

Laboratório de Estudos em Controle e Modelagem de
Sistemas

Departamento de Engenharia Elétrica

Universidade Federal de São João del-Rei

Praça Frei Orlando, 76 São João del-Rei, MG Brasil



Desigualdades Matriciais Lineares Aplicadas à Identificação Multiobjetivo de Sistemas

Rodrigo de Sousa e Silva

Dissertação submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de São João del-Rei, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Dr. Márcio Falcão dos Santos Barroso

Co-orientador: Dr. Erivelton Geraldo Nepomuceno

São João del-Rei, 27 de abril de 2012

Dedicatória

... a Jesus meu único Senhor e Salvador.

Agradecimentos

A Deus, nosso bom Pai, e a Nosso Senhor Jesus Cristo, pois sem eles não teria chegado até aqui.

À Virgem Maria Santíssima, pelo seu Sim...

Aos meus queridos pais e meus irmãos, por toda a paciência nos momentos de maiores dificuldades.

Aos Professores Márcio Barroso e Erivelton Nepomuceno pela orientação e sugestões ao longo do trabalho.

Ao meu amigo, Professor do DEPEL, Davidson Firmo pelas dicas e conselhos.

Ao meu amigo, Técnico do DEPEL, Carlos Pádua pelas idéias e sugestões.

E por todos que não pude citar e que me acompanharam nesta nova etapa de minha vida acadêmica.

Epígrafe

“Vinde a mim vós todos que estais aflitos sob o fardo e eu vos aliviarei. Tomai sobre vós o meu jugo e recebei a minha doutrina, pois sou manso e humilde de coração e encontrareis o repouso para as vossas almas.”

Mateus 11,28-30

“Por que eu, o Senhor teu DEUS, te tomo pela mão direita e te digo: nada temas, pois venho em teu auxílio. ”

Isaías 5,43

“Buscai primeiro o reino de Deus, e a sua justiça, e todas estas coisas vos serão acrescentadas”

Mateus 6,33

Conteúdo

Resumo	xiii
Abstract	xv
Lista de Tabelas	xvii
Lista de Figuras	xix
Lista de Símbolos	xxi
Lista de Abreviações	xxv
1 Introdução	1
1.1 Motivação	5
1.2 Objetivos	5
1.3 Estrutura da Dissertação	6
2 Revisão bibliográfica	9
2.1 Introdução	9
2.2 Contextualização	9
2.3 Conclusões do capítulo	13

3	Conceitos Preliminares	15
3.1	Introdução	15
3.2	Sistemas Dinâmicos	15
3.2.1	Classificação dos sistemas dinâmicos	17
3.2.2	Estabilidade de Sistemas	19
3.3	Identificação de Sistemas	20
3.3.1	Introdução	20
3.3.2	Etapas de Identificação de Sistemas	20
3.3.3	Teste dinâmico e coleta de dados	21
3.3.4	Escolha da representação matemática	21
3.3.5	Seleção da estrutura do modelo	22
3.3.6	Estimação dos parâmetros do modelo	23
3.3.7	O Estimador de Mínimos Quadrados	24
3.3.8	O Estimador Estendido de Mínimos Quadrados	26
3.3.9	Validação do modelo	26
3.4	Técnicas de agrupamento de termos e pontos fixos	28
3.5	Identificação Multiobjetivo de Sistemas	30
3.5.1	Introdução	30
3.5.2	Formulação Multiobjetivo	32
3.5.3	Determinação das Soluções eficientes	32
3.5.4	Busca pela solução Eficiente	33
3.5.5	Problema Multiobjetivo na forma computacional	33
3.5.6	Incorporação da Informação Auxiliar	34
3.6	Desigualdades Matriciais Lineares: LMIs	35
3.6.1	Introdução	35
3.6.2	História do uso de LMIs	37
3.6.3	Definição matemática de LMI	37

