Universidade Federal de São João del-Rei PPGEL - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Determinação da incerteza em modelos de Wiener via estimador biobjetivo

Aline Alves Campos

Dissertação submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de São João del-Rei, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Falcão Santos Barroso

São João del-Rei, Abril de 2012

"Que darei eu ao Senhor, por todos os benefícios que me tem feito?"

Ξ

=

(Sl 116, 12)

Resumo

A teoria de modelagem e identificação de sistemas evoluiu de forma significativa nas três últimas décadas. Partindo-se de um histórico de utilização de apenas representações lineares, nos dias atuais, as técnicas de modelagem são capazes de representar, com um alto nível de precisão, sistemas não lineares das mais diversas aplicações. Até mesmo para sistemas com características não lineares singulares, as recentes técnicas de modelagem não linear são capazes de definir modelos de alto nível de precisão. Isto só foi possível graças aos estudos dedicados ao desenvolvimento de novas técnicas de identificação de parâmetros para sistemas não lineares. Dentre as representações não-lineares, o destaque apresentado neste trabalho é dado à utilização de modelos de blocos interconectados; em especial os modelos de Wiener. Após a identificação dos parâmetros do modelo, um trabalho de mapeamento das incertezas desses parâmetros é feito utilizando a metodologia Biobjetivo de identificação de sistemas. Ao mapear a região de incerteza, tem-se uma redução desta mesma região. Com base nos resultados obtidos ao realizar o mapeamento da incerteza e analisando os limites superior e inferior da região de incerteza do modelo, pode-se concluir sobre a estabilidade do sistema.

Abstract

The theory of modeling and system identification has evolved significantly in the last three decades. Starting from a history of using only linear representations, nowadays, the modeling techniques are capable of representing, with a high level of precision, nonlinear systems from various applications. Even for systems with nonlinear singular characteristics, recent nonlinear modeling techniques are able to define models of high accuracy. This was only possible thanks to the studies dedicated to the development of new techniques for parameter identification for nonlinear systems. Among the non-linear representations, the focus of this work is the use of oriented-blocks models, in particular Wiener model's. After identifying the model parameters, a mapping of the uncertainties of these parameters is made using the Bi-objective methodology for system identification. By mapping the area of uncertainty, has a reduction in this same area. Based on the results obtained by performing the model, it can be concluded regarding the system's stability.

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, à Deus por permitir que eu passasse por tudo isso e por me dar forças para alcançar meus objetivos.

Agradeço ao Márcio Barroso, meu orientador, pelo conhecimento, sabedoria, didática, paciência, atenção e amizade. Posso dizer que só cumpri esta etapa graças à ele. Obrigada por tudo.

Agradeço ao meu pai Aristides por tudo o que me ensinou. Espero que, de onde o senhor estiver, me abençoe e que tenha orgulho de mim.

Agradeço a todos os colegas e professores do mestrado, em especial à minha amiga Luciana e ao professor Gleison que se tornaram importantes pra mim desde a graduação.

Agradeço à minha família pelo apoio e incentivo, e por sempre acreditarem em mim. Principalmente à minha filha Melissa que, mesmo tão pequena, sempre entendeu a frase: "Agora a mamãe não pode, pois tem que estudar".

Agradeço à Vó Lena por cuidar da Melissa enquanto eu estudava.

Agradeço ao Biscuit pela companhia silenciosa nas madrugadas de estudo.

Agradeço aos meus amigos por entenderem as tantas vezes que não pude sair. E, principalmente, à minha amiga/irmã Aline Helena pelo carinho e amizade de sempre.

Agradeço a Capes e a Fapemig pelo apoio financeiro e a UFSJ pela oportunidade a mim concedida.

Obrigada a todos.

Conteúdo

R	esumo		ii		
Abstract					
Agradecimentos					
St	ımári	D	v		
Li	sta de	Tabelas	vii		
Li	sta de	v Figuras v	iii		
1	Intr 1.1 1.2 1.3	odução Motivação	1 4 6 6		
2	Idem 2.1	tificação de Sistemas Não-Lineares Identificação de sistemas 2.1.1 Obtenção dos dados de experimentação do sistema 2.1.2 Detecção de não-linearidades 2.1.3 Representação de sistemas não-lineares 2.1.4 Detecção de Estrutura 2.1.5 Estimação de Parâmetros 2.1.6 Validação do modelo 2.1.7 Agrupamento de Termos e Coeficientes de Agrupamentos 2.1.8 Pontos fixos 2.1.9 Função Estática	7 8 9 12 14 14 15 16		
3	Iden 3.1 3.2	tificação Biobjetivo Formulação do problema Etapa de decisão 3.2.1 Tomada de Decisão 3.2.2 Robustez ao Ruído 3.2.3 Decisor de Correlação	18 18 20 20 20 21		
	3.3	Comentários Finais	23		

4	Blocos Interconectados - Modelo de Wiener						
	4.1	Propriedades dos Modelos de Wiener	25				
		4.1.1 Pontos fixos	26				
		4.1.2 Estabilidade dos Pontos Fixos	27				
	4.2	Comentários Finais	27				
5	Contribuição - Mapeamento da Incerteza						
	5.1	Modelos Incertos de Wiener	28				
		5.1.1 Estado da Arte	28				
		5.1.2 Caracterização das Incertezas do Modelo	30				
	5.2	Modelo de Wiener para uma não-linearidade ℓ	36				
	5.3	Mapeamento da Incerteza	40				
		5.3.1 Algoritmo	41				
		5.3.2 Exemplos	42				
	5.4	Comentários Finais	57				
6	Aplicação 5						
	6.1	Descrição do sistema	58				
	6.2	Identificação Modelo Incerto de Wiener para os dados do Polimerizador	60				
	6.3	Comentários Finais	66				
7	Con	clusão	67				
	7.1	Conclusões sobre o trabalho	67				
	7.2	Sugestão para trabalhos futuros	68				
Bi	Bibliografia 7						

vi

Lista de Tabelas

5.1	Limites da região de incerteza para o exemplo 01	49
5.2	Limites da região de incerteza para o exemplo 02	56
6.1	Limites da região de incerteza para o modelo.	65

Lista de Figuras

2.1 2.2	 (a) Modelo de Wiener e (b) Modelo de Hammerstein	11 11
3.1	Gráfico do conjunto pareto-ótimo para 2000 modelos	19
4.1	Representação do Modelo de Wiener	25
5.1	Modelo sobre incertezas (Figueroa et al., 2008)	30
5.2	Modelo Incerto de Wiener	32
5.3	Conjunto de incertezas do Modelo de Wiener	32
5.4	Representação gráfica do problema de interseção (Biagiola e Figueroa, 2009)	35
5.5	Vizinhança ou Região de Incerteza do modelo escolhido no Pareto-Ótimo	41
5.6	Entrada $u(k)$ aplicada para o sistema do exemplo 01	43
5.7	Saída $y(k)$ para o sistema do exemplo 01	43
5.8	Característica estática para o sistema do exemplo 01	44
5.9	Validação da Curva Estática para o exemplo 01	45
5.10	Validação da função inversa para obtenção do sinal intermediário $\nu(k)$ para o exemplo	
	01	45
5.11	Validação do modelo ARX para o bloco dinâmico linear do modelo de Wiener para o	
	exemplo 01	46
5.12	Gráfico Pareto-Ótimo para 100 modelos para o exemplo 01	47
5.13	Validação do modelo NARX polinimial para o exemplo 01. Parâmetros identificados	
	via Identificação Biobjetivo.	48
5.14	Validação da curva estática via identificação biobjetivo para o exemplo 01	48
5.15	Entrada aplicada para o sistema do exemplo 02	50
5.16	Saída para o sistema do exemplo 02.	51
5.17	Característica estática para o sistema do exemplo 02	51
5.18	Validação da Curva Estática para o exemplo 02	52
5.19	Validação da função inversa para obtenção do sinal intermediário $\nu(k)$ para o exemplo	
	02	53
5.20	Validação do modelo ARX para o bloco dinâmico linear do modelo de Wiener para o	
	exemplo 02	53
5.21	Gráfico Pareto-Ótimo para 100 modelos - exemplo 02.	54
5.22	Validação do modelo NARX polinimial do exemplo 02. Parâmetros identificados via	
	identificação biobjetivo.	55
5.23	Validação da curva estática via identificação biobjetivo do exemplo 02	55
6.1	Dados de Entrada para o Polimerizador	59
6.2	Dados de Saída do Polimerizador	59
6.3	Característica Estática do Polimerizador	60

6.4	Validação do modelo dinâmico linear ARX para o modelo de Wiener do polimerizador	61
6.5	Validação da curva estática para o modelo de Wiener do polimerizador	62
6.6	Pareto-ótimo para 100 modelos	63
6.7	Validação do Modelo NARX polinomial via identificação bi-objetivo	64
6.8	Validação da característica estática do polimerizador via identificação bi-objetivo	64

Capítulo 1

Introdução

Involuntariamente, ou não, pode-se dizer que o ser humano funciona baseando-se em modelos (Aguirre et al., 2000). As experiências adquiridas pelos seres humanos ao longo da vida são colocadas em prática através de modelos mentais criados para facilitar a forma de lidar com certas rotinas ou situações. Modelos mentais são criados para desempenhar inúmeras atividades como a preparação de um prato, o caminho mais rápido para chegar ao trabalho, ou simplesmente, a forma como se amarra o sapato.

A evolução das técnicas de modelagem de sistemas foi, e ainda é, fundamental para o desenvolvimento da ciência e da tecnologia. Modelos são utilizados na engenharia, economia, medicina, biologia e ciências sociais tendo como principal objetivo a compreensão do sistema em estudo. Os modelos são fundamentais para o conhecimento, a análise e o controle dos sistemas, por isso um grande esforço é despendido na construção de modelos.

Da mesma forma que os modelos mentais são formados a partir da observação e experiência, os modelos matemáticos também devem ser construídos a partir de dados observados que descrevem o comportamento do sistema em estudo. O modelo do sistema deve ser capaz de reproduzir e predizer o seu comportamento sobre determinadas condições de operação, além de permitir a utilização de técnicas de otimização e de controle. Assim, a modelagem matemática é a área do conhecimento que estuda maneiras de construir e implementar modelos matemáticos de sistemas reais.

Um modelo matemático pode ser definido como um mapeamento das relações das variáveis físicas do sistema em uma estrutura matemática correspondente (Cassini, 1999). Quando esta relação não quantifica a dependência temporal entre as variáveis, o modelo tem caráter estático, sendo representado por equações algébricas. Porém, quando tal relação inclui a resposta transitória, o modelo matemático é dito dinâmico, sendo descrito por equações diferenciais ou de diferença (Coelho, 2002).

Há várias formas de classificar as técnicas de modelagem. Em uma delas os métodos de identificação são agrupados em três grupos distintos denominados modelagem caixa-branca, modelagem caixa-cinza e modelagem caixa-preta. Na modelagem caixa-branca é necessário o conhecimento prévio das equações físicas que descrevem o sistema. Por esta razão, este tipo de modelagem é também conhecido como modelagem pela física ou, natureza do processo. Mas, devido o alto grau de complexidade, nem sempre é viável a utilização desta técnica.

A identificação de sistemas é uma área da modelagem matemática que busca formas alternativas ao processo de modelagem caixa-branca. Uma das características desta técnica é a utilização de pouco, ou nenhum, conhecimento prévio do sistema estudado. Tais métodos são chamados de modelagem (ou identificação) caixa-preta ou modelagem empírica.

Um conjunto de técnicas intermediárias entre a modelagem pela física e a identificação caixa-preta é a chamada identificação caixa-cinza. Estas técnicas se caracterizam pela utilização de informação auxiliar sobre o sistema, que não se encontra no conjunto de dados utilizados durante o processo de identificação. O desenvolvimento de técnicas de identificação caixa-cinza é um dos grandes desafios atuais em identificação de sistemas.

Inicialmente, os modelos utilizados para representar os sistemas eram, de forma geral, lineares. Assim, toda a teoria clássica de controle foi desenvolvida para estes modelos. Mas, representações lineares são capazes de se aproximarem do comportamento do sistema apenas em determinadas faixas de operação.

Atualmente, esforços estão sendo dedicados à identificação de sistemas não lineares. Por um lado, há trabalhos que têm por objetivo apresentar novas representações ou novos algoritmos de determinação de estrutura e estimação de parâmetros. Estes algoritmos são mais flexíveis e eficientes, mas à custa de um aumento da complexidade do processo. Tais técnicas seguem a filosofia caixa-preta e seus benefícios são, em geral, de caráter numérico. Por outro lado, existe o esforço de tentar associar a estrutura dos modelos e seus parâmetros ao tipo de regime dinâmico que podem produzir. O estabelecimento de relações entre modelo e dinâmica permite, em alguns casos, utilizar informação auxiliar no processo de identificação. O desenvolvimento desta técnica de identificação chamada caixa-cinza permite um melhor entendimento do funcionamento do modelo, um melhor uso da informação auxiliar la re, frequentemente, um melhor desempenho dinâmico dos modelos obtidos.

Os trabalhos de pesquisa em identificação para controle começaram a surgir por volta de 1990, principalmente após a apresentação de (Gevers, 1991) no *IFAC Symposium on System Identification*. Segundo (Hjalmarsson, 2003), mais de 1500 artigos, com o tema "identificação para controle", surgiram após (Gevers, 1991). Quando a aplicação de um modelo é o projeto de um controlador, o que realmente importa é o desempenho apresentado por este controlador (projetado com base no modelo) sobre o "sistema real", e não necessariamente a capacidade de predição do modelo (Skelton, 1989). No início dos anos noventa, os trabalhos começaram a focar o desenvolvimento de procedimentos de identificação, com o objetivo de estimar modelos mais simples e precisos para serem utilizados no projeto de controladores de alto desempenho (Schrama, 1992; Gevers, 1993; Zang et al., 1995; Hjalmarsson et al., 1996; Anderson e Gevers, 1998). Paralelamente, surgiram trabalhos considerando estimativas de regiões de incerteza dos dados (Helmicki et al., 1991). A idéia era adaptar os conceitos de identificação à teoria de controle robusto, introduzida nos anos oitenta (Zames, 1981; Doyle, 1982), que apresentava, como principal característica, um grande número de ferramentas para verificação de estabilidade e desempenho de controladores sobre todos os sistemas contidos em regiões de incerteza contendo o sistema real.

Inspirado em trabalhos anteriores e no intuito de aproximar as técnicas clássicas de identificação da teoria de controle robusto, Bombois et al. (2001) desenvolve uma teoria para análise de estabilidade e desempenho robusto conectada a conjuntos de incerteza, obtidos por procedimentos de identificação, caracterizados por elipsóides no espaço de parâmetros. Segundo Gevers et al. (2003b,a) muitos avanços têm sido alcançados no sentido de caracterizar os limites dos erros cometidos em estimativas e, tal assunto ainda será objeto de muitas discussões ao longo dos anos. O interesse pela modelagem não linear justifica-se a partir do momento que os modelos lineares são aproximações em torno de um ponto de operação e por isso são aproximações locais do sistema considerado (Billings e Fadzil, 1985). Os modelos não lineares polinomiais NARX (*Nonlinear Auto Regressive with eXogenous input*) de maneira geral, são capazes de representar um grande número de sistemas e fenômenos mas os modelos lineares, no entanto, apresentam uma estrutura menos complexa e de fácil análise. Entre as muitas representações, destacam-se os modelos polinomiais discretos ARX (*Auto Regressive with eXogenous input*) que apresentam uma teoria consolidada e vasta bibliografia. Procurar uma alternativa entre a facilidade analítica de um modelo linear e a representatividade de um modelo não linear é de certa forma, uma maneira de agregar "o melhor de dois mundos". Essa alternativa pode ser a escolha por modelos localmente não lineares, que sejam subconjuntos dos modelos globalmente não lineares (Fruzzetti et al., 1997).

Representações em blocos interconectados são exemplos de modelos localmente não lineares. Estas representações apresentam um modelo híbrido composto de um bloco linear com dinâmica fixa em torno de um ponto de operação e um bloco estático não linear (Coelho, 2002). Estes modelos permitem a análise de estabilidade, controlabilidade, localização de pontos fixos e observabilidade, apenas com a análise da parte dinâmica linear e, além disso, são representações não lineares. Os modelos de blocos interconectados provaram ser simples e úteis como modelos não lineares para um vasto número de aplicações. Historicamente, eles surgiram como representações de transição entre a teoria linear, já bem desenvolvida, e a teoria envolvendo estimação de modelos não lineares (Nepomuceno, 2002; Corrêa, 2001; Barroso, 2001; Aguirre et al., 1998; Aguirre e Billings, 1995; Leontaritis e Billings, 1985a,b). Os modelos de blocos interconectados foram uma atraente proposta devido à sua simplicidade e a propriedade de serem válidos ao longo de uma região maior do que um modelo operacional LTI (*Linear Time Invariant*) (Biagiola e Figueroa, 2009).

A identificação de sistemas apresenta características diferenciadas quando se trata de aplicação em controle, supervisão ou para análise dos sistemas, entre outras. Geralmente, no caso de modelos para análise do sistema, objetiva-se um modelo que seja o mais próximo possível do sistema real, de maneira que a incerteza associada ao modelo seja a menor possível. O trabalho de Barroso et al. (2002) mostra um estudo de caso utilizando um processo real em que técnicas de estimação mono-objetivo são usadas e os resultados são comparados com modelos disponíveis na literatura. Os resultados sugerem que a melhoria das características em estado estacionário dos modelos leva a uma melhoria de sua capacidade de representar o sistema na região de interesse. Em Barroso e Nepomuceno (2004) os autores mostram como impor a um modelo, através da utilização de restrições na etapa de estimação de parâmetros, desempenho em estado estacionário compatível com os dados disponíveis. Embora as técnicas estudadas apresentassem resultados satisfatórios em relação a outros trabalhos, verificou-se que estimadores mono-objetivo são, por construção, polarizados. Esse foi o ponto de partida para a investigação de alternativas para a imposição de desempenho em estado estacionário, utilizando-se outras técnicas. Neste sentido, Aguirre et al. (2004) aplica técnicas de estimação multiobjetivo a um processo real. No lugar da imposição de desempenho em estado estacionário, por meio de restrições na etapa de estimação de parâmetros, foi utilizado um estimador biobjetivo em que o desempenho dinâmico e em estado estacionário foram tratados como dois objetivos. Os resultados indicaram naquele momento que tais estimadores eram promissores em comparação aos estimadores mono-objetivo. Os trabalhos de Barroso (2006) e Barroso et al. (2007) apresentam uma caracterização do estimador biobjetivo e o desenvolvimento de um decisor baseado na correlação entre o erro de simulação e a saída simulada do modelo. Tais técnicas apresentam uma forma de contornar o problema de polarização em estimadores, sem a necessidade da utilização de modelos de ruído, por meio da utilização de conhecimento prévio da curva característica do sistema. Os referidos trabalhos tiveram por objetivo

obter modelos mais próximos possíveis dos sistemas reais. Tais modelos, por sua complexidade, nem sempre são atraentes para aplicação em controle. No entanto, é possível, através de um mapeamento direto, obter modelos localmente não lineares de modelos globalmente não lineares (Coelho, 2002). Se esse mapeamento é possível e os modelos globalmente não lineares são os mais próximos possíveis dos sistemas reais, então os modelos localmente não lineares podem ser os melhores possíveis para a aplicação em controle.

