *são:*

$$[K|K_d]_{i)} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0.5860 & -0.4512 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{3.57}$$

$$[K|K_d]_{ii)} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0.3311 & -0.4317 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{3.58}$$

Utilizando os ganhos robustos K e K_d dados em (3.55)-(3.56), e K e $K_d = \mathbf{0}$ dados em (3.57)-(3.58) serão mostrados na Tabela 3.1 os valores dos custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ obtidos em cada caso.

Tabela 3.1: Custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para as condições de síntese propostas e [HWHS08].(Exemplo 3.1)

Caso	Ganhos robustos obtidos	Condição	γ
i) $d_k \in \mathcal{I}[1,3]$	(3.55)	Teorema 3.2 Síntese (EQ-extra)	0.37
	(3.57)	Teorema 2,[HWHS08]	0.39
		Teorema 3.2 Síntese (EQ-extra)	0.37
ii) $d_k \in \mathcal{I}[1,4]$	(3.56)	Teorema 3.2 Síntese (EQ-extra)	0.41
	(3.58)	Teorema 2,[HWHS08]	0.44
		Teorema 3.2 Síntese (EQ-extra)	0.42

Observa-se que a informação do atraso, que permitiu o uso de $K_d \neq \mathbf{0}$, causou pouca alteração no valor do custo $\mathcal{H}_\infty$, indicando que neste exemplo, nos intervalos $d_k \in \mathcal{I}[1,3]$ e $d_k \in \mathcal{I}[1,4]$, a realimentação do estado atrasado não causa impacto significativo ao custo garantido $\mathcal{H}_\infty$.

A técnica proposta em [HWHS08] mostra-se mais conservadora, atingindo, para os intervalos $d_k \in \mathcal{I}[1,3]$ e $d_k \in \mathcal{I}[1,4]$, custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ que são 3.7% e 6.8%, respectivamente, mais elevadas do que empregando o Teorema 3.2 e a síntese (EQ-extra) propostos neste trabalho.

Para a estimação do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, utiliza-se o problema de otimização $\mathcal{E}_{\mathcal{H}_\infty}$ dado em (3.45) nos intervalos $d_k \in \mathcal{I}[1,3]$ e $d_k \in \mathcal{I}[1,4]$. Nesse caso os ganhos (3.55)-(3.56) e (3.57)-(3.58) são usados na lei de controle (3.6) para obter um sistema em malha fechada (3.7). São apresentados na Tabela 3.2 os valores estimados do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$.

Como se trata de um sistema precisamente conhecido, os valores estimados pelo Teorema 3.2, análise (EQ-extra) e análise (EQ-direta) apresentaram valores semelhantes. Para se ter uma ideia do ajuste dos valores estimados com o custo garantido ótimo do sistema, são apresentados na Figura 3.1 os diagramas de valores singulares máximos para o sistema em malha fechada para cada um dos intervalos do atraso, $d_k \in \mathcal{I}[1,3]$, na parte superior, e $d_k \in \mathcal{I}[1,4]$, na parte inferior, indicados em (—). Esses diagramas referem-se, portanto, ao caso particular em que os atrasos são constantes no tempo. Além disso, em cada diagrama é apresentada a curva de $\bar{\sigma}_{máx}(\omega)$, indicada em (—), que toma o valor máximo de $\bar{\sigma}(\omega)$ em relação aos valores dos atrasos, em cada valor de frequência e as linhas pontilhadas representam os valores dos custos

Tabela 3.2: Estimação do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ das condições propostas.(Exemplo 3.1)

Caso	Ganhos robustos utilizados	Condição	γ
i) $d_k \in \mathcal{I}[1,3]$	(3.55)	Teorema 3.1 Análise (EQ-extra) Análise (EQ-direta)	0.3760
	(3.57)	Teorema 3.1 Análise (EQ-extra) Análise (EQ-direta)	0.3768
ii) $d_k \in \mathcal{I}[1,4]$	(3.56)	Teorema 3.1 Análise (EQ-extra) Análise (EQ-direta)	0.4117
	(3.58)	Teorema 3.1 Análise (EQ-extra) Análise (EQ-direta)	0.4233

garantidos $\mathcal{H}_\infty$ estimados pelas condições propostas, (▬ ▬) usando K e K_d e (▬ ▬) usando K e $K_d = \mathbf{0}$.

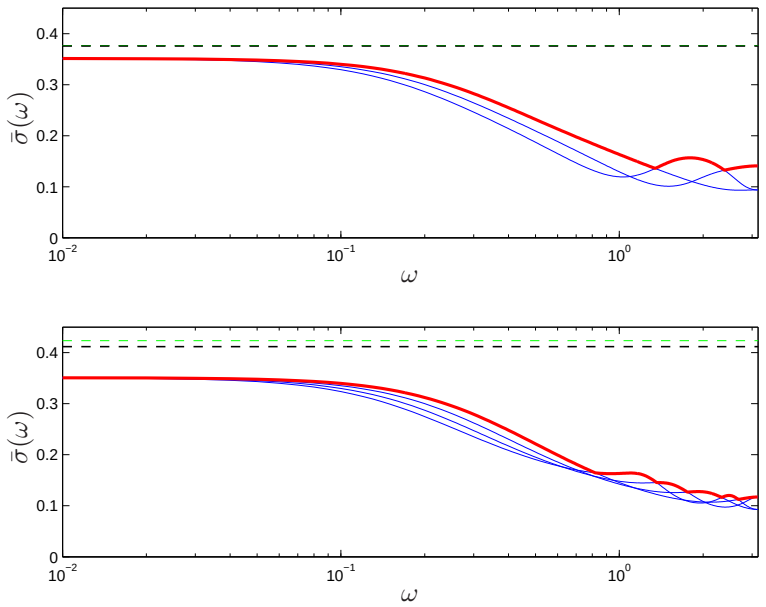


Figura 3.1: $\bar{\sigma}(\omega)$ para o sistema em malha fechada considerando valores de atraso em $\mathcal{I}[1,3]$ (parte superior) e em $\mathcal{I}[1,4]$ (parte inferior) indicados em (− − −−) e a curva $\bar{\sigma}_{\text{máx}}(\omega)$ em (− − −−), estimados com uso do Teorema 3.1, análise (EQ-extra) e análise (EQ-direta).

Pode-se verificar que os valores obtidos para o caso de atraso variante no tempo, estimados com a técnica proposta, estão próximos do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ do sistema com atrasos constantes no tempo, que são em torno de 0.35*. Esse valor representa um limite inferior do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ se o atraso varia no tempo.*

Experimento 2

Busca-se determinar o maior valor de $\overline{d}$ *tal que, se* $d_k \in \mathcal{I}[1, \overline{d}]$ *o problema de otimização* $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_\infty}$*, (3.53), é factível. Utilizando-se o par de ganhos* K *e* K_d *é possível determinar um atraso máximo* $\overline{d} = 24$*, com* $\gamma_{\overline{d}=24} = 5.122$ *sendo*

$$K = [0.1400 \;\; -0.9002] \text{ e } K_d = [0.0003 \;\; -0.1000]. \tag{3.59}$$

Utilizando-se apenas o ganho K*, ou seja, fazendo* $K_d = \mathbf{0}$*, é possível determinar um atraso máximo* $\overline{d} = 23$ *com* $\gamma_{\overline{d}=23} = 4.875$ *em que para*

$$K = [0.1400 \;\; -0.8842] \text{ e } K_d = \mathbf{0}. \tag{3.60}$$

Como o sistema é precisamente conhecido, os mesmos resultados são obtidos com o Teorema 3.2 ou com a síntese (EQ-extra), empregados em $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_\infty}$*.*

Na Figura 3.2 são mostrados os valores de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ *obtidos por meio do problema de otimização* $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_\infty}$*, (3.53), quando* $\overline{d}$ *é aumentado a partir de* 1*. Foram testados tanto o Teorema 3.2 quanto a síntese (EQ-extra), que apresentaram resultados iguais. São mostrados dois conjuntos de pontos, um considerando a síntese do par de ganhos* K *e* K_d*, marcados com (*$\square$*), e outro considerando a síntese de* K *com* $K_d = \mathbf{0}$*, marcados com (*$\times$*).*

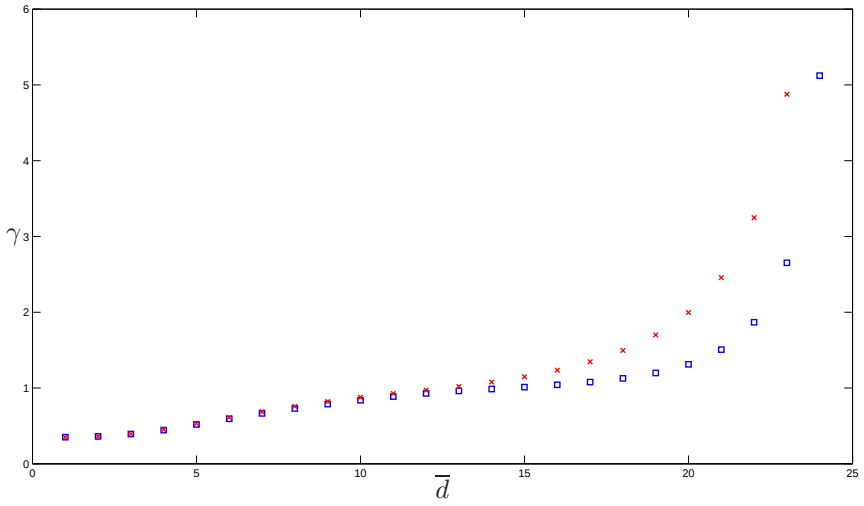


Figura 3.2: Relação entre o aumento do $\overline{d}$ e o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, γ, para o sistema em malha fechada sintetizados pelo problema $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_\infty}$ em duas situações: com a síntese de K e K_d ($\square$) e com a síntese de K e usando $K_d = \mathbf{0}$ ($\times$)

Nota-se pela análise da Figura 3.2 que, neste exemplo, a realimentação do estado atrasado — que exige o conhecimento do atraso a cada amostragem — só começa a impactar significativamente o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ *estimado pelo procedimento de síntese para valores de atraso* $\overline{d}$ *superiores a* 15*.*

Exemplo 3.2 (Precisamente conhecido) *Em [PCE+05] é investigada a síntese de ganhos de realimentação de estados para o sistema (3.1) em que*

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} -0.05 & 0.1 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, B_w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.3 \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}, C_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, D = 1, D_w = 0.$$

Em [PCE+05], usando um algoritmo iterativo que visa a minimização do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ e considerando $d_k \in \mathcal{I}[0,5]$ foi determinado

$$K = \begin{bmatrix} 0.3793 & -1.1163 \end{bmatrix} \tag{3.61}$$

como solução do problema de otimização não linear proposto. Como discutido em [PCE+05], esse ganho melhora os resultados obtidos com as técnicas propostas em [SKYK99] e [KCBP01]. Neste exemplo, é considerado $d_k \in \mathcal{I}[1,5]$ e resolvido o problema de otimização $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_\infty}$, utilizando o Teorema 3.2 e a Síntese (EQ-extra). Os resultados são mostrados na Tabela 3.3.

Tabela 3.3: Ganhos robustos e o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$.

Condição	Ganhos Robustos, $d_k \in \mathcal{I}[1,5]$	γ
Teorema 3.2	$[K\|K_d] : \left[\begin{array}{cc\|cc} -0.8661 & 1.2700 & -0.0837 & 0.1198 \end{array}\right]$	2.098
Síntese (EQ-extra)	$[K\|\mathbf{0}] : \left[\begin{array}{cc\|cc} -0.8986 & 1.3258 & 0 & 0 \end{array}\right]$	2.117

Para uma comparação justa com os resultados apresentados em [PCE+05], será utilizado apenas o ganho robusto K. Para a estimação do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, utiliza-se o problema de otimização $\mathcal{E}_{\mathcal{H}_\infty}$ dado em (3.45) no intervalo $d_k \in \mathcal{I}[1,5]$.

Na Figura 3.3 são apresentados os diagramas de valores singulares máximos, $\bar{\sigma}(\omega)$, obtidos para o sistema em malha fechada utilizando-se os ganhos fornecidos por [PCE+05], e os apresentados pelo Teorema 3.2 e Síntese (EQ-extra), para o internalo de atrasos $d \in \mathcal{I}[1,5]$, indicados em (—). Além disso, em cada diagrama é apresentada a curva de $\bar{\sigma}_{máx}(\omega)$, indicada em (—), que toma o valor máximo de $\bar{\sigma}(\omega)$ em relação aos valores dos atrasos, em cada valor de frequência e as linhas pontilhadas representam os valores dos custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ estimados pelas condições propostas, (- -) usando K e K_d e (- -) usando K e $K_d = \mathbf{0}$. Como se trata de um sistema precisamente conhecido, os resultados para estimação utilizando o Teorema 3.1, análise (EQ-extra) e análise (EQ-direta) foram idênticos.

Pode-se perceber que o ganho obtido pela solução do problema (3.53), utilizando o Teorema 3.2 e síntese (EQ-extra) resulta em um diagrama de valores singulares máximos com pico 67% menor — portanto, menos conservador — que o verificado com o ganho proposto por [PCE+05].

Como no exemplo 3.1, são apresentados na Figura 3.4 os valores de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ obtidos em função do atraso máximo. São mostrados dois conjuntos de pontos: um considerando a síntese do par de ganhos K e K_d, marcados com □; e outro considerando a síntese de K com $K_d = \mathbf{0}$, marcados com (×). Nessa figura fica evidente a vantagem da realimentação os estados atrasados: usando apenas K e fazendo $K_d = \mathbf{0}$, o problema (3.53), usando Teorema 3.2 e

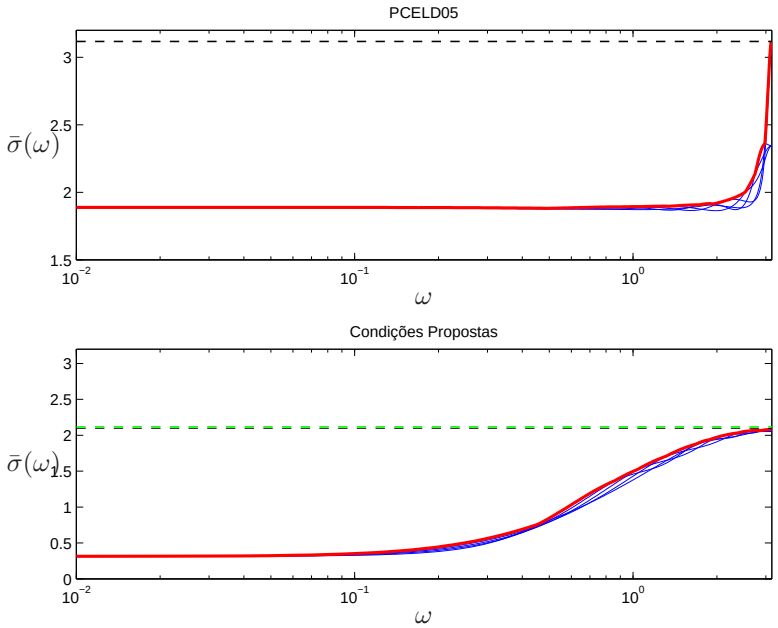


Figura 3.3: Diagramas de valores singulares máximos para o sistema em malha fechada utilizando os ganhos propostos por [PCE$^+$05] (parte superior) e os ganhos sintetizados pelo Teorema 3.2 e a síntese (EQ-extra) apenas com a informação do K ($K_d = \mathbf{0}$), (parte inferior).

a síntese (EQ-extra) é factível até $\overline{d} = 286$, *atingindo nesse caso, um custo garantido* $\mathcal{H}_\infty$ *de* $\gamma = 9.94$ *com* $K = [-0.7438 \quad 1.0281]$. *Por outro lado, se são projetados* K *e* K_d, *a realimentação do estado atrasado propicia a factibilidade do problema convexo (3.53) até* $\overline{d} = 556$, *situação em que o custo garantido* $\mathcal{H}_\infty$ *é de* $\gamma = 3.48$, *para* $K = [-0.5563 \quad 0.6715]$ *e* $K_d = [-0.0552 \quad 0.0661]$, *tanto para o Teorema 3.2, quanto para a síntese (EQ-extra). Nota-se, portanto, que neste exemplo, a realimentação do estado atrasado — que exige, portanto, o conhecimento do atraso a cada amostragem — pode impactar significativamente o custo garantido* $\mathcal{H}_\infty$ *estimado no procedimento de síntese de ganhos robustos, especialmente para atrasos mais elevados.*

Na Figura 3.5 é mostrada uma simulação temporal em que são apresentadas a perturbação w_k *(___) e as respostas temporais do sistema quando são utilizados os ganhos propostos em [PCE$^+$05] (___) e com os ganhos obtidos pelo Teorema 3.2 ou a síntese (EQ-extra)(_ . _).*

O atraso utilizado é o mesmo apresentado por [PCE$^+$05], sendo exibido na parte superior da Figura 3.6. Os respectivos sinais de controle podem ser comparados na parte inferior da Figura 3.6.

Embora a condição proposta neste trabalho seja suficiente para assegurar a estabilidade em casos de atrasos positivos, o uso do atraso nulo mostrou-se estável na simulação. Essa escolha foi feita para que fossem utilizados os mesmos atrasos propostos por [PCE$^+$05]. Salienta-se que fazendo-se o projeto para $d_k \in \mathcal{I}[1, 6]$ *os resultados obtidos são praticamente iguais aos apresentados para* $d_k \in \mathcal{I}[1, 5]$. *Neste exemplo, observa-se que os sinais de controle apresentados na Figura 3.6 possuem comportamento bastante distintos. No caso do projeto feito por [PCE$^+$05] o sinal de controle mostra-se oscilatório em torno do zero. Por outro lado, usando os ganhos robustos sintetizados pelos Teorema 3.2 (ou síntese (EQ-extra)) o sinal de controle não apresenta comportamento oscilatório, atingindo valores que tendem a rejeitar a perturbação. Daí o*

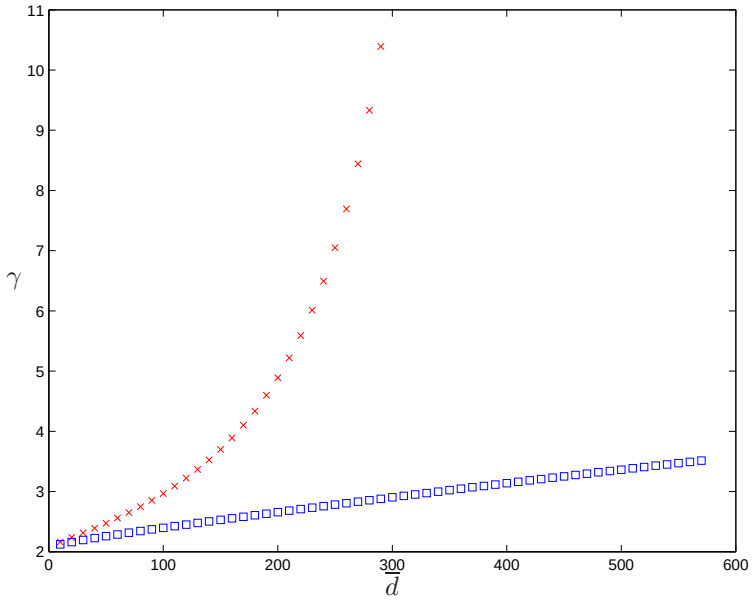


Figura 3.4: Relação entre o aumento do $\overline{d}$ e o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, γ, para o sistema em malha fechada em duas situações: com a síntese de K e K_d (□) e com a síntese de K e usando $K_d = \mathbf{0}$ (×)

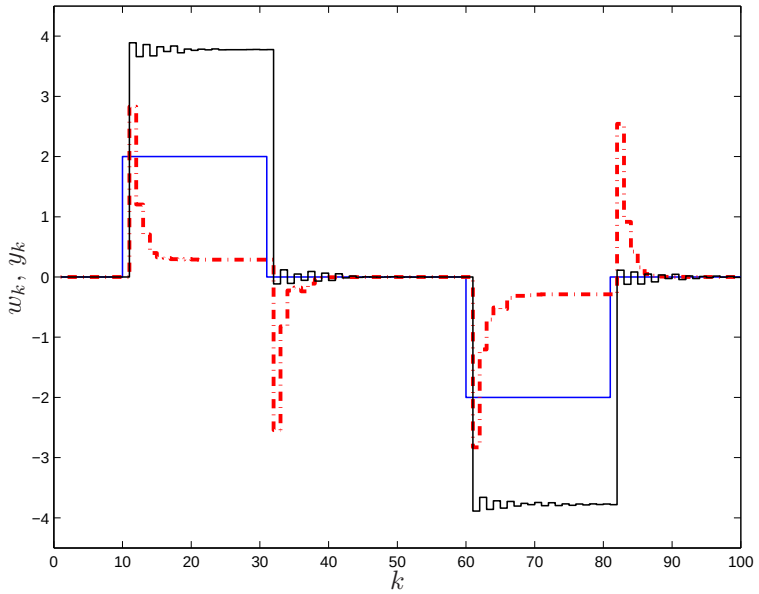


Figura 3.5: Simulações temporais: perturbação w_k, (—), e saída do sistema usando (3.61), (—), e Teorema 3.2 e a síntese (EQ-extra), (–·–).

comportamento mais favorável da saída em linha traço-ponto na Figura 3.5 em relação à saída em linha cheia.

Exemplo 3.3 (Incerto) *Um modelo discreto no tempo com atraso nos estados para um forno com acionamento elétrico para tratamento térmico de metais é utilizado por [CSH93] e [Chu95]. Esse forno é dividido em cinco zonas de aquecimento, cada uma com um sensor de temperatura e um atuador, como ilustrado na Figura 3.7.*

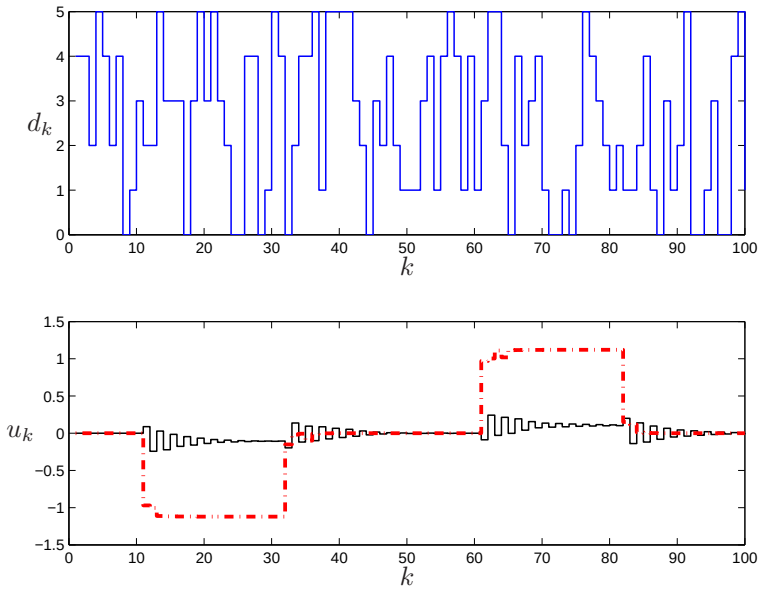


Figura 3.6: Parte superior: atraso d_k usado na simulação. Parte inferior: sinais de controle obtidos com (3.61), (—), e aplicando o Teorema 3.2 e a síntese (EQ-extra), (–·–).

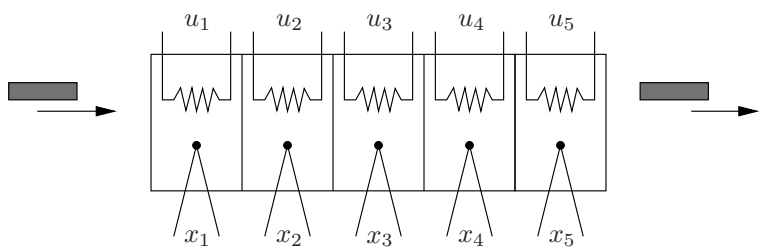


Figura 3.7: Diagrama esquemático do forno para tratamento de metais.