	xi
3.6.4	Estabilidade Quadrática 38
3.6.5	Desigualdades Matriciais Lineares: LMI 39
3.6.6	Propriedades das LMIs: 40
3.6.7	Complexidade computacional 40
3.7	Conclusões do capítulo 41
4	LMI aplicada à Identificação de Sistemas 43
4.1	Introdução 43
4.1.1	Metodologia 43
4.1.2	Incorporação das Informações Auxiliares usando LMI . 45
4.1.3	Imposição de Restrições em Identificação de Sistemas . 47
4.2	Conclusões do capítulo 49
5	Resultados e Discussões 51
5.1	Introdução 51
5.2	Identificação de um sistema utilizando um modelo ARX 51
5.3	Identificação de um mapa senoidal 54
5.4	Importância do uso da informação auxiliar: Circuito de Chua . 60
5.4.1	Circuito de Chua 60
5.5	Estudo sobre o esforço computacional das LMIs 69
5.6	Imposição de Restrições em Identificação de Sistemas 72
6	Conclusão e Pesquisas Futuras 77
6.1	Introdução 77
6.2	Etapas da Dissertação 77
6.3	Análise dos resultados 78
6.4	Pesquisas futuras 79
	Bibliografia 88

Resumo

A identificação de sistemas ganhou uma importância muito grande dentro da matemática devido à necessidade de se conhecer o comportamento de um sistema desconhecido. Em muitos casos, principalmente nas indústrias, a única informação que se tem sobre determinado sistema são os dados de entrada e saída. Não se tem uma equação matemática única, sobre determinado sistema, que consiga descrever seu comportamento em uma dada situação. Diante disto surge a necessidade de se criar uma maneira, relativamente simples, de se conhecer como um sistema funciona.

Uma técnica diferenciada que atua na estimação de parâmetros dentro da identificação de sistemas está sendo desenvolvida. São as chamadas Desigualdades Matriciais Lineares, também conhecidas como LMIs, aplicadas em modelagem de sistemas. Estas desigualdades são muito utilizadas dentro da Teoria de Controle Robusto e estudos sobre a Estabilidade de Sistemas. O grande diferencial deste método, comparado aos outros, é a facilidade com que as restrições são escritas. As restrições nada mais são do que certas características que são impostas ao modelo de acordo com as necessidades do regime de operação. O uso desta técnica dentro de identificação de sistemas é algo recente. Este trabalho emprega técnicas multiobjetivo na identificação de sistemas não-lineares, escrevendo o problema no formato LMI, utilizando os pontos fixos como informação auxiliar. A metodologia proposta foi aplicada na modelagem dois sistemas caóticos (Mapas Senoidais com não-linearidades cúbicas e o Circuito de Chua) escrevendo o problema do somatório dos erros quadráticos utilizando técnicas LMIs. Posteriormente foi feito um estudo do esforço computacional da abordagem LMI e um estudo de caso onde são impostas restrições ao modelo.

Verificou-se que o uso de LMIs dentro de identificação de sistemas é algo realizável, visto que esta técnica mostrou bons resultados nos estudos de casos e pode ser ampliada para outros tipos de problemas.

Abstract

The system identification has gained great importance in mathematics due to the necessity of knowing the behavior of an unknown system. In many cases, especially in industries, the only thing known about a given system is just data input and output. Do not have a single mathematical equation, on a given system, which can describe their behavior in a given situation. Before this comes the need to create a way, relatively simple to understand how a system works.

One technique that works differently in the estimation of parameters in the system identification is being developed. These are called Linear Matrix Inequalities, LMIs also known as applied in systems modeling. These inequalities are widely used in the Robust Control Theory and studies on the stability of systems. The great advantage of this method compared to others is the ease with which the constraints are written. The restrictions are nothing more than certain characteristics that are imposed on the model according to the needs of the operating regime. The use of this technique in systems identification is recent. This work employs techniques in the identification of multiobjective nonlinear systems, writing the problem in the LMI format, using the fixed points as auxiliary information. The proposed methodology was applied in modeling two chaotic systems (Sinusoidal Maps with cubic nonlinearity and the Chua circuit) problem of writing the sum of squared errors using LMI techniques. Subsequently a study was made of the computational effort of the LMI approach and a case study where restrictions are imposed on the model.