Investigar a aplicação dos estimadores biobjetivo na obtenção dos modelos localmente não lineares é uma forma de agregar valor aos estudos já desenvolvidos até o presente momento, sob dois aspectos: na estimação biobjetivo, é possível obter um modelo para a curva estática (é necessária quando se utilizam modelos em blocos interconectados) assim, não só está disponível o modelo dinâmico, mas também o modelo em estado estacionário (ou seja, a função que descreve a curva estática); e existe uma medida de incerteza dos parâmetros, que pode ser expressa pela distância entre o conjunto de parâmetros escolhido pelo decisor de correlação e dois modelos quaisquer da sua vizinhança, sendo que o raio da vizinhança é máximo quando engloba os extremos do conjunto Pareto. Dessa maneira, pode se mapear o modelo globalmente não linear para o seu análogo localmente não linear, com uma medida de incerteza (via programação biobjetivo), que poderá ser útil, por exemplo, para aplicação em controle robusto (Teixeira et al., 2000; Takahashi et al., 2000; Takahashi, 2004; Gonçalves, 2005; Silva et al., 2008, 2007, 2006).

1.1 Motivação

A motivação para a continuidade dos estudos das técnicas de identificação surge do fato de que, frequentemente, não se conhecem as equações envolvidas no funcionamento de um determinado sistema ou, elas são conhecidas mas seria impraticável, por limitações de tempo e recursos, levantar tais equações e estimar seus respectivos parâmetros (Aguirre et al., 2000).

As principais desvantagens de uma determinada família de técnicas servem de motivação para o desenvolvimento de novas alternativas. Um problema típico relacionado à teoria de sistemas é a obtenção de um modelo adequado para representar um sistema de interesse. Isto significa que o modelo deve ser capaz de reproduzir a dinâmica do sistema observado. Neste sentido, Narendra e Gallman (Narendra e Gallman, 1966) mencionaram duas tarefas relacionadas com a busca de um modelo adequado. Uma delas consiste na caracterização do sistema, que é basicamente associada à construção de modelos matemáticos capazes de representar a relação entrada-saída do sistema. A outra tarefa intrínseca é a identificação do sistema em si, que está preocupado com a seleção de um modelo específico entre uma classe de modelos. Do ponto de vista matemático, a representação escolhida deve ser equivalente ao sistema real de interesse. A comparação entre o modelo proposto e o sistema real é geralmente realizada através da análise de ambas as saídas (do sistema em estudo e do modelo identificado) para um mesmo tipo de entrada de plicada. Os parâmetros do modelo devem ser computados de forma a minimizar a diferença entre os dados de processo e o resultado do modelo obtido.

Um modelo matemático de um sistema real é um análogo matemático que representa algumas das características observadas em tais sistemas. Modelos matemáticos têm sido utilizados ao longo da história para os mais diversos fins, como por exemplo: entender e explicar fenômenos observados tanto na natureza quanto em sistemas sociais, biomédicos, equipamentos, etc.; projetos de sistemas de monitoração e controle; predição; estimação de estados; simulação e treinamento, como por exemplo, os simuladores de vôo (Aguirre et al., 2000).

5

O modelo desenvolvido para um determinado sistema é apenas a sua representação aproximada. Não existe o modelo fiel ao sistema, mas sim uma família de modelos com características e desempenhos variados. A decisão de qual modelo escolher é um dos principais questionamentos no processo de modelagem. O modelo escolhido é uma aproximação de apenas algumas características do sistema real (características estas consideradas nos dados utilizados no processo de modelagem e identificação).

Em problemas de identificação de sistemas, não apenas o vetor de parâmetros deve ser identificado, mas também a função f(.) que representa o modelo; esta representação deve ser dinâmica ou estática. Pode-se dizer que a estimação de parâmetros é uma etapa do processo de identificação de sistemas. A escolha de f(.) determina se o sistema possui um significado físico ou não. Se a função representa apenas uma estrutura matemática apta a descrever uma relação de causa e efeito, os parâmetros, geralmente, não terão nenhum significado físico e o modelo resultante é chamado de um modelo caixa-preta. Se, ao contrário, f(.) for derivada das equações que descrevem o comportamento do processo, os parâmetros terão um significado físico (como por exemplo resistências elétricas, coeficientes de troca de calor, etc) e tem-se uma modelagem caixa-branca.

A modelagem baseada inteiramente nas equações físicas do sistema conduz a representações com clara interpretação física, mas no entanto, estes modelos tendem a ser altamente complexos e não lineares, o que pode não ser apropriado para aplicação de controle. Em outro extremo, encontramos modelos lineares, que são apreciados devido à sua simplicidade e facilidade de aplicação de técnicas de identificação e controle. No entanto, as descrições lineares para sistemas não lineares não são adequadas em muitos casos. Dessa forma, uma alternativa atraente é a utilização dos modelos de blocos interconectados. Esses modelos podem ser identificados sem a necessidade de um conhecimento aprofundado sobre a física do sistema, ou até mesmo sem nenhum conhecimento. Dessa forma, os modelos de blocos interconectados têm se mostrado úteis e flexíveis para muitas aplicações.

Modelos de blocos interconectados são um tipo especial de modelos não lineares (Pearson e Pottman, 2000). Eles consistem de uma combinação de um bloco linear dinâmico em cascata com um bloco não linear estático (ou seja, sem memória). Na literatura são encontrados três tipos de modelos de blocos interconectados: os modelos de Hammerstein - onde a não linearidade é seguida pelo bloco linear, os modelos de Wiener - onde o bloco linear antecede a não linearidade, e os modelos de L'ure - onde uma realimentação não linear é aplicada ao bloco linear. As vantagens de utilizar tais modelos são o baixo esforço computacional associado à identificação dos parâmetros e a facilidade de aplicação de controle ao sistema através do bloco dinâmico linear.

Após o desenvolvimento de estudos sobre os modelos de blocos interconectados, uma nova linha de pesquisa começa a ser desenvolvida, a identificação e análise das incertezas desses modelos. Com essa nova linha de estudos foram desenvolvidos trabalhos cujo tema abordam os modelos incertos de Hammerstein e/ou modelos incertos de Wiener. Os trabalhos desenvolvidos por Biagiola e Figueroa (2009) e Figueroa et al. (2008) têm por objetivo delimitar a região de incerteza dos parâmetros dos modelos encontrados e analisar a estabidade do sistema a partir desses limites da região de incerteza para os parâmetros do modelo.

Modelos de blocos interconectados têm se mostrado atraentes e eficientes como representações não lineares para muitas aplicações. Eles são, ao mesmo tempo modelos simples e válidos em uma região mais vasta do que os modelos LTI (*Linear Time Invariant*). No trabalho de Biagiola e Figueroa

(2011), o modelo de Wiener é utilizado para tratar o problema de controle de um sistema na presença de incertezas. A natureza estática da não linearidade permite resolver o problema de controle, incidindo apenas na dinâmica linear.

1.2 Objetivo

O objetivo deste trabalho é obter uma descrição paramétrica da incerteza fazendo o mapeamento destas incertezas através do modelo de Wiener identificado. A delimitação do conjunto de incertezas do modelo é importante pois, com ela, é feito uma redução da região considerada de incertezas dos parâmetros do modelo, reduzindo também o esforço computacional para a definição do controlador a ser aplicado no sistema. O mapeamento da incerteza também auxilia na análise da estabiliade do modelo identificado.

1.3 Apresentação do trabalho

Neste trabalho, apenas o modelo de Wiener será objeto do estudo desenvolvido. Este trabalho é composto de 7 Capítulos, ao longo dos quais encontram-se descritos os aspectos teóricos, metodológicos e conclusivos.

O Capítulo 2 é composto de uma revisão da teoria de identificação de sistemas. Primeiramente, são apresentados os tipos de modelagem, as diferentes representações para os modelos e os métodos de identificação dos parâmetros; estas informações são apresentadas com ênfase em sistemas não lineares.

O Capítulo 3 descreve a técnica de identificação Biobjetivo. Este capítulo é fundamentado nos trabalhos de Nepomuceno e Barroso (Nepomuceno et al., 2007; Barroso e Nepomuceno, 2004; Nepomuceno, 2002), em que a informação auxiliar sobre o sistema, além dos dados de entrada e saída, é utilizada no processo de identificação do modelo - especificamente para este trabalho, é utilizada a curva estática do sistema. E nos trabalhos de Barroso (Barroso et al., 2007; Barroso, 2006) que definem o Critério de Correlação Mínima como decisor para escolha do modelo.

O Capítulo 4 descreve a representação de modelos não lineares através dos modelos de blocos interconectados e as características e propriedades do modelo de Wiener.

No Capítulo 5 são tratados os modelos de Wiener com incertezas. Para a definição destas incertezas é proposto um algoritmo de mapeamento que delimita a região de incerteza do modelo; sendo esta a contribuição deste trabalho. E no Capítulo 6 é apresentada a aplicação do método proposto no capítulo anterior para os dados de um sistema real descrito primeiramente por Ray (Ray, 1972) e por Doyle (Doyle III et al., 1995), sendo este um processo de Polimerização.

Finalmente, no Capítulo 7 são apresentadas as conclusões sobre o trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Identificação de Sistemas Não-Lineares

Uma forma de classificar as diferentes técnicas de identificação (ou modelagem) de sistemas é dividi-las em três grupos:

- Modelagem caixa-branca,
- Modelagem caixa-cinza e
- Modelagem caixa-preta.

Para utilização da modelagem caixa-branca faz-se necessário o conhecimento das leis físicas que descrevem o sistema a ser modelado. Por essa razão, esta técnica é também conhecida por modelagem pela física ou modelagem conceitual. Infelizmente, devido ao conhecimento e tempo necessários para modelar um sistema, nem sempre se torna viável a utilização deste método.

Em outro extremo, a identificação de sistemas surge da necessidade de modelar sistemas onde não se tem nenhum, ou muito pouco, conhecimento prévio do sistema a ser modelado. Tais métodos são definidos como modelagem caixa-preta, ou modelagem empírica, pois esta técnica utiliza-se penas dos dados de entrada e de saída do sistema. A motivação para o estudo de técnicas de identificação de sistemas surge do fato de que frequentemente não se conhecem as equações envolvidas no funcionamento de um determinado sistema ou elas são conhecidas, mas seria impraticável, por limitações de tempo e recursos, levantar tais equações e estimar seus respectivos parâmetros (Aguirre et al., 2004).

Uma técnica situada entre a modelagem pela física do processo e a modelagem caixa-preta é a modelagem caixa-cinza. As técnicas deste grupo caracterizam-se pela utilização de informação auxiliar (curva estática, pontos fixos, etc.), além dos dados de entrada e saída, para a estimação dos parâmetros do sistema. O seu uso durante a determinação da estrutura tem como objetivo restringir o espaço de busca, já durante a estimação dos parâmetros, pode-se citar como exemplo, o objetivo de garantir que o modelo obtido a partir de dados dinâmicos aproxime-se das características estáticas do sistema (Campos, 2007).

2.1 Identificação de sistemas

Segundo Aguirre (2007), as principais etapas que compõem o processo de identificação de sistemas são:

2.1. Identificação de sistemas

- 1. Testes dinâmicos e coleta de dados a proposta da identificação de sistemas é buscar uma relação existente entre os dados disponíveis de um sistema. Portanto, é necessário obter tais dados com a finalidade de se obter modelos.
- Escolha da representação matemática a ser utilizada diversos são os tipos de representações existentes. Neste trabalho, utiliza-se a representação por blocos interconectados, em especial o modelo de Wiener resultando em modelos NARX (*Nonlinear AutoRegressive with eXogenous inputs*) polinomiais.
- Determinação da estrutura do modelo Para o caso de modelos polinomiais a escolha da estrutura significa definir o número de regressores de entrada e de saída para o modelo, assim como o seu grau de não linearidade.
- 4. Estimação de parâmetros esta etapa é realizada por meio de algoritmos específicos para cada representação escolhida. Neste trabalho, tem-se a utilização do método de Mínimos Quadrados e o método de identificação Biobjetivo.
- 5. Validação do modelo após a obtenção do modelo, é necessário verificar se ele incorpora as características de interesse do sistema original. Esta etapa é considerada subjetiva, pois o resultado da validação dependerá da aplicação desejada para o modelo identificado.

Estas cinco etapas definem o processo da identificação de sistemas e são utilizadas tanto para sistemas lineares quanto para sistemas não-lineares.

2.1.1 Obtenção dos dados de experimentação do sistema

Para obter e registrar os dados de experimentação é necessário, primeiramente, excitar o sistema através de entradas predefinidas (sinais de entrada conhecidos) registrando suas saídas correspondentes. Os dados de saída do sistema devem ser armazenados e submetidos a testes para detecção de não-linearidades.

É desejável que os sinais de excitação do sistema tenham um espectro de freqüências que venha a excitar de forma persistente toda a dinâmica de interesse do sistema. No caso de sistemas não-lineares, isso requer que os efeitos não-lineares sejam excitados por esses sinais e assim estejam presentes nos dados de identificação. Uma pequena variação na amplitude do sinal de entrada pode provocar mudanças qualitativas no comportamento dinâmico dos mesmos (Barroso, 2006).

Outro ponto de importância na obtenção dos dados de identificação é a escolha do período de amostragem. Para que um sinal amostrado retenha algumas das características fundamentais do sinal original, é necessário que o tempo de amostragem seja suficientemente curto, pois um período de amostragem muito grande pode prejudicar o registro de características sobre o sistema. Na prática, a frequência de amostragem é normalmente escolhida entre 5 e 10 vezes maior do que a maior frequência de interesse contida nos dados. Mas, caso o período de amostragem seja muito curto, a estimação dos parâmetros do modelo poderá se tornar mal condicionada, pois as colunas da matriz de regressores tendem a se tornar linearmente dependentes.

2.1.2 Detecção de não-linearidades

Os dados de identificação encontrados devem ser submetidos a testes para detecção de não linearidades. Dentre os testes para detectar não-linearidades pode-se citar: testes em regime permanente,

2.1. Identificação de sistemas

testes do valor médio da saída, testes no domínio da frequência, testes no domínio do tempo e testes de correlação - Método de correlação cruzada não-linear e Método de auto correlação não-linear - sendo que os dois últimos destacam-se pela simplicidade e eficiência (Aguirre, 2007).

Estes testes verificam, dentro de um limite de confiança pré-determinado, se o sistema possui características próprias dos sistemas lineares, ou não. Caso não sejam verificadas estas propriedades, se faz necessária a utilização de modelos não-lineares para a representação do sistema. Os modelos não-lineares são capazes de aproximar, de uma forma mais objetiva, as características do sistema (Barroso, 2006).

2.1.3 Representação de sistemas não-lineares

Na modelagem de sistemas não-lineares um dos passos mais importantes é a escolha do tipo de modelo que irá representar o sistema em estudo, uma vez que existe uma grande diversidade de não-linearidades distintas. O modelo escolhido deve ser simples, mas capaz de representar toda a característica não-linear do sistema. A escolha do tipo de representação depende principalmente da finalidade do modelo e das ferramentas disponíveis para a sua obtenção, bem como das informações disponíveis sobre o sistema (Coelho et al., 2002).

Como exemplo de representações não-lineares que se destacam temos os modelos NARX (*Non-linear AutoRegressive model with eXogenous inputs*) e os modelos NARMAX (*Nonlinear AutoRe-gressive Moving Average model with eXogenous inputs*) polinomiais, os modelos baseados em Redes Neurais (Haykin, 2008; Amaral, 2001) e os Modelos de Blocos Interconectados (Coelho et al., 2002; Billings, 1980; Narendra e Gallman, 1966).

Neste trabalho, duas representação não-lineares serão utilizadas; a representação por Modelos NARX polinomiais e por Modelos de Blocos Interconectados através do Modelo de Wiener.

Modelos NARX Polinomiais

Os modelos NARX são modelos discretos no tempo, que explicam o valor da saída y(k) em função de valores prévios dos sinais de entrada e saída (Billings et al., 1989). Representado de maneira geral pela equação 2.1.

$$y(k) = f[y(k-1), \dots, y(k-n_y), u(k-d), \dots, u(k-n_u)].$$
(2.1)

Sendo que n_y , n_u e d são, respectivamente, máximos atrasos em y e em u e atraso puro de tempo.

Quando termos de ruído são incluídos no modelo NARX, ele passa a ser chamado de NARMAX (*Non-linear AutoRegressive Moving Average with eXogenous inputs*). A inserção dos termos de ruído é feita a fim de evitar a polarização do modelo. A equação 2.2 representa, de forma geral, o modelo NARMAX.

$$y(k) = F[y(k-1), \dots, y(k-n_y), u(k-\tau_d), \dots, u(k-n_u), e(k), e(k-1), \dots, e(k-n_e)].$$
(2.2)

em que e(k) é o ruído e n_e é o maior atraso no modelo de ruído.

Neste trabalho, F será uma função polinomial com grau de não-linearidade ℓ , como definida a seguir:

$$y(k) = \theta_0 + \sum_{i_1}^n \theta_{i_1} x_{i_1} + \sum_{i_1}^n \sum_{i_2}^n \theta_{i_1} \theta_{i_2} x_{i_1}(k) x_{i_2}(k) + \dots + \sum_{i_1}^n \dots \sum_{i_{\ell-1}}^n \theta_{i_1 \dots i_{\ell-1}} x(k) \dots + x_{i_\ell}(k) + e(k)$$
(2.3)

sendo $x_1(k) = y(k-1), x_2(k) = y(k-2), \dots, x_{n_y+1}(k) = u(k-d-1), \dots, x_n(k) = u(k-d-n_e),$ $n = n_y + n_u$. Os θ 's são os parâmetros que deverão ser estimados.