O modelo do processo é fornecido na estrutura $x(k+1) = Ax(k) + A_d x(k-d) + Bu(k)$, *com* $d = 15$, *e matrizes* A, A_d *e* B *dadas por (3.62)-(3.64).*

$$A = \begin{bmatrix} 0.97421 & 0.15116 & 0.19667 & -0.05870 & 0.07144 \\ -0.01455 & 0.88914 & 0.26953 & 0.11866 & -0.22047 \\ 0.06376 & 0.12056 & 1.00049 & -0.03491 & -0.02766 \\ -0.05084 & 0.09254 & 0.28774 & 0.82569 & 0.02570 \\ 0.01723 & 0.01939 & 0.29285 & 0.03544 & 0.87111 \end{bmatrix} \tag{3.62}$$

$$A_d = \begin{bmatrix} -0.01000 & -0.08837 & -0.06989 & 0.18874 & 0.20505 \\ 0.02363 & 0.03384 & 0.05282 & -0.09906 & -0.00191 \\ -0.04468 & -0.00798 & 0.05618 & 0.00157 & 0.03593 \\ -0.04082 & 0.01153 & -0.07116 & 0.16472 & 0.00083 \\ -0.02537 & 0.03878 & -0.04683 & 0.05665 & -0.03130 \end{bmatrix} \tag{3.63}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.53706 & -0.11185 & 0.09978 & 0.04652 & 0.25867 \\ -0.51718 & 0.73519 & 0.57518 & 0.40668 & -0.12472 \\ 0.29469 & 0.31528 & 1.16420 & -0.29922 & 0.23883 \\ -0.20191 & 0.19739 & 0.41686 & 0.66551 & 0.11366 \\ -0.11835 & 0.16287 & 0.20378 & 0.23261 & 0.36525 \end{bmatrix} \tag{3.64}$$

Note-se que a matriz A desse modelo não é Schur-estável. Em [Chu95] um ganho estabilizante de dimensões 5×5 *é obtido considerando-se um sistema precisamente conhecido e um atraso de tempo fixo e conhecido,* $d = 15$. *Em [LTP09] são propostas condições* independentes do atraso *para a síntese de ganhos robustos com desempenho* $\mathcal{H}_\infty$ *garantido e é feita uma adaptação desse modelo, considerando-se a presença de incertezas, falhas do atuador e a possibilidade de impor estrutura nos ganhos de malha fechada. Porém, o atraso é considerado invariante no tempo.*

Neste exemplo, o mesmo modelo de incertezas proposto por[LTP09] é investigado considerando-se que as matrizes do sistema são incertas sendo dadas por $A(\rho) = (1+\rho)A$, $A_d(\eta) = (1+\eta)A_d$, $B(\varsigma)(1+\varsigma)B$, $C(\rho) = 0.03(1+\rho)C$, $C_d(\rho) = 10C(\rho)$, $D(\varsigma) = 0.01(1+\varsigma)D$, $B_w(\varsigma) = (1+\varsigma)B_w$ *e* $D_w(\varsigma) = (1+\varsigma)D_w$,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_w = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2 & 0 \end{bmatrix},$$
$$D_w = \textit{bloco-diag}\{0.1, 0.2, -0.4\}$$

e $|\rho| \leq 0.3$, $|\eta| \leq 0.3$,$|\varsigma| \leq 0.42|$.

Nesse caso, tem-se uma representação de incertezas na forma politópica com 8 *vértices, obtidos pelas combinações dos valores extremos de* ρ, η *e* ς. *Para comparação com a solução proposta em [LTP09], em que o modelo é considerado com atraso fixo* $d = 15$. *Assume-se neste exemplo* $d_k \in \mathcal{I}[15, 16]$. *Os valores de custo garantido* $\mathcal{H}_\infty$ *obtidos via a solução do problema de otimização* $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_\infty}$ *são exibidos na Tabela 3.4.*

Tabela 3.4: Valores do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, γ, utilizando o Teorema 3.2 e a Síntese (EQ-extra).

Condição	Ganhos Robustos	γ
Teorema 3.2	$[K\|K_d]$	4.200
	$[K\|\mathbf{0}]$	6.216
Síntese (EQ-extra)	$[K\|K_d]$	6.215
	$[K\|\mathbf{0}]$	12.601

Esses valores são maiores que os apresentados em [LTP09], respectivamente, iguais a 3.5 *para* K *e* K_d *e* 4.87 *usando-se somente* K. *Esse aumento no valor do custo estimado é consequência direta do atraso variante no tempo. Utilizando-se os ganhos obtidos no problema* $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_\infty}$ *pelo Teorema 3.2 e a Síntese (EQ-extra), fechando-se a malha, o custo garantido* $\mathcal{H}_\infty$ *pode ser avaliado utilizando-se o problema de otimização* $\mathcal{E}_{\mathcal{H}_\infty}$, *com as condições Teorema 3.1, análise (EQ-extra) e análise (EQ-direta). Os resultados obtidos são mostrados na Tabela 3.5. Assim como na Tabela 3.4, fica clara a influência do conhecimento do atraso interno,* d_k *no custo garantido* $\mathcal{H}_\infty$ *do sistema.*

Os melhores resultados apresentados foram os ganhos obtidos no problema de otimização $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_\infty}$, *utilizando o Teorema 3.2. Fechando-se a malha, o melhor resultado da estimação do custo garantido* $\mathcal{H}_\infty$, *utilizando-se o problema de otimização* $\mathcal{E}_{\mathcal{H}_\infty}$ *foi o apresentado pelo Teorema 3.1,*

Tabela 3.5: Valores do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, γ, estimados pelo Teorema 3.1, Análise (EQ-extra) e Análise (EQ-direta), cujo sistema em malha fechada foi obtido utilizando os ganhos robustos sintetizados pelo Teorema 3.2 e a síntese (EQ-Extra) .

Condição (Síntese)	Ganhos Robustos	Condição (Estimação)	γ
Teorema 3.2	$[K\|K_d]$	Teorema 3.1	3.270
		Análise (EQ-extra)	13.412
		Análise (EQ-direta)	13.413
	$[K\|\mathbf{0}]$	Teorema 3.1	4.222
		Análise (EQ-extra)	23.689
		Análise (EQ-direta)	70.976
Síntese (EQ-extra)	$[K\|K_d]$	Teorema 3.1	3.956
		Análise (EQ-extra)	6.216
		Análise (EQ-direta)	6.216
	$[K\|\mathbf{0}]$	Teorema 3.1	9.529
		Análise (EQ-extra)	12.601
		Análise (EQ-direta)	12.602

sendo encontrado $\gamma = 3.270$, *para* K *e* K_d, *e* $\gamma = 4.222$ *usando-se* K *e* $K_d = \mathbf{0}$. *As curvas indicadas por (__) na Figura 3.8 correspondem aos valores de*

$$\hat{\sigma}(\omega) = \max_{d \in \mathcal{I}[\underline{d}, \overline{d}]} \bar{\sigma}(\omega) \tag{3.65}$$

com $\underline{d} = 15$ *e* $\overline{d} = 16$, *para cada um dos* 8 *vértices do sistema em malha fechada. A envoltória dessas curvas, indicada por (__), mostra o máximo de* $\hat{\sigma}(\omega)$, *cujos máximos são* 2.780, *para* K *e* K_d, *e* 3.630, *usando-se somente* K, *representando limites inferiores para os custos garantidos* $\mathcal{H}_\infty$ *para o sistema com atraso variante no tempo, em cada caso. As linhas pontilhadas representam os valores dos custos garantidos* $\mathcal{H}_\infty$ *estimados pela condição proposta pelo Teorema 3.1, em que foram utilizados os ganhos robustos propostos pelo Teorema 3.2 (_ _) e os ganhos robustos propostos pela Síntese (EQ-extra) (_ _).*

Utilizando os ganhos K *e* K_d *determinados pela solução de* $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_\infty}$ *com* $d_k \in \mathcal{I}[15, 16]$, *foram feitas simulações para cada um dos vértices que determinam o politopo associado ao sistema investigado neste exemplo. Em todos os casos, foram aplicados os sinais* w_k *mostrados na Figura 3.9, supondo condições iniciais nulas.*

Nas figuras a seguir são apresentadas as três saídas do sistema, calculadas para cada um dos 8 *vértices do sistema em malha fechada e utilizando uma mesma sequência (aleatória) de valores de atraso. Na Figura 3.10 são exibidas as saídas para os ganhos robustos* K *e* K_d *sintetizados pelo Teorema 3.2, e na Figura 3.11 as saídas para os ganhos robustos* K *e* K_d *sintetizados pela síntese (EQ-extra).*

Pode ser observado que a relação dos sinais de saída pelos sinais de entrada é inferior ao valor obtido no problema de otimização $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_\infty}$, $\gamma = 4.220$ *para o Teorema 3.2 (Figura 3.10) e* $\gamma = 6.216$ *para a síntese (EQ-extra) (Figura 3.11). Note que a escolha do sinal de entrada* w_k,

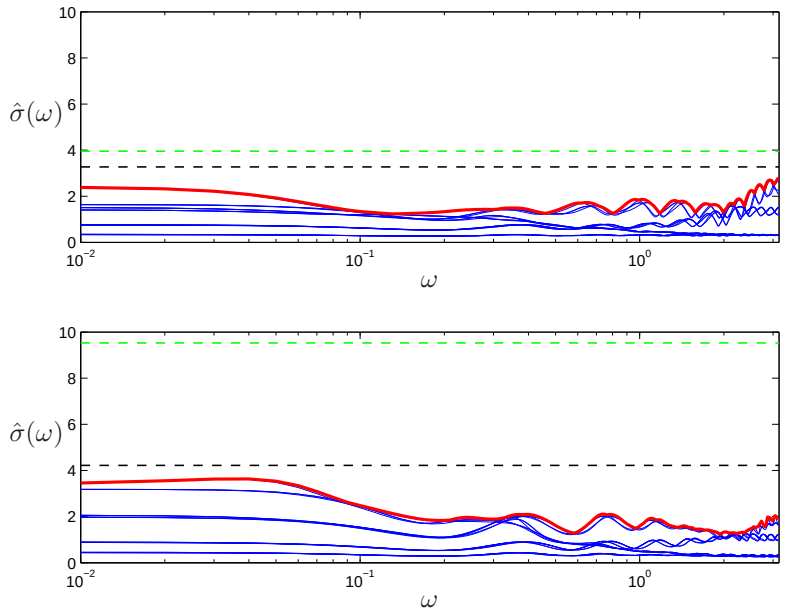


Figura 3.8: Diagrama de $\hat{\sigma}(\omega)$ para o sistema em malha fechada estimado pelo Teorema 3.1, usando K e K_d, parte superior, e apenas K, parte inferior, para $d_k \in \mathcal{I}[15, 16]$. As linhas pontilhadas representam os custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ estimados pelo Teorema 3.1 usando os ganhos fornecidos pelo Teorema 3.2, (- -) e usando os ganhos fornecidos pela síntese (EQ-extra), (- -).

composta por um conjunto de 3 *pulsos conforme Figura 3.9, foi feita de forma a se perceber nos sinais de saída o efeito de cada uma de suas componentes. Percebe-se que, para o pulso utilizado, a componente de entrada* w_{2k} *é a que provoca menores efeitos nas variáveis de saída tanto na Figura 3.10 quanto na Figura 3.11. O maior efeito dessa entrada é verificado na componente da saída* z_{1k}*, que é uma combinação linear dos estados* x_{1k} *e* x_{2k}*, também para ambos os casos. Por outro lado, os efeitos das entradas* w_{1k} *e* w_{2k} *mostram-se com valores de pior caso bastante próximos entre si. Os vértices que apresentaram maior efeito da entrada foram os de número* 5 *(—) e o* 7 *(—) para ambos os casos representados na Figura 3.10(pico máximo* 2.02*) e Figura 3.11(pico máximo* 4.09*).*

Os sinais de controle gerados durante as simulações são mostrados na Figura 3.12 utilizando o Teorema 3.2 e na Figura 3.13 para a síntese (EQ-extra).

Observa-se que as maiores amplitudes dos sinais de controle ocorrem sempre na primeira e segunda zona de aquecimento. Na Figura 3.12 todos sinais de controle são limitados em ± 10*, já na Figura 3.13 o sinal de controle* u_{2k} *apresentou picos próximos de* ± 13*.*

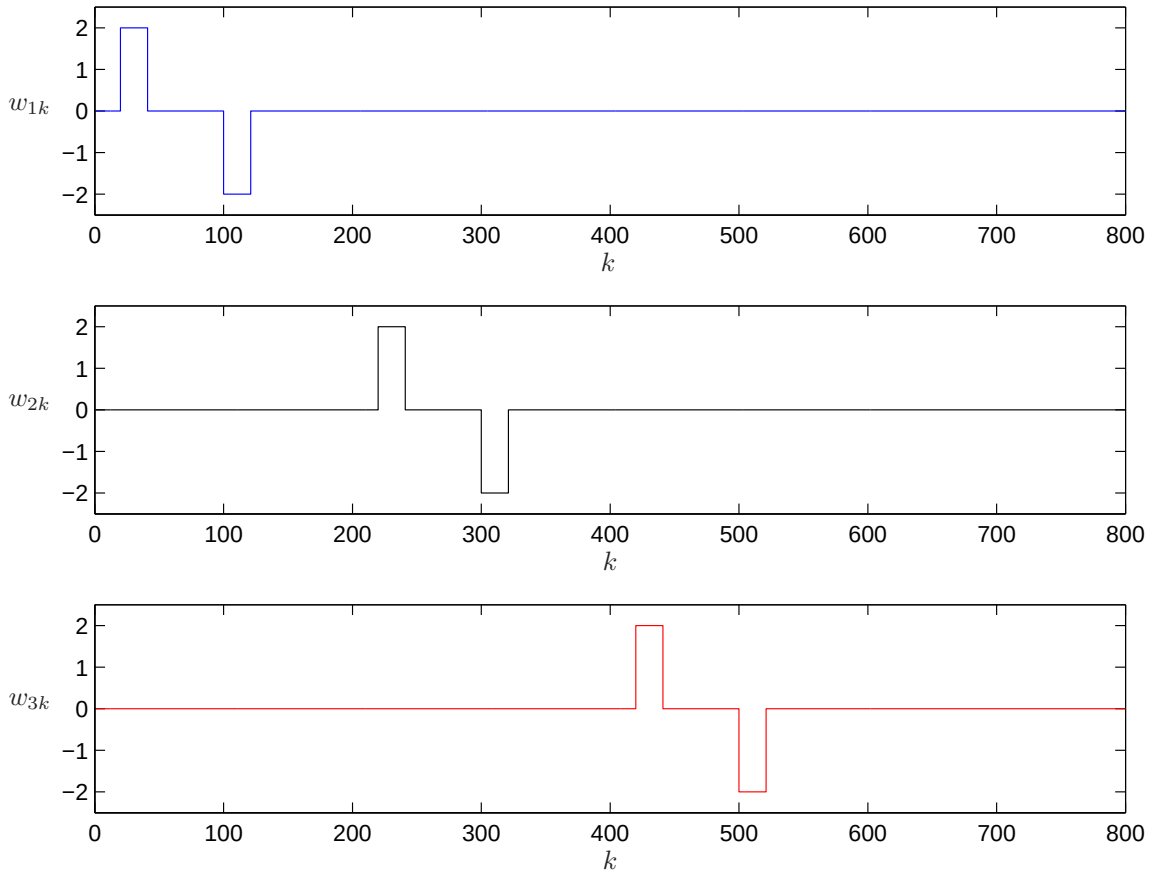


Figura 3.9: Sinal $w_k = [w_{1k}\ w_{2k}\ w_{3k}]$ aplicado no modelo do forno, em malha fechada

3.7 Conclusão

Nesse capítulo foram propostas condições convexas para a estimação do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ e para a síntese de ganhos de realimentação de estados robustos com minimização do custo $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas lineares incertos, discretos no tempo com atraso variante no tempo nos estados. As condições propostas são do tipo dependente do atraso. A abordagem empregada utiliza funções de Lyapunov-Krasovskii dependentes de parâmetro, o que permite obter valores menores para o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ tanto nos procedimentos de análise quanto nos de síntese em relação à utilização de funções com matrizes independentes do parâmetro incerto. Foi utilizada a desigualdade de Jensen que permitiu uma majoração das funções empregadas resultando em condições menos conservadoras. Além disso, o uso do Lema de Finsler resulta em condições convexas, em um espaço de busca aumentado, nas quais as matrizes da função de Lyapunov-Krasovskii não estão acopladas com as matrizes do sistema. Isso permite tratar a presença de incertezas politópicas em todas as matrizes do sistema. As condições aqui propostas foram aplicadas em exemplos numéricos tomados da literatura e os resultados alcançados comparados com os obtidos por outros trabalhos da área. Nesses exemplos é evidenciado o menor conservadorismo dessa proposta.

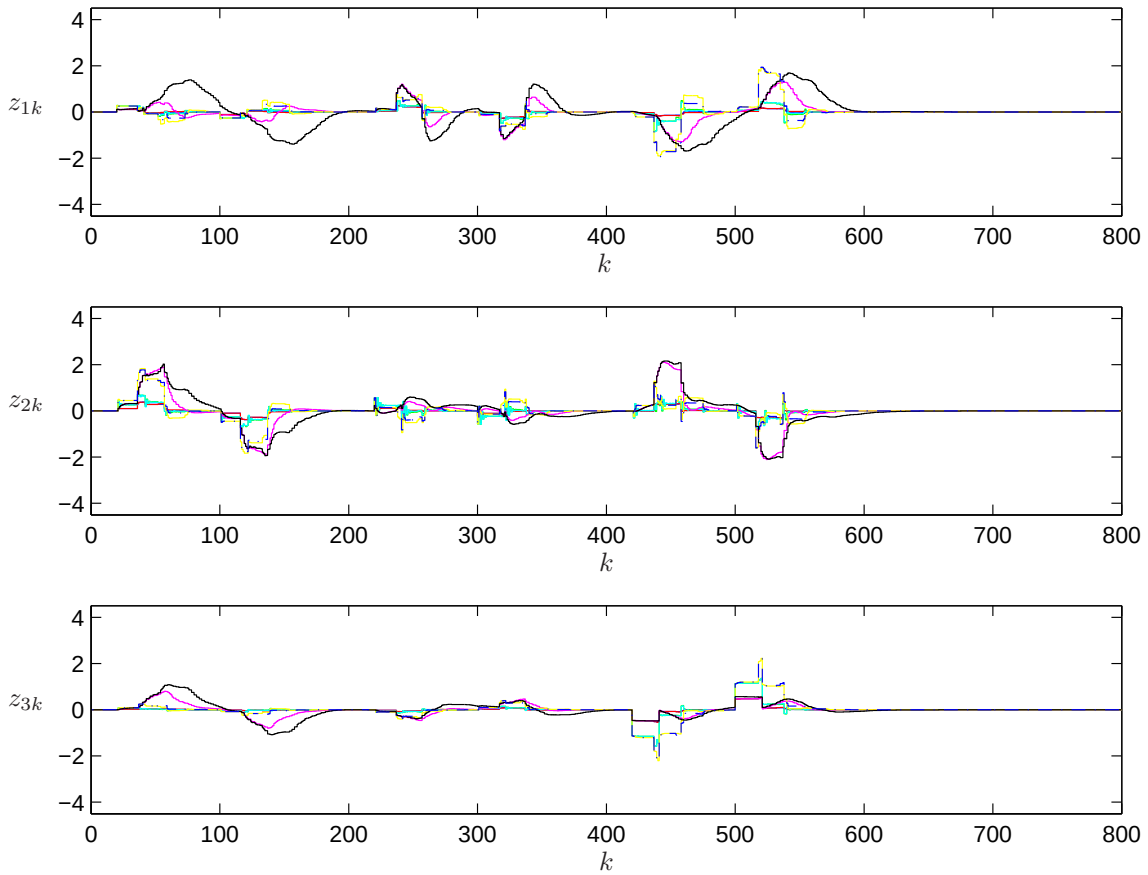


Figura 3.10: Conjunto das saídas $z_k = [z_{1k}\ z_{2k}\ z_{3k}]^T$, cujo sistema em malha fechada foi obtido com os ganhos robustos K e K_d sintetizados pelo Teorema 3.2, para cada um dos vértices do politopo do modelo do forno à aplicação do sinal w_k mostrado na Figura 3.9.

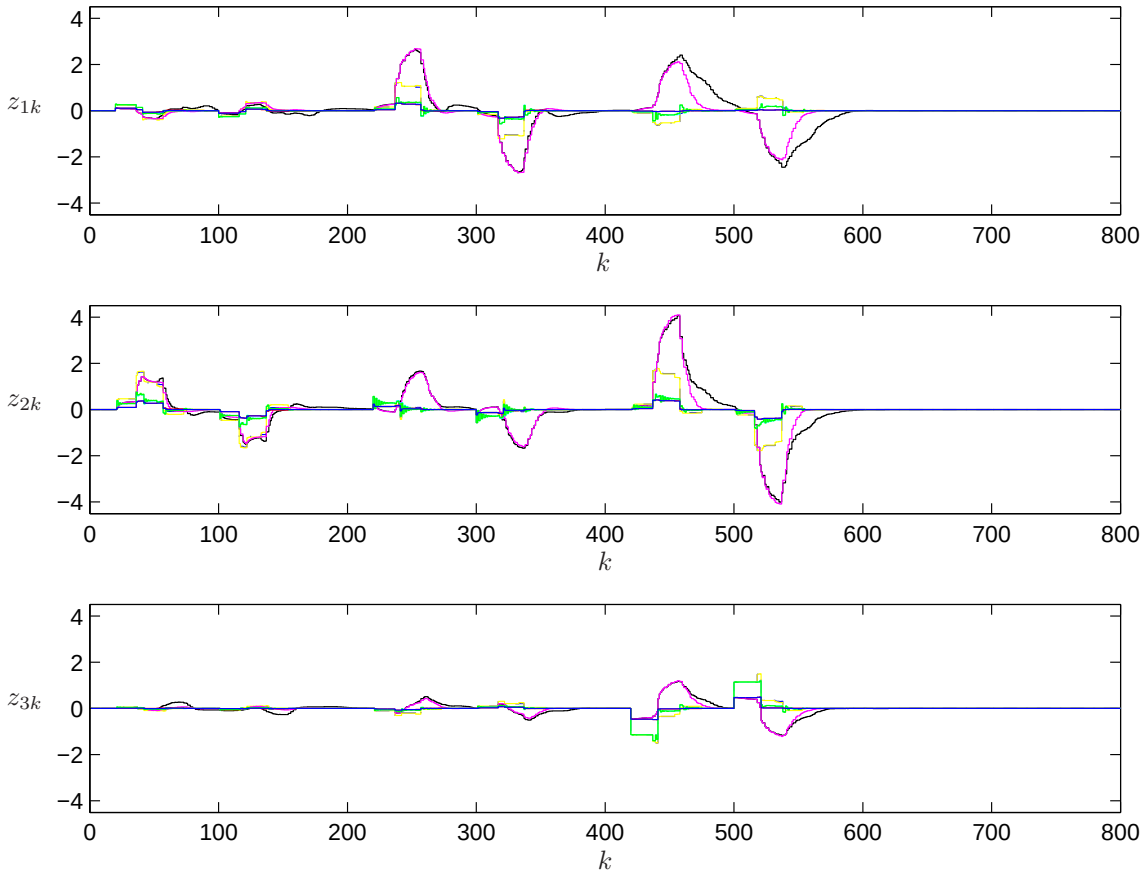


Figura 3.11: Conjunto das saídas $z_k = [z_{1k}\ z_{2k}\ z_{3k}]^T$, cujo sistema em malha fechada foi obtido com os ganhos robustos K e K_d sintetizados pela síntese (EQ-extra), para cada um dos vértices do politopo de malha fechada do modelo do forno à aplicação do sinal w_k mostrado na Figura 3.9.

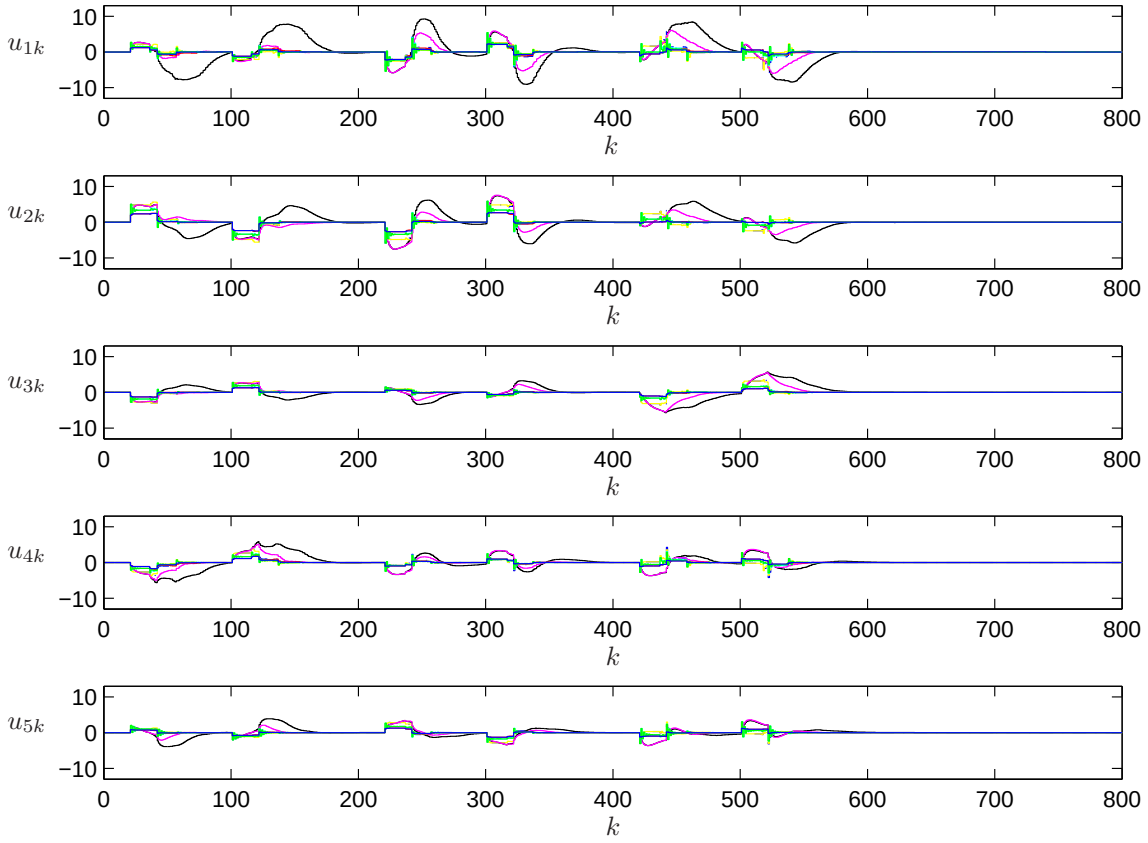


Figura 3.12: Conjunto dos sinais de controle $u_k = Kx_k + K_d x_{k-d_k}$ utilizados no controle em malha fechada, cujos ganhos robustos K e K_d, foram sintetizados pelo Teorema 3.2.