It has been found that the use of LMI in systems identification are realizable, since this technique has shown good results in case studies and can be extended to other types of problems.

Lista de Tabelas

5.1	<i>Comparação dos pontos fixos</i>	58
5.2	<i>Comparação dos melhores modelos</i>	59
5.3	<i>Quadro comparativo dos pontos fixos</i>	65
5.4	<i>Comparação entre: MMQ e LMI</i>	72

Lista de Figuras

3.1	Sistema Dinâmico	17
3.2	Série temporal da variável $x(t)$	17
3.3	Fluxograma de Identificação de Sistemas (Duarte, 2009)	27
3.4	Pareto-ótimo, (Nepomuceno, 2002)	31
5.1	Pareto- mapa senoidal	58
5.2	Circuito de Chua	61
5.3	Série temporal do Circuito de Chua	62
5.4	Atrator do Circuito de Chua	63
5.5	Atratores dupla-volta (a) e (b)	66
5.6	Modelo com estrutura incorreta	68
5.7	Modelo 1- Pareto	68
5.8	Modelo 2- Pareto	69
5.9	Restrição 1	74
5.10	Restrição 2	75

Lista de Símbolos

$\Omega_{y^p u^{m-p}}$	Agrupamento de termos;
τ_d	Atraso puro de tempo;
$\Sigma_{y^p u^{m-p}}$	Coefficiente de agrupamento e termos;
$\hat{\Theta}^*$	Conjunto de <i>soluções eficientes</i> ;
Φ_{MQ}	Conjunto de coeficientes de agrupamento estimados por MQ;
Σ	Conjunto de coeficientes de agrupamento normalizados;
\mathbf{D}	Conjunto factível;
Φ	Conjunto genérico de coeficientes de agrupamento;
P^*	Conjunto Pareto-ótimo;
\dot{x}	Derivada primeira de x ;
$\det[\cdot]$	Determinante;
$\xi(k)$	Erro de modelagem;
\mathbb{Z}	Espaço dos números inteiros;
\mathbb{N}	Espaço dos números naturais;
\mathbb{R}	Espaço dos números reais;
\square	Fim de definição, teorema e nota;
\blacksquare	Fim de demonstração;
$b(\cdot)$	Função polinomial qualquer;
e_v	Média do somatório dos erros quadráticos para validação;

J_{PF}	Função custo de erro da localização do ponto-fixa;
J_{MQ}	Função custo de erro quadrático de predição;
J	Função custo genérica;
F^ℓ	Função genérica com grau de não-linearidade ℓ ;
$e(k)$	Erro no instante k , pode ou não ser branco;
-	Indica valores estáticos;
S	Mapeamento linear;
\mathbf{O}_{MA}	Matriz de zeros (com número de linhas de S e n_ξ colunas);
Ψ	Matriz de regressores;
Q	Matriz de regressores estáticos;
Ψ^*	Matriz de regressores estendida;
n_u	Máximo atraso do regressor de entrada;
n_e	Máximo atraso do regressor de ruído;
n_y	Máximo atraso do regressor de saída;
\mathbf{e}	Vetor de erro, pode ou não ser branco;
\mathbf{J}	Vetor de funções objetivo;
$\boldsymbol{\theta}$	Vetor de parâmetros a estimar;
$\boldsymbol{\theta}^*$	Vetor de parâmetros estendido;
$\hat{\boldsymbol{\theta}}$	Vetor de parâmetros estimado;
$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MQ}$	Vetor de parâmetros estimados por MQ;
$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MQE}$	Vetor de parâmetros estimados por MQE;
$\psi(k-1)$	Vetor de regressores do NARMAX polinomial;
c_i	Parâmetro de ruído em um modelo NARMAX;
g_i	Parâmetros ortogonais;
w	Peso para o problema de ponderação;
$\hat{}$	Indica o valor estimado;