É esperado também que o modelo não só se ajuste aos dados, mas principalmente, que ele possa reproduzir a dinâmica original do sistema.

Duas vantagens do modelo NARX polinomial é que, primeiramente, ele pode ser transformado em uma representação linear fixando-se o ponto de operação do sistema, ou seja, obtendo-se uma linearização do modelo. A outra vantagem é a facilidade de se obter informações analíticas sobre a dinâmica e as características em estado estacionário do modelo (Barroso, 2006).

As funções não-lineares polinomiais são lineares nos parâmetros, ou seja, modelos deste tipo permitem a utilização de algoritmos de estimação de parâmetros para sistemas lineares (Chen et al., 1989).

Modelos de Blocos Interconectados

Nos modelos de Blocos Interconectados o sistema é representado através de dois blocos sendo que em um deles a não-linearidade do sistema é modelada por uma função estática não-linear e, no outro, a dinâmica é modelada através de um modelo linear ARX (*AutoRegressive with eXogenous inputs*).

A forma como estes blocos são dispostos é que define o tipo de modelo. Quando o bloco estático precede o bloco dinâmico linear, este modelo é denominado Modelo de Hammerstein. No Modelo de Wiener, o bloco dinâmico linear precede o bloco estático não-linear. Outro tipo de modelo por blocos interconectados é o Modelo de Lur'e. Ele é constituído de uma realimentação do bloco dinâmico linear através do bloco de não-linearidade estática. Esta representação é útil na modelagem de processos com múltiplas saídas em estado estacionário (Pearson e Pottman, 2000).

As figuras 2.1 e 2.2 ilustram os três tipos de modelos de blocos interconectados. A função estática não-linear é representada por f(.) e o modelo dinâmico linear é um modelo ARX.

2.1. Identificação de sistemas



Figura 2.1: (a) Modelo de Wiener e (b) Modelo de Hammerstein



Figura 2.2: (c) Modelo de Lur'e

O modelo ARX (*AutoRegressive with eXogenous inputs*) é um tipo de representação utilizada para sistemas lineares discretos, que relacionam variáveis de entrada e saída do sistema. Podendo ser escrito na forma da equação 2.4,

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + e(k),$$
(2.4)

sendo $A(q) \in B(q)$ polinômios arbitrários e e(k) ruído.

O modelo dinâmico linear ARX é definido pela equação 2.5:

$$y(k) = \sum_{j=1}^{n_y} \theta_j y(k-j) + \sum_{i=1}^{n_u} \sigma_i u(k-i),$$
(2.5)

onde θ_j e σ_i são, respectivamente, os parâmetros de saída e de entrada a serem estimados e n_y e n_u são, respectivamente, os máximos atrasos de saída e de entrada. O bloco estático não-linear é definido por uma função polinomial ou racional, f(.) (Coelho et al., 2002).

2.1.4 Detecção de Estrutura

O grau de não-linearidade do sistema é um dos fatores que define o número de termos candidatos ao modelo, ou seja, os possíveis termos que farão parte do modelo polinomial. O aumento no grau de não-linearidade ℓ e dos máximos atrasos n_y e n_u , provocam um aumento significativo no número de termos candidatos. Na maioria dos casos, apenas um pequeno número desses termos é suficiente para aproximar a dinâmica do processo. Para isso é desejável que se obtenha uma representação parcimoniosa, garantindo que os termos importantes sejam levados em conta e que só os termos que não contribuam para a dinâmica do sistema sejam descartados (Barroso, 2006). O procedimento para a escolha dos termos a serem incluídos no modelo é chamado de detecção de estrutura.

Detecção de estrutura utilizando ERR

A Taxa de Redução de Erro ou ERR (*Error Reduction Ratio*) associa a cada termo candidato um índice correspondente à contribuição deste na explicação da variância dos dados de saída, ou seja, quantifica a redução no erro da saída do modelo a cada introdução de um novo termo. Este método pode ser utilizado em conjunto com alguma informação *a priori* do sistema (identificação caixa-cinza), tal como o número de pontos fixos ou a curva estática do sistema (Corrêa, 2001).

Critério de Informação de Akaike

O método utilizado para estimar o número de termos que o modelo deve possuir é o critério de Akaike (AIC) (Akaike, 1974). Este é um método estatístico, que verifica a redução na variância dos resíduos à medida que novos termos são acrescentados ao modelo. De acordo com este método, o número de termos de um modelo deve minimizar a função custo *J*,

$$J = N \times \log(Var\left\{\xi(k)\right\}) + 2n_p, \tag{2.6}$$

sendo N o comprimento do registro de dados, $Var \{\xi(k)\}$ a variância dos resíduos e n_p o número de parâmetros no modelo.

2.1.5 Estimação de Parâmetros

O processo de estimação de parâmetros consiste em estimar os parâmetros do modelo de modo a minimizar a diferença entre a predição e a saída estimada pelo modelo. Como, neste trabalho, são alvos de estudo apenas os modelos NARX Polinomial e o modelo de Blocos Interconectados (mais precisamente a representação de Wiener), torna-se justa a apresentação do procedimento para estimação dos parâmetros apenas para o modelo NARX Polinomial. Este proceimento minimiza a função custo do algoritmo de Mínimos Quadrados.

Seja a estrutura polinomial:

$$y(k) = \sum_{i=l}^{n} p_i(k)\theta_i + e(k),$$
(2.7)

2.1. Identificação de sistemas

onde $p_i(k)$ são os regressores do modelo e correspondem aos diferentes termos no polinômio e θ_i são os respectivos parâmetros.

Escrevendo a equação 2.7 na forma de erro de predição, tem-se:

$$y(k) = \sum_{i=l}^{n} p_i \hat{\boldsymbol{\theta}}_i + \xi(k, \hat{\boldsymbol{\theta}}), \qquad (2.8)$$

sendo

$$\sum_{i=l}^{n} p_i \hat{\theta}_i = \hat{y}(k, \hat{\boldsymbol{\theta}}).$$
(2.9)

O símbolo () sobre as variáveis faz referência a valores estimados. O resíduo de identificação $\xi(k, \hat{\theta})$ é definido como:

$$\xi(k,\hat{\boldsymbol{\theta}}) = y(k) - \hat{y}(k,\boldsymbol{\theta}), \qquad (2.10)$$

ou

$$\xi(k) = y(k) - \psi^T(k-1)\hat{\Theta}.$$
 (2.11)

O vetor de resíduos $\xi(k)$ representa os erros de modelagem, ruído ou qualquer incerteza do sistema.

Utilizando-se um número grande de amostras N, maior que o número de regressores n_{θ} , tem-se um sistema de equações sobre determinado, resultando em uma matriz Ψ não quadrada. Dessa forma, define-se um algoritmo para a estimação de $\hat{\Theta}$ que minimize a soma dos quadrados do erro dado pela seguinte função custo:

$$J_{MQ} = \sum_{i=1}^{N} \xi(i)^2 = \xi^T \xi,$$
(2.12)

Substituindo 2.11 em 2.12, tem-se:

$$J = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\Psi}\hat{\boldsymbol{\Theta}})^T (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\Psi}\hat{\boldsymbol{\Theta}})$$

= $\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{\Psi}\hat{\boldsymbol{\Theta}} - \hat{\boldsymbol{\Theta}}^T \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{\Theta}}^T \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Psi}\hat{\boldsymbol{\Theta}}$ (2.13)

A minimização da função custo J_{MQ} em relação ao vetor de parâmetros $\hat{\Theta}$ é feita resolvendo-se $\partial J_{MQ}/\partial \hat{\Theta} = 0$, cuja solução é dada por:

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}} = \left(\boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Psi}\right)^{-1} \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{y}.$$
(2.14)

A equação 2.14 é denominada Estimador de Mínimos Quadrados Clássico. Se a matriz de covariância dos regressores for singular, ou mal condicionada, ela estará sujeita a problemas numéricos que podem afetar a estabilidade do algoritmo dos mínimos quadrados. Este mal condicionamento, ou polarização do estimador de mínimos quadrados, surge do fato de existir correlação no vetor de resíduos (Barroso, 2006).

Para contornar este problema pode-se utilizar o método do estimador de Mínimos Quadrados Estendidos (MQE). Nestes modelos também estão presentes os regressores de ruído, mas um cuidado

14

extra deve ser tomado: estes termos de ruído são modelados apenas com o intuito de evitar a polarização do modelo NARX Polinomial. O modelo final deve conter apenas os termos de processo (regressores de entrada e de saída). Os termos de ruído (parte estocástica) devem ser desprezados. Os modelos com termos de ruído estimados por MQE são os modelos NARMAX.

2.1.6 Validação do modelo

A ausência de algum termo importante no modelo pode provocar polarização dos parâmetros e o aparecimento de dinâmicas espúrias na simulação (Barroso, 2006). Assim, a validação do modelo faz-se necessária para verificar se o modelo realmente reproduz as características do sistema original.

A *Validação Estática* é feita visualmente, comparando-se a curva estática do sistema com a curva estática estimada pelo modelo.

A *Validação Dinâmica* tem a finalidade de verificar se o modelo é capaz de recuperar a dinâmica do sistema. A massa de dados utilizada para a validação deve ser diferente da massa de dados utilizada na identificação dos parâmetros do modelo, pois assim verifica-se se o modelo é capaz de reproduzir a dinâmica do sistema para qualquer outra massa de dados. Para a validação dinâmica é utilizada a predição de infinitos passos à frente, ou *Simulação Livre*. Esta técnica consiste em usar o conjunto de dados de validação do sistema e as predições futuras da saída da matriz de regressores. Logo após, a saída obtida da simulação livre é representada de forma gráfica, juntamente com os dados de validação dinâmica para que uma comparação visual possa ser feita.

Outra forma de validar a dinâmica de um modelo é através do uso de *Funções de Correlação* aplicadas aos resíduos de identificação do sistema. Se os resíduos possuírem alguma correlação, o modelo é dito polarizado, pois a dinâmica do sistema não foi totalmente modelada (Barroso, 2006).

2.1.7 Agrupamento de Termos e Coeficientes de Agrupamentos

O modelo NARX 2.1 pode ser reescrito como:

$$y(k) = \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^{m} \sum_{n_1, n_m}^{n_y, n_u} c_{p, m-p} \prod_{p=0}^{i=1} y(k-n_i) \prod_{m=0}^{i=p+1} u(k-n_i),$$
(2.15)

sendo

$$\sum_{n_1, n_m}^{n_y, n_u} \equiv \sum_{n_\ell = 1}^{n_y} \cdots \sum_{n_m}^{n_y}.$$
 (2.16)

Os monômios da equação 2.15 são agrupados de acordo com sua ordem m ($0 \le m \le \ell$), sendo ℓ o grau de não-linearidade do modelo. Cada termo de ordem m contém fatores multiplicativos em y(k-i) e (m-p) fatores multiplicativos em u(k-j). Os parâmetros destes termos são representados por $c_{p,m-p}(n_{\ell},\ldots,n_m)$, nos quais (n_{ℓ},\ldots,n_m) indicam os atrasos de cada fator constituinte do monômio considerado.

O primeiro somatório da equação 2.15 faz referência aos monômios da equação 2.1, separando-os de acordo com sua ordem. O segundo somatório faz referência ao número de fatores em y(k - i) no termo considerado. Dentro do conjunto de termos de ordem m, um termo qualquer pode ser acessado

através do ajuste do valor de p adequado. Por fim, o último somatório permite que seja feita a distinção entre os termos de 2.1, através do ajuste dos atrasos de cada um dos fatores constituintes do termo.

Em estado estacionário para entradas constantes tem-se:

$$y(k-1) = y(k-2) = \cdots y(k-n_y)$$
(2.17)
$$u(k-1) = u(k-2) = \cdots u(k-n_u),$$

Aplicando 2.17 na equação 2.15, chega-se a expressão:

$$y(k) = \sum_{n_{\ell}, n_m}^{n_y, n_u} c_{p, m-p}(n_{\ell}, \dots, n_m) \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^m y(k-1)^p u(k-1)^{m-p}.$$
 (2.18)

O conjunto de termos da forma $y(k-i)^p u(k-j)^{m-p}$ é denominado Agrupamento de Termos (Aguirre e Billings, 1995) e são representados por $\Omega_{y^p u^{m-p}}$. A constante

$$\sum_{n_{\ell}, n_m}^{n_y, n_u} c_{p, m-p}(n_{\ell}, \dots, n_m)$$
(2.19)

é o coeficiente do agrupamento de termos $y(k-1)^p u(k-1)^{m-p}$ e será representado por $\sum_{y^p u^{m-p}}$. Todos os termos pertencentes a um dado agrupamento de termos explicam o mesmo tipo de nãolinearidade no modelo.

2.1.8 Pontos fixos

Os pontos fixos de um sistema discreto autônomo são os pontos de operação que apresentam a seguinte característica:

$$y(k) = y(k+i), \forall i \in \mathbb{Z}^+.$$
(2.20)

Para sistemas lineares temos somente um ponto fixo trivial. Para sistemas não-lineares, o número de pontos fixos depende do grau de não-linearidade ℓ .

Para obter os pontos fixos de um modelo NARX Polinomial basta resolver a seguinte equação:

$$\sum_{y^{\ell}} y(k)^{\ell} + \dots + \sum_{y^2} y(k)^2 + (\sum_{y} -1)y(k) + \sum_{0} = 0,$$
(2.21)

sendo que \sum_{0} é o termo constante do modelo. O modelo apresentará ℓ pontos de operação na saída se o termo $\sum_{u^{\ell}} \neq 0$. Os pontos fixos do modelo são os valores que zeram a equação 2.21.

Um modelo NARX não autônomo, analisado em estado estacionário para entrada constante pode ser escrito como:

$$y(k) = \sum_{n_1, n_{m\ell}}^{n_y, n_u} c_{p, m\ell - p}(n_\ell, \dots, n_{m\ell}) \sum_{m\ell = 0}^{\ell} \sum_{p=0}^{m\ell} y(k)^p u(k)^{m\ell - p},$$
(2.22)

Sendo que $m\ell$ corresponde ao grau de não-linearidade de cada termo e está na faixa $1 \le m\ell \le \ell$. Cada termo de grau $m\ell$ pode conter um fator de termos y(k) de ordem p, um fator em u(k) de ordem $(m\ell - p)$ e um coeficiente $c_{p,m\ell-p}(n_{\ell}, \cdots, n_{m\ell})$.

2.1. Identificação de sistemas

A equação 2.22 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\sum_{y^{\ell}} y^{\ell} + \sum_{m\ell=\ell-1}^{\ell} \left[\sum_{u^{m\ell-(\ell-1)}y^{\ell-1}} u^{m\ell-(\ell-1)} \right] y^{\ell-1} + \cdots + \sum_{m\ell=p}^{\ell} \left[\sum_{u^{m\ell-p}y^{p}} u^{m\ell-p} \right] y^{p} + \cdots + \sum_{m\ell=1}^{\ell} \left[\sum_{u^{m\ell-1}y} u^{m\ell-1} - 1 \right] y + + \sum_{m\ell=1}^{\ell} \sum_{u^{m\ell}} u^{m\ell} + \sum_{0} = 0.$$
(2.23)

A equação 2.23 mostra que os pontos fixos dependem dos valores de entrada (constante) do sistema. Essa equação mapeia valores de \bar{u} para seu respectivo valor de \bar{y} , caracterizando assim a curva estática do sistema.

2.1.9 Função Estática

O comportamento em estado estacionário de um sistema pode ser obtido fixando-se o valor da entrada \bar{u} e medindo a saída \bar{y} após um regime transitório. Para um modelo polinomial NARX, por ser linear nos parâmetros, tem-se a Equação 2.24:

$$\bar{y}_i = f(\bar{y}_i, \bar{u}_i) = \boldsymbol{q}_i^T \boldsymbol{S} \boldsymbol{\theta}, i = 1, 2, \dots, n_{sf}$$
(2.24)

em que

$$\boldsymbol{q_i}^T = \begin{bmatrix} 1 & \bar{y_i} \dots \bar{y_i}^{\ell} & \bar{u_i} \dots \bar{u_i}^{\ell} & F_{yu} \end{bmatrix}, i = 1, 2, \dots, n_{sf}$$
(2.25)

onde F_{yu} é não-linear e ℓ é o maior grau de não-linearidade do modelo.

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \sum_{0} \quad \sum_{y} \dots \sum_{y^{\ell}} \quad \sum_{u} \dots \sum_{u^{\ell}} \quad F_{\Sigma} \end{bmatrix}^{T}, i = 1, 2, \dots, n_{sf}$$
(2.26)

$$S\theta = \sum_{x}, \qquad (2.27)$$

onde θ é o vetor dos parâmetros do modelo NARX polinomial e \sum_x é o vetor dos coeficientes dos agrupamentos de termos do modelo. A matriz S é uma matriz constante de zeros e uns que mapeiam o vetor de parâmetros θ para os coeficientes de agrupamentos de termos \sum_x . Logo, dado um modelo NARX polinomial com vetor de parâmetros θ , a função estática pode ser escrita em sua forma matricial como:

$$\bar{y} = \left[\begin{array}{ccc} \bar{y}^0 \bar{u}^0 & \bar{y}^1 \bar{u}^0 & \cdots & \bar{y}^p \bar{u}^{m-p} \end{array} \right] (\boldsymbol{S}\boldsymbol{\theta}).$$
(2.28)

Chamando a matriz de regressores estáticos $\begin{bmatrix} \bar{y}^0 \bar{u}^0 & \bar{y}^1 \bar{u}^0 & \cdots & \bar{y}^p \bar{u}^{m-p} \end{bmatrix}$ de \boldsymbol{E} , tem-se:

$$\bar{y} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{\theta}). \tag{2.29}$$

2.2 Comentários Finais

Neste capítulo foi feita uma revisão sobre as técnicas de modelagem e identificação de sistemas. De acordo com o tema abordado, o foco deste capítulo foi a apresentação de ferramentas para identificação de modelos não lineares. Dessa forma, o capítulo seguinte foi dedicado à principal técnica de identificação aqui utilizada; a identificação caixa cinza denominada identificação biobjetivo.