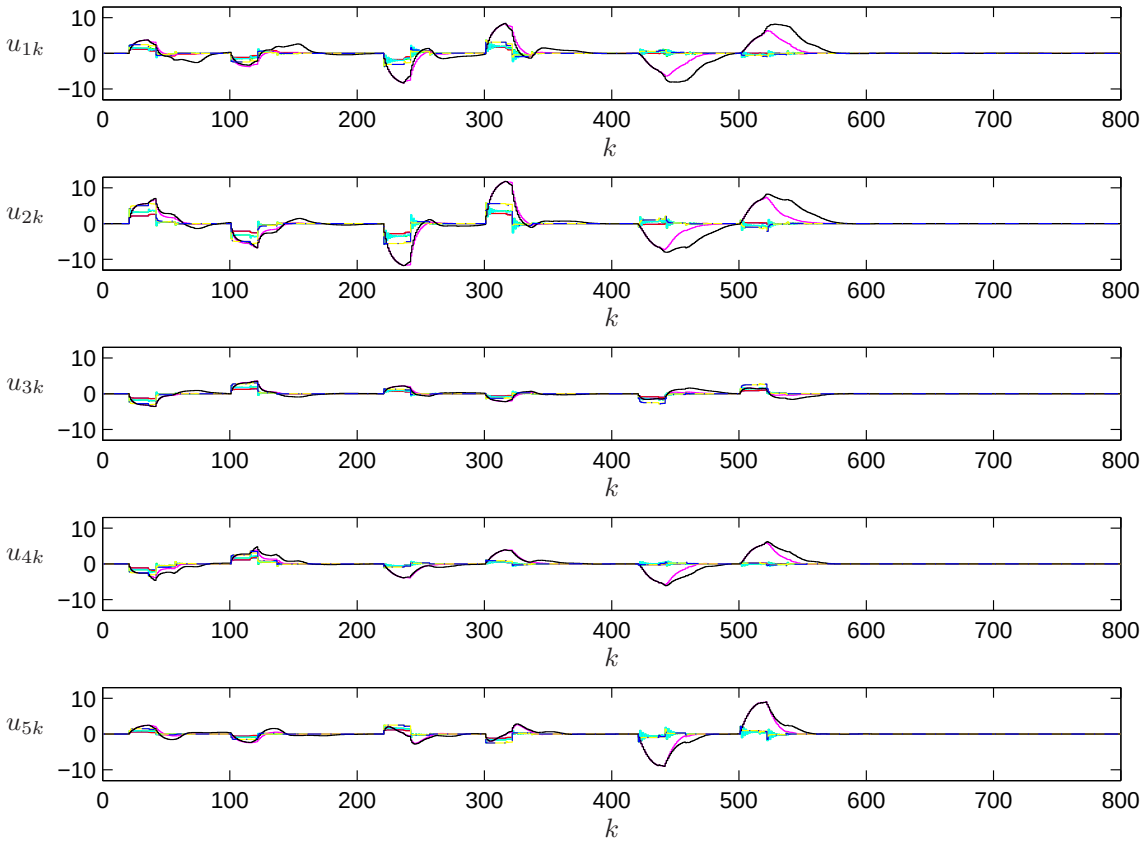


Figura 3.13: Conjunto dos sinais de controle $u_k = Kx_k + K_d x_{k-d_k}$ utilizados no controle em malha fechada, cujos ganhos robustos K e K_d, foram sintetizados pela síntese (EQ-extra).

Capítulo 4

Método alternativo para análise de desempenho e controle robusto $\mathcal{H}_\infty$

4.1 Introdução

Pelo fato de representar os problemas da teoria de controle robusto na forma de otimização convexa, expressos como LMIs, normalmente se introduz algum grau de conservadorismo na formulação de modo que a solução obtida seja subótima em relação ao problema original. Este capítulo é baseado no trabalho de [Gon06], estendendo suas ideias para sistemas discretos no tempo com atraso variante no vetor de estados. Esses sistemas têm sido estudados, em grande parte, utilizando formulações LMIs, obtidas de abordagens baseadas em funções de L-K.

A grande vantagem da abordagem por LMIs é que, uma vez que o problema é convexo, o problema de otimização do pior caso é tratado apenas em termos dos vértices do politopo. Sendo assim, os problemas de otimização podem ser resolvidos com programas especializados (inclusive gratuitos) disponíveis no mercado. As primeiras soluções para esse problema foram baseadas no conceito de estabilidade quadrática. Entretanto, uma desvantagem dessa metodologia é o uso das mesmas matrizes de L-K para garantir a estabilidade e/ou desempenho do sistema em malha fechada. Isso significa que as únicas soluções possíveis para tais procedimentos de projeto são aquelas que admitem as mesmas matrizes de L-K para todo o conjunto de incertezas. Como essas soluções são apenas um subconjunto de todas as possíveis soluções, um conservadorismo pode ser atribuído às metodologias de síntese de controladores para os sistemas com incertezas politópicas cujos parâmetros incertos são constantes. Com objetivo de obter condições menos conservadoras, trabalhos recentes utilizam formulações LMIs com matrizes de L-K dependentes de parâmetros. Essa abordagem permite o uso de matrizes de L-K distintas para cada vértice do politopo.

Nos últimos anos vários trabalhos têm sido dedicados ao desenvolvimento de formulações para o projeto de controladores robustos que minimizam a norma $\mathcal{H}_\infty$, baseados em problemas de otimização lineares com restrições na forma de LMIs. Veja por exemplo [HYX07], que aborda a estabilização robusta $\mathcal{H}_\infty$. Em [ZZDL10] são apresentadas formulações LMIs para projeto de filtros robustos com desempenho $\mathcal{H}_\infty$. Em [HARY07], utilizando o *bounded real lemma* dependente do atraso, são propostas condições LMIs quadráticas para análise de desempenho e

controle robusto $\mathcal{H}_\infty$, considerando a classe dos sistemas descritores. Condições LMIs dependentes de parâmetros e independentes do atraso foram propostas por [LTP09] para estimação do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ e controle robusto $\mathcal{H}_\infty$.

Como uma forma alternativa, neste capítulo são propostas novas estratégias, baseadas em [Gon06], tanto para a análise de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ quanto para a síntese de controle robusto $\mathcal{H}_\infty$, visando obter resultados menos conservadores que as formulações LMIs, ou que obtenha resultados em casos nos quais formulações LMIs não apresentem soluções factíveis. A motivação para adotar essa metodologia alternativa é o fato de que esses procedimentos já foram adotados com sucesso em outros problemas de controle robusto de sistemas livre de atraso, tais como síntese de controladores robustos por realimentação de estados [GPT05], síntese de controladores robustos PID [GPT08], síntese de filtros robustos [GPT06], redução de modelos [GPTC09], síntese de controladores robustos por realimentação dinâmica de saída, considerando modelo de referência [BGPT10].

O método de análise de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ proposto é baseado na combinação do algoritmo branch-and-bound com formulações de análise (ou estimação) LMIs, o que permite o cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ com uma precisão pré-estabelecida. A ideia elementar do algoritmo BnB é o procedimento de divisão sucessiva do politopo. Ao realizar a divisão do politopo as formulações LMIs fornecem resultados menos conservadores. A possibilidade de determinar a precisão consiste no fato do algoritmo BnB utilizar duas funções que convergem para o valor ótimo: uma aproximando o valor ótimo por valores inferiores e outra por valores superiores. Para o cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, a função limitante inferior é escolhida como a norma calculada nos vértices do politopo e dos vértices de suas partições geradas por sucessivas divisões e a função limitante superior é escolhida como o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ calculado através de formulações baseadas em LMIs. Se o politopo é dividido sucessivamente até que o mesmo tenda a um ponto, o cálculo do custo garantido no politopo se iguala ao valor da norma no ponto, o que garante a convergência do algoritmo para o máximo (ou mínimo) global. A quantidade de iterações necessárias do algoritmo é limitada pela precisão requerida. Para possibilitar a implementação do procedimento de análise, baseado no algoritmo BnB, é utilizado um procedimento de partição de politopos de qualquer formato, em qualquer dimensão, desenvolvida em [GPTM06], que garantia convergência do algoritmo BnB de forma eficiente. O controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ é baseado em um problema de otimização mono-objetivo, cujos ganhos do controlador são os parâmetros de otimização. Em se tratando de sistemas incertos, esse problema requer a otimização do pior caso de um número infinito de sistemas pertencentes ao domínio de incerteza. Como essa estratégia gera uma formulação não convexa, a verificação em um conjunto finito de pontos, definido inicialmente pelos vértices do politopo, não garante a minimização da função objetivo e o atendimento da restrição para todo o politopo. Desse modo é necessária uma validação do resultado obtido no processo de otimização para todo o politopo. Se no processo de validação for detectado que o pior caso da função objetivo acorra fora dos vértices ou que a restrição não é atendida em todo politopo, os pontos de pior caso são incluídos no conjunto finito de pontos avaliados e o processo de otimização é repetido. Os passos de otimização e validação são repetidos até que a restrição seja atendida e que a função objetivo convirja para um valor com determinada precisão relativa. Logo, no procedimento proposto, busca-se minimizar o pior caso

da norma $\mathcal{H}_\infty$ para todo o politopo com base em um número finito de pontos, ao invés de se minimizar o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, como ocorre nas formulações LMIs. Com isso, neste capítulo busca-se um método menos conservador que as formulações LMIs, ou que obtenha resultados em casos nos quais formulações LMIs não apresentem soluções factíveis.

Serão utilizadas as mesmas definições e formulações apresentadas no capitulo 3, entretanto serão repetidas para facilitar o entendimento do leitor.

4.2 Partição de Politopos

Algoritmos BnB já foram utilizados em diferentes aplicações na área de controle robusto, como, por exemplo: análise de sistemas politópicos [DBB90], cálculo do grau de estabilidade mínimo de sistemas lineares dependente de parâmetros [BBB91], cálculo do pior caso da covariância do estado de sistemas lineares com parâmetros incertos [BB91]. Uma questão importante quando se utiliza o algoritmo BnB é a técnica de partição do domínio da função avaliada. Nas referências citadas, o algoritmo BnB é utilizado exclusivamente para tratar a partição de domínios na forma de hiper-retângulos. O procedimento utilizado é o de dividir o hiper-retângulo pela metade, com o corte sendo feito nas arestas de maior dimensão (utilizando variáveis normalizadas). Divisões de hiper-retângulos são fáceis de implementar, desde que resultem em subdomínios com o mesmo formato. Mas, o problema torna-se muito mais difícil de ser tratado quando o domínio a ser particionado não possui forma retangular. Além disso, em um espaço de dimensão d, um hiper-retângulo possui 2^d vértices, o que acarreta um rápido crescimento da complexidade computacional do problema de avaliar uma função nos vértices de tal objeto geométrico, à medida que cresce a dimensão do problema. Considerando essas limitações, o procedimento de partição adotado neste capítulo baseia-se no trabalho de [Gon06] que permite a partição de politopos de qualquer formato, em qualquer dimensão, garantindo a convergência do algoritmo BnB de forma eficiente. A implementação de algoritmos BnB é desenvolvida para tratar modelos politópicos definido pelo simplexo com N vértices,

$$\Upsilon = \left\{ \hat{\alpha} = [\alpha_1 \ ... \ \alpha_{N-1}]^T \in \mathbb{R}^{N-1} \ : \ \alpha_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \leq 1, \quad i \in \mathcal{I}[1, N-1] \right\} \tag{4.1}$$

com $\alpha_N = 1 - \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i$.

Definição 4.1 *Um simplexo é o politopo mais simples que existe, com o menor número de vértices necessário, isto é, em um espaço d-dimensional um simplexo possui $d+1$ vértices ao passo que o hiper-retângulo possui 2^d vértices.*

Essa definição é de extrema importância para aplicação do algoritmo BnB, visto que serão utilizados cálculos por formulações de análise baseados em LMIs cujos números de variáveis escalares de decisão e de linhas de restrições LMIs serão funções do número de vértices do politopo.

Definição 4.2 *Um d-simplexo é um politopo no espaço d-dimensional definido por* $d+1$ *vértices que são independentes.*

Para cada dimensão d, um d-simplexo é o objeto geométrico mais simples nessa dimensão. Desse modo, um 0-simplexo é um ponto, um 1-simplexo é um segmento de reta, um 2-simplexo é um triângulo, um 3-simplexo é um tetraedro, etc.

Para tratar politopos de qualquer formato, o algoritmo BnB é implementado considerando malhas simpliciais [Moo92]. Considerando malhas simpliciais, a estratégia empregada é a de decompor o domínio na forma de politopo em um conjunto de simplexos com os refinamentos posteriores sendo realizados por uma técnica de subdivisão de simplexos desenvolvida por [Gon06]. As vantagens de considerar simplexos ao invés de hiper-retângulos são:

- Todo politopo pode ser decomposto exatamente em um conjunto de simplexos, o que não é possível com hiper-retângulos.

- Um d-simplexo é definido somente pela sua lista de $d+1$ vértices, não sendo necessária nenhuma informação sobre seu formato, pois qualquer subconjunto de d vértices forma uma face do simplexo.

Para que se atinja uma convergência eficiente de algoritmos tipo BnB, não basta que o hipervolume seja reduzido pelo procedimento de subdivisão, visto que o volume pode tender a zero quando as arestas do politopo em apenas uma das dimensões tende a zero. O essencial é que a máxima distância entre os vértices do politopo tenda a zero de modo que o politopo tenda para um ponto com a sequência de subdivisões. Com isso, a escolha da técnica de refinamento da malha simplicial deverá levar em consideração essa característica fundamental.

4.2.1 Subdivisão de simplexos

Considerando Υ um simplexo, para implementar os refinamentos posteriores da malha simplicial é necessário escolher uma técnica apropriada de subdivisão de Υ. Com objetivo de que o algoritmo BnB convirja de forma eficiente, é necessário que a técnica de refinamento garanta que a maior distância entre dois vértices de cada simplexo seja minimizada à medida que os volumes dos simplexos sejam reduzidos pelas sucessivas subdivisões, sem gerar simplexos mal formados (ângulos entre as arestas muito grandes ou muito pequenos de forma que possa acarretar mal condicionamento numérico). Para que isso ocorra, é necessária uma técnica de refinamento estável, o que significa que o número de classes congruentes de simplexos obtidas pelas sucessivas subdivisões deva ser limitado [Gon06, Definição 2.4].

Para dividir um triângulo no espaço bi-dimensional existem várias estratégias diferentes, como a bisseção do triângulo ao meio (inclusão de um novo vértice sobre o ponto médio da aresta de maior comprimento), divisão do triângulo em três (inclusão de um novo vértice no centro de gravidade do triângulo), dentre outras. A técnica utilizada neste capítulo foi proposta por [Gon06] e consiste em dividir o triângulo em quatro partes pela inclusão de três novos vértices sobre os pontos médios de cada aresta. Essa técnica, denominada divisão orientada pelas arestas (do inglês, *edgewise subdivision*) [EG00], fornece triângulos da mesma classe do

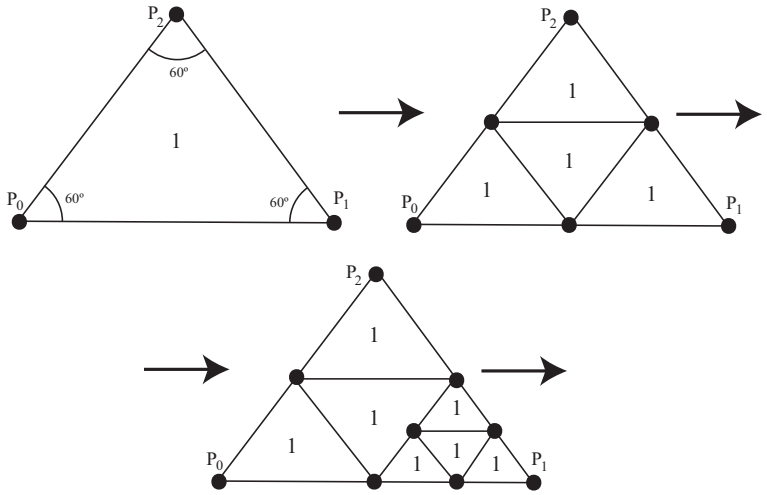


Figura 4.1: Processo de refinamento da divisão orientada pelas arestas no espaço bi-dimensional. [Gon06, seção 2.4 e 2.5].

triângulo original, independente do número de refinamentos realizados, como pode ser vista na Figura 4.1.

Para um tetraedro no espaço tri-dimensional, a técnica de divisão orientada pelas arestas pode ser vista na figura 4.2.

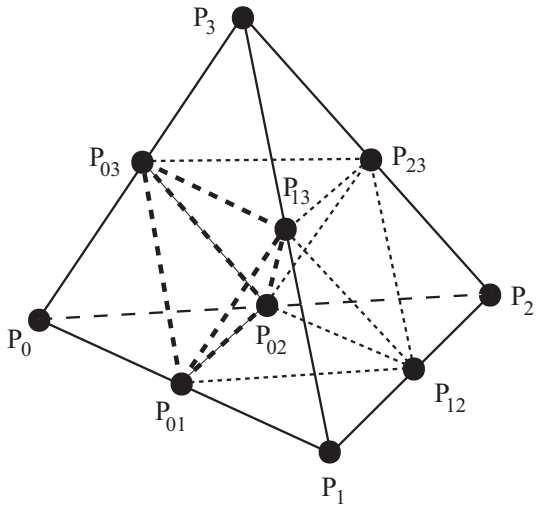


Figura 4.2: Processo de refinamento da divisão orientada pelas arestas no espaço tri-dimensional. [Gon06, seção 2.4 e 2.5].

Uma explicação mais detalhada sobre a forma de implementar a técnica de subdivisão orientada pelas arestas de um simplexo d-dimensional em k^d simplexos pode ser vista em [GPTM06].

4.3 Cômputo do Custo garantido $\mathcal{H}_\infty$

Nesta seção será apresentado um procedimento para cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, com precisão especificada, que possa ser usado como ferramenta de análise de desempenho de sistemas

discretos no tempo sujeito a atraso variante no vetor de estados dado por

$$\Omega(\alpha) : \left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & A(\alpha)x_k + A_d(\alpha)x_{k-d_k} + B(\alpha)u_k + B_w(\alpha)w_k \\ z_k & = & C(\alpha)x_k + C_d(\alpha)x_{k-d_k} + D(\alpha)u_k + D_w(\alpha)w_k \end{array} \right. \tag{4.2}$$

em que k é o instante de amostragem e as matrizes $A(\alpha)$, $A_d(\alpha)$, $B(\alpha)$, $B_w(\alpha)$, $C(\alpha)$, $C_d(\alpha)$, $D(\alpha)$ e $D_w(\alpha)$ são matrizes incertas, invariantes no tempo, adequadamente definidas em termos de $x_k = x(k) \in \mathbb{R}^n$, o vetor de estados no instante k, $u_k = u(k) \in \mathbb{R}^m$, que representa os m sinais de controle, $w_k = w(k) \in \mathbb{R}^v$, que contém v entradas exógenas, e $z_k = z(k) \in \mathbb{R}^p$, o vetor de p sinais de saída de ponderação. Essas matrizes podem ser descritas por um politopo $\mathcal{D}$, definido pelo conjunto de todas matrizes obtidas pela combinação convexa de seus N vértices:

$$\mathcal{D} = \left\{ \Omega(\alpha) \in \mathbb{R}^{n+p\times 2n+m+v} : \Omega(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \Omega_i,\ \alpha \in \Upsilon \right\}, \tag{4.3}$$

em que Υ é dado em (4.1), e

$$\Omega_i = \left[\begin{array}{cc|c|c} A_i & A_{di} & B_i & B_{wi} \\ \hline C_i & C_{di} & D_i & D_{wi} \end{array} \right], \quad i \in \mathcal{I}[1, N], \tag{4.4}$$

são os vértices do politopo.

O atraso, denotado por d_k, é suposto variante no tempo, sendo dado por:

$$d_k \in \mathcal{I}\left[\underline{d}, \overline{d}\right], (\underline{d}, \overline{d}) \in \mathbb{N}_*^2 \tag{4.5}$$

com $\underline{d}$, $\overline{d}$ representando os valores mínimo e máximo de d_k, respectivamente. Qualquer $\Omega(\alpha) \in \mathcal{D}$ pode ser escrito como uma combinação convexa dos N vértices Ω_i, $i \in \mathcal{I}[1, N]$, de $\mathcal{D}$. A lei de controle considerada é:

$$u_k = Kx_k + K_d x_{k-d_k} \tag{4.6}$$

com $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $K_d \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Usando (4.6) em (4.2)-(4.4), o sistema incerto em malha fechada resultante é dado por

$$\tilde{\Omega}(\alpha) : \left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & \tilde{A}(\alpha)x_k + \tilde{A}_d(\alpha)x_{k-d_k} + B_w(\alpha)w_k, \\ z_k & = & \tilde{C}(\alpha)x_k + \tilde{C}_d(\alpha)x_{k-d_k} + D_w(\alpha)w_k, \end{array} \right. \tag{4.7}$$

com $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathcal{D}}$,

$$\tilde{\mathcal{D}} = \left\{ \tilde{\Omega}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n+p\times 2n+v} : \tilde{\Omega}(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \tilde{\Omega}_i, \quad \alpha \in \Upsilon \right\} \tag{4.8}$$

com

$$\tilde{\Omega}_i = \left[\begin{array}{cc|c} \tilde{A}_i & \tilde{A}_{di} & B_{wi} \\ \hline \tilde{C}_i & \tilde{C}_{di} & D_{wi} \end{array} \right], \quad i \in \mathcal{I}[1, N]. \tag{4.9}$$

em que as matrizes $\tilde{A}_i$, $\tilde{A}_{di}$, $\tilde{C}_i$ e $\tilde{C}_{di}$ são definidas como

$$\tilde{A}_i = A_i + B_i K, \quad \tilde{A}_{di} = A_{di} + B_i K_d, \tag{4.10}$$

$$\tilde{C}_i = C_i + D_i K, \quad \tilde{C}_{di} = C_{di} + D_i K_d \tag{4.11}$$

Neste capítulo, tanto o sistema (4.2) quanto o sistema (4.7) são considerados com condições iniciais nulas, isto é,

$$x_k = \mathbf{0}, \quad \forall k \in \mathcal{I}[-\overline{d},\ 0] \tag{4.12}$$

Para o caso do sistema não ter condições iniciais nulas veja o trecho do Capítulo 3, seção 3.2, em que essa questão é abordada.

Para análise dos sistemas apresentados em (4.7) será proposta uma estratégia para o cálculo do valor máximo da norma $\mathcal{H}_\infty$ com uma precisão desejada, baseada no algoritmo BnB.

4.3.1 O Algoritmo BnB

Uma explicação detalhada sobre o algoritmo BnB utilizado neste trabalho pode ser vista em [Gon06], que utilizou como base o trabalho de [BBB91]. Nesta seção são apresentadas algumas definições para facilitar o entendimento do leitor.

O algoritmo BnB pode ser utilizado para encontrar o máximo (ou mínimo) global de uma função $f(\alpha) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, em um domínio $\alpha \in \Upsilon \subset \mathbb{R}^d$, garantindo uma precisão especificada desde que a taxa de variação de $f(\alpha)$ e o domínio Υ sejam limitados. Para um domínio $\Upsilon_i \subseteq \Upsilon$, pode-se definir

$$\Phi_{\max}(\Upsilon_i) \triangleq \max_{\alpha \in \Upsilon_i} f(\alpha) \tag{4.13}$$

O algoritmo BnB calcula $\Phi_{\max}(\Upsilon)$ baseado em duas funções, $\Phi_{li}(\Upsilon_i)$ e $\Phi_{ls}(\Upsilon_i)$, definidas sobre $\{\Upsilon_i : \Upsilon_i \subseteq \Upsilon\}$. Essas duas funções devem satisfazer as seguintes condições:

$$\Phi_{li}(\Upsilon_i) \leq \Phi_{\max}(\Upsilon_i) \leq \Phi_{ls}(\Upsilon_i) \tag{4.14}$$

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0 \text{ tal que } \forall\ \Upsilon_i \subseteq \Upsilon, \dim(\Upsilon_i) \leq \delta \Rightarrow \Phi_{ls}(\Upsilon_i) - \Phi_{li}(\Upsilon_i) \leq \varepsilon \tag{4.15}$$

A condição (4.14) estabelece que as funções $\Phi_{li}(\Upsilon_i)$ e $\Phi_{ls}(\Upsilon_i)$ calculam os limites inferior e superior de $\Phi_{\max}(\Upsilon_i)$, respectivamente. A condição (4.15) estabelece que, quando a máxima distância entre os vértices de Υ_i, denotado por $\dim(\Upsilon_i)$, tende a zero, a diferença entre os limites inferior e superior converge para zero.