$\ \cdot \ $	Norma euclidiana;
n_p	Número de termos de processo;
n_ξ	Número de termos de ruído;
$E[\cdot]$	Operador esperança matemática;
P_w	Problema de ponderação;
$u(k - j)$	Regressor de entrada;
$\nu(k - i)$	Regressor de ruído em um modelo NARMAX;
$y(k - i)$	Regressor de saída;
ν	Ruído branco;
$y(k)$	Sinal de trabalho;
x_i	Sinal do sistema
$y^*(k)$	Sinal observado;
p^*	Solução ótima;
$\hat{\theta}^*$	Soluções eficientes;
T_s	Tempo de amostragem;
k	Tempo discreto.

Lista de Abreviações

AIC	Critério de informação de Akaike;
ERR	Taxa de redução de erro;
ICB	Identificação caixa-branca;
ICC	Identificação caixa-cinza;
ICP	Identificação caixa-preta;
IM	Identificação multiobjetivo;
MIMO	Múltiplas entradas e múltiplas saídas (<i>Multiple-Input and Multiple-Output</i>);
LMI	Linear Matrix Inequalities;
MQ	Mínimos quadrados convencionais;
MQE	Mínimos quadrados estendidos;
NARMAX	Modelos não-lineares auto-regressivos com média móvel e entrada exógena (<i>nonlinear autoregressive moving average model with exogenous input</i>);
NARMA	Modelos não-lineares auto-regressivos com média móvel (<i>nonlinear autoregressive moving average model</i>);
NARX	Modelos não-lineares auto-regressivos com entradas exógenas (<i>nonlinear autoregressive model with exogenous input</i>);
NAR	Modelos não-lineares auto-regressivos;

PRBS	Sinal binário pseudo-aleatório;
QP	Programação quadrática;
RMSE	Raíz do erro médio quadrático;
SISO	Uma entrada e uma saída (<i>Single-Input and Single-Output</i>);
SNR	Relação sinal-ruído;
SQEP	Somatório do quadrado dos erros de predição;
SQPF	Somatório do quadrado dos erros da localização dos pontos fixos.

Introdução

Modelagem matemática é a área do conhecimento que estuda maneiras de desenvolver e implementar modelos matemáticos de sistemas reais (Aguirre, 2007). O modelo de um sistema passa a ser, então, uma condição necessária para que ele possa ser controlado segundo as necessidades da aplicação. Um sistema, por mais simples que seja, é determinado pelas inter-relações de suas partes constituintes (Monteiro, 2006). Para uma melhor compreensão do que vem a ser um sistema, toma-se como exemplo um Sistema Elétrico.

Um Sistema Elétrico é composto por diversos equipamentos: geradores, linhas de transmissão, capacitores, sistemas de proteção, entre outros. Todos eles são equipamentos que possuem características e modos de operação próprios, realizando suas funções de maneiras distintas. Porém, todos estes equipamentos estão interligados de alguma maneira e possuem um objetivo: levar energia elétrica ao consumidor final.

A identificação de sistemas é uma área da matemática que se preocupa em reproduzir, com a máxima aproximação possível, a natureza e suas interações criando modelos matemáticos que possam ser manipulados (Aguirre, 2007). A teoria de identificação de sistemas provê métodos para aproximar sistemas reais usando conjuntos de modelos baseados em dados de *entrada - saída* experimentais, isto com a finalidade de entender o comportamento de sistemas, modelar matematicamente sistemas e/ou sinais, prever, controlar, otimizar e diagnosticar (Duarte, 2009). Com a grande evolução dos computadores, o uso de modelos matemáticos tem aumentado em todas as áreas do conhecimento humano. Dentro da identificação de sistemas duas técnicas se destacam: a modelagem pela física do processo; e a modelagem empírica (Cavallo e Natale, 2007). Na modelagem pela física do processo são conhecidas as equações matemáticas que regem o fenômeno físico em questão. Essa técnica é conhecida como modelagem caixa-branca. Por outro lado, a identificação