Capítulo 3

Identificação Biobjetivo

Os dados dinâmicos de entrada e de saída do sistema não precisam ser a única fonte de informação utilizada para definir-se um bom modelo. Informações do sistema em estado permanente como curva estática, quantidade e localização de pontos fixos, ganho em estado estacionário, entre outros, podem ser o diferencial na obtenção de um bom modelo para o sistema.

Trabalhar com a utilização desta informação extra sobre o sistema, além dos seus dados dinâmicos, é o que define a Identificação Multiobjetivo (Barroso et al., 2007; Nepomuceno et al., 2007; Barroso e Nepomuceno, 2004) - ou Identificação Biobjetivo, como neste trabalho, por se utilizar apenas dois tipos de informação sobre o sistema; os dados de entrada e saída do sistema e a sua curva estática. Quando se deseja alcançar mais de um objetivo em um problema de otimização, de forma geral, temos dois tipos de solução (Barroso, 2006):

- Soluções que serão substituídas por outras soluções, quando sob todos os objetivos considerados simultaneamente;
- Soluções que, quando comparadas a outras soluções, serão melhores em um dos objetivos mas piores em outro(s).

Para este segundo caso, as soluções são denominadas *Soluções Eficientes* ou *Soluções Pareto-Ótimas*. Estas soluções definem o conjunto *Pareto-Ótimo*. A princípio, não existe uma solução única que, simultaneamente, minimize todos os objetivos do problema de otimização. Mas, de alguma forma, deve-se escolher uma única solução. O conjunto *Pareto Ótimo* contém as soluções candidatas a se tornarem esta solução única e a escolha desta é denominada *Etapa de Decisão*.

Neste trabalho, a informação utilizada para elaboração do Conjunto Pareto-Ótimo de modelos é a curva estática do sistema. Esta curva estática, em conjunto com os dados dinâmicos de identificação, caracteriza dois objetivos a serem alcançados: a adequação do modelo aos dados dinâmicos e aos dados estáticos, simultaneamente.

3.1 Formulação do problema

As funções-objetivo do problema de otimização definem o seguinte vetor:

3.1. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} J_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ J_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ \vdots \\ J_m(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \end{bmatrix}^T, \qquad (3.1)$$

Como mencionado anteriormente, não existe uma única solução que minimize simultaneamente as m funções-objetivo. O conjunto destas m soluções caracteriza o conjunto Pareto-Ótimo (Chankong e Haimes, 1983) definido como (figura 3.1):

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^* \in \hat{\boldsymbol{\Theta}}^* \iff \nexists \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} : \boldsymbol{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \le \boldsymbol{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^*) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \ne \boldsymbol{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^*),$$
(3.2)

em que $\hat{\theta}^*$ é o conjunto de parâmetros estimados e $\hat{\Theta}^*$ é o espaço de parâmetros. As relações de comparação entre os vetores são:

$$\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{z} \Leftrightarrow x_i \leq z_i, \forall i \in 1, \dots, n$$
 (3.3)

$$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{z} \Leftrightarrow \exists i \in 1, \dots, n | x_i \neq z_i,$$
(3.4)

sendo que x_i e z_i são componentes dos vetores $x, z \in \Re^n$. A equação 3.4 mostra que a solução será eficiente se, e somente se, não existir uma outra solução que melhore um dos objetivos sem o detrimento de pelo menos outro objetivo.



Figura 3.1: Gráfico do conjunto pareto-ótimo para 2000 modelos

3.2 Etapa de decisão

Nesta etapa procura-se uma única solução que satisfaça uma função utilidade que deve ser definida partindo de uma sistemática de apresentação das seguintes alternativas que garanta que (Barroso, 2006):

- 1. O número de consultas ao decisor (humano ou automático) será o menor possível;
- 2. Apresentação de um número de alternativas ao decisor seja inteligível;
- A melhor solução não será perdida. O encadeamento dessas etapas de decisão conduz a diferentes estruturas para o mecanismo de decisão.

3.2.1 Tomada de Decisão

Seja um conjunto Pareto-Ótimo, cujos elementos são valores estimados de parâmetros de um modelo polinomial (especificamente para este trabalho, modelo NARX polinomial). Para escolher o melhor modelo entre os modelos disponíveis no Pareto-Ótimo precisamos de um decisor. Mas qual elemento desse conjunto deve ser escolhido de maneira que o modelo seja considerado o melhor? Para isso é desenvolvida uma métrica que seja capaz de expressar em um valor numérico o quão bom é cada um dos conjuntos de parâmetros presentes no Pareto-Ótimo.

Em Barroso (2006) o autor apresenta o método do *Decisor de Correlação*. Se um conjunto de modelos disponíveis apresentar estruturas idênticas e parâmetros diferentes, aquele que apresentar menor correlação entre o erro de simulação e a saída simulada será o que apresenta parâmetros mais próximos dos valores reais. Isso significa que, dado um sistema com estrutura idêntica à do sistema real, se esse apresentar erro de simulação muito pequeno, ou o erro for não-correlacionado com a saída do modelo, significa que os parâmetros do modelo podem ser muito próximos dos valores reais.

3.2.2 Robustez ao Ruído

Em Aguirre et al. (2004) o autor destaca duas formas de validação de modelos: por meio da análise de resíduos de identificação e por meio do erro de simulação. Um aspecto dos índices de validação baseados em erro de simulação é a presença de termos do tipo $y(k) - \hat{y}(k)$, sendo y(k) a saída do sistema medida no instante $k \in \hat{y}(k)$ a simulação livre do modelo no mesmo instante k.

No caso de dados sem ruído, ou com pequena relação de sinal-ruído, a utilização desses índices de validação não acarretará considerável erro na avaliação do desempenho do modelo. No entanto, no caso em que haja ruído considerável, empiricamente notou-se que tais índices podem levar a resultados pouco confiáveis, independente do tipo de ruído.

Na validação por meio da análise de resíduos, é possível verificar se os parâmetros do modelo foram ou não estimados corretamente. Se o modelo identificado foi capaz de explicar tudo o que for explicável nos dados (Aguirre et al., 2004), os resíduos de identificação serão apenas ruído branco. Mas não há garantia de que a simulação do modelo seja boa, apenas a predição um passo à frente. Mas, e se o erro de simulação livre for ruído branco?

A simulação livre pode ser definida como:

$$\hat{y}(k) = \hat{\Psi}(k-1)\hat{\boldsymbol{\theta}},\tag{3.5}$$

sendo que $\hat{\Psi}(k-1)$ é a matriz de regressores da simulação livre para o modelo. Seja ainda

$$\eta(k) = y(k) - \hat{y}(k),$$
 (3.6)

o erro de simulação livre para o mesmo modelo. Pode-se definir a seguinte função (Aguirre, 2007):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) &= \sum_{k=1}^{N} \eta(k) \hat{y}(k), \\ &= \sum_{k=1}^{N} [y(k) - \hat{y}(k)] \hat{y}(k), \\ &= \sum_{k=1}^{N} y(k) \hat{y}(k) - \hat{y}(k)^{2}, \end{aligned}$$

sendo N o número de amostras para a série temporal utilizada. Chamando $y(k) = y_i(k) + e(k)$ ou $y(k) = \Psi(k-1)\theta + e(k)$, sendo $y_i(k)$ a parcela ideal e e(k) o ruído aditivo ou qualquer incerteza associada, pode-se re-escrever a equação 3.2.2 como a seguir:

$$\boldsymbol{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \sum_{k=1}^{N} y_i(k)\hat{y}(k) + e(k)\hat{y}(k) - \hat{y}(k)^2.$$
(3.7)

O índice de desempenho $J(\hat{\theta})$ é o índice de correlação entre o erro de simulação e os dados de simulação do modelo para um conjunto de parâmetros estimados.

Suponha que exista um modelo NARX polinomial com um vetor de parâmetros θ que corresponda exatamente ao do sistema.

Se um conjunto de modelos disponíveis apresentar estruturas idênticas e parâmetros diferentes, aquele que apresentar menor correlação entre o erro de simulação e a saída simulada será o que apresenta parâmetros mais próximos dos valores reais (Barroso, 2006).

Isso significa que, dado um sistema com com estrutura idêntica à do sistema real, se esse apresentar erro de simulação muito pequeno, ou o erro for não-correlacionado com a saída do modelo, significa que os parãmetros do modelo podem ser muito próximos dos valores reais. Isso pode ser expresso da seguinte forma:

$$\boldsymbol{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \approx 0, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} \approx \boldsymbol{\theta}^*.$$
 (3.8)

sendo que θ^* são os valores reais para os parâmetros.

3.2.3 Decisor de Correlação

Suponha-se que não há correlação entre e(k) e $\hat{y}(k)$, e que a parcela $e(k)\hat{y}(k) \approx 0$ na equação 3.7. Suponha-se também que o sistema e o modelo apresentam estrutura idêntica, ou seja, $\Psi_i \equiv \hat{\Psi}$. Sendo Ψ_i a matriz de regressores ideal e $\hat{\Psi}$ a matriz de regressores estimada (simulação livre) do modelo.

3.2. Etapa de decisão

Escolha Não-Polarizada

Se a parcela $e(k)\hat{y}(k) \approx 0$ então, $\hat{\Psi}\hat{\theta} \approx \Psi_i \theta$.

$$y_i(k)\hat{y}(k) = \hat{y}(k)^2 + e(k)\hat{y}(k).$$
 (3.9)

Aplicando-se o módulo em ambos os lados da equação 3.9, tem-se que:

$$\left|\hat{y}_{i}(k)\hat{y}(k)\right| = \left|\hat{y}(k)^{2} + e(k)\hat{y}(k)\right|.$$
(3.10)

Aplicando-se a propriedade da desigualdade triangular no segundo membro da equação 3.10, ou seja:

$$\left|\hat{y}(k)^{2} + e(k)\hat{y}(k)\right| \le \left|\hat{y}(k)^{2}\right| + \left|e(k)\hat{y}(k)\right|.$$
(3.11)

Aplicando-se 3.11 em 3.10, chega-se a seguinte relação:

$$|e(k)\hat{y}(k)| \ge |y_i(k)\hat{y}(k)| - |\hat{y}(k)^2|.$$
 (3.12)

Fazendo $y_i(k) = \Psi_i(k-1)^T \boldsymbol{\theta}$ e $\hat{y}(k) = \hat{\Psi}(k-1)^T \hat{\boldsymbol{\theta}}$, tem-se que:

$$|e(k)\hat{y}(k)| \ge \left| (\Psi_i(k-1)^T \boldsymbol{\theta}) (\hat{\Psi}(k-1)^T \hat{\boldsymbol{\theta}} \right| - \left| (\hat{\Psi}(k-1)^T \hat{\boldsymbol{\theta}})^2 \right|.$$
(3.13)

Ou seja, quanto menor for a correlação entre o erro e a simulação do modelo, melhor será a resposta do modelo. Mesmo no caso em que as estruturas não são idênticas, a menor correlação é capaz de escolher o melhor modelo, como pode ser analisado em 3.12. Quanto menor for a correlação, mais próximo será y(k) de $y_i(k)$.

Definição: Seja um conjunto $\hat{\Theta}^*$ de parâmetros de modelos candidatos, cujas estruturas são iguais e os parâmetros estimados são deiferentes. Para cada modelo candidato $\hat{\theta}$ ao longo do conjunto $\hat{\Theta}^*$, será utilizado o coeficiente de correlação como função utilidade, que é definido como:

$$\boldsymbol{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{\sum_{k=1}^{N} (\eta(k) - \bar{\eta})(\hat{y}(k) - \bar{\hat{y}})}{\sqrt{[(\sum_{k=1}^{N} \eta(k) - \bar{\eta})^2][(\sum_{k=1}^{N} (\hat{y}(k) - \bar{\hat{y}}))^2]}}$$
(3.14)

sendo N o número de amostras para cada série temporal disponível. O símbolo () denota valor médio, $\eta(k)$ é o erro de simulação e $\hat{y}(k)$ é a simulação do modelo, no instante k. O decisor pode ser então escrito como:

$$DC(\boldsymbol{\theta}^*) = \frac{\min}{\hat{\theta} \in \hat{\Theta}^*} \boldsymbol{J}_{corr}(\hat{\boldsymbol{\theta}}).$$
(3.15)

Suponha que exista um modelo com um vetor de parâmetros θ^* que corresponde exatamente ao do sistema. Então

$$J_{corr}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^*) < J_{corr}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad \forall \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} \neq \boldsymbol{\theta}^*.$$
(3.16)

3.3 Comentários Finais

Este capítulo mostra o trabalho desenvolvido por Barroso (2006) onde um decisor automático de correlação do erro de simulação em relação aos dados simulados é apresentado. Este método é robusto a ruído e dessa maneira a não-correlação entre os dados, o que indica a não-polarização dos parâmetros. Assim, o melhor modelo é aquele que tem parâmetros que minimizam o coeficiente de correlação entre o erro de simulação e a simulação do modelo.

Capítulo 4

Blocos Interconectados - Modelo de Wiener

Inicialmente, os modelos matemáticos usados para representar os sistemas eram lineares, independente da característica linear ou não-linear do sistema. Estes modelos eram considerados suficientes, mesmo não conseguindo reproduzir o comportamento dinâmico do sistema. Da necessidade de uma representação mais significativa dos sistemas estudados surgiram ferramentas matemáticas de identificação não-linear.

Dentre as representações não-lineares destacam-se os modelos de blocos interconectados. Estes modelos surgiram no momento de "transição"entre a teoria linear, já consolidada, e o início da teoria envolvendo modelos não-lineares. Os modelos de blocos interconectados representam a dinâmica do sistema através de um modelo linear e uma função estática não-linear é responsável por representar a característica estática.

Até a década de oitenta, os modelos de blocos interconectados foram amplamente utilizados mas, com o surgimento dos modelos NARMAX (*Nonlinear AutoRegressive Moving Average model with eXogenous inputs*) polinomiais (Billings e Chen, 1989), esta representação perdeu sua popularidade.

Na década de noventa, com a evolução da utilização de técnicas de controle de sistemas, os modelos de blocos interconectados ressurgiram devido ao benefício da análise da estabilidade do modelo poder ser feita através do bloco dinâmico linear, mesmo sendo uma representação não-linear.

Nos modelos de blocos interconectados, a maneira com que estes blocos estão dispostos é que determina cada tipo de modelo. Esta diferença na disposição dos blocos acarreta em um comportamento dinâmico diferente para cada modelo. Se o bloco que contém a não-linearidade estática precede o bloco que contém a dinâmica linear temos um modelo de Hammerstein, como pode ser visto na figura 2.1. No modelo de Wiener, o bloco dinâmico linear é que precede o bloco estático não-linear.

O maior obstáculo em identificação de sistemas não-lineares usando representações de Hammerstein e de Wiener é a obtenção do sinal intermediário aos blocos. Este sinal não está disponível e é inerente a tais representações. Logo, faz-se necessária a utilização de informação *a priori* e/ou alguma restrição para estimar este sinal; como exemplo, a utilização da curva estática (Coelho et al., 2002; Santos et al., 2010).

Neste trabalho, o modelo de blocos interconectados utilizado é o modelo de Wiener. Dessa forma, toda a base teórica deste capítulo será referente à esta representação. Este capítulo apresenta o modelo de Wiener e suas propriedades. No capítulo seguinte (5) é apresentado o Estado da Arte dos Modelos

Incertos de Wiener, onde um estudo das incertezas dos parâmetros estimados para estes modelos é feito.

4.1 Propriedades dos Modelos de Wiener

Como visto na seção 2.1.3, o modelo de Wiener é representado na figura 4.1. A característica deste modelo é apresentar o bloco da dinâmica linear precedendo o bloco da função estática não-linear.



Figura 4.1: Representação do Modelo de Wiener

O sinal de saída do modelo de Wiener é obtido pelo mapeamento do sinal intermediário, $\nu(k)$, através da função estática não-linear f^{ℓ} , tal que:

$$y(k) = f^{\ell}(\nu(k)).$$
 (4.1)

Para estimar o sinal intermediário $\nu(k)$, é necessário obter a inversa da função estática não-linear $f^{-1}(\ell)$. Por simplicidade, chamaremos a inversa da função estática não-linear de g^{ℓ_1} (Coelho et al., 2002). Logo,

$$\nu(k) = g^{\ell_1}(y(k)), \tag{4.2}$$

sendo ℓ_1 o grau de não-linearidade da função inversa g(.).

O bloco dinâmico linear é representado por um modelo ARX ¹, onde u(k) e $\nu(k)$ representam o par entrada/saída, respectivamente.

$$\nu(k) = \sum_{j=1}^{n_{\nu}} \theta_j \nu(k-j) + \sum_{i=1}^{n_u} \sigma_i u(k-i).$$
(4.3)

Substituindo a equação 4.1 em 4.3, tem-se:

$$y(k) = f^{\ell} \left(\sum_{j=1}^{n_{\nu}} \theta_j \nu(k-j) + \sum_{i=1}^{n_u} \sigma_i u(k-i) \right).$$
(4.4)

Considerando um atraso j a equação 4.2 fica:

$$\nu(k-j) = g^{\ell_1}(y(k-j)). \tag{4.5}$$

¹Para este trabalho optou-se pela representação NARX polinomial, logo, os modelos de Wiener aqui apresentados serão representados na forma polinomial.

4.1. PROPRIEDADES DOS MODELOS DE WIENER

Substituindo-se, então, a equação 4.5 em 4.4, o modelo polinomial da representação de Wiener é obtido com relação aos sinais de entrada, u(k), e saída, y(k), do sistema:

$$y(k) = f^{\ell} \left(\sum_{j=1}^{n_y} \theta_j g^{\ell_1}(y(k-j)) + \sum_{i=1}^{n_u} \sigma_i u(k-i) \right).$$
(4.6)

A equação 4.6 descreve um caso particular do modelo NARX polinomial, com grau de nãolinearidade ℓ , que pode conter termos cruzados. O modelo NARX polinomial é constituído por termos com grau de não-linearidade m, variando na faixa de $1 \le m \le \ell$. Assim sendo, cada termo de grau m, pode conter um fator de grau p do tipo y(k-j) e um fator de grau (m-p) do tipo u(k-i) (Aguirre et al., 2004). Em síntese, um modelo NARX polinomial de Wiener pode conter termos cruzados do tipo $y(k-j)^p u(k-i)^{(m-p)}$, para $i = 1, \ldots, n_u$ e $j = 1, \ldots, n_y$. Porém, não pode conter termos do tipo (Coelho et al., 2002):

Dessa forma, conclui-se que nos modelos de Wiener, a não-linearidade pode atuar tanto nos termos de entrada quanto nos termos de saída mas, não atua em termos cruzados com atrasos diferentes.