O algoritmo BnB inicia-se pelo cálculo de $\Phi_{li}(\Upsilon)$ e $\Phi_{ls}(\Upsilon)$. Se $(\Phi_{ls} - \Phi_{li})/\Phi_{li} \leq \varepsilon$, sendo ε uma precisão relativa pré-estabelecida, então o algoritmo finaliza. Se o critério de parada não é atingido, é necessário particionar o politopo Υ em subpolitopos menores de forma que $\Upsilon = \Upsilon_1 \cup \Upsilon_2 \cup ... \cup \Upsilon_s$ e calcular $\Phi_{li}(\Upsilon_i)$ e $\Phi_{ls}(\Upsilon_i)$, $i = 1, ..., \mathrm{s}$. Com isso

$$\max_{1 \leq i \leq s} \Phi_{li}(\Upsilon_i) \leq \Phi_{\max}(\Upsilon) \leq \max_{1 \leq i \leq s} \Phi_{ls}(\Upsilon_i) \tag{4.16}$$

fornece novos limites para $\Phi_{\max}(\Upsilon)$. Caso a diferença entre os novos limites seja menor ou igual a ε, o algoritmo finaliza. Caso contrário, a partição de Υ é refinada e novos limites são calculados. O algoritmo BnB converge uma vez que, pelas sucessivas partições, $\dim(\Upsilon_i), i = 1, ..., \mathrm{s}$, tende para zero, fazendo com que $\Phi_{li}(\Upsilon_i) - \Phi_{ls}(\Upsilon_i)$ tenda a zero.

A versão do algoritmo BnB [Gon06], utilizada neste capítulo é apresentada a seguir:

Algoritmo: Branch-and-Bound (BnB)
  $k \leftarrow 0$;
  $\mathcal{T}_0 \leftarrow \{\Upsilon\}$;
  $L_0 \leftarrow \Phi_{li}(\Upsilon)$;
  $U_0 \leftarrow \Phi_{ls}(\Upsilon)$;
  enquanto $(U_k - L_k)/L_k > \varepsilon$
    selecione $\Upsilon_u \in \mathcal{T}_k$ tal que $\Phi_{ls}(\Upsilon_u) = U_k$;
    particione Υ_u em $\Upsilon_1, \ldots, \Upsilon_s$;
    $\mathcal{T}_{k+1} \leftarrow \{\mathcal{T}_k - \Upsilon_u\} \cup \{\Upsilon_1, \ldots, \Upsilon_s\}$;
    $L_{k+1} \leftarrow \max\limits_{\Upsilon_i \in \mathcal{T}_{k+1}} \Phi_{li}(\Upsilon_i)$;
    $U_{k+1} \leftarrow \max\limits_{\Upsilon_i \in \mathcal{T}_{k+1}} \Phi_{ls}(\Upsilon_i)$;
    elimine todo $\Upsilon_i \in \mathcal{T}_{k+1}$ tal que $\Phi_{ls}(\Upsilon_i) < L_{k+1}$;
    $k \leftarrow k + 1$;
  fim enquanto
fim algoritmo

4.3.2 Escolha das funções limitantes

Considera-se para classe de sistemas abordada neste trabalho que o ganho de saída sobre todos os sinais limitados, é dado por

$$T_{zw}(\alpha) \;=\; \frac{\| z_k \|_2}{\| w_k \|_2} \tag{4.17}$$

em que $w_k \in \ell_2$ e $w_k \neq 0$.

O problema a ser considerado é o cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$, que está relacionado ao maior valor de $T_{zw}(\alpha)$, para todo $\alpha \in \Upsilon$, também chamado de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ ótimo. Seja $\gamma_{p.c}$ o valor máximo na norma $\mathcal{H}_\infty$ no domínio da incerteza:

$$\gamma_{pc} \triangleq \max_{\alpha \in \Upsilon} \; T_{zw}(\alpha) \tag{4.18}$$

.

Como ainda não existem formulações convexas para o cálculo exato de (4.18), utiliza-se o cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, $\gamma_{c.g}$, através de formulações LMIs como um limite superior para o valor máximo da norma no domínio da incerteza:

$$\max_{\alpha \in \Upsilon} \; T_{zw}(\alpha) \leq \gamma_{cg} \tag{4.19}$$

.

Note que, se o atraso é incerto e *invariante* no tempo, então o valor máximo da norma, dado em (4.18), pode ser calculado pelo valor máximo da matriz de transferência entre w_k e z_k

$$\gamma_{pc} \triangleq \max_{\substack{\alpha \in \Upsilon \\ d \in [\underline{d},\ \overline{d}]}} T_{zw}(\mathbf{z}, \alpha). \tag{4.20}$$

em que $\mathbf{z}$ é o operador avanço e $T_{zw}(\mathbf{z}, \alpha)$ é defino por:

$$T_{zw}(\mathbf{z}, \alpha) \ = \ (C(\alpha) + C_d(\alpha)z^{-d})(z\mathbf{I} - A(\alpha) - A_d(\alpha)z^{-d})^{-1}B_w(\alpha) + D_w(\alpha). \tag{4.21}$$

Baseado nessas informações, em que o cálculo exato do valor máximo da norma é um problema em aberto, apresenta-se um método baseado em LMIs de estimação do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para se determinar o valor ótimo (ou ε-ótimo) do custo ε-garantido $\mathcal{H}_\infty$, γ_c. O custo ε-garantido $\mathcal{H}_\infty$, γ_c, é definido como o valor que atende a seguinte desigualdade:

$$\gamma_{p.c} \leq \gamma_c \leq (1 + \varepsilon)\gamma_{pc} \tag{4.22}$$

com $\alpha \in \Upsilon$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

Para utilizar o algoritmo BnB no cálculo do custo $\mathcal{H}_\infty$ com precisão requerida, torna-se necessário encontrar as funções $\Phi_{li}(\Upsilon_i)$ e $\Phi_{ls}(\Upsilon_i)$ que satisfaçam as condições (4.14) e (4.15). A função limite inferior $\Phi_{li}(\Upsilon)$ será definida como o pior caso da norma $\mathcal{H}_\infty$ calculada nos vértices de Υ_i pela formulação LMI de análise de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ proposta neste trabalho (capítulo 3). A função limite superior $\Phi_{ls}(\Upsilon)$ também utilizará a formulação de análise de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ proposta no Capítulo 3, mas, como o pior caso do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ calculado para todas as subdivisões do politopo $\mathcal{D}$ descrito em (4.3).

Observe que as funções limitantes poderiam ser definidas como qualquer formulação de análise LMI, a eficiência do algoritmo BnB dependerá dessa escolha.

A partir da escolha dessas funções limitantes, o algoritmo BnB irá combinar a redução do conservadorismo das formulações LMIs pela partição do domínio de incerteza, com uma técnica (desenvolvida por [Gon06]), em que o refinamento do domínio de incerteza ocorre apenas no sub-politopo com maior valor de custo garantido. O custo computacional relacionado com o cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ pelas duas técnicas simultaneamente é justificado pela disponibilidade da informação de precisão do cálculo.

4.3.3 Exemplos de procedimento de Análise

O algoritmo BnB para cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ com precisão ε foi implementado no $MATLAB$®, o resolvedor de LMIs escolhido foi o SeDuMi [Stu99]. Outros resolvedores poderiam ser escolhidos, como por exemplo, o LMI Control Toolbox ou o SDPT3 [TTT99]. Mais detalhes sobre resolvedores de programação semidefinida podem ser encontradas no *website* do YALMIP, seção *solvers*. Os testes apresentados neste trabalho foram feitos em um *notebook* com processador $INTEL$® de núcleo duplo ($2 \times 2.26GHz$), e $2.95GB$ de memória RAM.

Para sistemas incertos, discretos no tempo com atraso nos estados, definidos por (4.7), são usadas as condições apresentadas no Capítulo 3 aqui nomeadas:

- **ERC** estabilidade robusta convexa, apresentada pelo Teorema 3.1 do Capítulo 3, (3.22).

- **EQEC** estabilidade quadrática extra convexa, apresentada no Capítulo 3, (3.46).
- **EQDC** estabilidade quadrática direta convexa, apresentada também no Capítulo 3, (3.47).

As condições propostas neste capítulo, utilizam as LMIs de análise de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ propostas no Capítulo 3, combinadas com o algoritmo BnB para o cálculo do custo ε-garantido $\mathcal{H}_\infty$ e são aqui definidas por:

- **ERNC** estabilidade robusta não convexa.
- **EQENC** estabilidade quadrática extra não convexa.
- **EQDNC** estabilidade quadrática direta não convexa.

Exemplo 4.1 *Considere o sistema incerto, discreto no tempo com atraso nos estados, cujas matrizes pertencem ao politopo de matrizes definido por:*

$$[\tilde{A}_1|\tilde{A}_{d1}] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0.0243 & 0.0729 & 0.8181 & 0.1782 & 0.0024 & 0.0073 & 0.0818 & 0.0178 \\ -0.2511 & -0.0891 & 0.0567 & 0.5265 & -0.0251 & -0.0089 & 0.0057 & 0.0527 \\ 0.4374 & -0.1296 & -0.1539 & 0.1539 & 0.0437 & -0.0130 & -0.0154 & 0.0154 \\ -0.1620 & -0.6399 & 0.3726 & -0.7776 & -0.0162 & -0.0640 & 0.0373 & -0.0778 \end{array}\right],$$

$$[\tilde{A}_2|\tilde{A}_{d2}] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} -0.8505 & 0.7938 & 0.6804 & 0.4212 & -0.0851 & 0.0794 & 0.0680 & 0.0421 \\ -0.2916 & -0.6723 & 0.6885 & -0.2511 & -0.0292 & -0.0672 & 0.0689 & -0.0251 \\ -0.5022 & -0.8667 & 0.2835 & 0.3159 & -0.0502 & -0.0867 & 0.0284 & 0.0316 \\ -0.4779 & -0.5832 & -0.0891 & 0.3483 & -0.0478 & -0.0583 & -0.0089 & 0.0348 \end{array}\right],$$

$$[\tilde{A}_3|\tilde{A}_{d3}] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} -0.1296 & -0.1296 & 0.3078 & -0.7047 & -0.0130 & -0.0130 & 0.0308 & -0.0705 \\ 0.4293 & 0.2430 & 0.5670 & -0.0162 & 0.0429 & 0.0243 & 0.0567 & -0.0016 \\ 0.3078 & 0.5184 & 0.2754 & 0.3159 & 0.0308 & 0.0518 & 0.0275 & 0.0316 \\ 0.2997 & 0.2349 & 0 & 0.6480 & 0.0300 & 0.0235 & 0 & 0.0648, \end{array}\right],$$

$$[\tilde{A}_4|\tilde{A}_{d4}] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} -0.2187 & 0.5346 & 0.0243 & 0.5346 & -0.0219 & 0.0535 & 0.0024 & 0.0535 \\ 0.1863 & -0.5103 & 0.2349 & 0.0891 & 0.0186 & -0.0510 & 0.0235 & 0.0089 \\ 0.3159 & -0.3078 & -0.4374 & 0.4374 & 0.0316 & -0.0308 & -0.0437 & 0.0437 \\ 0.0891 & 0.1296 & 0.4536 & -0.1458 & 0.0089 & 0.0130 & 0.0454 & -0.0146 \end{array}\right],$$

$$B_w = [B_{w1}|B_{w2}|B_{w3}|B_{w4}] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0.1 & 0.11 & 0.09 & 0.115 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$\tilde{C}^T = [\tilde{C}_1^T|\tilde{C}_2^T|\tilde{C}_3^T|\tilde{C}_4^T] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1.1 & 0.9 & 1.15 \end{array}\right],$$

$$\tilde{C}_d^T = [\tilde{C}_{d1}^T|\tilde{C}_{d2}^T|\tilde{C}_{d3}^T|\tilde{C}_{d4}^T] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.11 & 0.09 & 0.115 \end{array}\right],$$

$$D_w = [D_{w1}|D_{w2}|D_{w3}|D_{w4}] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 10 & 11 & 9 & 11.5 \end{array}\right].$$

A Tabela 4.1 apresenta resultados obtidos com o procedimento proposto que combina as LMIs de análise de desempenho $\mathcal{H}_\infty$, propostas no Capítulo 3, com o algoritmo BnB, e resultados usando apenas as condições LMIs de análise de desempenho $\mathcal{H}_\infty$, utilizando o intervalo de atraso $d_k \in \mathcal{I}[4, 8]$. O traço $-$ significa que a condição não apresentou solução factível. A função limitante superior (Φ_{ls}) condiz com o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ calculado para todo politopo, e a função limitante inferior (Φ_{li}), o pior caso da norma $\mathcal{H}_\infty$.

Tabela 4.1: Custo ε-garantido $\mathcal{H}_\infty$ com precisão $\varepsilon = 0.01$ para o Exemplo 4.1 no intervalo de atraso $d_k \in \mathcal{I}[4, 8]$.

	ERC	EQEC	EQDC	ERNC	EQENC	EQDNC
Custo ε-garantido $\mathcal{H}_\infty$	–	–	–	$\Phi_{ls} = 13.539$	$\Phi_{ls} = 13.539$	$\Phi_{ls} = 13.539$
				$\Phi_{li} = 13.539$	$\Phi_{li} = 13.668$	$\Phi_{li} = 13.668$
Tempo(s)	–	–	–	72.7	1379.6	726.1
No. it.(primeira factível)	–	–	–	2(1)	41(19)	41(19)

As Figuras 4.3 e 4.5 apresentam as correspondentes evoluções das funções limitantes no algoritmo BnB para a (ERNC) e (EQDNC), respectivamente. As Figuras 4.4 e 4.6 apresentam a partição do politopo de matrizes, no cálculo do custo ε-garantido $\mathcal{H}_\infty$, γ_c. A (ERNC) apresenta o melhor resultado, convergindo com apenas 2 iterações em 72.7 segundos, cujo custo ε-garantido $\mathcal{H}_\infty$ é obtido para $\alpha = [0\ 1\ 0\ 0]^T$. As duas condições baseadas nas estabilidades quadráticas (EQENC) e (EQDNC) apresentaram resultados idênticos quanto ao número de iterações, mas à (EQDNC) obteve um tempo de processamento requerido 52% menor, uma vez que sua LMI de análise de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ é mais simples. Nenhuma das condições LMIs foram capazes de fornecer resultados factíveis, mostrando o conservadorismo das mesmas.

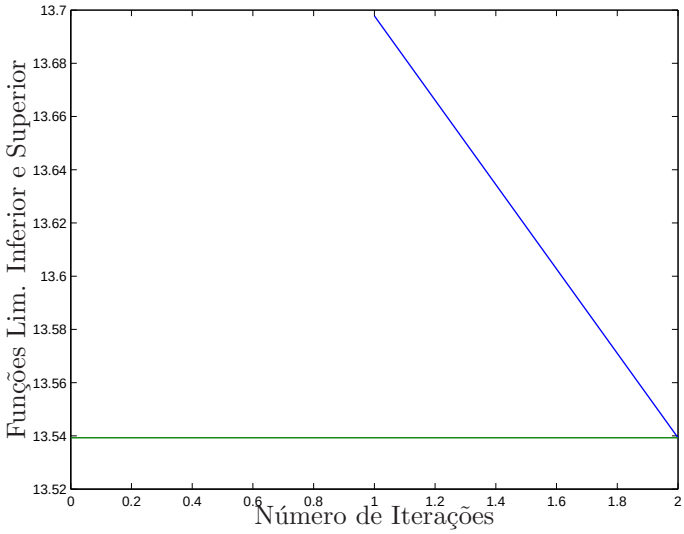


Figura 4.3: Evolução das funções limitantes no cálculo do custo ε-garantido $\mathcal{H}_\infty$ (ERNC) para o Exemplo 4.1.

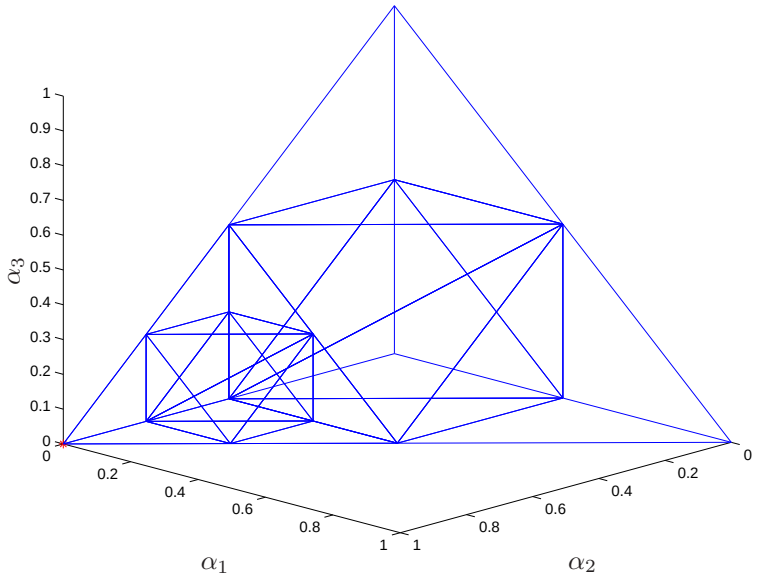


Figura 4.4: Partição do politopo no cálculo do custo ε-garantido $\mathcal{H}_\infty$ (ERNC) para o Exemplo 4.1.

4.4 Controle robusto $\mathcal{H}_\infty$

4.4.1 Procedimento de projeto proposto

Como forma de ilustração do procedimento, considere a Figura 4.7, retirada de [Gon06, seção 5.1], em que é apresentada uma simulação do método de otimização aplicado a uma função objetivo não convexa, $f(\alpha, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, sendo α uma variável escalar limitada, que caracteriza o domínio da incerteza, e x o vetor de parâmetros de otimização. Nesse procedimento, conforme a Figura 4.7, as curvas sólidas representam os valores de $f(\alpha, x)$ após as otimizações, considerando o conjunto finito de valores de α indicados. Na primeira iteração do procedimento

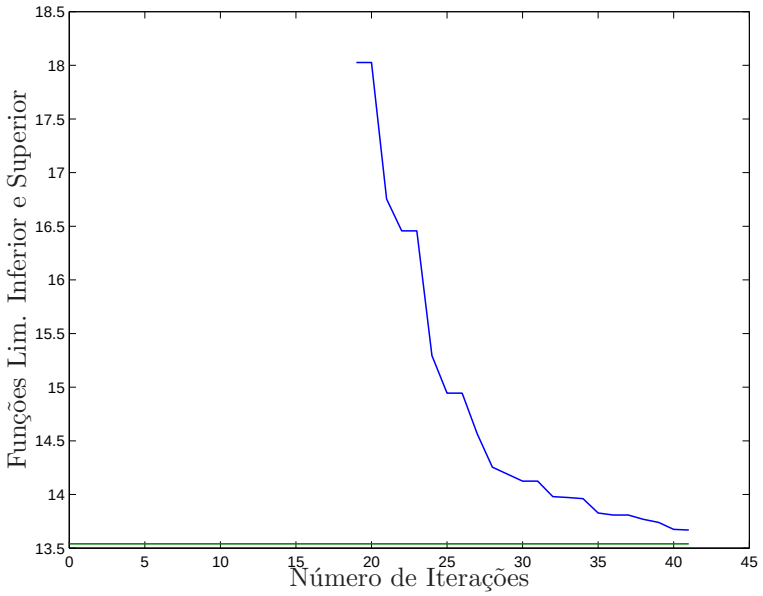


Figura 4.5: Evolução das funções limitantes no cálculo do custo ε-garantido $\mathcal{H}_\infty$ (EQDNC) para o Exemplo 4.1.

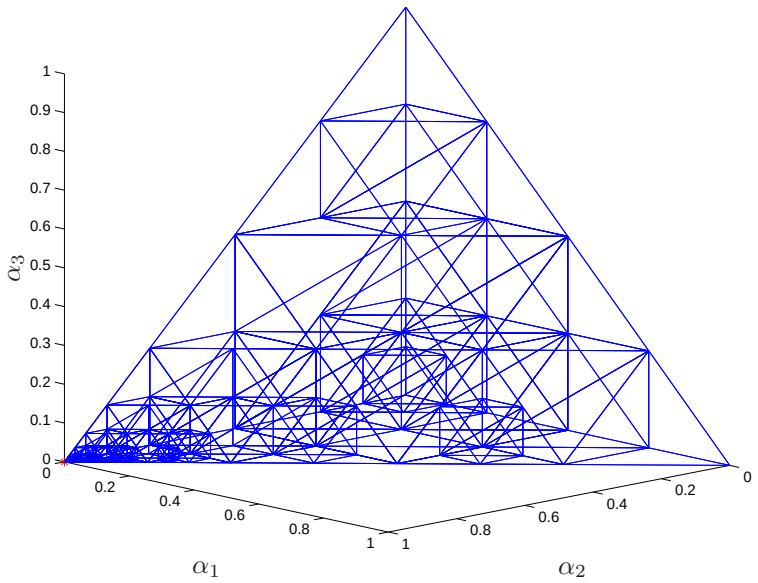


Figura 4.6: Partição do politopo no cálculo do custo ε-garantido $\mathcal{H}_\infty$ (EQDNC) para o Exemplo 4.1.

de projeto, 4.7(a), o vetor x é calculado para minimizar $f(\alpha, x)$ considerando apenas dois valores extremos de α. No processo de análise, é verificado que o máximo global ocorre no interior do intervalo (veja a indicação da seta). Nesse caso, o ponto α correspondente é incluído no conjunto finito e nova iteração do procedimento é efetuada. Na segunda iteração, 4.7(b), o vetor x é determinado considerando agora os dois valores extremos de α mais o ponto máximo identificado na iteração anterior. O efeito da inclusão do terceiro ponto é o de minimizar a curva próximo a ele forçando a mesma para o nível dos outros dois pontos. Mas, o máximo de $f(\alpha, x)$ ocorre novamente fora do conjunto finito de pontos considerados, e uma nova iteração

é efetuada incluindo esse quarto ponto. Na terceira iteração 4.7(c), o vetor x obtido resulta em uma curva suavizada de $f(\alpha, x)$ em que o valor máximo ocorre em um ponto já considerado e desse modo o procedimento de síntese é finalizado.

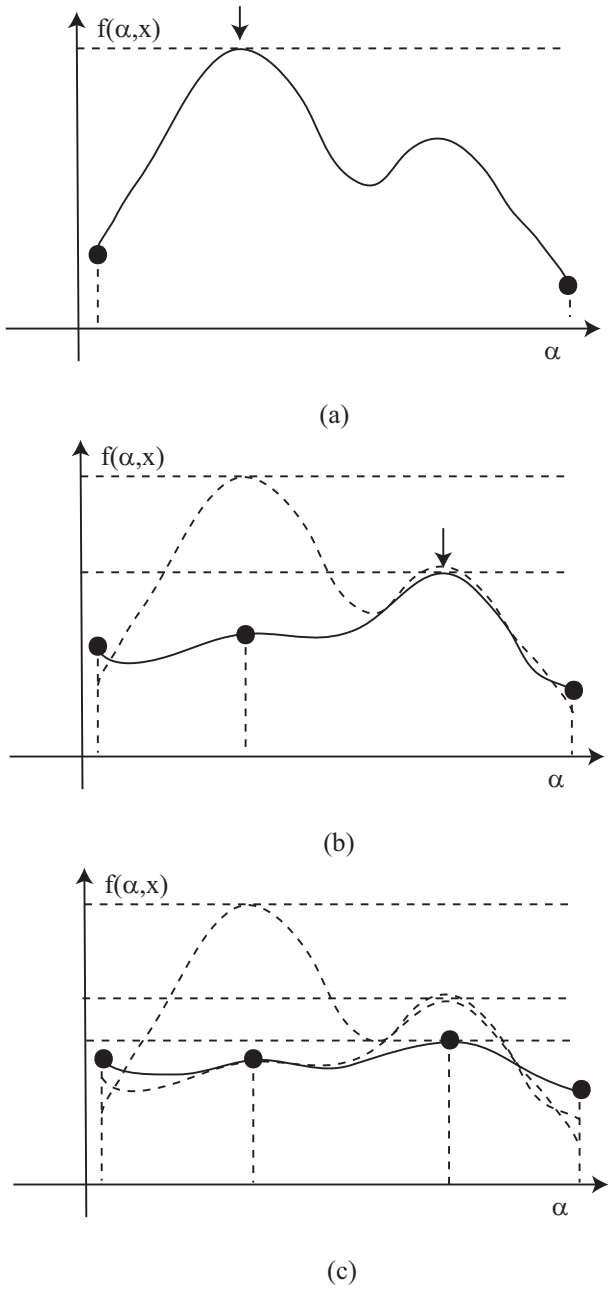


Figura 4.7: Simulação do processo de otimização pela inclusão progressiva de pontos de fixação. [Gon06, seção 5.1].

Seja $T_{zw}(\alpha, \mathcal{K})$ o ganho de saída sobre todos os sinais limitados $w_k \in \ell_2$, $w_k \neq 0$ do sistema em malha fechada projetado, para um determinado ponto do domínio politópico de incerteza, Υ, especificado pelo vetor α, e um determinado controlador $\mathcal{K}$. Define-se Θ como o conjunto de soluções para $\mathcal{K}$, que garanta a Schur estabilidade do sistema (4.2)-(4.6). O projeto de controladores consiste em um problema mono-objetivo em que se deseja determinar os elementos

de $\mathcal{K}$ que minimizem a seguinte função de custo:

$$\mathcal{J}(\mathcal{K}) = \left\{ \max_{\alpha \in \Upsilon} \; T_{zw}(\alpha, \mathcal{K}) \right\} \tag{4.23}$$

e que pertença ao conjunto Θ das soluções $\mathcal{K}$.