4.1.1 Pontos fixos

A partir do procedimento para obtenção de pontos fixos para sistemas não autônomos descrito na seção 4.1.1, determina-se os pontos fixos do modelo de Wiener. Reescrevendo o modelo de Wiener da equação 4.6 em regime estático:

$$\bar{y} = f^{\ell} \left[\left(\sum_{j=1}^{n_y} \theta_j \right) g^{\ell_1}(\bar{y}) + \left(\sum_{i=1}^{n_u} \sigma_i \right) \bar{u} \right].$$
(4.7)

Multiplicando ambos os lados da equação 4.7 por g^{ℓ_1} , tem-se:

$$g^{\ell_1}(\bar{y}) = \frac{(\sum_{i=1}^{n_u} \sigma_i)\bar{u}}{1 - (\sum_{j=1}^{n_y} \theta_j)}.$$
(4.8)

Dessa forma, o ponto fixo do modelo de Wiener é obtido através da equação:

$$\bar{y} = f^{\ell} \left(\frac{(\sum_{i=1}^{n_u} \sigma_i) \bar{u}}{1 - (\sum_{j=1}^{n_y} \theta_j)} \right).$$
(4.9)

e o ganho do modelo ARX em estado estacionário:

$$\bar{y} = Gf^{\ell}(\bar{u}). \tag{4.10}$$

A equação 4.10 mostra que os modelos de Wiener possuem apenas um ponto fixo \bar{y} , para cada entrada estacionária \bar{u} . A equação 4.10 caracteriza a curva estática do modelo de Wiener para o ponto de operação (\bar{u}, \bar{y}) do sistema (Coelho et al., 2002).
4.1.2 Estabilidade dos Pontos Fixos

A análise da estabilidade do ponto fixo encontrado a partir da equação 4.10 é feita com o estudo dos autovalores em torno do ponto fixo \bar{y} .

$$\lambda^{n_y} - \Delta_1 \lambda^{n_y - 1} - \dots - \Delta_{n_y - 1} \lambda - \Delta_{n_y} = 0$$
(4.11)

$$\lambda^{n_{y}} - \left[\ell f^{\ell-1} \left(\theta_{1} g^{\ell_{1}}(\bar{y}) + \sigma_{1}(\bar{u})\right) \times (\theta_{1}\ell_{1}) g^{\ell_{1}-1}(\bar{y})\right] \lambda^{n_{y}-1} - \ldots - \Delta_{n_{y}} = (4.12)$$
$$\ell f^{\ell-1} \left(\theta_{n_{y}} g^{\ell_{1}}(\bar{y}) + \sigma_{n_{u}}(\bar{u})\right) \times \left(\theta_{n_{y}}\ell_{1}\right) g^{\ell_{1}-1}(\bar{y}) = 0.$$

Os autovalores λ da matriz Jacobiana são as raízes da equação 4.13. Esta equação nos mostra que a estabilidade do ponto fixo dos modelos de Wiener depende dos parâmetros do modelo dinâmico (θ_i e σ_i), da função estática não-linear f^{ℓ} e de sua inversa g^{ℓ_1} . Asim podemos concluir que os autovalores dos modelos de Wiener não são constantes, eles variam conforme o ponto de operação (\bar{u}, \bar{y}) do sistema (Aguirre et al., 2005).

4.2 Comentários Finais

Este capítulo descreve as características e propriedades da representação de Wiener para modelos de blocos interconectados. Em resumo, os modelos de Wiener apresentam as seguintes propriedades (Coelho et al., 2002):

- a não-linearidade atua nos sinais de entrada e de saída do sistema;
- admitem apenas uma entrada \bar{u} e uma saída correspondente \bar{y} em estado estacionário;
- possuem autovalores que podem variar com o ponto de operação (\bar{u}, \bar{y}) do sistema.

Capítulo 5

Contribuição - Mapeamento da Incerteza

Neste capítulo é apresentado o mapeamento das incertezas para o modelo de Wiener. Este mapeamento é feito comparando o modelo de Wiener a um modelo *NARX* Polinomial identificado via Identificação Biobjetivo. Neste processo, as incertezas dos parâmetros do modelo são restringidas à apenas uma pequena seção do Gráfico de Pareto, região esta próxima ao modelo escolhido para os dados de identificação. Ao restringir a região de localização da incerteza, restringe-se também a região do controlador a ser aplicado ao sistema.

5.1 Modelos Incertos de Wiener

Com a retomada da utilização de representações não lineares para a modelagem de sistemas, a utilização dos modelos de blocos interconectados voltou a ter destaque. Conforme relatado na literatura, os modelos de Hammerstein e Wiener são tidos como uma proposta atraente para a representação de processos não-lineares, devido à sua simplicidade e sua propriedade de serem válidos ao longo de uma região maior do que um modelo operacional LTI (*Linear Time Invariante*) (Figueroa et al., 2008). Estudos realizados por Biagiola e Figueroa (2009) abordam uma nova questão - a caracterização das incertezas dos modelos de blocos interconectados para a utilização em projetos de controladores.

5.1.1 Estado da Arte

A utilização dos modelos de blocos interconectados para representação de sistemas não-lineares tem sido tratada na literatura em diversos contextos, tais como processos químicos (Margoti et al., 2010; Pearson e Pottman, 2000; Zhu, 1999; Norquay et al., 1998; Kalafatis et al., 1995) e biológicos (Hunter e Korenberg, 1986) além da sua aplicação para projetos de controladores como em Cervantes et al. (2003) e Biagiola et al. (2004). São duas as vantagens de se usar modelos de Wiener: o baixo esforço computacional associado à identificação do modelo e a adequação do projeto de controle.

Os modelos de blocos interconectados foram muito utilizados na década de oitenta, mas nesta mesma época também foram apresentados os modelos polinomiais NARMAX (*Nonlinear AutoRegressive Moving Average model with eXogenous inputs*) através do trabalho de Billings e Leontaritis (1982) e com eles surgiram também novas técnicas de estimação de parâmetros e seleção de estrutura para modelos não-lineares. Assim, os estudos de sistemas não-lineares ganharam modelos mais próximos da representação dos dados reais do sistema além de serem válidos para uma maior faixa

5.1. MODELOS INCERTOS DE WIENER

de operação quando comparados aos modelos LTI (do inglês *Linear Time Invariante*). Mas, a aplicação da teoria de controle para estes modelos não-lineares não se tornou viável devido a sua alta complexidade. Dessa forma, na década de noventa a utilização dos modelos de blocos interconectados retomou o seu destaque, principalmente pela possibilidade de representação de sistemas com características não-lineares distintas em conjunto com a facilidade de utilização da teoria de controle linear já consolidada (Cervantes et al., 2003; Norquay et al., 1998; Fruzzetti et al., 1997).

Após o intenso desenvolvimento de estudos sobre os modelos de blocos interconectados e a importância adquirida por esta representação ao longo da primeira década do século XXI, esta linha de pesquisa ganhou uma nova vertente, a consideração e análise das incertezas desses modelos. Com essa nova linha de estudos foram desenvolvidos trabalhos cujo tema abordam os modelos incertos de Hammerstein e/ou modelos incertos de Wiener. Estes trabalhos têm o objetivo de delimitar a região de incerteza dos parâmetros dos modelos encontrados para, com isso, garantir uma melhor representação do sistema em estudo.

Em 2007, Figueroa et al. (2008) apresentou um trabalho sobre a identificação da incerteza do modelo de Wiener. Neste trabalho, o autor mostrou, primeiramente, um método de identificação do modelo e, após a identificação dos parâmetros, iniciou-se o processo de identificação das incertezas destes parâmetros encontrados. Uma abordagem paramétrica para o modelo de Wiener foi apresentada permitindo-se descrever a incerteza do modelo como um conjunto de parâmetros. A partir dos dados de entrada e saída do processo, a identificação de um modelo matemático de Wiener apropriado para o sistema foi feita. O procedimento descrito foi realizado em duas partes. Primeiramente, com a utilização de um conhecimento prévio sobre o sistema - em geral a sua curva estática - a estrutura do modelo foi definida. Na segunda etapa, os parâmetros do modelo foram computados de forma a minimizar a diferença entre os resultados do modelo e os dados de validação $(\hat{y}(k) - y(k))$. Os parâmetros encontrados para o modelo foram denominados Conjunto de Parâmetros Nominais N.

Em 2009, este trabalho foi extendido para abordar também as incertezas para os modelos de Hammerstein (Biagiola e Figueroa, 2009). Neste trabalho, após a identificação dos parâmetros do modelo foram determinados os limites da região onde tais parâmetros estão contidos, ou seja, são determinados os limites da região de incerteza dos parâmetros do modelo através de um algoritmo de programação linear. A abordagem utilizada foi baseada na suposição de que um modelo paramétrico incerto de blocos interconectados deve ser identificado assumindo sua fonte de incerteza como desconhecida. Neste trabalho, Biagiola e Figueroa (2009) consideraram que a estrutura do sistema em estudo possa ser tanto de um modelo de Hammerstein quanto de um modelo de Wiener, cuja não-linearidade estática determina inteiramente a característica em estado estacionário do modelo. Novamente, algum tipo de incerteza também está presente no sistema. A metodologia resultante deste trabalho é robusta no sentido de que o conjunto de parâmetros identificados é tal que qualquer um dos dados coletados podem ser reproduzidos por pelo menos um dos modelos do conjunto. Esse conjunto de parâmetros foi obtido através da resolução de um problema de otimização simples cuja abordagem assegura a existência de um conjunto convexo de modelos que possa descrever os dados coletados de todo o processo.

Em Biagiola e Figueroa (2011) os autores novamente utilizam o modelo de Wiener, onde a metodologia proposta faz uso de um procedimento de identificação robusta a fim de obter um modelo robusto para representar o sistema incerto. O modelo obtido é utilizado para projetar um controlador preditivo através da teoria de LMI's (do inglês *Linear Matrix Inequalities*). A principal característica do trabalho é a vantagem da natureza estática da não-linearidade pois, permite resolver o problema de controle concentrando-se apenas na dinâmica linear.

Outros trabalhos também abordam o estudo das incertezas dos parâmetros de modelos não-lineares como Dai et al. (2011), onde o problema de identificação de um modelo incerto é convertido para um problema de otimização não-linear dos limites superior e inferior para a estimativa dos parâmetros incertos do modelo de blocos orientados aeroelásticos. No trabalho de da Rosa et al. (2010) o cálculo dos limites da incerteza é aplicado aos coeficientes de expansão de modelos não-lineares de Volterra e em Hwang et al. (2011) um método não iterativo de mínimos quadrados é utilizado para identificar um modelo discreto de Wiener, onde critérios de erro são propostos para tornar o algoritmo robusto ao ruído.

5.1.2 Caracterização das Incertezas do Modelo

Para obter a incerteza relacionada a um modelo nominal, uma abordagem típica é definir um conjunto de possíveis modelos que representem o comportamento do processo. Isso é possível considerando-se um conjunto Θ de parâmetros tal que, quando estes parâmetros θ 's $\in \Theta$ são utilizados, todo o conjunto de entradas de excitação **u** é associado a um conjunto de saída **y** (Figura 5.1). Desta forma, assume-se o mesmo formato para todos os possíveis modelos no conjunto de incertezas. Ao comparar-se o conjunto $\{\hat{y}/\hat{y} = f(\mathbf{u}, \theta), \theta \in \Theta\}$ - saída estimada - com o conjunto **y** - saída do sistema - pode-se avaliar a capacidade do modelo de representar o processo.



Figura 5.1: Modelo sobre incertezas (Figueroa et al., 2008)

Conforme mostrado na seção 4.1, o modelo de Wiener é composto de um modelo ARX para o bloco dinâmico linear (Equação 4.3) e uma função estática não-linear para o bloco estático como um polinômio de grau N:

$$y(k) = f^{\ell}(\nu(k)) \tag{5.1}$$

em que f^ℓ é um polinômio de grau $\ell.$

5.1. MODELOS INCERTOS DE WIENER

Logo, fazendo-se $\ell = N$ tem-se:

$$f^{N} = \delta_{0}\nu(k)^{N} + \delta_{1}\nu(k)^{N-1} + \delta_{2}\nu(k)^{N-2} + \ldots + \delta_{N-1}\nu(k) + \delta_{N}$$
(5.2)

ou

$$f^{\ell} = \sum_{i=0}^{N_{\nu}} \delta_i \nu(k)^{N_{\nu}-i}.$$
(5.3)

Em Figueroa et al. (2008), para a caracterização das incertezas do modelo de Wiener, o autor definiu um conjunto de parâmetros H para o bloco dinâmico linear e um conjunto de parâmetros P para o bloco estático não-linear. Dessa forma, ele separa os parâmetros do modelo do sistema em dois grupos distintos, o que permitiu iniciar o processo de delimitação das incertezas do modelo.

$$H = \left\{ h : h_i^l \le h_i \le h_i^u, 1 \le i \le M \right\}$$
(5.4)

$$P = \left\{ p : p_i^l \le p_i \le p_i^u, 1 \le i \le N \right\}$$
(5.5)

Em que h_i^l é o limite inferior do conjunto de parâmetros H do bloco linear e, consequentemente, h_i^u representa o limite superior. $M = n_\nu + n_u$ é a soma dos máximos atrasos de entrada e de saída do modelo correspondente ao bloco linear. Para o bloco não linear $p_i^l e p_i^u$ representam os limites inferior e superior do vetor de parâmetros P e $N = \ell$ é o grau de não linearidade.

Ao assumir que a função f^{ℓ} do bloco estático não-linear é inversível para todo $p \in P$, ou seja, que existe uma função g^{ℓ_1} que permite a identificação do sinal intermediário $\nu(k)$, podemos determinar os conjuntos que contêm os limites dos parâmetros do modelo de Wiener. Limites estes que caracterizam as incertezas dos parâmetros do modelo.

Dada uma entrada u(k), o sistema linear incerto é definido pelo mapeamento do conjunto de parâmetros do modelo linear H sobre o conjunto V_u no instante k:

$$V_u = \left\{ \nu : \nu(k) = \sum_{j=0}^{n_\nu} \theta_j \nu(k-j) + \sum_{i=0}^{n_u} \sigma_i u(k-i), M = n_\nu + n_u, h = (\theta_j + \sigma_i), h \in H \right\}.$$
 (5.6)

onde V_u é a região de incerteza do conjunto H de parâmetros do bloco linear.

Por outro lado, se considerarmos a descrição da incerteza nos parâmetros de P, uma saída y(k) mapeia P sobre o conjunto V_y no instante k:

$$V_y = \left\{ \nu : \nu(k) = \sum_{i=1}^N p_i g_i(y(k)), p = [p_1, \dots, p_N]^T, p \in P \right\}.$$
(5.7)

sendo V_y a região de incerteza dos parâmetros da função estática não-linear presentes no conjunto P.



Figura 5.2: Modelo Incerto de Wiener (Figueroa et al., 2008)



Figura 5.3: Conjunto de incertezas do Modelo de Wiener (Figueroa et al., 2008)

A Figura 5.3 mostra as duas regiões de incerteza dos parâmetros, $V_u e V_y$. Nela pode-se ver que o conjunto de parâmetros coincide com a descrição da incerteza se a interseção entre os dois conjuntos for não-vazia, $Vy \cap Vu \neq \emptyset$. Desta forma, o ponto u(k) é mapeado sobre Vu através do vetor de parâmetros H do modelo ARX. Da mesma forma que, se $Vy \cap Vu \neq \emptyset$, o ponto y(k) é mapeado sobre Vy através da inversa da função f^{ℓ} , representada pelo vetor de parâmetros P. Logo, somente é necessário calcular os limites dos vetores de parâmetros dos conjuntos H e P para se satisfazer esta condição.

Incerteza do modelo concentrada no bloco dinâmico linear

Para o caso das incertezas do modelo estarem concentradas apenas no bloco linear, tem-se o mapeamento do conjunto de dados de \boldsymbol{u} para o conjunto $\boldsymbol{\nu} = g^{\ell_1} \boldsymbol{y}$. Para definir o modelo incerto que permita descrever o conjunto completo de dados do sistema, deve-se calcular o conjunto $\left\{h: h = \hat{h} + \delta^h, -h_i^l \leq \delta_i^h \leq h_i^u, i = 0, \dots, N_l\right\}$.

$$\min_{h^l, h^u} \sum_{i=0}^{N_l} (h^l_i + h^u_i)$$
(5.8)

5.1. MODELOS INCERTOS DE WIENER

sujeito a

$$[(h^{l})^{T}, (h^{u})^{T}] \gamma_{B} \ge 0; k = 1, \dots, N$$
(5.9)

$$-\left[(h^{u})^{T},(h^{l})^{T}\right]\gamma_{B} \leq 0; k = 1,\dots,N$$
(5.10)

$$h_i^l, h_i^u \ge 0.$$

onde h^l , h^u são os limites inferior e superior, respectivamente, do conjunto de incertezas para o bloco dinâmico linear. O vetor $\gamma_B(k)$ nada mais é do que a divisão do vetor de regressores do modelo dinâmico linear ARX em duas partes. Uma parte composta somente dos termos positivos do vetor e os termos negativos igualados a zero, e a outra parte somente com os termos negativos e os termos positivos igualados a zero.

$$\gamma_B(k) \stackrel{\Delta}{=} [(B^-(u(k)))^T, (B^+(u(k)))^T]^T$$
(5.11)

Incerteza do modelo concentrada na função não-linear

Neste caso vamos supor que a incerteza está concentrada no bloco estático não-linear (Equação 4.1). O modelo incerto da função estática não-linear mapeia o conjunto de dados de \boldsymbol{y} para o conjunto $\boldsymbol{\nu} = (h^l)^T \boldsymbol{\nu} + (h^u)^T \boldsymbol{u}$. Então, para definir o modelo incerto que permite descrever o conjunto completo de dados do sistema, deve-se calcular o conjunto $\{p: p = \hat{p} + \delta^p, -p_i^l \le \delta_i^p \le p_i^u, i = 0, \dots, N_n\}$.

$$\min_{p^l, p^u} \sum_{i=0}^{N} (p^l_i + p^u_i)$$
(5.12)

sujeito a

$$-\left[(p^{l})^{T},(p^{u})^{T}\right]\gamma_{g} \leq 0; k = 1,\dots,N$$
(5.13)

$$\left[(p^l)^T, (p^u)^T \right] \gamma_g \ge 0; k = 1, \dots, N$$
(5.14)

 $p_i^l, p_i^u \ge 0.$

em que p^l e p^u são os limites inferior e superior, respectivamente, do conjunto de incertezas para o bloco da função estática não-linear. O vetor $\gamma_a(k)$ é a divisão do vetor de regressores da função em

uma parte composta somente dos termos positivos e os termos negativos igualados a zero, e a outra parte somente com os termos negativos e os termos positivos igualados a zero.

$$\gamma_g(k) \stackrel{\Delta}{=} [(g^-(y(k)))^T, (g^+(y(k)))^T]^T.$$
(5.15)

O procedimento de mapeamento da incerteza concentrada no bloco da função estática não-linear não será desenvolvido neste trabalho, sendo apenas citado, pois o seu desenvolvimento envolve a utilização de sistemas incertos de Wiener com múltiplas curvas para representação da característica estática do sistema - o que não é o foco deste trabalho.

Incerteza do modelo dividida entre os blocos linear e não-linear

Neste caso, os autores (Figueroa et al., 2008) consideram o caso mais geral, onde a incerteza está dividida em ambos os blocos, linear e não-linear. Para esta situação o cruzamento das incertezas nos modelos linear e não-linear deve ser não vazio.

Os limites da incerteza dos parâmetros são obtidos resolvendo-se o problema de otimização mostrado nas equações 5.16, 5.17 e 5.18.

$$\min_{h^l, h^u, p^l, p^u} \left(\alpha \sum_{i=1}^M (h^u_i - h^l_i) + (1 - \alpha) \sum_{i=2}^N (p^u_i - p^l_i) \right)$$
(5.16)

sujeito a

$$\left[(h^l)^T, (h^u)^T, -(p^u)^T, -(p^l)^T \right] \left[\begin{array}{c} \gamma_B(k) \\ \gamma_g(k) \end{array} \right] \ge 0; k = 1, \dots, N.$$
(5.17)

$$\left[(h^{u})^{T}, (h^{l})^{T}, -(p^{l})^{T}, -(p^{u})^{T} \right] \left[\begin{array}{c} \gamma_{B}(k) \\ \gamma_{g}(k) \end{array} \right] \le 0; k = 1, \dots, N.$$
(5.18)

onde h^l , h^u , p^l e p^u são os limites inferiores e superiores dos conjuntos de incertezas e o parâmetro $\alpha \in (0, 1)$ é um fator de seleção que divide o peso da incerteza entre o bloco dinâmico linear e o bloco estático não-linear.

As restrições do problema de otimização (equações 5.17 e 5.18) asseguram a condição de que a interseção entre os dois conjuntos de incertezas seja não-vazia, $V_y \cap V_u \neq \emptyset$.

Desde que $V_y, V_u \in \Re$, o problema de identificação pode ser analisado graficamente como um simples problema de interseção (Figura 5.4).



Figura 5.4: Representação gráfica do problema de interseção (Biagiola e Figueroa, 2009)

Em que:

$$V_u = \{ \nu : B \le \nu \le A \},$$
(5.19)

e

$$V_y = \{\nu : D \le \nu \le C\}.$$
 (5.20)

A, B, C e D são todos valores reais. Observando a Figura 5.4 pode-se ver que o limite superior de V_u , como função do conjunto de parâmetros H, é dado como

$$A = [(h^{l})^{T}, (h^{u})^{T}]\gamma_{B}.$$
(5.21)

Da mesma forma, é possível ver que o limite inferior de V_u é dado por:

$$B = [(h^{u})^{T}, (h^{l})^{T}]\gamma_{B}.$$
(5.22)

Os limites superior e inferior de V_y são:

$$C = [(p^{l})^{T}, (p^{u})^{T}]\gamma_{g},$$
(5.23)

e

$$D = [(p^{u})^{T}, (p^{l})^{T}]\gamma_{g}.$$
(5.24)

Com base nestas definições o autor mostra que a condição $V_y \cap V_u \neq \emptyset$ será satisfeita se, e somente se, o limite superior de V_u for maior que o limite inferior de V_y (isto é, se $A \ge D$), e se o limite inferior de V_u for menor que o limite superior de V_y (isto é, se $B \le C$).

A restrição $A - D \ge 0$ é o que mostra a equação 5.17, da mesma forma que, $C - B \ge 0$ é mostrada na equação 5.18. Se estas restrições forem satisfeitas, o modelo encontrado é definido como estável.

Desta forma Figueroa et al. (2008) conclui seu trabalho afirmando que o problema de otimização, representado pelas equações 5.16, 5.17 e 5.18, encontra um modelo incerto capaz de minimizar sua incerteza enquanto assegura a reprodução do comportamento dos dados coletados do sistema.

5.2 Modelo de Wiener para uma não-linearidade ℓ

Conforme mostrado no Capítulo 4 o modelo de Wiener para uma não-linearidade ℓ tem a seguinte forma:

$$y(k) = f^{\ell} \left(\sum_{j=1}^{n_{\nu}} \theta_j \nu(k-j) + \sum_{i=1}^{n_u} \sigma_i u(k-i) \right)$$
(5.25)

ou seja:

$$y(k) = \left(\sum_{j=1}^{n_{\nu}} \theta_j \nu(k-j) + \sum_{i=1}^{n_u} \sigma_i u(k-i)\right)^{\ell}.$$
(5.26)

Para definir as incertezas dos parâmetros do modelo, primeiramente, como no trabalho de Figueroa et al. (2008), a incerteza é trabalhada de forma isolada. Considera-se a incerteza presente ou no bloco dinâmico linear ou presente no bloco estático não-linear.

Seja a primeira hipótese:

• Hipótese 1: Considere que, para o modelo em questão, as incertezas dos parâmetros estão concentradas apenas no bloco dinâmico linear ARX.

Dessa forma, para representar as incertezas do modelo, tem-se:

$$\theta_j = (\theta_j + \Delta \theta) \mathbf{e} \ \sigma_i = (\sigma i + \Delta \sigma).$$

Logo, a equação 5.26 na presença das incertezas do bloco ARX fica da seguinte forma:

$$y(k) = \left(\sum_{j=1}^{n_{\nu}} (\theta_j + \Delta\theta)\nu(k-j) + \sum_{i=1}^{n_u} (\sigma_i + \Delta\sigma)u(k-i)\right)^{\ell}.$$
(5.27)

Agora, suponha que a não-linearidade do modelo seja $\ell = 2$. A Equação 5.27 fica da seguinte forma:

$$y(k) = \left(\sum_{j=1}^{n_{\nu}} (\theta_j + \Delta \theta) \nu(k-j) + \sum_{i=1}^{n_u} (\sigma_i + \Delta \sigma) u(k-i)\right)^2.$$
 (5.28)

Resolvendo a Equação 5.28:

$$y(k) = \sum_{j=1}^{n_{\nu}} (\theta_j + \Delta \theta)^2 \nu(k-j)^2 + 2\sum_{j=1}^{n_{\nu}} \sum_{i=1}^{n_u} (\theta_j + \Delta \theta) \nu(k-j) (\sigma_i + \Delta \sigma) u(k-i) + \sum_{i=1}^{n_u} (\sigma_i + \Delta \sigma)^2 u^2(k-i).$$
(5.29)

De forma semelhante, para uma não-linearidade $\ell = 3$, o modelo de Wiener fica:

$$y(k) = \left(\sum_{j=1}^{n_{\nu}} (\theta_j + \Delta \theta) \nu(k-j) + \sum_{i=1}^{n_u} (\sigma_i + \Delta \sigma) u(k-i)\right)^3.$$
 (5.30)

Lembrando que $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, tem-se:

$$y(k) = \sum_{j=1}^{n_{\nu}} (\theta_{j} + \Delta \theta)^{3} \nu^{3} (k - j) + \\ + 3 \sum_{j=1}^{n_{\nu}} \sum_{i=1}^{n_{u}} [(\theta_{j} + \Delta \theta)^{2} \nu^{2} (k - j) (\sigma_{i} + \Delta \sigma) u(k - i) + \\ + (\theta_{j} + \Delta \theta) \nu (k - j) (\sigma_{i} + \Delta \sigma)^{2} u^{2} (k - i)] + \\ + \sum_{i=1}^{n_{u}} (\sigma_{i} + \Delta \sigma)^{3} u^{3} (k - i).$$
(5.31)

De forma geral, fazendo-se a não-linearidade do sistema como ℓ e utilizando-se a fórmula da *Expansão Binomial*

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots + b^n$$

pode-se encontrar a fórmula geral do modelo de Wiener para uma não-linearidade $\ell = N$ qualquer, com a incerteza dos parâmetros presentes no bloco dinâmico linear.

$$y(k) = \left(\sum_{j=1}^{n_{\nu}} (\theta_j + \Delta\theta)\nu(k-j) + \sum_{i=1}^{n_u} (\sigma_i + \Delta\sigma)u(k-i)\right)^N$$
(5.32)

onde:

$$y(k) = \sum_{j=1}^{n_{\nu}} (\theta_{j} + \Delta \theta)^{N} \nu^{N} (k - j) + \\ + N \sum_{j=1}^{n_{\nu}} \sum_{i=1}^{n_{u}} (\theta_{j} + \Delta \theta)^{N-1} \nu^{N-1} (k - j) (\sigma_{i} + \Delta \sigma) u(k - i) + \\ + \frac{N(N-1)}{2!} \sum_{j=1}^{n_{\nu}} \sum_{i=1}^{n_{u}} (\theta_{j} + \Delta \theta)^{N-2} \nu^{N-2} (k - j) (\sigma_{i} + \Delta \sigma)^{2} u^{2} (k - i) + \dots + \\ + \sum_{i=1}^{n_{u}} (\sigma_{i} + \Delta \sigma)^{N} u^{N} (k - i).$$
(5.33)

A equação 5.33 pode ser chamada de Fórmula Geral do Modelo de Wiener com incertezas para uma não-linearidade $\ell = N$. Esta equação ilustra a forma com que as incertezas dos parâmetros do bloco dinâmico linear do modelo de Wiener se comportam conforme o grau de não-linearidade do sistema.

Para ilustrar tal comportamento, considere o seguinte modelo ARX:

$$\nu(k) = 0,987\nu(k-1) + 0,145u^2(k-1) - 0,053\nu(k-2),$$
(5.34)

e considere as incertezas dos parâmetros do modelo como $\Delta \theta$ e $\Delta \sigma$, respectivamente, para os regressores em ν e em u. Logo:

$$\nu(k) = (0,987 + \Delta\theta_1)\nu(k-1) + (0,145 + \Delta\sigma_1)u^2(k-1) + (-0,053 + \Delta\theta_2)\nu(k-2).$$
(5.35)

Para uma não-linearidade $\ell = 1$, tem-se um polinômio de grau N = 1 para representar a função estática não-linear na forma $a_0\nu(k) + a_1$, onde a_1 é o ganho do sistema.

$$y(k) = a_0[(0,987 + \Delta\theta_1)\nu(k-1) + (0,145 + \Delta\sigma_1)u^2(k-1) + (-0,053 + \Delta\theta_2)\nu(k-2) + a_1.$$
(5.36)

5.2. Modelo de Wiener para uma não-linearidade ℓ

Para um ganho igual a $a_0 = -5$ e $a_1 = 0, 5$, tem-se:

$$y(k) = (-4,935 - 5\Delta\theta_1)\nu(k-1) + (-0,725 - 5\Delta\sigma_1)u^2(k-1) + (0,265 - 5\Delta\theta_2)\nu(k-2) + +0,5.$$
(5.37)

Agora considere a segunda hipótese:

 Hipótese 2: Considere que, para o modelo em questão, as incertezas dos parâmetros estão concentradas apenas no bloco da função estática não-linear *f*^ℓ.

Para representar esta hipótese, as incertezas do modelo devem estar presentes na função polinomial estática não-linear.

Seja f^{ℓ} igual ao polinômio de grau N.

$$y(k) = \delta_0 \nu(k)^N + \delta_1 \nu(k)^{N-1} + \delta_2 \nu(k)^{N-2} + \ldots + \delta_{N-1} \nu(k) + \delta_N,$$
(5.38)

ou seja:

$$y(k) = \sum_{i=0}^{N} \delta_i \nu(k)^{N-i},$$
(5.39)

onde $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_N$ representam os parâmetros da função.

Considerando-se as incertezas dos parâmetros do polinômio como $\delta = (\delta + \Delta \delta)$.

A função estática polinomial não-linear, na presença de incertezas, fica da seguinte forma:

$$y(k) = (\delta_0 + \Delta\delta)\nu(k)^N + (\delta_1 + \Delta\delta)\nu(k)^{N-1} + (\delta_2 + \Delta\delta)\nu(k)^{N-2} + \dots + (\delta_{N-1} + \Delta\delta)\nu(k) + (\delta_N + \Delta\delta).$$
(5.40)

Como exemplo, considere o seguinte modelo ARX:

$$\nu(k) = 2,345\nu(k-1) - 1,234\nu(k-2) + 0,936\nu(k-3) + 2,791u(k-1)$$
(5.41)

e a função estática polinomial não-linear:

$$y(k) = \nu(k)^2 - 1,032\nu(k) + 0,738.$$
(5.42)

Considerando-se as incertezas do modelo concentradas apenas no bloco estático não-linear, temse:

$$y(k) = (1 + \Delta\delta)\nu(k)^2 - (1,032 + \Delta\delta)\nu(k) + (0,738 + \Delta\delta).$$
(5.43)

Substituindo o modelo ARX (equação 5.41) na equação 5.43:

$$y(k) = (1 + \Delta\delta)[2, 345\nu(k-1) - 1, 234\nu(k-2) + 0, 936\nu(k-3) + 2, 791u(k-1)]^{2} + (1, 032 + \Delta\delta)(2, 345\nu(k-1) - 1, 234\nu(k-2) + 0, 936\nu(k-3) + 2, 791u(k-1)) + (0, 738 + \Delta\delta).$$
(5.44)

que resulta na equação 5.45

$$y(k) = (5,499 + \Delta\delta)\nu^{2}(k-1) - (1,523 + \Delta\delta)\nu^{2}(k-2) + + (0,876 + \Delta\delta)\nu^{2}(k-3) + (13,089 + \Delta\delta)\nu(k-1)u(k-1) + - (6,888 + \Delta\delta)\nu(k-2)u(k-1) + (5,225 + \Delta\delta)\nu(k-3)u(k-1) + + (7,789 + \Delta\delta)u^{2}(k-1) - (2,420 + \Delta\delta)\nu(k-1) + + (1,273 + \Delta\delta)\nu(k-2) - (0,966 + \Delta\delta)\nu(k-3) + - (2,880 + \Delta\delta)u(k-1) + (0,738 + \Delta\delta).$$
(5.45)

Mas, como mostrado na Seção 4.1, nos modelos de Wiener, a não-linearidade pode atuar tanto nos termos de entrada quanto nos termos de saída mas, não atua em termos cruzados com atrasos diferentes (Coelho et al., 2002). Dessa forma, os termos cruzados com atrasos diferentes devem ser retirados do modelo.

Assim, o modelo mostrado em 5.45 fica da seguinte forma:

$$y(k) = (5,499 + \Delta\delta)\nu^{2}(k-1) - (1,523 + \Delta\delta)\nu^{2}(k-2) + + (0,876 + \Delta\delta)\nu^{2}(k-3) + (13,089 + \Delta\delta)\nu(k-1)u(k-1) + + (7,789 + \Delta\delta)u^{2}(k-1) - (2,420 + \Delta\delta)\nu(k-1) + + (1,273 + \Delta\delta)\nu(k-2) - (0,966 + \Delta\delta)\nu(k-3) + - (2,880 + \Delta\delta)u(k-1) + (0,738 + \Delta\delta).$$
(5.46)

5.3 Mapeamento da Incerteza

Nesta seção é mostrado o algoritmo que ilustra o processo de mapeamento da incerteza para o modelo incerto de Wiener, cuja incerteza está concentrada no bloco dinâmico linear. O objetivo deste algoritmo é retornar o vetor de incertezas do sistema. Para demonstrar este procedimento, alguns exemplos simples de modelos simulados serão utilizados para garantir o entendimento do algoritmo proposto.

5.3.1 Algoritmo

- Seja o modelo de Wiener para uma não-linearidade ℓ como mostrado na equação 5.25. Utilizandose os dados de entrada e saída do sistema e a sua curva estática, obtem-se os parâmetros do modelo ARX para o bloco dinâmico linear e a representação do polinômio de grau ℓ da função estática não-linear o sistema.
- O Modelo de Wiener Globalmente Não-Linear é encontrado quando o modelo ARX representado por ν(k) (ou seja, o sinal intermediário entre os blocos dinâmico linear e estático não-linear) é "passado"pelo bloco da função estática não-linear f^ℓ(.) do sistema. Dessa forma, na saída final do sistema y(k), tem-se em mãos o modelo estimado globalmente não-linear de Wiener ŷ_W, com seu respectivo vetor de parâmetros θ e seus termos de atraso em u e y.
- De posse desta informação parte-se para o processo de *Identificação Biobjetivo*. Para encontrar o modelo NARX polinomial equivalente ao modelo de Wiener já encontrado, basta, primeiramente, garantir que o modelo identificado através da identificação biobjetivo tenha as mesmas características do Modelo de Wiener identificado anteriormente. Para isso deve-se inserir na rotina computacional de identificação biobjetivo o mesmo número de termos do modelo, assim como o mesmo número de atraso em u e em y, além de definir o mesmo grau de não-linaridade ℓ .
- É importante lembrar que deve ser feita uma análise dos termos do modelo encontrado via identificação biobjetivo pois, os modelos de Wiener podem possuir termos cruzados, desde que tenham os mesmos atrasos. Conforme Coelho et al. (2002), não são permitidos termos cruzados com atrasos diferentes.
- Como mensionado na seção 3.2.3, na identificação biobjetivo, para um número N de modelos disponíveis no Pareto-Ótimo, o Decisor de Correlação (equação 3.15) escolhe o melhor modelo para o sistema. De acordo com o modelo escolhido no conjunto Pareto-Ótimo, a região de incerteza deste modelo, Δθ, pode ser definida como mostra a figura 5.5.