Considere o conjunto finito de pontos do domínio politópico de incertezas, iniciado como o conjunto de vértices do politopo:

$$\tilde{\Upsilon} = \mathrm{Vert}(\Upsilon) \tag{4.24}$$

Para um dado $\mathcal{K}$, defina o valor máximo da norma $\mathcal{H}_\infty$ no conjunto finito $\tilde{\Upsilon} \subset \Upsilon$:

$$\tilde{\gamma}_{pc} \triangleq \max_{\alpha \in \tilde{\Upsilon}} \; T_{zw}(\alpha, \mathcal{K}) \tag{4.25}$$

e os valores máximos considerando todo o politopo:

$$\gamma_{pc} \triangleq \max_{\alpha \in \Upsilon} \; T_{zw}(\alpha, \mathcal{K}) \tag{4.26}$$

Seja $\alpha_{(\infty)}$ os vetores de coordenadas correspondentes aos pontos de máximo em todo o politopo:

$$\alpha_{(\infty)} = \arg\max_{\alpha \in \Upsilon} \; T_{zw}(\alpha, \mathcal{K}) \tag{4.27}$$

.

O problema de otimização escalar mono-objetivo envolvendo a síntese de controladores robustos tratado neste capítulo, pode ser estabelecido como:

$$\mathcal{O}_{\mathcal{H}_\infty} : \quad \begin{cases} \tilde{\mathcal{K}}^* = \arg\min_{\mathcal{K}} \max_{\alpha \in \tilde{\Upsilon}} \; T_{zw}(\alpha, \mathcal{K}) \\ \qquad \text{sujeito a} \\ \qquad \mathcal{K} \in \Theta \end{cases} \tag{4.28}$$

Conforme discutido anteriormente, a ideia por trás do procedimento de síntese é simples. O controlador é calculado como a solução do problema de otimização $\mathcal{O}_{\mathcal{H}_\infty}$, (4.28), que considera apenas um conjunto finito de pontos $\tilde{\Upsilon}$, do conjunto de infinitos pontos, Υ, e é validado *a posteriori* para todo o politopo por meio de procedimentos de análise de Schur estabilidade robusta com minimização do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, que deve ter a capacidade de localizar e determinar o ponto de pior caso: $\gamma_{pc} = \max_{\alpha \in \Upsilon} \; T_{zw}(\alpha_{(\infty)}, \tilde{\mathcal{K}}^*)$. Se a restrição de Schur estabilidade não for atendida ou se o ponto de pior caso no politopo não fizer parte do conjunto finito $\tilde{\Upsilon}$, então esse ponto é incluído no conjunto e uma nova iteração do algoritmo é processada. Para evitar iterações desnecessárias na minimização da função objetivo, a inclusão de novos pontos é feita apenas quando a diferença relativa entre o pior caso da norma no politopo e o pior caso no conjunto finito $\tilde{\Upsilon}$ for maior que uma tolerância ε_δ.

O procedimento de projeto proposto neste capítulo é descrito como:

Procedimento de Projeto

Passo 1. Inicie $i \leftarrow 0$, $\tilde{\Upsilon}_0 \leftarrow \mathrm{Vert}(\Upsilon)$.
Passo 2. $i \leftarrow i+1$, $\tilde{\Upsilon}_i \leftarrow \tilde{\Upsilon}_{i-1}$.
Passo 3. Resolva o problema auxiliar $\mathcal{O}_{\mathcal{H}_\infty}$ para encontrar $\tilde{\mathcal{K}}^*$, $\tilde{\gamma}_{p.c}$.
Passo 4. Calcule o custo ε-garantido $\mathcal{H}_\infty$, γ_c, o valor $\gamma_{p.c}$ e o vetor de coordenadas correspondente $\alpha_{(\infty)}$ para $\tilde{\mathcal{K}}^*$. Se $\alpha_{(\infty)} \notin \tilde{\Upsilon}_i$, então $\tilde{\Upsilon}_i \leftarrow \tilde{\Upsilon}_i \cup \alpha_{(\infty)}$.
Passo 5. Verifique se $\exists\ \alpha_{(u)} \in \Upsilon$ tal que o sistema não seja Schur estável, então $\tilde{\Upsilon}_i \leftarrow \tilde{\Upsilon}_i \cup \alpha_{(u)}$.
Passo 6. Se $\tilde{\Upsilon}_i \neq \tilde{\Upsilon}_{i-1}$ e $\gamma_c - \tilde{\gamma}_{p.c} > \varepsilon_\delta$, então $\tilde{\Upsilon}_i \leftarrow \tilde{\Upsilon}_i \cup \alpha_{(\infty)}$ e vá para o passo 2. Caso contrário, $\mathcal{K} \leftarrow \tilde{\mathcal{K}}^*$, fim.

4.4.2 Solução do problema de otimização $\mathcal{O}_{\mathcal{H}_\infty}$

Para solução do procedimento de síntese é necessária a solução de um problema de otimização escalar restrito não convexo definido em (4.28). Neste capítulo, o problema de otimização $\mathcal{O}_{\mathcal{H}_\infty}$, (4.28) é solucionado através do algoritmo elipsoidal [TSDFR03], que é uma algoritmo de fácil implementação e adequado para tratar da otimização de funções não diferenciáveis. Todos os procedimentos utilizados neste capítulo seguem passos semelhantes ao trabalho de [Gon06].

Um elipsoide $\mathcal{E}$ pode ser representado como

$$\mathcal{E} = \left\{ z | (z-x)^T \mathcal{Q}^{-1} (z-x) \leq 1 \right\} \tag{4.29}$$

em que x define o centro da elipsóide e $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^T > 0$ uma matriz simétrica definida positiva (com autovalores reais e positivos), que determina as dimensões e as direções dos semieixos do elipsoide.

A proposta básica do algoritmo elipsoidal, baseada em [BGFB94], é descrita a seguir. O algoritmo inicia com um elipsoide $\mathcal{E}_0$ que contém a solução ótima do problema de otimização. Em seguida, é calculado um hiperplano de corte que passa através do centro da elipsoide, x_0, com base em um vetor m_0, tal que a solução ótima se localiza na metade do espaço definido por $\left\{ z | m_0^T (z - x_0) < 0 \right\}$. Desse modo, pode-se garantir que a metade do elipsóide dada por:

$$\mathcal{E}_0 \cap \left\{ z | m_0^T (z - x_0) < 0 \right\} \tag{4.30}$$

contém o ponto ótimo. A seguir é calculado o elipsoide $\mathcal{E}_1$ de mínimo volume que contém a metade do elipsoide na qual está localizada a solução ótima. O processo se repete e na medida que o volume do elipsoide tende a zero, seu centro tende para a solução ótima.

Como será detalhado a seguir, o vetor m_k, que define o hiperplano de corte, corresponde ao gradiente ou subgradiente da função objetivo $f(x)$ ou o pior caso da restrição. O subgradiente de f no ponto $x \in \mathbb{R}^d$ é qualquer vetor $m \in \mathbb{R}^d$ tal que

$$f(z) \geq f(x) + m^T (z - x) \quad \forall z \in \mathbb{R}^d \tag{4.31}$$

Dado o elipsoide inicial, definido por x_0 e $\mathcal{Q}_0$, sendo $\mathcal{Q}_0$ normalmente uma matriz diagonal, o algoritmo elipsoidal pode ser descrito pelas seguintes equações recursivas [BGFB94]:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{d+1}\mathcal{Q}_k\tilde{m} \tag{4.32}$$

$$\mathcal{Q}_{k+1} = \frac{d^2}{d^2-1}(\mathcal{Q}_k - \frac{2}{d+1}\mathcal{Q}_k\tilde{m}\tilde{m}^T\mathcal{Q}_k) \tag{4.33}$$

com

$$\tilde{m} = \frac{m_k}{\sqrt{m_k^T\mathcal{Q}_k m_k}} \tag{4.34}$$

sendo $x \in \mathbb{R}^d$ o vetor de parâmetros de otimização, com os elementos das matrizes de ganho do controlador. Importante observar que essas fórmulas recursivas são válidas apenas para $d > 1$. No caso em que $d = 1$, a ideia básica do algoritmo elipsoidal equivale a um algoritmo de bisseção para busca unidimensional, cujo próximo elipsoide corresponde à metade do segmento de reta onde se encontra a solução ótima:

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k + \frac{1}{2}\sqrt{\mathcal{Q}_k}, \text{ se } m_k < 0 \\ \\ x_k - \frac{1}{2}\sqrt{\mathcal{Q}_k}, \text{ se } m_k > 0 \end{cases} \tag{4.35}$$

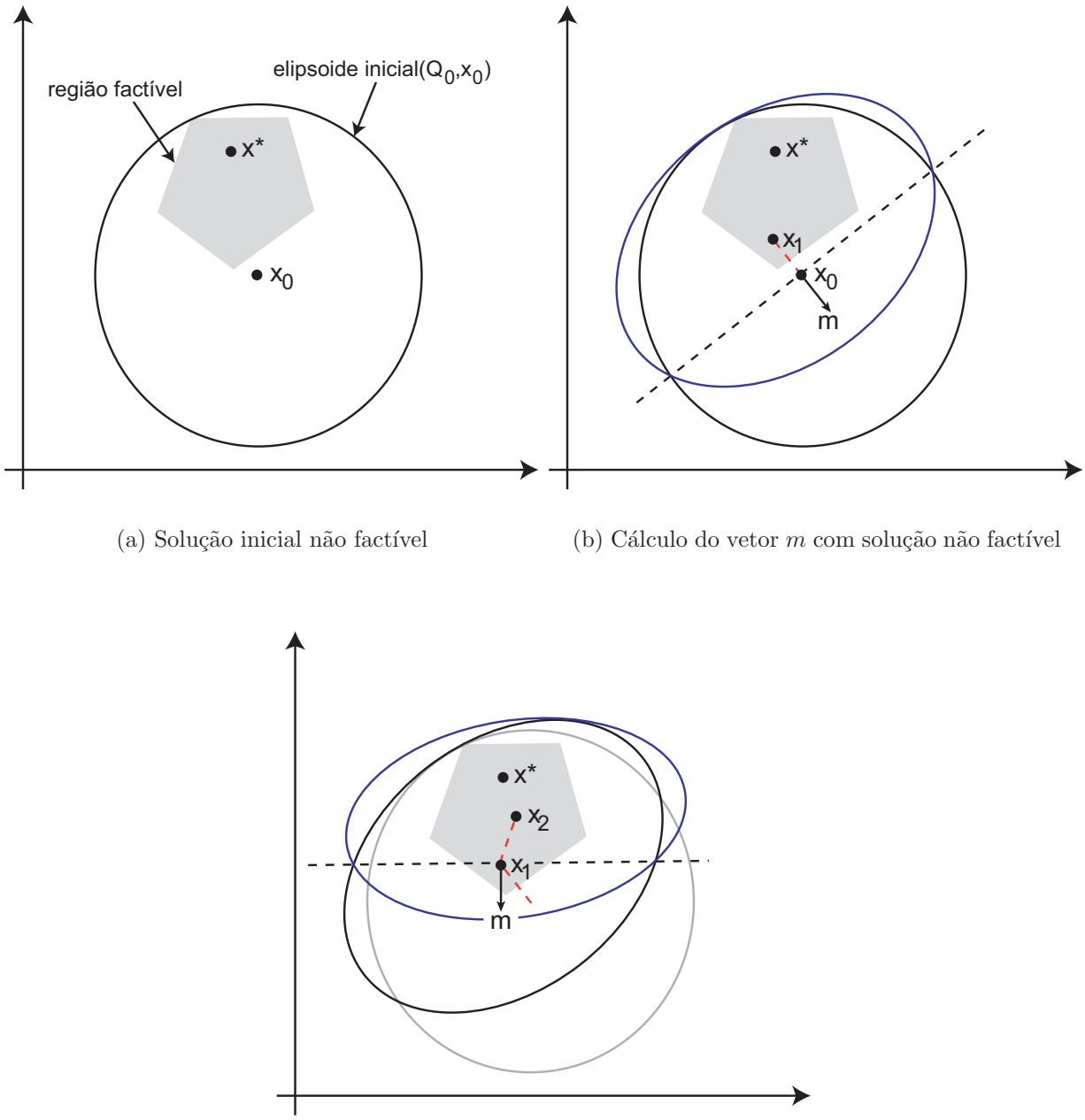
$$\mathcal{Q}_{k+1} = \frac{1}{4}\mathcal{Q}_k \tag{4.36}$$

Seja $f(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ a função objetivo e $g(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^r$ o vetor de restrições. Como apresentado anteriormente, o algoritmo elipsoidal começa com um elipsoide, $\mathcal{E}_0$, que contém o ponto de solução ótima, caracterizado pela matriz $\mathcal{Q}_0$ e pela solução inicial x_0, que é mostrado na Figura (4.8)(a). Em cada iteração, é calculado um vetor não nulo, designado m_k, que define um hiperplano de corte que passa pelo centro do elipsoide e que divide o elipsoide em dois, como apresentado na Figura (4.8)(b). Quando x_k não é uma solução factível, no algoritmo elipsoidal, o vetor m_k é calculado como o gradiente (ou subgradiente) do pior caso da restrição. Em [Gon06], o vetor m_k é calculado baseado no algoritmo *cone-elipsoidal* (CEA) proposto por [TSDFR03]. Nesse método, quando x_k não é factível, o vetor m_k é o vetor normalizado $m_k = m/\|m\|$ calculado como a soma dos gradientes (ou subgradientes) das restrições ativas (violadas), nesse capítulo como utiliza-se apenas uma restrição, será utilizado o algoritmo elipsoidal convencional. Baseado no vetor m_k, o vetor x_k e a matriz $\mathcal{Q}_k$ são atualizadas pelas equações recursivas para calcular o elipsoide de volume mínimo que contém a metade do elipsoide o qual inclui a solução ótima. Quando x_k é uma solução factível, como mostrado na Figura (4.8)(c), o vetor m_k é calculado como o gradiente (ou subgradiente) da função objetivo.

A cada iteração do algoritmo elipsoidal, o volume da elipsoide diminui geometricamente sendo que o volume do elipsóide $\mathcal{E}_k$ é dado por [BGFB94]:

$$\text{vol}(\mathcal{E}_k) \leq e^{-\frac{k}{2d}}\text{vol}(\mathcal{E}_0) \tag{4.37}$$

Observe que a taxa de redução do elipsoide depende da dimensão do vetor de parâmetros de otimização. Apesar do volume ser sempre menor, o diâmetro máximo do elipsoide $\mathcal{E}_{k+1}$ pode



(a) Solução inicial não factível

(b) Cálculo do vetor m com solução não factível

(c) Cálculo do vetor m com solução factível

Figura 4.8: Descrição do algoritmo Elipsoidal. [Gon06, seção 5.3].

ser maior que o do elipsoide $\mathcal{E}_k$, sendo possível obter uma solução não pertencente ao elipsoide inicial.

O cálculo do vetor m baseado no algoritmo elipsoidal pode ser formulado como:

$$m = \begin{cases} \nabla f(x) & \text{se} \quad g(x) < 0 \\ \nabla g(x) & \text{se} \quad g(x) \geq 0 \end{cases} \tag{4.38}$$

sendo $\nabla(\cdot)$ a função gradiente (ou subgradiente).

Considerando o problema de otimização $\mathcal{O}_{\mathcal{H}_\infty}$, (4.28), a função objetivo é definida como:

$$f(x) \triangleq \tilde{\gamma}_{p.c}(x) \tag{4.39}$$

sendo o vetor x formado pelos elementos das matrizes do controlador. A restrição é baseada na condição de análise de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ LMI. Usando o comando `checkset`, do *parser* YALMIP, calculam-se os autovalores de todas as LMIs (internamente, todas as LMIs são convertidas em restrições de positividade no YALMIP). Definimos como ϱ o menor autovalor de todas LMIs (`min(checkset(LMI))`. Assim, é possível obter uma medida de quanto a LMI está sendo violada $\varrho \leq 0$ ou atendida $\varrho > 0$. O valor de $-\varrho$ será utilizado como a restrição do problema de otimização $\mathcal{O}_{\mathcal{H}_\infty}$, de forma que, um valor $-\varrho < 0$ garante que a LMI seja factível, ou seja, o sistema Schur estável:

$$g(x) \triangleq -\varrho(x) \tag{4.40}$$

Para implementação do algoritmo de otimização elipsoidal no procedimento de otimização $\mathcal{O}_{\mathcal{H}_\infty}$ (4.28) é preciso ainda o cálculo do gradiente (ou subgradiente). Neste capítulo é utilizado um algoritmo simples para o cálculo numérico do gradiente por diferenças finitas, conforme [Gon06, seção 5.3].

Seja e^i a i-ésima coluna da matriz identidade $d \times d$. Considere-se um certo $\Delta > 0$, tal que $\Delta \approx 0$. O algoritmo de cálculo do vetor gradiente v da função $f(\cdot)$ no ponto $x \in \mathbb{R}^d$ pode ser definido como:

Algoritmo: Cálculo do Gradiente por Diferenças Finitas
  para $i = 1, 2, ..., d$
    $v_i \leftarrow \dfrac{f(x + \Delta e^i) - f(x)}{\Delta}$
  fim para
  $v \leftarrow [v_1 \ ... \ v_d]^T$
fim algoritmo

O valor de Δ pode ser escolhido na faixa de 10^{-5} a 10^{-10} sem influência considerável na maioria dos problemas abordados.

O algoritmo de otimização finaliza quando $(f_{\max} - f_{\min})/f_{\min} \leq \epsilon$, sendo $f_{\max}$ e $f_{\min}$ os valores máximo e mínimo da função objetivo nas últimas N_ε iterações e ϵ a precisão relativa requerida.

Visando aprimorar a estabilidade numérica do cálculo da matriz quadrada simétrica definida positiva, $\mathcal{Q}$, no algoritmo de otimização elipsoidal, pode-se utilizar uma técnica de fatoração [GT82]. É utilizada aqui, baseado em [Gon06], a fatoração UDU^T:

$$\mathcal{Q} = UDU^T \tag{4.41}$$

sendo U uma matriz quadrada triangular superior com elementos unitários na diagonal e D uma matriz diagonal. Essa fatoração é utilizada com sucesso no algoritmo de estimação recursiva

de parâmetros por mínimos quadrados em estratégias de controle adaptativo. A atualização da matriz fatorada é dada por:

$$U_{k+1} = U_k \bar{U} \tag{4.42}$$

$$D_{k+1} = \bar{D} \tag{4.43}$$

sendo $\bar{U}$ e $\bar{D}$ obtidas da fatoração UDU^T:

$$\bar{U}\bar{D}\bar{U}^T = \beta_1 \left(D_k - \frac{\beta_2 (D_k U_k m_k)(D_k U_k m_k)^T}{m_k^T \mathcal{Q}_k m_k} \right) \tag{4.44}$$

com

$$\beta_1 = \frac{d^2}{d^2 - 1} \quad \text{e } \beta_2 = \frac{2}{d+1} \tag{4.45}$$

Nos algoritmos elipsoidais existentes, quando a matriz $\mathcal{Q}$ perde sua característica de ser definida positiva, devido aos erros numéricos acumulados após um número elevado de iterações, ou o algoritmo é finalizado ou a matriz $\mathcal{Q}$ é reiniciada com um valor menor que o valor inicial de $\mathcal{Q}_0$. Nos testes com utilização da fatoração UDU^T, além de retardar significamente a degeneração da matriz $\mathcal{Q}$, o uso da fatoração suaviza a variação da função objetivo, característica desse método, fazendo com que o algoritmo atenda o critério de parada mais rapidamente. Desse modo, é observado que, mesmo com o custo computacional adicional para o cálculo da fatoração, o tempo total de otimização acaba sendo reduzido. Neste trabalho, mesmo usando a fatoração UDU^T, ainda existe a possibilidade de degeneração da matriz $\mathcal{Q}$. Caso isso ocorra, é adotada a reiniciação da matriz $\mathcal{Q}$ com valor 20% menor do que o valor inicial anterior $\mathcal{Q}_0$.

4.4.3 Exemplos do procedimento de projeto

Os exemplos seguintes de projeto de controladores são baseados no procedimento de projeto proposto, implementado no $MATLAB$®, utilizando o *parser* YALMIP, e o resolvedor de LMIs escolhido foi o SeDuMi [Stu99]. Os testes foram feitos em um *notebook* com processador $INTEL$® de núcleo duplo ($2 \times 2.26\ GHz$), e $2.95\ GB$ de memória RAM. A menos que seja informado diferente, os resultados são obtidos adotando o critério de parada do procedimento de projeto $\varepsilon_\delta = 0.1$; o critério de parada do algoritmo de otimização elipsoidal $\epsilon = 0.01$ e a especificação de precisão no algoritmo BnB $\varepsilon = 0.01$. Nos exemplos a seguir, se nada for mencionado, considere que o controlador é obtido em apenas uma iteração do procedimento de projeto (piores casos ocorrem nos próprios vértices do domínio de incerteza politópico), o que acontece na maioria dos casos.

Exemplo 4.2 *Considere o sistema incerto, discreto no tempo com atraso nos estados, cujas matrizes pertencem ao politopo de matrizes definido por:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.8076 & 0.0620 & 0.0322 \\ -0.1117 & 0.9019 & -0.0867 \\ -0.2973 & 0.2651 & 0.9263 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 0.8111 & -0.0311 & 0.0318 \\ 0.0177 & 0.9080 & 0.1945 \\ -0.2813 & -0.0906 & 0.9291 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.8170 & -0.0217 & -0.0035 \\ 0.0168 & 0.8750 & 0.1675 \\ -0.1714 & -0.0613 & 0.9390 \end{bmatrix},$$

$$A_{d1} = \begin{bmatrix} 0.0242 & 0.0019 & 0.0010 \\ -0.0034 & 0.0271 & -0.0026 \\ -0.0089 & 0.0080 & 0.0278 \end{bmatrix}, \; A_{d2} = \begin{bmatrix} 0.0243 & -0.0009 & 0.0010 \\ 0.0005 & 0.0272 & 0.0058 \\ -0.0084 & -0.0027 & 0.0279 \end{bmatrix},$$

$$A_{d3} = \begin{bmatrix} 0.0245 & -0.0007 & -0.0001 \\ 0.0005 & 0.0262 & 0.0050 \\ -0.0051 & -0.0018 & 0.0282 \end{bmatrix},$$

$$B = [B_1|B_2|B_3] = \left[\begin{array}{c|c|c} 0.4511 & 0.4517 & 0.4527 \\ -0.0306 & 0.0074 & 0.0059 \\ -0.0762 & -0.0734 & -0.0447 \end{array}\right],$$

$$Bw = [B_{w1}|B_{w2}|B_{w3}] = \left[\begin{array}{c|c|c} 0.0902 & 0.0903 & 0.0905 \\ -0.0061 & 0.0015 & 0.0012 \\ -0.0152 & -0.0147 & -0.0089 \end{array}\right],$$

$$C^T = [C_1^T|C_2^T|C_3^T] = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 \end{array}\right],$$

$$C_d^T = [C_{d1}^T|C_{d2}^T|C_{d3}^T] = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{array}\right],$$

$$D = [D_1|D_2|D_3] = \left[\begin{array}{c|c|c} 10 & 10 & 10 \end{array}\right],$$

$$D_w = [D_{w1}|D_{w2}|D_{w3}] = \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

O objetivo é projetar um controlador robusto por realimentação de estado, que além de garantir a Schur estabilidade, minimize o valor da norma $\mathcal{H}_\infty$ no intervalo de variação do atraso informado. O método proposto é dividido em três condições, que se diferem pela LMI de estimação do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ utilizada tanto no processo de otimização quanto pelo algoritmo BnB, que são definidas por:

- ***SRNC*** *síntese robusta não convexa.*
- ***SQENC*** *síntese quadrática extra não convexa.*
- ***SQSNC*** *síntese quadrática simples não convexa.*

Os resultados serão comparados com as condições de síntese propostas no Capítulo 3*, que aqui serão definidas por:*

- ***SRCC*** *síntese robusta convexa completa (utiliza a informação do K e K_d), (3.48).*

- ***SRCS*** *síntese robusta convexa simples (utiliza apenas informação do K, $K_d = 0$).*
- ***SQCC*** *síntese quadrática convexa completa, (3.54).*
- ***SQCS*** *síntese quadrática simples.*

No procedimento proposto, os parâmetros de otimização são relacionados com o controlador da seguinte forma:

$$\mathcal{K} = [\ \underbrace{x_1 \quad x_2 \quad x_3}_{K}\ \underbrace{x_4 \quad x_5 \quad x_6}_{K_d}\ ] \tag{4.46}$$

No caso de utilizar apenas a informação do K, ou seja, $K_d = 0$, os parâmetros de otimização são definidos por:

$$\mathcal{K} = \underbrace{[x_1 \quad x_2 \quad x_3]}_{K} \tag{4.47}$$

Para comparação com as condições LMIs propostas no Capítulo 3, adota-se a seguinte estratégia: Primeiro é calculado o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ no maior intervalo de variação do atraso em que a LMI de síntese apresenta solução factível. Para determinar esse intervalo, considera-se o $\underline{d} = 1$, e aumenta-se o $\overline{d}$, definindo assim o intervalo máximo $d_k \in \mathcal{I}[1, \overline{d}]$ em que a condição LMI de síntese apresenta solução factível; para demonstrar o conservadorismo das condições LMIs, em um segundo intervalo de variação do atraso que a condição LMI de síntese não apresenta solução factível, aplica-se o procedimento de síntese proposto.