Figura 5.5: Vizinhança ou Região de Incerteza do modelo escolhido no Pareto-Ótimo

 Para quantificar o valor de Δθ, neste trabalho, escolhe-se o modelo vizinho ao modelo escolhido como ótimo pelo decisor de correlação. A diferença entre os dois modelos delimita o raio da região de incerteza. O Pareto como um todo é a máxima região de incerteza - situação mais conservadora.

• A equação 5.47 representa o vetor de incertezas do modelo.

$$\Delta \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \Delta \theta_{y_1} \\ \Delta \theta_{y_2} \\ \vdots \\ \Delta \theta_{y_{n_y}} \\ \Delta \theta_{u_1} \\ \Delta \theta_{u_2} \\ \vdots \\ \Delta \theta_{u_{n_y}} \end{bmatrix}^T, \qquad (5.47)$$

De acordo com o trabalho de Biagiola e Figueroa (2009) e conforme mostrado na subseção 5.1.2, para que o modelo identificado seja estável, o limite superior de V_u deve ser maior que o limite inferior de V_y (isto é, A ≥ D), e o limite inferior de V_u deve ser menor que o limite superior de V_y (isto é, B ≤ C) conforme ilustrado na Figura 5.4.

5.3.2 Exemplos

Para demonstrar a utilização do algoritmo mostrado em 5.3.1, considere os seguintes exemplos, realizados a partir de dados de simulação.

Exemplo 01

Sejam os dados do sistema conforme mostra as figuras 5.6, 5.7 e 5.8. Estas figuras representam dados obtidos através de simulação, apenas com o intuito de exemplificar o método de mapeamento da incerteza apresentado na seção 5.3.1.



Figura 5.6: Entrada u(k) aplicada para o sistema do exemplo 01.



Figura 5.7: Saída y(k) para o sistema do exemplo 01.



Figura 5.8: Característica estática para o sistema do exemplo 01.

Primeiramente, é identificado o modelo de Wiener para os dados. Os parâmetros para o modelo ARX do bloco dinâmico linear são identificados através de mínimos quadrados.

A equação 5.48 mostra o modelo ARX identificado para o exemplo 01.

$$\nu(k) = 0,99655y(k-1) + 0,06056u(k-1) + -0,16522y(k-2) + 0,00719u(k-3) + +0,10969y(k-3) - 0,00084u(k-2);$$
(5.48)

As figuras 5.9, 5.10 e 5.11 ilustram, respectivamente, as validações estática e dinâmica para o modelo identificado.



Figura 5.9: Validação da Curva Estática para o exemplo 01.



Figura 5.10: Validação da função inversa para obtenção do sinal intermediário $\nu(k)$ para o exemplo 01.



Figura 5.11: Validação do modelo ARX para o bloco dinâmico linear do modelo de Wiener para o exemplo 01.

Após obtido o modelo ARX do bloco dinâmico linear do modelo de Wiener, utilizando o mesmo número de regressores e o mesmo grau de não linearidade da função estática, obtem-se através do algoritmo computacional de identificação biobjetivo, o modelo globalmente não linear NARX correspondente.



Figura 5.12: Gráfico Pareto-Ótimo para 100 modelos para o exemplo 01.

A figura 5.12 mostra o gráfico do conjunto Pareto-Ótimo que contém os 100 modelos possíveis para o sistema. Através do Decisor de Correlação (Barroso, 2006), o modelo selecionado foi o modelo de número 100. Este modelo possui um valor de correlação igual a correl = 0, 4696.

$$y(k) = 0,995488y(k-1) + 0,15023u^2(k-1) + 0,05586u(k-1) - 0,01934y(k-2)$$
(5.49)

As figuras 5.13 e 5.14 mostram a validação dinâmica e estática para o modelo NARX identificado.



Figura 5.13: Validação do modelo NARX polinimial para o exemplo 01. Parâmetros identificados via Identificação Biobjetivo.



Figura 5.14: Validação da curva estática via identificação biobjetivo para o exemplo 01.

5.3. MAPEAMENTO DA INCERTEZA

Para o mapeamento da incerteza do modelo globalmente não linear de Wiener, escolhe-se um modelo vizinho ao modelo escolhido no Pareto-Ótimo para delimitar a região de incerteza. O modelo NARX polinomial equivalente ao modelo de Wiener escolhido foi o modelo 100. Dessa forma, escolhe-se, por exemplo, o modelo 99 para delimitação da região de incerteza. Os parâmetros do modelo 99 são:

$$\boldsymbol{\theta}_{99} = \begin{bmatrix} 0,954879776\\0,150223815\\0,055874688\\-0,019338719 \end{bmatrix}^{T},$$
(5.50)

Subtraindo o vetor de parâmetros θ_{99} do vetor de parâmetros do modelo escolhido θ_{100} , tem-se o seguinte vetor de incerteza (em módulo):

$$\Delta \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} 0,00000770256178\\ 0,000009798690816\\ 0,000010006721190\\ 0,000000971340739 \end{bmatrix}^{T},$$
(5.51)

Separando o vetor $\Delta \theta$ em dois, tem-se a região de incertezas relacionada aos dados de entrada V_u e a região de incertezas relacionada aos dados de saída V_y .

$$V_u = \begin{bmatrix} 0,000009798690816 & 0,000010006721190 \end{bmatrix}$$
(5.52)

$$V_y = \begin{bmatrix} 0,000000770256178 & 0,000000971340739 \end{bmatrix}$$
(5.53)

Os limites superiores e inferiores de cada região, V_u e V_y , são mostrados na Tabela 5.1.

	Limite Superior	Limite Inferior
V_u	0,000010006721190	0,000009798690816
V_y	0,000000971340739	0,000000770256178

Tabela 5.1: Limites da região de incerteza para o exemplo 01.

Conforme o problema de interseção para que o modelo seja estável, o maior valor do vetor de incertezas da região V_u deve ser maior que o maior valor de incerteza do vetor de V_y . E para os limites inferiores da região de incerteza, o menor valor do vetor de incertezas de V_y deve ser menor que o menor valor do vetor de incertezas da região de V_u . Dessa forma, tem-se:

$$0,000010006721190 > 0,000000971340739.$$
(5.54)

$$0,00000770256178 < 0,000009798690816.$$
(5.55)

Assim, de acordo com o problema de interseção, pode-se concluir que o modelo encontrado para o sistema do exemplo 01 é estável.

Exemplo 02

Sejam os dados do sistema 02 conforme mostra as figuras 5.15, 5.16 e 5.17.



Figura 5.15: Entrada aplicada para o sistema do exemplo 02.



Figura 5.16: Saída para o sistema do exemplo 02.



Figura 5.17: Característica estática para o sistema do exemplo 02.

A equação 5.56 mostra o modelo ARX identificado para o exemplo 02.

$$\nu(k) = 0,87828y(k-1) + 0,17062u(k-1) + 0,02427u(k-2) - 0,07774y(k-2)$$
(5.56)

As figuras 5.18, 5.19 e 5.20 ilustram, respectivamente, as validações estática e dinâmica para o modelo identificado.



Figura 5.18: Validação da Curva Estática para o exemplo 02.



Figura 5.19: Validação da função inversa para obtenção do sinal intermediário $\nu(k)$ para o exemplo 02.



Figura 5.20: Validação do modelo ARX para o bloco dinâmico linear do modelo de Wiener para o exemplo 02.

Agora, através da identificação Biobjetivo, a figura 5.21 mostra o Pareto-Ótimo para o exemplo 02.



Figura 5.21: Gráfico Pareto-Ótimo para 100 modelos - exemplo 02.

Através do Decisor de Correlação, o modelo selecionado foi o modelo de número 9. Este modelo possui um valor de correlação igual a correl = 0,3080.

$$y(k) = 1,01183y(k-1)+0,27512u^{2}(k-1)-0,16520y(k-1)+0,04589-0,07404u(k-1)$$
(5.57)

As figuras 5.22 e 5.23 mostram a validação dinâmica e estática para o modelo NARX identificado.



Figura 5.22: Validação do modelo NARX polinimial do exemplo 02. Parâmetros identificados via identificação biobjetivo.



Figura 5.23: Validação da curva estática via identificação biobjetivo do exemplo 02.

5.3. MAPEAMENTO DA INCERTEZA

Para delimitar a região de incerteza, escolhe-se um modelo da vizinhança do modelo 9 escolhido. Considere-se o modelo 7.

$$\boldsymbol{\theta}_{7} = \begin{bmatrix} 1,012570337\\0,269912996\\-0,162971580\\0,044390903\\-0,069295604 \end{bmatrix}^{T},$$
(5.58)

Subtraindo o vetor de parâmetros θ_7 do vetor de parâmetros do modelo escolhido θ_9 , tem-se o seguinte vetor de incerteza:

$$\Delta \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} 0,000739321564880\\ 0,005207884000185\\ 0,002233232685901\\ 0,001506302193242\\ 0,004742076863536 \end{bmatrix}^T,$$
(5.59)

Separando o vetor $\Delta \theta$ em dois, tem-se a região de incertezas relacionada aos dados de entrada V_u e a região de incertezas relacionada aos dados de saída V_y . Para este caso, o parâmetro $\Delta \theta_3 = 0,002233232685901$ foi desconsiderado por representar o termo constante do modelo.

$$V_u = \begin{bmatrix} 0,005207884000185 & 0,004742076863536 \end{bmatrix}$$
(5.60)

$$V_y = \begin{bmatrix} 0,000739321564880 & 0,002233232685901 \end{bmatrix}$$
(5.61)

Os limites superiores e inferiores de cada região, V_u e V_y , são mostrados na Tabela 5.2.

			The second
		Limite Superior	Limite Inferior
ĺ	V_u	0,005207884000185	0,004742076863536
	V_y	0,002233232685901	0,000739321564880

Tabela 5.2: Limites da região de incerteza para o exemplo 02.

Para que o modelo seja estável, o maior valor do vetor de incertezas da região V_u deve ser maior que o maior valor de incerteza do vetor de V_y e o menor valor do vetor de incertezas de V_y deve ser menor que o menor valor do vetor de incertezas da região de V_u . Dessa forma, tem-se:

$$0,005207884000185 > 0,002233232685901.$$

$$(5.62)$$

$$0,000739321564880 < 0,004742076863536.$$

$$(5.63)$$

Assim, de acordo com o problema de interseção, pode-se concluir que o modelo encontrado para o sistema do exemplo 02 também é estável.

5.4 Comentários Finais

Neste capítulo, primeiramente, foi feita uma revisão teórica sobre os modelos incertos de Wiener, que abordou principalmente os trabalhos de Biagiola e Figueroa (2009) e Figueroa et al. (2008). Em seguida, foi realizado o mapeamento matemático das incertezas presentes no modelo de Wiener e o seu comportamento de acordo com o grau de não linearidade do sistema. Uma expressão geral para o modelo incerto de Wiener, cuja incerteza está concentrada apenas no bloco dinâmico linear, foi definida e, logo após, foi desenvolvido um algoritmo para o definição do vetor de incertezas do modelo. Estes resultados são importantes pois, de posse dos limites da incerteza do modelo, podem ser feitas considerações sobre a estabilidade do sistema. Outro ponto importante é o fato de reduzir o custo de projetos de controle ao delimitar a região de incerteza do modelo.

Capítulo 6

Aplicação

De posse dos resultados obtidos no Capítulo 5, para ilustrar as técnicas desenvolvidas, estes resultados foram aplicados aos dados de um processo de polimerização. Este sistema foi descrito primeiramente por Ray (1972) e Doyle III et al. (1995), sendo este um processo de polimerização por radicais livres de metacrilato de metila (MMA), com azo-bisisobutironitrila (AIBN) como iniciador e tolueno como solvente (Ray, 1972).

6.1 Descrição do sistema

A entrada (variável manipulada) é o fluxo volumétrico de taxa do iniciador e a saída (variável controlada) é o número médio do peso molecular (Campos et al., 2010; Barroso et al., 2007). A Figura 6.1 e a Figura 6.2 mostram, respectivamente, os dados de entrada e de saída dinâmica do sistema. A característica estática do sistema é vista na Figura 6.3.



Figura 6.1: Dados de Entrada para o Polimerizador



Figura 6.2: Dados de Saída do Polimerizador



Figura 6.3: Característica Estática do Polimerizador

6.2 Identificação Modelo Incerto de Wiener para os dados do Polimerizador

Inicialmente, os dados de entrada e de saída foram divididos metade para o processo de identificação e metade para o processo de validação do modelo obtido. Utilizando-se a rotina computacional que utiliza o método de mínimos quadrados para identificação do modelo ARX correspondente ao bloco dinâmico linear de Wiener, o modelo encontrado foi:

$$\nu(k) = 2,74260347\nu(k-1) - 3,11309747\nu(k-2) + +2,02003334\nu(k-3) - 0,77157914\nu(k-4) + +0,00366594u(k-1) + 0,11720448\nu(k-5) + +0,00002048;$$
(6.1)

O polinômio corresponde a respectiva curva estática do sistema é:

$$f(\nu) = 4,71108922 \times 10^{10}\nu^4 - 0,44907131 \times 10^{10}\nu^3 + 0,01698001 \times 10^{10}\nu^2 - 0,00033939 \times 10^{10}\nu + 0,0000516 \times 10^{10}.$$
(6.2)

Ao passar o modelo ARX $\nu(k)$ através do polinômio de grau 4 que representa a curva estática do sistema, obtem-se o modelo de Wiener globalmente não linear:

$$y(k) = 275, 04 \times 10^{10} y(k-1) - 521, 205 \times 10^{10} y(k-2) + +103, 159 \times 10^{10} y(k-3) - 1, 924 \times 10^{10} y(k-4) + +6, 805 \times 10^{6} y(k-5) + 0, 153 \times 10^{4} u^{2}(k-1) + -0, 009 \times 10^{6} u(k-1).$$
(6.3)

As figuras 6.4 e 6.5 mostram, respectivamente, a validação do modelo dinâmico linear ARX e a validação da função estática não-linear para o modelo de Wiener.



Figura 6.4: Validação do modelo dinâmico linear ARX para o modelo de Wiener do polimerizador



Figura 6.5: Validação da curva estática para o modelo de Wiener do polimerizador

Agora, para encontrar a região de incerteza do modelo é necessário encontrar o modelo NARX polinomial equivalente ao modelo globalmente não-linear de Wiener. A identificação deste modelo é feita utilizando o método de identificação bi-objetivo. Para isto, deve-se utilizar os mesmos dados de entrada e saída do sistema, além de definir o mesmo grau de não-linearidade ℓ para o modelo e o mesmo número de atrasos de entrada e de saída.

Para o modelo de Wiener 6.3 identificado anteriormente, o grau de não-linearidade é $\ell = 4$ e o número de atrasos de entrada e de atrasos de saída são respectivamente $n_u = 2$ e $n_y = 5$.

O número de modelos disponíveis no Pareto foi definido como N = 100. A figura 6.6 ilustra o Pareto-ótimo para os 100 modelos identificados para o sistema.


Figura 6.6: Pareto-ótimo para 100 modelos

Dentre os 100 modelos disponíveis no Pareto-ótimo, o modelo escolhido através do Critério de Correlação Mínima foi o modelo de número 2. Este modelo possui um índice de correlação do seu resíduo de identificação igual a correl = 0,3195.

A equação 6.4 descreve o modelo NARX polinomial.

$$y(k) = 0,9669y(k-1) - 0,0085y(k-2) - 0,0105y(k-3) + -0,0109y(k-4) - 0,0161y(k-5) + 3504,8895 + -129231,5545u(k-1) + 2209626,4504u^2(k-1).$$
(6.4)

A figura 6.7 mostra a validação dinâmica para o modelo NARX encontrado através do método de identificação biobjetivo. A validação da característica estática é mostrada na figura 6.8.



Figura 6.7: Validação do Modelo NARX polinomial via identificação bi-objetivo



Figura 6.8: Validação da característica estática do polimerizador via identificação bi-objetivo Agora inicia-se o processo de mapeamento da incerteza do modelo identificado.

Para delimitar a região de incerteza do modelo escolhe-se um modelo qualquer do Pareto-ótimo na vizinhança do modelo escolhido para o sistema. Este modelo vizinho é quem vai delimitar o raio Δ da região de incerteza. Para este caso, o modelo escolhido dentre todos da vizinhança foi o modelo de número 3. Este modelo possui o seguinte vetor de parâmetros:

$$\boldsymbol{\theta}_{3} = \begin{bmatrix} 0,966088701 \\ -0,008495643 \\ -0,010545179 \\ -0,010916858 \\ -0,015610443 \\ 3536,401240173 \\ -133038,280354336 \\ 2324059,203072071 \end{bmatrix}^{T},$$
(6.5)

De posse do vetor de parâmetros do modelo θ_3 , pode-se obter o vetor de incertezas fazendo-se:

$$\Delta \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\theta}_3.$$

O vetor de incertezas encontrado é:

$$\Delta \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} -0,000864205\\ 0,000015628\\ 0,000005061\\ -0,00006295\\ 0,000462414\\ 31,511715694\\ -3806,725838244\\ 114432,752709870 \end{bmatrix}^{T},$$
(6.6)

Separando o vetor $\Delta \theta$ em dois, tem-se a região de incertezas relacionada aos dados de entrada V_u e a região de incertezas relacionada aos dados de saída V_y .

$$V_u = \begin{bmatrix} -3806, 725838244 & 114432, 752709870 \end{bmatrix}$$
(6.7)

 $V_y = \begin{bmatrix} -0,000864205 & 0,000015628 & 0,000005061 & -0,000006295 & 0,000462414 \end{bmatrix}$ (6.8) Os limites superiores e inferiores de cada região, V_u e V_y , são mostrados na Tabela 6.1.

	Limite Superior	Limite Inferior
V_u	2324059,203072071	-133038,280354336
V_y	0,966088701	-0,008495643

Tabela 6.1: Limites da região de incerteza para o modelo.

Conforme o problema de interseção mostrado na subseção 5.1.2, para que o modelo seja estável, o maior valor do vetor de incertezas da região V_u deve ser maior que o maior valor de incerteza do vetor de V_y . Logo:

$$2324059, 203072071 > 0,966088701.$$
 (6.9)

E para os limites inferiores da região de incerteza, o menor valor do vetor de incertezas de V_y deve ser menor que o menor valor do vetor de incertezas da região de V_u . Dessa forma, em módulo, tem-se:

$$|-0,008495643| < |-133038,280354336|.$$
(6.10)

Assim, de acordo com o problema de interseção, pode-se concluir que o modelo encontrado para o sistema de polimerização é estável.

6.3 Comentários Finais

Para os dados do sistema em questão, após realizado o processo de identificação do modelo e o processo de mapeamento das incertezas dos parâmetros, de acordo com as conclusões dos trabalhos de Figueroa (Figueroa et al., 2008) e de Biagiola (Biagiola e Figueroa, 2009) pode-se concluir que o sistema é estável.

Capítulo 7

Conclusão

Neste trabalho a identificação e análise da robustez dos sistemas de Wiener foram considerados. O objetivo desta dissertação foi o mapeamento da incerteza dos parâmetros do modelo de Wiener. Para isso, foi definido um algoritmo que permitiu, através da identificação de um modelo de Wiener e de um modelo globalmente não-linear, definir um vetor de incertezas para o modelo. Um breve resumo das etapas desse processo é descrito a seguir.

7.1 Conclusões sobre o trabalho

Baseando-se principalmente nos trabalhos de Biagiola e Figueroa (2009) e Figueroa et al. (2008), foi realizado um mapeamento matemático das incertezas presentes no modelo de Wiener e o seu comportamento de acordo com o grau de não linearidade do sistema. Uma demonstração matemática do comportamento desta incerteza foi desenvolvida, considerando que a incerteza do modelo estava presente apenas no bloco dinâmico linear. A partir desta consideração, foi definida uma fórmula geral que mostra o comportamento da incerteza do modelo, presente no bloco dinâmico linear, para uma não linearidade N qualquer, sendo esta uma das contribuições deste trabalho.

Em um segundo momento, foi desenvolvido um algoritmo para definição do vetor de incertezas do modelo. Primeiramente, utilizando apenas os dados de entrada e saída do sistema (identificação caixa preta) e através de técnicas de identificação recurssiva utilizando mínimos quadrados, foi identificado o modelo polinomial ARX correspondente ao bloco dinâmico linear do modelo de Wiener.

Após a identificação do modelo ARX, um segundo modelo polinomial não linear NARX foi identificado para a mesma massa de dados do sistema através da técnica de identificação bi-objetivo dessa vez utilizando técnicas de identificação caixa cinza. Para isso, foram utilizadas as mesmas características do modelo ARX encontrado anteriormente como o número de regressores do modelo e, como informação auxiliar, foi utilizada a curva estática do sistema.

Na identificação bi-objetivo, um conjunto de modelos candidatos denominado Pareto-Ótimo foi criado e, deste conjunto, através do método de correlação dos resíduos de identificação, foi escolhido o modelo para o sistema.

Para mapear as incertezas do modelo identificado, foi definida uma região no gráfico de Pareto ao escolher um modelo vizinho ao modelo escolhido. A diferença entre os parâmetros de cada regressor correspondente aos dois modelos definiu o vetor de incertezas do modelo. A forma como esse vetor

de incertezas foi encontrado é a principal contribuição deste trabalho.

Seguindo o trabalho de Biagiola e Figueroa (2009), uma análise da estabilidade do modelo identificado pôde ser feita utilizando o vetor de incertezas do mesmo. Ao analisar os limites superiores e inferiores correspondentes aos regressores em y e em u pode-se afirmar sobre a estabilidade, ou não, do sistema.

7.2 Sugestão para trabalhos futuros

Como sugestão para trabalho futuro tem-se:

- Realizar o mapeamento matemático das incertezas do modelo, considerando a presença destas incertezas apenas no bloco estático não-linear e definir uma expressão matemática que defina o comportamento das incertezas para uma não linearidade N qualquer. Para este trabalho deve ser considerado o fato de que o modelo de Wiener admite apenas uma saída e uma entrada em estado estacionário. Dessa forma, deve ser considerado o modelo de Hammerstein para este mapeamento matemático pois, conforme mostrado em Coelho (2002), este modelo, em estado estacionário, admite multiplicidade de entradas e apenas uma saída;
- Desenvolver, também, uma expressão matemática contendo o fator α que distribui as incertezas entre os blocos dinâmico linear e estático não linear;
- Demonstrar matematicamente, a relação entre o problema de interseção dos limites superior e inferior da região de incerteza do modelo V_y e V_u com a teoria clássica de estabilidade de sistemas;
- Comprovar, com o projeto de controle, redução do gasto energético e computacional necessário ao controlador, ao se delimitar a região de incerteza do modelo.

Bibliografia

- Aguirre, L., Coelho, M. C. S., e Corrêa, M. V. (2005). On the interpretation and practice of dynamical differences between hammerstein and wiener models. *IEEE Proceedings, Part D: Control Theory* and Applications, 152 (4):349–356.
- Aguirre, L., Garcia, P., e Filho, R. (2000). Use of a priori information in the identification of global nonlinear models a case study using a buck converter. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications*, 47(7):1081–1085.
- Aguirre, L. A. (2007). Introdução à Identificação de Sistemas: técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais. Ed. UFMG. 3^a edição.
- Aguirre, L. A., Barroso, M. F. S., Saldanha, R. R., e Mendes, E. M. A. M. (2004). Imposing steadystate performance on identified nonlinear polynomial models by means of constrained parameter estimation. *IEE PROCEEDINGS-CONTROL THEORY AND APPLICATIONS*, 151:174–179.
- Aguirre, L. A. e Billings, S. A. (1995). Improved structure selection for nonlinear models based on term clustering. *International Journal of Control*, 62(3):569–587.
- Aguirre, L. A., Rodrigues, G. G., e Jácome, C. R. F. (1998). Identificação de sistemas não-lineares utilizando modelos narmax polinomiais - uma revisão e novos resultados. SBA Controle & Automação, 9 (2):90–106.
- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions and Auto*matic Control, 19(6):716–723.
- Amaral, G. (2001). Uso de redes neurais e conhecimento a priori na identificação de sistemas dinâmicos não lineares. Dissertação de Mestrado, PPGEE Universidade Federal de Minas Gerais, UFMG, Belo Horizonte, Brasil.
- Anderson, B. e Gevers, M. (1998). Fundamental problems in adaptative control. *Perspectives in Control, a Tribute to Ioan Doré Landau*, páginas 9–21.
- Barroso, M. e Nepomuceno, E. (2004). Multiobjective identification of a buck dc-dc converter. XV Congresso Brasileiro de Automática, CBA 2004, Gramado.
- Barroso, M. F. S. (2001). Métodos de otimização mono-objetivo aplicadas a identificação caixacinza de sistemas não-lineares. Dissertação de Mestrado, PPGEE - Universidade Federal de Minas Gerais, UFMG, Belo Horizonte, Brasil.
- Barroso, M. F. S. (2006). Otimização Bi-Objetivo Aplicada à Estimação de Parâmetros de Modelos Não-Lineares: Caracterização e Tomada de Decisão. Tese de Doutorado, PPGEE - Universidade Federal de Minas Gerais, UFMG, Belo Horizonte, Brasil.

- Barroso, M. F. S., Saldanha, R. R., e Aguirre, L. A. (2002). Comparação de métodos mono-objetivos em identificação caixa-cinza. *Tendências Em Matemática Aplicada e Computacional*, 3 (2)(2):43–52.
- Barroso, M. F. S., Takahashi, R. H. C., e Aguirre, L. A. (2007). Multi-objective unbiased parameter estimation via minimal correlation criterion. *Journal of Process Control*, 17:321–332.
- Biagiola, S. I., Agamennoni, O. E., e Figueroa, J. L. (2004). H-inf control of a wiener type system. *International Journal of Control*, 77(6):572–583.
- Biagiola, S. I. e Figueroa, J. L. (2009). Wiener and hammerstein uncertain models identification. *Mathematics and Computers in Simulation*, 79:3296–3313.
- Biagiola, S. I. e Figueroa, J. L. (2011). Robust model predictive control of wiener system. *International Journal of Control*, 84(3):432–444.
- Billings, S. (1980). Identification of nonlinear systems a survey. *IEEE Proceedings, Part D*, 127(6):272–285.
- Billings, S. e Chen, S. (1989). Representation of non-linear systems: the narmax model. *International Journal of Control*, 49(3):1013–1032.
- Billings, S., Chen, S., e Korenberg, M. (1989). Identification of mimo non-linear systems using a forward-regression orthogonal estimator. *International Journal of Control*, 49(6):2157–2189.
- Billings, S. e Fadzil, M. (1985). The practical identification of systems with nonlinearities. *IFAC Identification and System Parameter Estimation, York, U.K.*
- Billings, S. e Leontaritis, I. (1982). Parameter estimation techniques for nonlinear systems. *6th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation, Washington D.C., USA*, páginas 505–510.
- Bombois, X., Gevers, M., Scorletti, G., e Anderson, B. (2001). Robustness analysis tools for an uncertainty set obtained by prediction error identification. *Automatica*, 37:1629–1636.
- Campos, A. A., Margoti, L. M., Santos, A. P. L., Milagres, N. R. L., Amaral, G. F. V., e Barroso, M. F. S. (2010). Identificação bi-objetivo para reator de polimerização contínuo utilizando critério de correlação mínima. XVIII Congresso Brasileiro de Automática, Bonito.
- Campos, R. C. C. (2007). Projeto e construção de planta piloto de neutralização de pH e proposta de metodologia para incorporação de informações auxiliares na identificação Narx Racional. Dissertação de Mestrado, Centro Universitário do Leste de Minas Gerais - Unileste.
- Cassini, C. C. S. (1999). *Estimação recursiva de características estáticas não-lineares utilizando modelos polinomiais NARMAX*. Dissertação de Mestrado, PPGEE Universidade Federal de Minas Gerais UFMG, Belo Horizonte, Brasil.
- Cervantes, A., Agamennoni, O. E., e Figueroa, J. L. (2003). A nonlinear model predictive control scheme based on wiener piecewise linear models. J. Process Control, 13(7):655–666.
- Chankong, V. e Haimes, Y. Y. (1983). *Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology*. North-Holland (Elsevier), New York.

- Chen, S., Billings, S. A., e LUO, W. (1989). Orthogonal least squares methods and their application to non-linear system identification. *International Journal of Control*, 50(5):1873–1896.
- Coelho, M. C. S. (2002). *Modelos de Hammerstein e de Wiener: conexões com modelos NARX e sua aplicação em identificação de sistemas não-lineares*. Dissertação de Mestrado, PPGEE, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.
- Coelho, M. C. S., Aguirre, L. A., e Corrêa, M. V. (2002). Metodologia para representação de modelos narx polinomiais na forma de hammerstein e wiener. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, 3(1):71–80.
- Corrêa, M. V. (2001). Identificação caixa-cinza de sistemas não-lineares utilizando representações Narmax racionais e polinomiais. Tese de Doutorado, PPGEE Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Belo Horizonte, Brasil.
- da Rosa, A., Campello, R., Ferreira, P., Oliveira, G., e Amaral, W. (2010). Robust expansion of uncertain volterra kernels into orthonormal series. *American Control Conference (ACC)*, páginas 5465–5470.
- Dai, Y., Wu, Z., e Yang, C. (2011). Identification and robust limit-cycle-oscillation analysis of uncertain aeroelastic system. *Science China Technological Sciences*, 54:1841–1848.
- Doyle, J. (1982). Analysis of feedback systems with structured uncertainties. *IEEE Proc. 129-D*, 6:242–250.
- Doyle III, F. J., Ogunnaike, B. A., e Pearson, R. K. (1995). Nonlinear modelbased control using second-order volterra models. *Automatica*, 31(5):697–714.
- Figueroa, J. L., Biagiola, S. I., e Agamennoni, O. E. (2008). An approach for identification of uncertain wiener systems. *Mathematical and Computer Modelling*, 48:305–315.
- Fruzzetti, K., Palazoglu, A., e McDonald, K. (1997). Nonlinear model predictive control using hammerstein models. *Journal of process control*, 7(1):31–41.
- Gevers, M. (1991). Connecting identification and robust control: A new challenge. In Proceedings IFAC/IFORS Symposium on Identification and System Parameter Estimation, páginas 1–10.
- Gevers, M., Bombois, X., Condrons, B., Scorletti, G., e Anderson, B. (2003a). Model validation for control and controller validation in a prediction error identification framework part 2: illustrations. *Automatica*, 39:417–427.
- Gevers, M., Bombois, X., Condrons, B., Scorletti, G., e Anderson, B. (2003b). Model validation for control and controller validation in a prediction error identification framework part i: theory. *Automatica*, 39:403–415.
- Gevers, M. . p. (1993). Towards a joint design of identification and control? H. L. Trentelman and J.C Willems, editors, Essays on Control, páginas 111–151.
- Gonçalves, E. N. e Palhares, R. M. e. T. R. H. C. (2005). Improved optimisation approach to the robust h2/h-infinity control problem for linear systems. *IEE Proceedings Part D: Control Theory and Applications, Stevenage*, 152 (2):171–176.
- Haykin, S. (2001, reimpressão 2008). Redes Neurais: princípios e prática. Bookman.

- Helmicki, A. J., Jacobson, C. A., e Nett, C. N. (1991). Control oriented system identification: A worst-case / deterministic approach. *IEEE Transactions on Automatic Control, AC*, 36:1163–1176.
- Hjalmarsson, H. (2003). From experiments to closed-loop control (plenary lecture). In: CDROM of 13th IFAC Symposium on System Identification. Rotterdam, The Netherlands.
- Hjalmarsson, H., Gevers, M., e De Bruyne, F. (1996). For model-based control design, closed-loop identification gives better performance. *Automatica*, 32:1659–1673.
- Hunter, I. e Korenberg, M. (1986). The identification of nonlinear biological systems: Wiener and hammerstein cascade models. *Biol. Cybern*, 55(2-3):135–144.
- Hwang, S., Hsieh, C., Chen, H., e Huang, Y. (2011). Use of discrete laguerre expansions for noniterative identification of nonlinear wiener models. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 50 (3):1427–1438.
- Kalafatis, A., Arifin, N., Wang, L., e Cluett, W. R. (1995). A new approach to the identification of ph processes based on the wiener model. *Chemical Engineerino Science*, 50(23):3693–3701.
- Leontaritis, J. e Billings, S. (1985a). Input output parametric models for non-linear systems part i: deterministic non-linear systems. *International Journal of Control*, 41(2):303–328.
- Leontaritis, J. e Billings, S. (1985b). Input-output parametric models for non-linear systems part i: sthocastic non-linear systems. *International Journal of Control*, 41(2):329–344.
- Margoti, L. M., Campos, A. A., Santos, A. P. L., Milagres, N. R. L., Amaral, G. F. V., e Barroso, M. F. S. (2010). Identificação de uma planta de neutralização de ph utilizando a representação de wiener. XVIII Congresso Brasileiro de Automática, Bonito, páginas 2039–2046.
- Narendra, K. e Gallman, P. (1966). An iterative method for the identification of nonlinear systems using the hammertein model. *IEEE Transactions and Automatic Control*, 12:546.
- Nepomuceno, E. G. (2002). *Identificação Multiobjetivo de Sistemas Não-Lineares*. Dissertação de Mestrado, PPGEE Universidade Federal de Minas Gerais, UFMG, Belo Horizonte, Brasil.
- Nepomuceno, E. G., Takahashi, R. H. C., e Aguirre, L. A. (2007). Multiobjective parameter estimation for non-linear systems: Affine information and least-squares formulation. *International Journal of Control*, 80(6):1–9.
- Norquay, S. J., Palazoglu, A., e Romagnoli, J. A. (1998). Model predictive control based on wiener models. *Chemical Engineering Science*, 53:75–84.
- Pearson, R. K. e Pottman, M. (2000). Gray-box identification of block-oriented nonlinear models. *Journal of Process Control*, 10:301–315.
- Ray, W. (1972). On the mathematical modeling of polymerization reactors. J. Macromol. Sci. Rev. Macromol. Chem. C8, páginas 1–56.
- Santos, A. P. L., Milagres, N. R. L., Campos, A. A., Margoti, L. M., Amaral, G. F. V., e Barroso, M. F. S. (2010). Aplicação de representações em blocos interconectados em identificação caixa-cinza de sistemas dinâmicos não lineares. XVIII Congresso Brasileiro de Automática, Bonito, páginas 4224–4230.
- Schrama, R. (1992). *Approximate Identification and Control Design*. Tese de Doutorado, Delft University of Technology.

- Silva, V., Fleming, P., Sugimoto, J., e Yokoyama, R. (2008). Multiobjective optimization using variable complexity modelling for control system design. *Applied Soft Computing*, 8:392–491.
- Silva, V., Khatib, W., e Fleming, P. (2006). Nonlinear control system design using variable complexity modelling and multiobjective optimization. SBA. Sociedade Brasileira de Automática, 17 (1):24– 31.
- Silva, V., Khatib, W., e Fleming, P. (2007). Control system design for a gas turbine enginr using evolutionary computing for multidisciplinary optimization. *SBA Sociedade Brasileira de Automática*, 18:24–31.
- Skelton, R. (1989). Model error concepts in control design. Int. Journal of Control, 49 (5):1725–1753.
- Takahashi, R., Camino, J., Zampieri, D., e Peres, P. (2000). Multiobjective weighting selection for optimization-based control design. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control - Transactions of the ASME, USA*, 122 (3):567–570.
- Takahashi, R. H. C. e Palhares, R. M. e. D. D. A. e. G. L. P. S. (2004). Estimation of pareto sets in the mixed h2/h-infinity control problems. *International Journal of Systems Science, London - UK*, 35 (1):55–67.
- Teixeira, R., Braga, A., Takahashi, R., e Saldanha, R. (2000). Improving generalization of mlps with multi-objetive optimization. *Neurocomputing*, USA, 35 (4):189–194.
- Zames, G. (1981). Feedback and optimial sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. *IEEE Transactions Automatic Control*, 26 (2):301–320.
- Zang, Z., Bitmead, R., e Gevers, M. (1995). Iterative weighted least-squares identification and weighted lqg control design. *Automatica*, 31 (11):1577–1594.
- Zhu, Y. (1999). Distillation column identification for control using wiener model. *Proc. American Control Conference, San Diego, California*, páginas 3462–3466.