Condições completas (utilizando K e K_d)

Comparação com SQCC

Na condição LMI de síntese quadrática convexa completa (SQCC), o maior intervalo de variação do atraso com solução factível é $d_k \in \mathcal{I}[1, 19]$, com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, $\gamma = 7.45$ e os ganhos robustos $K = [-2.5238 \quad 1.7222 \quad 2.3504]$, $K_d = [-0.0755 \quad 0.0603 \quad 0.0676]$. O tempo para o cálculo da SQCC é 2.48 segundos. O projeto, pelo procedimento proposto, considerando o intervalo do atraso $d_k \in \mathcal{I}[1, 19]$ e $d_k \in \mathcal{I}[1, 30]$ é apresentado na Tabela 4.2 sendo que os custos ε-garantidos, ou simplesmente custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$, γ_c, são calculados pelo algoritmo BnB com precisão relativa $\varepsilon = 0.01$. No algoritmo de otimização adotam-se como valores iniciais x_0 os ganhos robustos fornecidos pela condição SQCC no intervalo $d_k \in \mathcal{I}[1, 19]$ e $\mathcal{Q}_0 = 2\mathbf{I}$.

Observa-se na Tabela 4.2 que as condições propostas apresentam resultados 2.5 vezes menores que o valor obtido pela condição de síntese LMI SQCC, mostrando assim o menor conservadorismo em relação à otimização convexa estudada no Capítulo 3. Dentre as condições avaliadas, a que apresentou melhor resultado foi a SRNC devido ao menor tempo de processamento requerido. Os valores do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, γ_c, calculados pelo método proposto no intervalo do atraso $d_k \in \mathcal{I}[1, 30]$, em que a condição LMI SQCC não apresenta solução factível, foram 2.35 vezes menores que o valor do custo fornecido pela condição LMI SQCC no intervalo do atraso $d_k \in \mathcal{I}[1, 19]$. O custo computacional é justificado pelos resultados obtidos.

Para ilustrar o comportamento do algoritmo de otimização elipsoidal, é apresentada, nas Figuras 4.9 e 4.10, a evolução da função objetivo e dos parâmetros de otimização com o número de iterações no cálculo do controlador $\mathcal{K}$, para a SRNC no intervalo do atraso $d_k \in \mathcal{I}[1, 30]$.

Tabela 4.2: Resultados pelo projeto proposto, comparados com a SQCC do Exemplo 4.2.

Caso	Condição	Tempo	Ganhos Robustos	γ_c
$d_k \in \mathcal{I}[1,19]$	SRNC	27min35s	$K = [-1.2208 \;\; 0.3095 \;\; 1.1402]$ $K_d = [-0.0385 \;\; 0.0024 \;\; 0.0161]$	3.0001
	SQENC	36min5s	$K = [-1.2208 \;\; 0.3095 \;\; 1.1402]$ $K_d = [-0.0385 \;\; 0.0024 \;\; 0.0161]$	3.0001
	SQSNC	43min53s	$K = [-1.2368 \;\; 0.2243 \;\; 1.0762]$ $K_d = [-0.0374 \;\; 0.0125 \;\; 0.0157]$	2.9900
$d_k \in \mathcal{I}[1,30]$	SRNC	32min50s	$K = [-1.3793 \;\; 0.1832 \;\; 1.5743]$ $K_d = [-0.0394 \;\; 0.0081 \;\; 0.0205]$	3.1682
	SQENC	33min29s	$K = [-1.3793 \;\; 0.1832 \;\; 1.5743]$ $K_d = [-0.0394 \;\; 0.0081 \;\; 0.0205]$	3.1681
	SQSNC	37min21s	$K = [-1.3796 \;\; 0.1175 \;\; 1.4434]$ $K_d = [-0.0408 \;\; 0.0095 \;\; 0.0297]$	3.1758

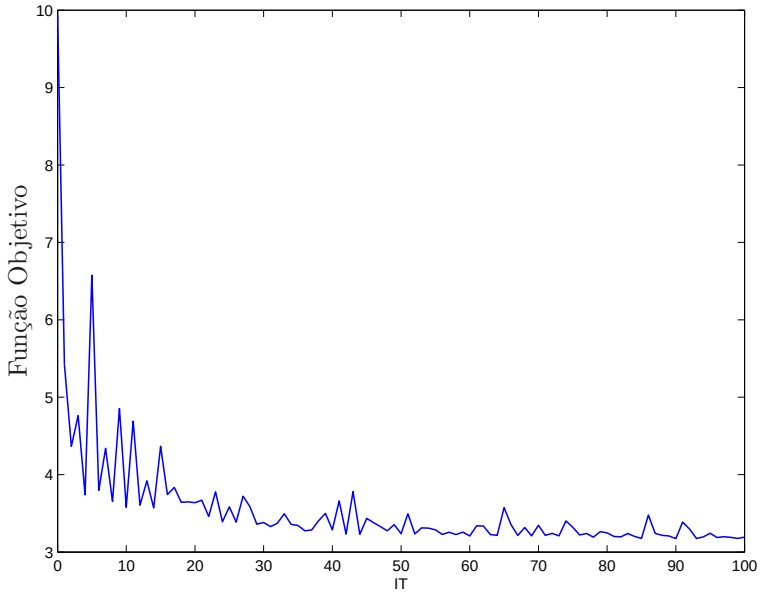


Figura 4.9: Evolução da função objetivo no cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, γ_c (SRNC) no intervado do atraso $d_k \in \mathcal{I}[1,30]$ para o Exemplo 4.2.

São apresentados na Figura 4.11 os diagramas de valores singulares máximos

$$\hat{\sigma}(\omega) = \max_{d \in \mathcal{I}[\underline{d},\overline{d}]} \bar{\sigma}(\omega) \tag{4.48}$$

para cada um dos 3 *vértices do sistema em malha fechada, nos intervalos do atraso,* $d_k \in \mathcal{I}[1,19]$*, na parte superior, e* $d_k \in \mathcal{I}[1,30]$*, na parte inferior, indicados em (—). Além disso, em cada diagrama é apresentada a curva de* $\bar{\sigma}_{máx}(\omega)$*, indicada em (—), que toma o valor máximo de* $\bar{\sigma}(\omega)$ *em relação aos valores dos atrasos, em cada valor de frequência e a linha pontilhada (- -) indica o custo garantido* $\mathcal{H}_\infty$*,* γ_c *calculado pelo método proposto . Como observa-se na Figura 4.11 os valores de custo garantido* $\mathcal{H}_\infty$*,* γ_c*, calculados pelo procedimento proposto, conforme Tabela 4.2,*

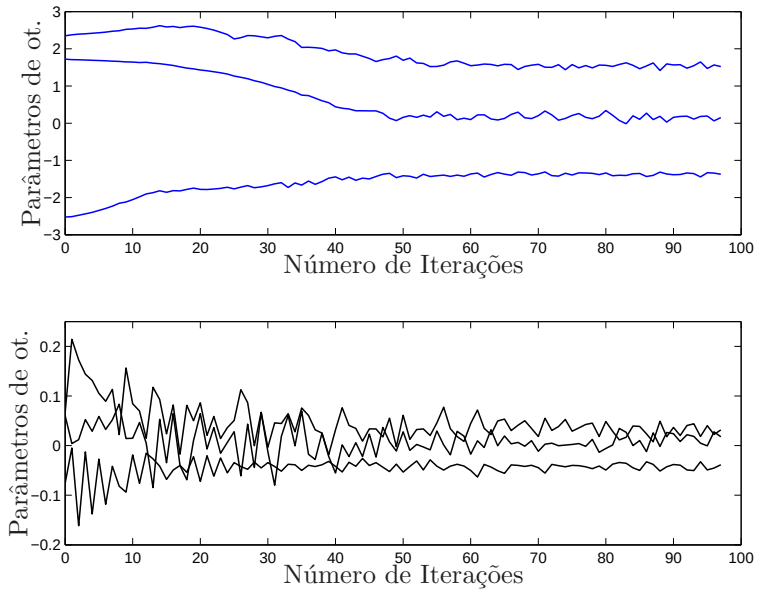


Figura 4.10: Evolução dos parâmetros de otimização para condição proposta (SRNC) no intervado de atraso $d_k \in \mathcal{I}[1, 30]$ para o Exemplo 4.2. Parte superior parâmetros de otimização relacionados aos ganhos robustos K e parte inferior aos ganhos robustos K_d.

foram bem próximos dos valores singulares máximos do sistema em malha fechada usando atraso constante, evidenciando a eficiência do método e justificando o custo computacional.

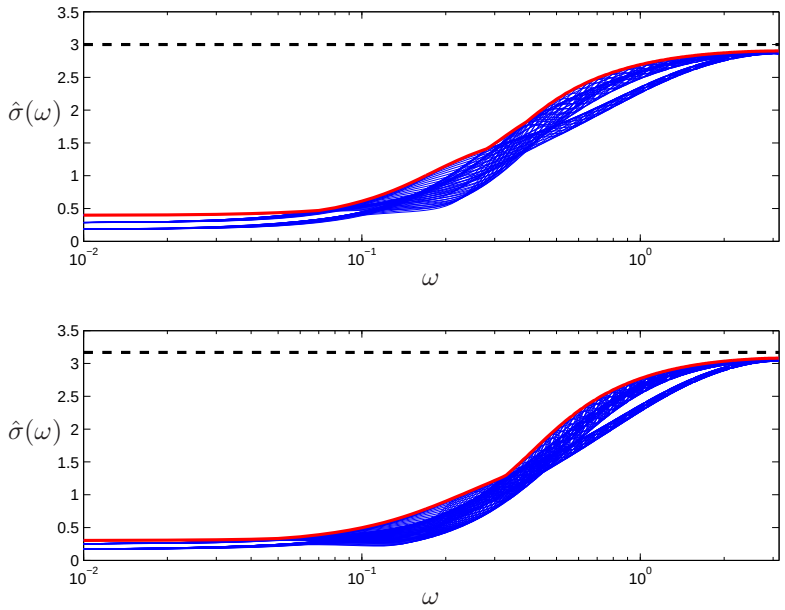


Figura 4.11: Diagramas de valores singulares máximos para o sistema em malha fechada utilizando os ganhos robustos K e K_d, calculados pelo método proposto (SRNC) para $d_k \in \mathcal{I}[1, 19]$ (parte superior) e para $d_k \in \mathcal{I}[1, 30]$ (parte inferior). (Exemplo 4.2).

A Figura 4.12 apresenta a evolução das funções limitantes no algoritmo BnB para EQENC. A Figura 4.13 apresenta a partição do politopo de matrizes, no cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, γ_c para EQENC.

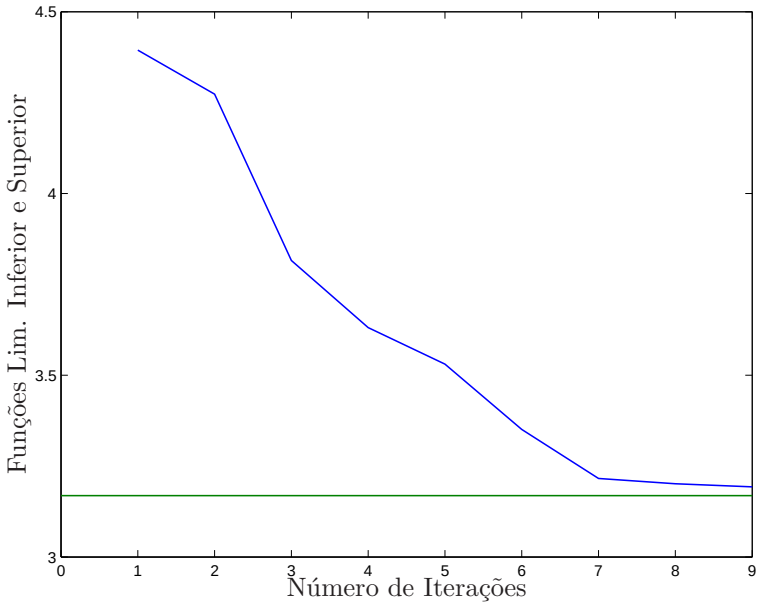


Figura 4.12: Evolução das funções limitantes no cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, γ_c, pela condição proposta (EQENC), no intervado de atraso $d_k \in \mathcal{I}[1, 30]$ para o Exemplo 4.2.

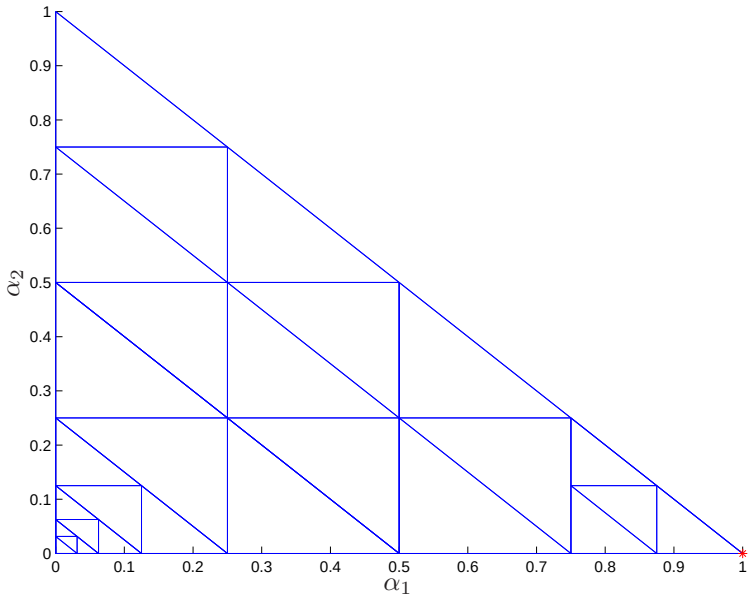


Figura 4.13: Partição do politopo no cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, γ_c, pela condição proposta (EQENC) no intervado de atraso $d_k \in \mathcal{I}[1, 30]$ para o Exemplo 4.2.

Comparação com SRCC

Para a condição LMI de síntese robusta completa (SRCC), o maior intervalo de variação atraso com solução factível é $d_k \in \mathcal{I}[1, 28]$, *com custo garantido* $\mathcal{H}_\infty$, $\gamma = 5.39$ *e os ganhos robustos* $K = [-1.9091 \quad 1.9423 \quad 2.6739]$, $K_d = [-0.0635 \quad 0.0541 \quad 0.0747]$. *O tempo para o cálculo da SRCC é* 2.74 *segundos. O projeto, pelo procedimento proposto, considerando o intervalo do atraso* $d_k \in \mathcal{I}[1, 28]$ *e* $d_k \in \mathcal{I}[1, 40]$ *é apresentado na Tabela 4.3. No algoritmo de otimização adotam-se como valores iniciais* x_0 *os ganhos robustos fornecidos pela condição*

SRCC no intervalo $d_k \in \mathcal{I}[1, 28]$ *e* $\mathcal{Q}_0 = 2\mathbf{I}$.

Tabela 4.3: Resultados pelo projeto proposto, comparados com a SRCC do Exemplo 4.2.

Caso	Condição	Tempo	Ganhos Robustos	γ_c
$d_k \in \mathcal{I}[1, 28]$	SRNC	42min18s	$K = [-1.3332 \;\; 0.1806 \;\; 1.4529]$ $K_d = [-0.0429 \;\; 0.0110 \;\; 0.0347]$	3.1307
	SQENC	42min38s	$K = [-1.3332 \;\; 0.1806 \;\; 1.4529]$ $K_d = [-0.0429 \;\; 0.0110 \;\; 0.0347]$	3.1307
	SQSNC	41min43s	$K = [-1.3323 \;\; 0.2005 \;\; 1.4114]$ $K_d = [-0.0445 \;\; 0.0072 \;\; 0.0332]$	3.1413
$d_k \in \mathcal{I}[1, 40]$	SRNC	34min23s	$K = [-1.5130 \;\; 0.1408 \;\; 1.8283]$ $K_d = [-0.0375 \;\; -0.0057 \;\; 0.0336]$	3.3373
	SQENC	36min38s	$K = [-1.5130 \;\; 0.1408 \;\; 1.8283]$ $K_d = [-0.0375 \;\; -0.0057 \;\; 0.0336]$	3.3373
	SQSNC	27min18s	$K = [-1.4618 \;\; 0.1225 \;\; 1.7606]$ $K_d = [-0.0410 \;\; 0.0076 \;\; 0.0412]$	3.3388

Observa-se na Tabela 4.3 que as condições propostas apresentaram resultados 72% *menores que o valor obtido pela condição de síntese LMI SRCC, mostrando assim seu conservadorismo. Importante comentar que entre as condições LMIs de síntese, a SRCC foi a que apresentou melhores resultados para o custo garantido* $\mathcal{H}_\infty$. *Dentre as condições propostas, a que apresentou melhor resultado foi a SQSNC devido ao seu menor tempo de processamento requerido. Os valores do custo garantido* $\mathcal{H}_\infty$, γ_c, *calculados pelo método proposto no intervalo do atraso* $d_k \in \mathcal{I}[1, 40]$ *em que a condição LMI SRCC não apresenta solução factível, foram* 62% *menores que o valor do custo fornecido pela condição LMI SQCC no intervalo do atraso* $d_k \in \mathcal{I}[1, 28]$. *O custo computacional é justificado pelos resultados obtidos.*

Para ilustrar o comportamento do algoritmo de otimização elipsoidal, é apresentada, nas Figuras 4.14 e 4.15, a evolução da função objetivo e dos parâmetros de otimização com o número de iterações no cálculo do controlador $\mathcal{K}$, *para a SQSNC no intervalo do atraso* $d_k \in \mathcal{I}[1, 40]$.

São apresentados na Figura 4.16 os diagramas de valores singulares máximos para cada um dos 3 *vértices do sistema em malha fechada, nos intervalos do atraso,* $d_k \in \mathcal{I}[1, 28]$ *, na parte superior, e* $d_k \in \mathcal{I}[1, 40]$, *na parte inferior.*

Condições Simples (utilizando apenas K*,* $(K_d = \mathbf{0})$*)*

Para as condições com uso apenas de K, *ou seja, fazendo* $K_d = \mathbf{0}$, *adotou-se os mesmos testes das condições completas.*

Comparação com SQCS

A condição LMI de síntese quadrática convexa simples SQCS apresenta solução factível para o intervalo máximo de variação do atraso (considerando que $\underline{d} = 1$*) igual a* $d_k \in \mathcal{I}[1, 18]$, *com custo garantido* $\mathcal{H}_\infty$, $\gamma = 7.95$ *e ganhos robustos* $K = [-2.4683 \;\; 1.5936 \;\; 2.2541]$, $K_d = \mathbf{0}$. *O*

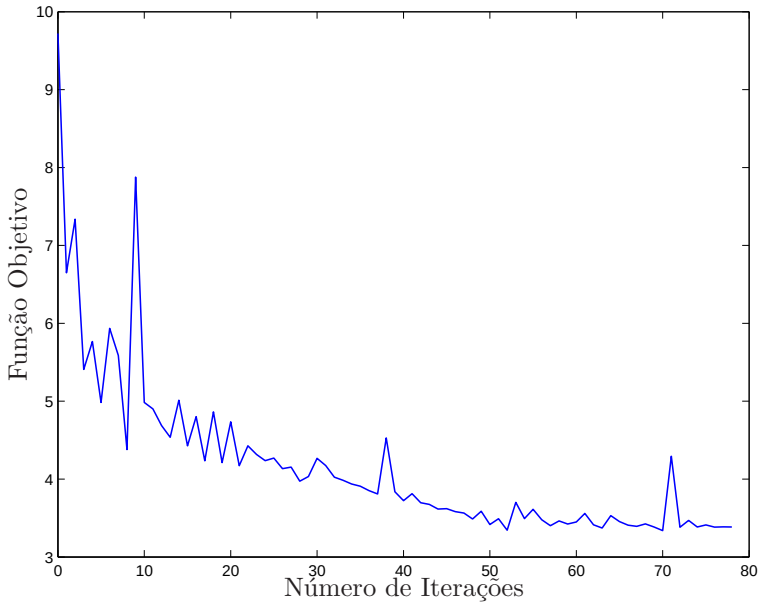


Figura 4.14: Evolução da função objetivo no cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, γ_c, para a condição proposta (SQSNC) no intervado do atraso $d_k \in \mathcal{I}[1, 40]$ para o Exemplo 4.2.

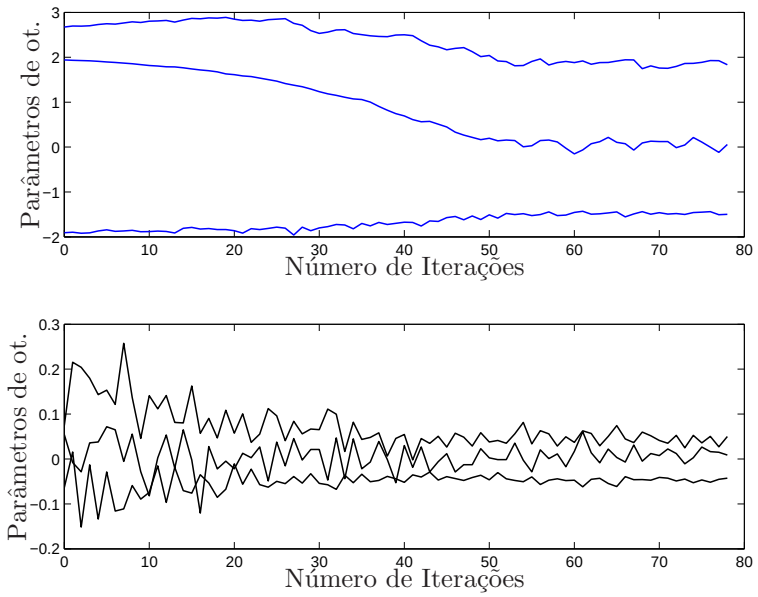


Figura 4.15: Evolução dos parâmetros de otimização, para a condição proposta (SQSNC) no intervado de atraso $d_k \in \mathcal{I}[1, 40]$ para o Exemplo 4.2. Parte superior parâmetros de otimização relacionados aos ganhos robustos K e parte inferior aos ganhos robustos K_d.

projeto pelo procedimento proposto no mesmo intervalo do atraso é realizado para demonstrar o conservadorismo do valor do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ fornecido pela condição de síntese LMI SQCS. O projeto pelo procedimento proposto é realizado também no intervalo do atraso $d_k \in \mathcal{I}[1, 30]$, em que a solução LMI de síntese SQCS não apresenta solução factível. No algoritmo de otimização adotam-se como valores iniciais x_0 os ganhos robustos fornecidos pela condição SQCS no intervalo $d_k \in \mathcal{I}[1, 18]$ e $\mathcal{Q}_0 = 2\mathbf{I}$. Os resultados do projeto são apresentados na

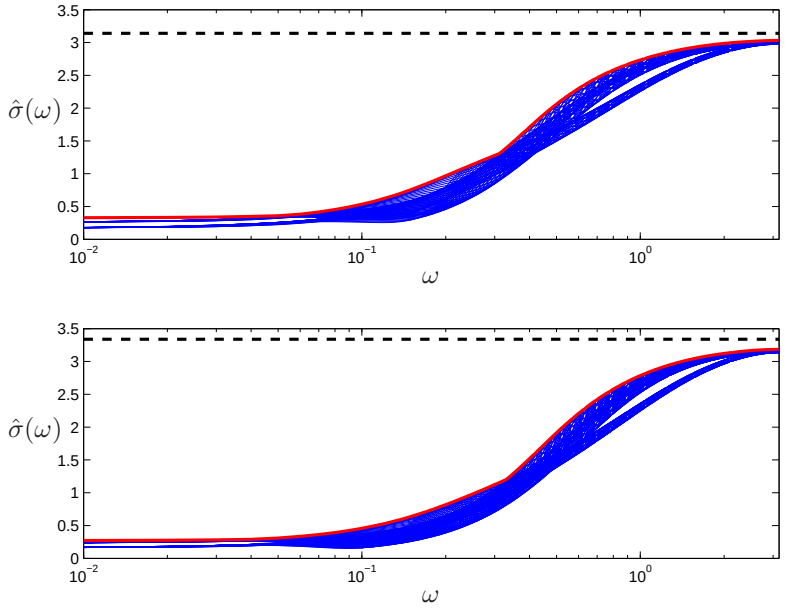


Figura 4.16: Diagramas de valores singulares máximos para o sistema em malha fechada utilizando os ganhos robustos K e K_d, calculados pelo método proposto (SQSNC) para $d_k \in \mathcal{I}[1, 28]$ (parte superior) e para $d_k \in \mathcal{I}[1, 40]$ (parte inferior). (Exemplo 4.2).

Tabela 4.4.

Tabela 4.4: Resultados pelo projeto proposto, comparados com a SQCS do Exemplo 4.2.

Caso	Condição	Tempo	Ganhos Robustos K	γ_c
$d_k \in \mathcal{I}[1, 18]$	SRNC	3min2s	$[-1.3288 \quad 0.2694 \quad 1.1981]$	3.1828
	SQENC	3min19s	$[-1.3288 \quad 0.2694 \quad 1.1981]$	3.1828
	SQSNC	6min2s	$[-1.3106 \quad 0.3752 \quad 1.1826]$	3.2094
$d_k \in \mathcal{I}[1, 30]$	SRNC	5min29s	$[-1.5034 \quad 0.2331 \quad 1.5826]$	3.5096
	SQENC	6min6s	$[-1.5034 \quad 0.2331 \quad 1.5826]$	3.5096
	SQSNC	6min17s	$[-1.4984 \quad 0.2270 \quad 1.5668]$	3.5108

Conforme a Tabela 4.4, o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, γ_c, calculado pelo procedimento proposto no mesmo intervalo do atraso ($d_k \in \mathcal{I}[1, 18]$) da condição LMI de síntese SQCS, apresenta resultados 2.5 *vezes menores, evidenciando a eficácia do método. Mesmo no intervalo do atraso $d_k \in \mathcal{I}[1, 30]$ em que a condição LMI de síntese SQCS não apresenta solução factível, o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ apresenta resultados* 2.27 *vezes menores, comparado com o valor do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ calculado pela condição de síntese LMI SQCS para $d_k \in \mathcal{I}[1, 18]$.*

Para ilustrar o comportamento do algoritmo de otimização elipsoidal, é apresentada, nas Figuras 4.17 e 4.18, a evolução da função objetivo e dos parâmetros de otimização com o número de iterações no cálculo do controlador $\mathcal{K}$, para a SQENC no intervalo do atraso $d_k \in \mathcal{I}[1, 30]$.

São apresentados na Figura 4.19 os diagramas de valores singulares máximos para cada um dos 3 *vértices do sistema em malha fechada, nos intervalos do atraso, $d_k \in \mathcal{I}[1, 18]$, na parte superior, e $d_k \in \mathcal{I}[1, 30]$, na parte inferior. A maior variação entre os valores de custo garantido*

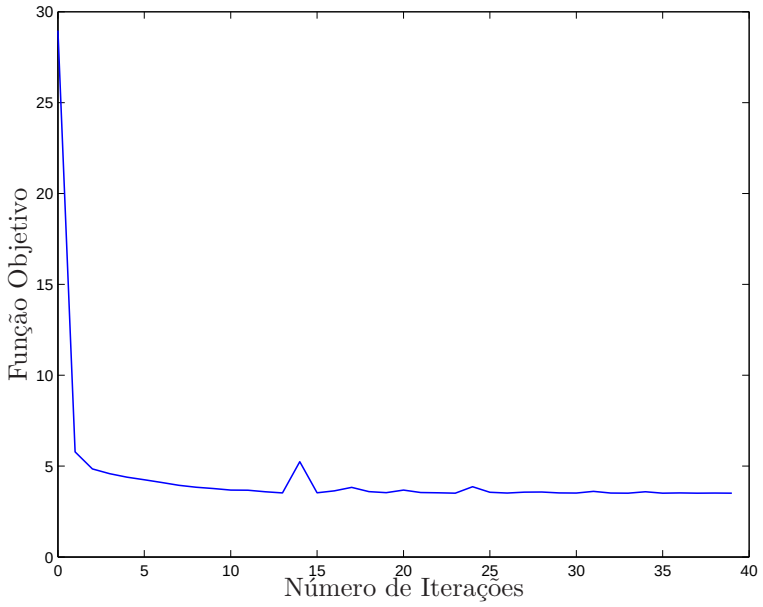


Figura 4.17: Evolução da função objetivo no cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, γ_c, para a solução proposta (SQENC) no intervado do atraso $d_k \in \mathcal{I}[1, 30]$ para o Exemplo 4.2.

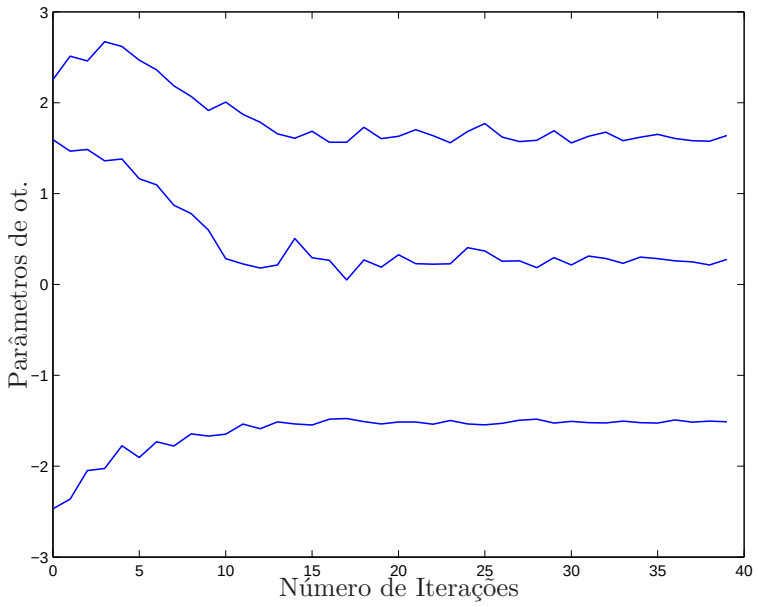


Figura 4.18: Evolução dos parâmetros de otimização para a solução proposta (SQENC) no intervado de atraso $d_k \in \mathcal{I}[1, 30]$ para o Exemplo 4.2.

$\mathcal{H}_\infty$, γ_c, calculados pelo método proposto e os diagramas de valores singulares máximos foi 2%.

Comparação com SRCS

A condição LMI de síntese robusta convexa simples SQCS apresenta solução factível para o intervalo máximo de variação do atraso $d_k \in \mathcal{I}[1, 27]$, com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, $\gamma = 5.72$ e ganhos robustos $K = [-1.9646 \quad 1.8400 \quad 2.5554]$, $K_d = \mathbf{0}$. O projeto pelo procedimento proposto no mesmo intervalo do atraso é realizado para demonstrar o conservadorismo do valor do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ fornecido pela condição de síntese LMI SRCS. O projeto pelo procedimento pro-

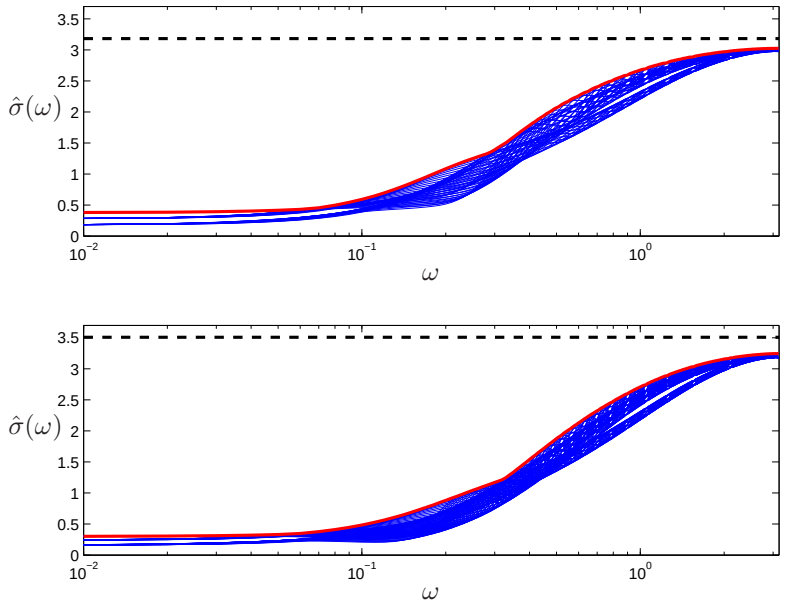


Figura 4.19: Diagramas de valores singulares máximos para o sistema em malha fechada utilizando os ganhos robustos K e $K_d = \mathbf{0}$ calculados pelo método proposto (SQENC) para $d_k \in \mathcal{I}[1, 18]$ (parte superior) e para $d_k \in \mathcal{I}[1, 40]$ (parte inferior). (Exemplo 4.2).

posto é realizado também no intervalo do atraso $d_k \in \mathcal{I}[1, 40]$, em que a solução LMI de síntese SRCS não apresenta solução factível. No algoritmo de otimização adotam-se como valores iniciais x_0 os ganhos robustos fornecidos pela condição SRCS no intervalo $d_k \in \mathcal{I}[1, 27]$ e $\mathcal{Q}_0 = 2\mathbf{I}$. Os resultados do projeto são apresentados na Tabela 4.5.

Tabela 4.5: Resultados pelo projeto proposto, comparados com a SRCS do Exemplo 4.2.

Caso	Condição	Tempo	Ganhos Robustos K	γ_c
$d_k \in \mathcal{I}[1, 27]$	SRNC	4min29s	$[-1.4582 \quad 0.2930 \quad 1.4918]$	3.4175
	SQENC	6min20s	$[-1.4582 \quad 0.2930 \quad 1.4918]$	3.4175
	SQSNC	5min57s	$[-1.4623 \quad 0.2980 \quad 1.5034]$	3.4184
$d_k \in \mathcal{I}[1, 40]$	SRNC	3min18s	$[-1.6121 \quad 0.1945 \quad 1.9169]$	3.8042
	SQENC	4min33s	$[-1.6121 \quad 0.1945 \quad 1.9169]$	3.8042
	SQSNC	4min21s	$[-1.6121 \quad 0.1951 \quad 1.9181]$	3.8051

Analisando a Tabela 4.5, observa-se que o valor do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, γ_c, no mesmo intervalo de variação do atraso da condição de síntese LMI SRCS ($d_k \in \mathcal{I}[1, 27]$), calculado pelo método proposto é 67% menor. Para o intervalo do atraso $d_k \in \mathcal{I}[1, 40]$, em que a condição de síntese LMI SRCS não apresenta solução factível, o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, γ_c, obtido pelo método proposto é 50% menor que o valor do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, γ calculado pela condição LMI de síntese SRCS no intervalo $d_k \in \mathcal{I}[1, 27]$. A redução considerável do conservadorismo no valor do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, γ_c, justifica o custo computacional demandado.

A evolução da função objetivo e dos parâmetros de otimização foram similares aos mostrados nas comparações anteriores. Os diagramas de valores singulares máximos são apresentados na

Figura 4.20. Os valores do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, γ_c, calculado pelo método proposto foram no máximo 5% maiores do que os valores singulares máximos apresentados na Figura 4.20, essa diferença pode ser diminuída aumentando-se a precisão do critério de parada.

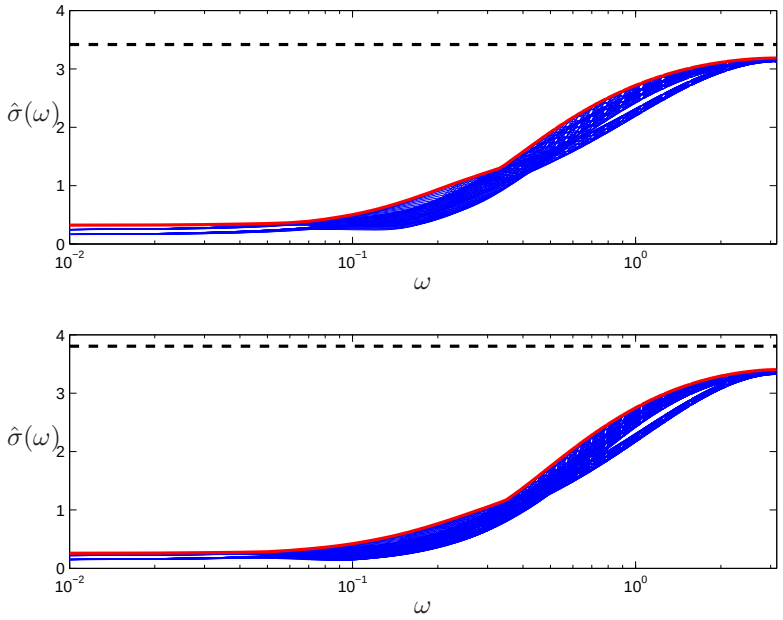


Figura 4.20: Diagramas de valores singulares máximos para o sistema em malha fechada utilizando os ganhos robustos K e $K_d = \mathbf{0}$ calculados pelo método proposto (SRNC) para $d_k \in \mathcal{I}[1, 27]$ (parte superior) e para $d_k \in \mathcal{I}[1, 40]$ (parte inferior). (Exemplo 4.2).

4.5 Conclusão

Nesse capítulo primeiramente foi proposto um procedimento para cálculo do cômputo do custo $\mathcal{H}_\infty$, com uma precisão especificada, baseado na combinação do algoritmo BnB com formulações de cálculo de custos garantidos baseados em LMIs, que pode ser aplicado a sistemas lineares invariantes no tempo, a tempo discreto com atraso nos estados e domínio politópico de incerteza. Como exemplificado, o procedimento de análise de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ proposto mostrou-se eficiente para o cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ com precisão especificada. As formulações LMIs para cálculo de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, quando factíveis, não são capazes de informar qual precisão do resultado obtido. A utilização do procedimento com formulações LMIs dependentes de parâmetros mostrou-se ser bem mais eficiente do que quando se utilizam condições LMIs quadráticas. A vantagem do procedimento proposto é que na função limitante inferior, baseada na técnica de grade (discretização do politopo), o refinamento da grade é orientado pelo cálculo dos custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ utilizados como função limitante superior, que orienta a exclusão de subdomínios nas quais comprovadamente o ponto de pior caso não está localizado.

Em seguida foi proposto um procedimento de projeto de controladores por realimentação de estado, aplicados a sistemas lineares invariantes no tempo, a tempo discreto com atraso nos estados. O procedimento proposto pode tratar da síntese de controladores com qualquer dimensão. A combinação do procedimento de otimização, considerando diretamente os parâmetros

do controlador e um número finito de pontos do domínio infinito de incerteza, com a validação por meio de formulações de análise baseadas em LMIs, resulta em controladores menos conservadores que os obtidos baseados puramente em formulações LMIs. Analisando o exemplo, o procedimento de projeto proposto apresenta melhores resultados que todas as formulações LMIs comparadas no mesmo intervalo de variação do atraso. Uma segunda vantagem é a possibilidade de fornecer soluções factíveis para problemas em que as formulações baseadas em LMIs não são factíveis.

O algoritmo elipsoidal utilizado no processo de otimização obtém apenas o mínimo local da função objetivo não convexa, sendo interessante, de acordo com a situação, testar diferentes valores iniciais para os parâmetros de otimização na tentativa de obter soluções com um custo computacional demandado menor.

O procedimento proposto, como foi utilizado no exemplo, pode aprimorar resultados de projeto obtidos com estratégias mais conservadoras. Para isso, um elipsoide inicial de menor volume no algoritmo elipsoidal é utilizado, resultando em convergência mais rápido.

A princípio, podem ser consideradas como desvantagens dos procedimentos propostos nesse capítulo a dificuldade de implementação e o maior custo computacional em relação às formulações LMIs, porém os resultados dessas demonstram ser menos eficientes e mais conservadores.

Capítulo 5

Considerações Finais

Esse trabalho centrou-se no estudo de sistemas lineares invariantes no tempo, a tempo discreto, sujeito a atraso variante no vetor de estados e domínio politópico da incerteza. São propostos novos métodos para estimação do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ e síntese de controladores robustos que asseguram desempenho $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação de estados.

Na primeira parte do trabalho propõe-se uma função de L-K dependente de parâmetro e o uso de variáveis extras via Lema de Finsler para obter condições convexas de dimensão finita no parâmetro da incerteza, formuladas em termos de LMIs, que apresentam resultados menos conservadores que outras condições LMIs encontradas na literatura. Os resultados obtidos nessa primeira parte foram apresentados em [CLMG11] e [CLM+11].

Pode-se concluir que a utilização de funções de L-K dependentes de parâmetros aliada à aplicação do Lema de Finsler nos problemas estudados pode levar à redução do conservadorismo das condições de análise de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ e controle robusto $\mathcal{H}_\infty$. Essa redução de conservadorismo ocorre em troca do aumento de complexidade das condições que envolvem funções dependentes de parâmetros, em relação a condições formuladas através da abordagem por estabilidade quadrática, isto é, utilizando função de L-K com matrizes fixas e independentes de parâmetros.

Na segunda parte, visto que, ao expressar um problema de controle robusto na forma de otimização conxevas, baseados em LMIs, normalmente se introduz algum grau de conservadorismo, foram propostos métodos alternativos para tratarem os problemas de estimação de custo $\mathcal{H}_\infty$ e controle robusto $\mathcal{H}_\infty$, baseados em [Gon06]. Para a estimação do custo $\mathcal{H}_\infty$ um procedimento que combina condições LMIs de análise e o algoritmo BnB, juntamente com uma eficiente técnica de discretização do domínio politópico da incerteza. O controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ é realizado através de um problema de otimização mono-objetivo não convexo, em que, os parâmetros do controlador são as próprias variáveis de otimização. Como é um procedimento não convexo, são necessárias duas etapas, uma de otimização e outra de validação. Na otimização são verificadas a função objetivo e a restrição em um numero finito de pontos, definidos inicialmente pelos vértices do politopo. Depois é necessário uma validação do resultado para todo politopo, que é realizada pelo procedimento de estimação do custo $\mathcal{H}_\infty$ proposto. Se na validação for verificado que o pior caso da função objetivo ocorre fora dos vértices ou a restrição não é atendida em todo politopo, os pontos de pior caso são incluídos no conjunto finito de pontos avaliados e o

processo de otimização é repetido.

Utilizando os métodos alternativos, através dos exemplos, conclui-se que para a classe de sistemas estudados houve uma considerável redução do conservadorismo, mesmo quando comparados com condições LMIs dependentes de parâmetros. Essa considerável redução do conservadorismo ocorre em troca de um aumento do custo computacional demandado para realizar tais métodos.

5.1 Trabalhos correlacionados

Outros resultados obtidos durante a realização do mestrado e que possuem conexões com as técnicas e problemas abordados nesse trabalho são citados abaixo, juntamente com seus respectivos resumos.

[MLC10] "Stabilization of polytopic discrete-time systems with time-varying delay in the states"
Nesse trabalho é estudada a estabilização robusta por realimentação de estados de sistemas a tempo discreto com atraso variante no vetor de estados com domínio politópico de incertezas. Um problema de otimização convexa representado na forma de conjunto de LMIs proporcionou ganhos robustos de realimentação de estados e uma função de L-K dependente de parâmetros com variáveis extras, usada para assegurar a estabilidade robusta do sistema em malha fechada.

[LCM+11] "Uncertain discrete-time systems with delayed state: robust stabilization with performance specification via LMI formulations"
Condições suficientes em termos de LMIs utilizando uma função de L-K dependente de parâmetro e variáveis extras são apresentadas para: *i*) Análise de estabilidade robusta: *ii*) Estimação do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$; *iii*) Estabilização robusta; *iv*) Controle robusto $\mathcal{H}_\infty$. Aplicados a sistema discretos com atraso variante no vetor de estado. Algumas extensões das condições propostas são apresentadas como: Abordagem por estabilidade quadrática, isto é, utilizando função de L-K com matrizes fixas e independentes de parâmetros, falhas no atuador, sistemas chaveados, controle descentralizado, sistemas com atraso na entrada e performance por modelos de referência livre de atraso.

5.2 Perspectivas

A pesquisa realizada, levando em conta a primeira parte do trabalho, aponta alguns temas de interesse que podem ser explorados em novas investigações. A seguir são listados alguns desses temas considerados mais promissores:

- Investigar candidatas a funções de L-K dependentes de parâmetros que combinadas ao Lema de Finsler forneçam resultados menos conservadores que as condições propostas;

- Investigar o cômputo do custo $\mathcal{H}_2$ e controle robusto $\mathcal{H}_2$ para classe de sistemas estudados;

- Investigar novas formas de majoração dos termos cruzados, que surgem durante o desenvolvimento das condições propostas;

- Investigar sistemas chaveados que possuam atraso nos estados e que possam ser tratados através de funções de L-K dependentes de parâmetros;
- Investigar condições em que as matrizes extras sejam dependentes de parâmetros;
- Utilizar o Lema da Projeção para melhor avaliar as condições de estimação e de síntese $\mathcal{H}_\infty$;
- Utilizar funções L-K polinomialmente homogêneas nos parâmetros da incerteza;
- Investigar condições para atrasos na entrada, isto é, que considerem a lei de controle $u_k = K_d x_{k-d_k}$

Em relação à segunda parte do trabalho, apesar de desempenho satisfatório, existe bastante campo de pesquisa para o aprimoramento, tanto do procedimento de análise de desempenho quanto do procedimento de projeto de controlador, visto que não foi constatada na literatura a utilização desses procedimentos para a classe de sistemas estudados.

Quanto ao método de análise de desempenho proposto, as melhorias ficam por conta do conservadorismo das formulações LMIs para cálculo do custo garantido, utilizado como função limitante superior. As formulações baseadas em estabilidade quadrática, com função de L-K fixa, exigem pequeno tempo de processamento por iteração, mas demandam número elevado de iterações para convergência. Por outro lado, as formulações LMIs de análise baseadas em função de L-K dependentes de parâmetros produzem resultados menos conservadores, necessitando menos iterações, mas com tempo de processamento por iteração elevado em função do número maior de parâmetros de otimização. Sendo assim, não foi possível, através dos exemplos analisados, uma formulação LMI que possa ser considerada a mais adequada em qualquer situação.

No procedimento de projeto, o algoritmo elipsoidal utilizado na fase de otimização, apesar de mostrar-se bastante eficiente, ainda pode ser aperfeiçoado no quesito custo computacional, que é relevante quando o número de parâmetros de otimização é elevado.

Do ponto de vista do procedimento de projeto, pode ser pesquisada sua aplicação em outras possibilidades como:

- Projeto de filtros robustos para sistemas com atrasos;
- Projeto de controladores multiobjetivo $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$;
- Inclusão de novos tipos de restrições, como por exemplo, a questão da saturação do controlador.

Apêndice A

Ferramentas

A.1 Desigualdades Matriciais Lineares – LMIs

O desenvolvimento de métodos de pontos interiores para problemas de programação semidefinida, SDP (do inglês *semidefinite programming problem*), desigualdades matriciais lineares, LMIs (do inglês *linear matrix inequalities*), tem sido uma ferramenta útil para resolução de problemas de controle. A ideia básica do método de LMIs é expressar o problema dado como um SDP. A formulação de LMIs é relevante por várias razões. Uma dessas razões é que, escrevendo um dado problema nessa forma, as soluções numéricas podem ser encontradas de maneira eficiente [BGFB94] [GN00].

Uma desigualdade matricial linear tem a seguinte forma:

$$F(p) = F_0 + \sum_{i}^{m} p_i F_i > \mathbf{0} \tag{A.1}$$

em que $p_i \in \mathbb{R}^m$, para $i = 1, \ldots, m$, são variáveis escalares a serem determinadas e $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, para $i = 0, 1, \ldots, m$ são matrizes simétricas precisamente conhecidas. A desigualdade significa que $F(p)$ é uma matriz definida positiva, ou seja,

$$z^T F(p) z > 0, \ \forall z \neq \mathbf{0}, \ z \in \mathbb{R}^n \tag{A.2}$$

Isso significa que $F(p)$ é uma função afim dos elementos de p, que representa um vetor $p = [p_1, \ldots, p_m]$.

A equação (A.1) é uma LMI estrita. No caso em que $F(p)$ é semidefinida positiva, essa seria uma LMI não estrita. A LMI estrita é factível quando existe um vetor p que torna a desigualdade verdadeira, ou seja, $F(p)$ uma matriz definida positiva. Uma LMI não estrita factível pode ser reduzida para o caso de uma LMI estrita factível equivalente. Isso pode ser feito acrescentando um valor constante à matriz $F(p)$, tornando essa matriz definida positiva, ou seja, $F(p) + \epsilon \mathbf{I} > \mathbf{0}$.

Uma LMI pode ser reescrita em termos de um conjunto de desigualdades escalares. De forma mais específica, considere a LMI (A.1), ela é equivalente a n desigualdades polinomiais. Para exemplificar, considere as desigualdades, $P < \mathbf{0}$ e $A^T P A - P > \mathbf{0}$, que são LMIs, nas quais

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$

As desigualdades podem ser escritas em termos das incógnitas do problema, p_1, p_2 e p_3, assim

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} > \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} p_1 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} p_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} p_3 > \mathbf{0}$$

$$A^T PA - P = \begin{bmatrix} a^2p_1 + 2acp_2 + c^2p_3 & abp_1 + (ad+bc)p_2 + cdp_3 \\ abp_1 + (ad+bc)p_2 + cdp_3 & b^2p_1 + 2bdp_2 + d^2p_3 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{bmatrix} p_1 + \begin{bmatrix} 2ac & bc+ad \\ ad+bc & 2bd \end{bmatrix} p_2 + \begin{bmatrix} c^2 & cd \\ cd & b^2 \end{bmatrix} p_3 < \mathbf{0}$$

Observe que no exemplo dado a matriz F_0 é nula. De acordo com [WB95, pag 951] e [VB00], as restrições podem ser colocadas em termos dos menores principais líderes de P e de $A^T PA - P$, resultando em

- $p_1 > 0$, $p_3 > 0$, $p_1p_3 - p_2^2 > 0$,
- $a^2p_1 + 2acp_2 + c^2p_3 < 0$, $b^2p_1 + 2bdp_2 + d^2p_3 < 0$, $(a^2p_1 + 2acp_2 + c^2p_3)(b^2p_1 + 2bdp_2 + d^2p_3) - (abp_1 + (ad+bc)p_2 + cdp_3)^2 < 0$

É importante salientar que, ao se representar uma LMI por um conjunto n de desigualdades polinomiais, há a possibilidade de alguns desses polinômios serem não-lineares, como acontece no exemplo dado acima.

Uma importante propriedade das LMIs é a convexidade, ou seja, o conjunto de soluções x que atende a desigualdade é convexo. Em um problema de otimização convexa, o mínimo local encontrado é o mínimo global. Isso torna a solução do problema simples do ponto de vista de otimização. Um conjunto $\mathcal{C}$ é convexo se $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathcal{C}$ para todo $x, y \in \mathcal{C}$ e $\lambda \in \big[0, 1\big]$.

A.2 Complemento de Schur

Considere a matriz quadrada simétrica X

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

O complemento de Schur pode ser usado na caracterização da positividade de X, com as seguintes propriedades:

- $X > \mathbf{0}$ se e somente se $A > \mathbf{0}$ e $C - B^TA^{-1}B > \mathbf{0}$;
- $X > \mathbf{0}$ se e somente se $C > \mathbf{0}$ e $A - BC^{-1}B^T > \mathbf{0}$;
- se $A > \mathbf{0}$, $X \geq \mathbf{0}$ se e somente se $C - B^TA^{-1}B \geq \mathbf{0}$;
- se $C > \mathbf{0}$, $X \geq \mathbf{0}$ se e somente se $A - BC^{-1}B^T \geq \mathbf{0}$.

A matriz $C - B^T A^{-1} B$ é chamada de complemento de Schur de X em relação a A se $\det(A) \neq 0$. Se $\det(C) \neq 0$, $A - BC^{-1}B^T$ é o complemento de Schur de X em relação a C. Manipulações envolvendo o complemento de Schur permitem transformar desigualdades convexas não-lineares, que regularmente aparecem em problemas de controle, em LMIs [VB00], [OP10].

Prova: A partir da transformação de congruência, caso exista A^{-1}, tem-se

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ B^T A^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathcal{T}^T} \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C - B^T A^{-1} B \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & A^{-1}B \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathcal{T}} \tag{A.4}$$

Como $\mathcal{T}$ é uma matriz não singular

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} > \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C - B^T A^{-1} B \end{bmatrix} > \mathbf{0} \tag{A.5}$$

Analogamente, se existe C^{-1} existe,

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & BC^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - BC^{-1}B^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ C^{-1}B^T & \mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{A.6}$$

e, portanto,

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} > \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} A - BC^{-1}B^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix} > \mathbf{0} \tag{A.7}$$

■

A.3 Lema de Finsler

O Lema de Finsler pode ser usado para expressar condições de estabilidade em termos de desigualdades matriciais equivalentes, introduzindo ou eliminando variáveis [OP10]. Como esse Lema tem sido utilizado frequentemente em teoria de controle para eliminar variáveis, ele também é conhecido como Lema da Eliminação [BGFB94]. A seguir está enunciado o Lema.

Sejam $\varphi \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Q}(\beta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, simétrica, e $\mathcal{B}(\beta) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\beta : \sum_{j=1}^{N} \beta_j = 1$, $\beta_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, N$, tal que o $posto(\mathcal{B}(\alpha)) < n$. As seguintes afirmativas são equivalentes:

1. *i)* $\varphi^T \mathcal{Q}(\beta)\varphi < \mathbf{0}$, $\forall \varphi : \mathcal{B}(\alpha)\varphi = \mathbf{0}$, $\varphi \neq \mathbf{0}$.
2. *ii)* $\mathcal{B}^{\perp}(\beta)^T \mathcal{Q}(\beta)\mathcal{B}^{\perp}(\beta)$, em que $\mathcal{B}^{\perp}(\beta)$ denota uma base para o espaço nulo de $\mathcal{B}(\beta)$.
3. *iii)* $\exists \mu(\beta) \in \mathbb{R}_+ : \mathcal{Q}(\beta) - \mu\mathcal{B}(\beta)^T\mathcal{B}(\beta) < \mathbf{0}$.
4. *iv)* $\exists \mathcal{X}(\beta) \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathcal{Q}(\beta) + \mathcal{X}(\beta)\mathcal{B}(\beta) + \mathcal{B}(\beta)^T\mathcal{X}(\beta)^T < \mathbf{0}$.

Prova: A prova do Lema de Finsler é baseada na demonstração apresentada em [dOS01], para o caso exato. Verifica-se *i)*$\Leftrightarrow$*ii)*, pois todo x tal que $\mathcal{B}(\beta)x = \mathbf{0}$ e , consequentemente, *i)*$\Rightarrow$ $y^T\mathcal{B}^{\perp}(\beta)^T\mathcal{Q}(\beta)\mathcal{B}^{\perp}(\beta)y < \mathbf{0}$, para todo $y \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathcal{B}^{\perp}(\beta)^T\mathcal{Q}(\beta)\mathcal{B}^{\perp}(\beta) < \mathbf{0}$. Por outro lado, assumindo que *ii)* é verificada, multiplique o lado esquerdo dessa condição, à direita por $y \neq \mathbf{0}$, e à esquerda por y^T para obter *i)*.

Multiplique o lado esquerdo de *iii)* ou *iv)*, à direita por $\mathcal{B}^{\perp}(\beta)$, e à esquerda por $\mathcal{B}^{\perp}(\beta)^T$, para obter *ii)*. Assumindo que *ii)* é verificada, a condição *iii)* pode ser recuperada como segue: fatore $\mathcal{B}(\beta)$ em um produto de matrizes de posto completo, $\mathcal{B}(\beta) = \mathcal{B}_\ell(\beta)\mathcal{B}_r(\beta)$, defina $\mathcal{W}(\beta) = \mathcal{B}_r(\beta)^T \left(\mathcal{B}_r(\beta)\mathcal{B}_r(\beta)^T\right)^T \left(\mathcal{B}_\ell(\beta)^T\mathcal{B}_\ell(\beta)\right)^{0.5}$ e aplique a transformação de congruência

$$\begin{bmatrix} \mathcal{W}(\beta)^T \\ \mathcal{B}^{\perp}(\beta)^T \end{bmatrix} \left(\mathcal{Q}(\beta) - \mu(\beta)\mathcal{B}(\beta)^T\mathcal{B}(\beta)\right) \begin{bmatrix} \mathcal{W}(\beta) & \mathcal{B}^{\perp}(\beta) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \mathcal{W}(\beta)^T\mathcal{Q}(\beta)\mathcal{W}(\beta) - \mu(\beta)\mathbf{I} & \mathcal{W}(\beta)^T\mathcal{Q}(\beta)\mathcal{B}^{\perp}(\beta) \\ \star & \mathcal{B}^{\perp}(\beta)^T\mathcal{Q}(\beta)\mathcal{B}^{\perp}(\beta) \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad \text{(A.8)}$$

Como o bloco $(2,2)$ (A.8) é definido negativo (por hipótese), conclui-se que existe $\mu(\beta) \in \mathbb{R}^+$ suficientemente grande tal que a condição acima seja verificada. Resta mostrar que *iii)*$\Rightarrow$*iv)*. Para isso, basta escolher $\mathcal{X}(\beta) = -\mu(\beta)\mathcal{B}(\beta)^T/2$. ∎

A.4 Desigualdade de Jensen

Para qualquer matriz constante $\mathbf{0} < M = M^T \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $d_1 \in \mathbb{N}$, $d_2 \in \mathbb{N}$ e uma função vetorial $f(i) \ : \mathcal{I}[d_1, d_1+1, ..., d_2] \to \mathbb{R}^n$ é verificado

$$-(d_2 - d_1 + 1)\sum_{i=d_1}^{d_2} f(i)^T M f(i) \ \leq \ -\left(\sum_{i=d_1}^{d_2} f(i)\right)^T M \left(\sum_{i=d_1}^{d_2} f(i)\right) \quad \text{(A.9)}$$

desde que as somas sejam bem definidas.

Prova: A prova que segue foi adaptada de [ZY08].

Usando o complemento de Schur (A.2) temos:

$$\begin{bmatrix} f(i)^T M f(i) & f(i)^T \\ f(i) & M^{-1} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad \text{(A.10)}$$

para qualquer $i \in [d_1, d_1+1, ..., d_2]$. Somando a inequação (A.10) de d_1 para d_2 temos:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=d_1}^{d_2} f(i)^T M f(i) & \sum_{i=d_1}^{d_2} f(i)^T \\ \sum_{i=d_1}^{d_2} f(i) & (d_2 - d_1 + 1)M^{-1} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad \text{(A.11)}$$

Aplicando novamente o complemento de Schur em (A.11), recupera-se (A.9). ∎

Bibliografia

[Bar85] B. R. Barmish. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 46(4):399–408, August 1985.

[BB91] V. Balakrishnan and S. Boyd. Computation of the worst-case covariance for linear systems with uncertain parameters. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, IEEE, Brighton, U.K*, pages 1941–1942, 1991.

[BBB91] V. Balakrishnan, S. Boyd, and S. Balemi. A branch and bound algorithm for computing the minimum stability degree of parameter-dependent linear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1(4):295–317, 1991.

[BGFB94] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalitis in System and Control Theiry.* V. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1994.

[BGPT10] W. E. G. Bachur, E. N. Gonçalves, R. M. Palhares, and R. H. C. Takahashi. Síntese de controladores robustos por realimentação dinâmica de saída considerando modelo de referência baseada em otimização no espaço de parâmetros do controlador. XVIII *Congresso Brasileiro de Automática, Bonito, MS*, pages 4062–4067, setembro 2010.

[Bha07] A. Bhaya. *Enciclopédia de Automática - Controle & Automação*, volume 2, chapter Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Lineares, pages 67–121. Editora Blücher, 2007.

[Chu95] J. Chu. Application of a discrete optimal tracking controller to an industrial electric heater with pure delays. *Journal of Process Control*, 5(1):3–8, 1995.

[CLM+11] A. F. Caldeira, V. J. S. Leite, M. F. Miranda, M. F. F. Castro, and E. N. Gonçalves. Convex robust $\mathcal{H}_\infty$ control design to discrete-time systems with time-varying delay. Aceito para publicação, 18th World Congress IFAC 2011, Milão, Itália, agosto 2011.

[CLMG11] A. F. Caldeira, V. J. S. Leite, M. F. Miranda, and E. N. Gonçalves. Minimização do custo $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas incertos discretos no tempo com atraso nos estados. *SBA Controle & Automação*, 2011. Aceito para publicação.

[CSH93] J. Chu, H. Su, and X. Hu. A time-delay control algorithm for an industrial electric heater. *Journal of Process Control*, 3(4):219–224, 1993.

[DB09] R. C. Dorf and R. H. Bishop. *Sistemas de Controle Modernos*. LTC - Livros Técnicos e Científicos S.A, 11 edition, 2009.

[DBB90] C. L. DeMarco, V. Balakrishnan, and S. Boyd. A branch and bound methodology for matrix polytope stability problems arising in power systems. *Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control, IEEE, Honolulu, Hawaii*, pages 3022–3027, 1990.

[DJZ08] D. Du, B. Jiang, and S. Zhou. Delay-dependent robust stabilisation of uncertain discrete-time switched systems with time-varying state delay. *International Journal of Systems Science*, 39(3):305–313, 2008.

[dO04] M. C. de Oliveira. Investigating duality on stability conditions. *Systems & Control Letters*, 52(1):1–6, May 2004.

[dOG04] M. C. de Oliveira and J. C. Geromel. Synthesis of non-rational controllers for linear delay systems. *Automatica*, 40(2):171–188, February 2004.

[dOGB02] M. C. de Oliveira, J. C. Geromel, and J. Bernussou. Extended $\mathcal{H}_\infty$ and $\mathcal{H}_2$ norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems. *International Journal of Control*, 75(9):666–679, 2002.

[dOS01] M. C. de Oliveira and R. E. Skelton. Stability tests for constrained linear systems. In S. O. Reza Moheimani, editor, *Perspectives in Robust Control*, volume 268 of *Lecture Notes in Control and Information Science*, pages 241–257. Springer-Verlag, New York, 2001.

[DV97] L. Dugard and E. I. Verriest. *Stability and Control of Time-delay Systems*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1997.

[EG00] H. Edelsbrunner and D. R. Grayson. Edgewise subdivision of a simplex. *Discrete & Computational Geometry*, 24:707–719, 2000.

[FS05a] E. Fridman and U. Shaked. Delay dependent $\mathcal{H}_\infty$ control of uncertain discrete delay system. *European Journal of Control*, 11(1):29–37, 2005.

[FS05b] E. Fridman and U. Shaked. Stability and guaranteed cost control of uncertain discrete delay system. *International Journal of Control*, 78(4):235–246, March 2005.

[GBdSJ08] I. Ghiggi, A. Bender, and J. M. Gomes da Silva Jr. Dynamic non-rational anti-windup for time-delay systems with saturating inputs. *Proceedings of the* 17*th IFAC World Congress, Seoul, Korea*, pages 277–282, 2008.

[GKC03] K. Gu, V. L. Kharitonov, and J. Chen. *Stability of Time-delay Systems*. Control Engineering. Birkhäuser, Boston, 2003.

[GLWW04] H. Gao, J. Lam, C. Wang, and Y. Wang. Delay-dependent robust output feedback stabilisation of discrete-time systems with time-varying state delay. *IEE Proceedings — Control Theory and Applications*, 151(6):691–698, November 2004.

[GN00] L. E. Ghaoui and S. I. Niculescu. *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*, chapter Robust Decision Problems in Engineering: A Linear Matrix Inequality Approach, pages 3–37. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.

[GNLC95] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali. Control toolbox user's guide. The Math Works Inc, Natick, MA, 1995.

[Gon06] E. N. Gonçalves. *Análise e Síntese de Controladores e Filtros Robustos para Sistemas com Domínios Politópicos de Incerteza*. Tese de doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Setembro 2006.

[GPT05] E. N. Gonçalves, R. M. Palhares, and R. H. C. Takahashi. Improved optimisation approach to robust $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$control problem for linear systems. *IEE Proceedings Control Theory & Applications*, 152(2):171–176, 2005.

[GPT06] E. N. Gonçalves, R. M. Palhares, and R. H. C. Takahashi. $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ filter design for systems with polytope-bounded uncertainty. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54(9):3620–3626, 2006.

[GPT08] E. N. Gonçalves, R. M. Palhares, and R. H. C. Takahashi. A novel approach for $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ robust PID synthesis for uncertain systems. *Journal of Process Control*, 18(1):19–26, 2008.

[GPTC09] E. N. Gonçalves, R. M. Palhares, R. H. C. Takahashi, and A. N. V. Chasian. Robust model reduction of uncertain systems maintaining uncertainty structure. *International Journal of Control*, 82(11):2158–2168, 2009.

[GPTM06] E. N. Gonçalves, R. M. Palhares, R. H. C. Takahashi, and R. C. Mesquita. Algorithm 860: SimpleS — an extension of freudenthal's simplex subdivision. *ACM Transactons on Mathematical Software*, 32(4):609–621, December 2006.

[GT82] D. Goldfarb and M. J. Todd. Modifications and implementation of the ellipsoid algorittm for linear programming. *Mathematical Programming*, 23:1–19, 1982.

[HARY07] W. Huijiao, X. Anke, L. Renquan, and C. Yun. Delay-dependent robust $\mathcal{H}_\infty$ control for uncertain discrete singular time-varying delay systems based on a finite sum inequality. In *Chinese Control Conference*, june 2007.

[HVL93] J. K. Hale and S. M. Verduyn-Lunel. Introduction to functional differential equations. 1993. Springer-Verlag.

[HWHS08] Y. He, M. Wu, Q.-L. Han, and J.-H. She. Delay-dependent $\mathcal{H}_\infty$ control of linear discrete-time systems with an interval-like time-varying delay. *International Journal of Systems Science*, 39(4):427–436, 2008.

[HYX07] T. Hongji, H. Yanwu, and Z. Xiaomei. Robust stabilization and $\mathcal{H}_\infty$ control for uncertain discrete-time systems with time-varying delays. In *Chinese Control Conference*, june 2007.

[KCBP01] K. T. Kim, S. H. Cho, K. H. Bang, and H. B. Park. $\mathcal{H}_\infty$ control for discrete-time linear systems with time-varying delays in state. *The 27th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, pages 707–711, 2001.

[KH98] V. Kapila and W. M. Haddad. Memoryless $\mathcal{H}_\infty$ controllers for discrete-time systems with time delay. *Automatica*, 34(9):1141–1144, 1998.

[Kra63] N. N. Krasovskii. Stability of motion. *Stanford University Press*, 1963.

[LCM+11] V. J. S. Leite, A. F. Caldeira, M. F. Miranda, M. F. F. Castro, and E. N. Gonçalves. Uncertain discrete-time systems with delayed state: robust stabilization with performance specification via LMI formulations. Capítulo a ser publicado no livro Discrete Time Systems, pela editora InTech, 2011.

[Ld97] X. Li and C. E. de Souza. Delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems: A linear matrix inequality approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(8):1144–1148, 1997.

[Lei05] V. J. S. Leite. *Estudos sobre estabilidade robusta de sistemas lineares por meio de funções dependentes de parâmetros*. Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Agosto 2005.

[LM08] V. J. S. Leite and M. F. Miranda. Stabilization of discrete time-varying delay systems: a convex parameter dependent approach. In *Proceedings of the* 2008 *American Control Conference*, Seatle, June 2008.

[LPCT07] V. J. S. Leite, P. L. D. Peres, E. B. Castelan, and S. Tarbouriech. Estabilidade robusta de sistemas neutrais com atrasos variantes no tempo. *SBA Controle & Automação*, 18(4):434–446, 2007.

[LTP09] V. S. J. Leite, S. Tarbouriech, and P.L.D. Peres. Robust $\mathcal{H}_\infty$ state feedback control of discrete-time systems with state delay: an LMI approach. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, pages 1–17, August 2009.

[Lya92] A. M. Lyapunov. *The general problem of the stability of motion*. Taylor & Francis, 1992.

[Mah00] M. S. Mahmoud. *Robust Control and Filtering for Time-Delay Systems*. Control Engineering Series. Marcel Dekker, Inc., New York, 2000.

[MK00] T. More and H. Kokame. A parameter-dependent Lyapunov function for a polytope of matrices. *IEEE transactions on Automatic Control*, 45(8):1516–1519, August 2000.

[ML08a] M. F. Miranda and V. J. S. Leite. Convex analysis and synthesis for uncertain discrete-time systems with time-varying state delay. In *Proceedings of the* 2008 *American Control Conference*, Seatle, June 2008.

[ML08b] M. F. Miranda and V. J. S. Leite. Síntese convexa para sistemas incertos discretos no tempo com atrasos variantes. *SBA Controle & Automação*, 19(3):242–255, 2008.

[MLC10] M. F. Miranda, V. J. S. Leite, and A. F. Caldeira. Robust stabilization of polytopic discrete-time systems with time-varying delay in the states. *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control, IEEE, Atlanta , GA, USA*, pages 152–157, december 2010.

[Moo92] D. W. Moore. *Simplicial Mesh Generation with Applications*. PhD thesis, Cornell University, Department of Computer Science, Ithaca, New York, 1992.

[MZJ87] M. Malek-Zavarei and M. Jamshidi. *Time-Delay Systems: Analysis, Optimization and Applications*. North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1987.

[NG04] S.-I. Niculescu and K. Gu, editors. *Advances in Time-Delay Systems*, volume 38 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Springer, London, 2004.

[Nic01] S.-I. Niculescu. *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*, volume 269 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, London, 2001.

[OC08] M. Z. Oliveira and D. F. Coutinho. Estabilidade robusta de sistemas lineares em tempo discreto sujeitos a atraso no estado. *SBA Controle & Automação*, 19:270–280, 2008.

[OP06] R. C. L. F. Oliveira and P. L. D. Peres. LMI conditions for robust stability analysis based on polynomially parameter-dependent lyapunov functions. *Systems & Control Letters*, 55(1):55–61, 2006.

[OP10] R. C. L. F. Oliveira and P. L. D. Peres. *Tutoriais do* XVIII *Congresso Brasileiro de Automática*, chapter Análise e Controle de Sistemas Lineares por meio de Desigualdades Matriciais Lineares, pages 203–227. Cultura Acadêmica Editora, 2010.

[PCE+05] R. M. Palhares, C. D. Campos, P. Ya. Ekel, M. C. R. Leles, and M. F. S. V. D'Angelo. Delay-dependent robust $\mathcal{H}_\infty$ control of uncertain linear systems with time-varying delays. *International Journal Computers & Mathematics with applications*, 50:427–436, 2005.

[PTP97] R. M. Palhares, R. H. C. Takahashi, and P. L. D. Peres. $\mathcal{H}_\infty$ and $\mathcal{H}_2$ guaranteed costs computation for uncertain linear systems. *International Journal of Systems Science*, 28(2):183–188, 1997.

[Ric03] J.-P. Richard. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39(10):1667–1694, October 2003.

[RP01] Domingos C. W. Ramos and Pedro L. D. Peres. A less conservative LMI condition for the robust stability of discrete-time uncertain systems. *Systems & Control Letters*, 43:371–378, 2001.

[SDM07] S. B. Stojanović, D. Lj. Debeljković, and I. Mladenović. A Lyapunov-Krasovskii methodology for asymptotic stability of discrete time delay systems. *Serbian Journal of Electrical Engineering*, 4(2):109–117, 2007.

[SKYK99] S. H. Song, J. K. Kim, C. H. Yim, and H. C. Kim. $\mathcal{H}_\infty$ control of discrete-time linear systems with time-varying delays in state. *Automatica*, 35(9):1587–1591, 1999.

[Sou08] F. O. Souza. *Estabilidade e Síntese de Controladores e Filtros Robustos para Sistemas com Retardo no Tempo: Novas Fronteiras*. Tese de doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Novembro 2008.

[SSJ04] D. Srinivasagupta, H. Schättler, and B. Joseph. Time-stamped model predictive previous control: an algorithm for previous control of processes with random delays. *Computers & Chemical Engineering*, 28(8):1337–1346, Jully 2004.

[Stu99] J. F. Sturm. Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Softwares*, 11-12 : 625-653, 1999.

[TCB05] A. Trofino, D. F. Coutinho, and K. A. Barbosa. Improved $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ conditons for robust analysis and control synthesis of linear systems. *SBA Controle & Automação*, 16(4):427–434, 2005.

[Tro99] A. Trofino. Parameter dependent Lyapunov functions for a class of uncertain linear systems: an LMI approach. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, pages 2341–2346, Phoenix, AZ, December 1999.

[Tro00] A. Trofino. Controle robusto. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Agosto 2000.

[TSDFR03] R. H. C. Takahashi, R. R. Saldanha, W. Dias-Filho, and J. A. Ramírez. A new constrained ellipsoidal algorithm for nonlinear optimization with equality constraints. *IEEE Transactions on Magnetics*, 39(3):1289–1292, 2003.

[TTT99] K. C. Toh, M. J. Todd, and R. Tütüncü. Sdpt3 - a matlab software package for semidefinite programming, version 1.3. *Optimization Methods and Software*, 11(1):545–581, 1999.

[VB00] J. G. VanAntwerp and R. D. Braatz. A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. *Journal of Process Control*, 10:363–385, August 2000.

[VLP07] G. Valmórbida, V. J. S. Leite, and P. L. D. Peres. Condições LMI do teorema do ganho pequeno escalonado para análise de estabilidade de sistemas incertos com atraso. *SBA Controle & Automação*, 18(4):447–458, 2007.

[Vol28] V. Volterra. Sur la théorie mathématique des phénomènes héréditaries. *Journal des Mathematiques Pures et Appliquées*, 7:249–298, 1928.

[WB95] C. R. Wylie and L. C. Barret. *Advanced Engineering Mathematics*. McGraw-Hill, 6th edition, 1995.

[XC04] S. Xu and T. Chen. Robust $\mathcal{H}_\infty$ control for uncertain discrete-time systems with time-varying delays via exponential output feedback controllers. *Systems & Control Letters*, 51(3-4):171–183, 2004.

[XL08] S. Xu and J. Lam. A survey of linear matrix inequality techniques in stability analysis of delay systems. *International Journal of Systems Science*, 39(12):1095–1113, December 2008.

[XLZZ04] L. Xie, L. Lu, D. Zhang, and H. Zhang. Improved robust $\mathcal{H}_\infty$ and $\mathcal{H}_2$ filtering for uncertain discrete-time systems. *Automatica*, 40:873–880, 2004.

[XY09] J. Xu and L. Yu. Delay-dependent $\mathcal{H}_\infty$ control for 2-D discrete state delay systems in the second fm model. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 20(4):333–349, December 2009.

[ZDG96] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, Upper Saddle, NJ, USA, 1996.

[ZKT01] J. Zhang, K. R. Knopse, and P. Tsiotras. Stability of time-delay systems: equivalence between Lyapunov and scaled small-gain conditions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(3):482–486, March 2001.

[ZWH04] Z. Zuo, J. Wang, and L. Huang. Robust stabilization for non-linear discrete-time systems. *International Journal of Control*, 77(4):384–388, 2004.

[ZY08] X.-L. Zhu and G.-H. Yang. Jensen inequality approach to stability analysis of discrete-time systems with time-varying delay. In *Proceedings of the* 2008 *American Control Conference*, pages 1644–1649, Seattle, WA, USA, June 2008.

[ZZDL10] G.-X. Zhong, Z.-D., and C. Liu. Robust $\mathcal{H}_\infty$ filtering for discrete-time systems with time-varying delay. pages 334–339. Chinese Control and Decision Conference, 2010.