empírica não pressupõe qualquer conhecimento prévio do sistema. Nesse caso lida-se com identificação caixa-preta. Existe ainda uma outra denominação de modelagem de sistemas: é a chamada identificação caixa-cinza. Este tipo de modelagem está entre as identificações caixa-branca e caixa-preta. Isto se deve ao fato de que a identificação caixa-cinza possui algum conhecimento prévio do sistema em questão (Nepomuceno, 2002). Sendo assim, antes de começar a modelar o sistema tem-se alguma informação *a priori* sobre seu comportamento. Estas informações podem ser obtidas de alguma maneira a complementar a informação contida nos dados dinâmicos. Por exemplo, pode-se citar características em estado estacionário como ganho, curva estática, etc.

Essas equações gerais, seja pela física do processo, seja por modelos empíricos, necessitam que os parâmetros destas estruturas sejam ajustados aos dados os quais se tem disponível, sejam por ensaios estáticos ou dinâmicos.

A identificação de um sistema obedece basicamente os seguintes passos:

- execução de testes e coleta de dados;
- escolha da classe de modelos;
- escolha da estrutura do modelo;
- estimação dos parâmetros;
- validação dos modelos.

Modelos matemáticos que representem a realidade, o mais fielmente possível, são necessários na indústria moderna. Isto por que a cada ano que passa os sistemas vão ficando maiores e mais complexos.

Um modelo matemático pode ser visto como um algoritmo ou conjunto de equações que, juntamente com um grupo de valores dados, representa o comportamento de um sistema, processo ou fenômeno (Teixeira e Aguirre, 2011). Tais modelos são dados por equações que descrevem o comportamento dinâmico de um sistema em função do tempo; estas equações podem ser diferenciais (para o caso de tempo contínuo) ou em diferenças (para tempo discreto). Modelos matemáticos de sistemas dinâmicos existem em todas as áreas do conhecimento, e são usados para simulações, treinamento de operador, análise, monitoração, detecção de falhas, predição, otimização, projeto

de sistemas de controle e controle de qualidade (Serra, 2005). O desenvolvimento de um modelo matemático para um sistema do mundo real pode ser uma tarefa muito complexa. Há casos em que a dinâmica do sistema não é bem entendida, uma série de experimentos tem que ser realizados para coletar dados que serão processados usando várias técnicas. Pode-se falar, em geral, de sistemas com entradas e saídas, mas há sistemas onde os sinais de entrada podem não ser acessíveis; este conjunto de dados de saída ordenado no tempo é conhecido como série temporal, e pode ser, dependendo do tipo de amostragem, contínuo ou discreto (Cassini, 1999).

Existe, na literatura especializada em identificação de sistemas, uma vasta quantidade de métodos utilizados que conseguem modelar um determinado sistema. Dentre eles pode-se citar alguns comumente usados:

- redes neurais (Elsner, 1992);
- funções de base radial, RBF's (Casdagli, 1997);
- séries de Volterra (Billings S. A., 1997);
- funções racionais e funções polinomiais (Billings S. A., 1997); (Casdagli, 1997).

As primeiras técnicas de identificação utilizadas não levavam em conta as não-linearidades dos sistemas estudados. O que se fazia era linearizar apenas a região de operação onde se desejava trabalhar. Isto se devia ao fato de a matemática da época não ter o conhecimento necessário sobre sistemas não-lineares e, também, ao pouco desenvolvimento dos computadores e softwares necessários para simulações. A grande questão é que todos (ou quase todos) os sistemas reais são não-lineares. Então, era mais que necessário aprofundar os estudos em dinâmicas não-lineares.

Algumas representações não-lineares são muito utilizadas em modelagem de sistemas. Alguns trabalhos demonstraram bons resultados: séries de Volterra (Volterra, 1930), os modelos NARMAX (nonlinear autoregressive moving model with exogenous variables) polinomiais e racionais (Leontaritis I. J. and., 1985);(Billings e Chen, 1989); (Billings e Aguirre, 1995) (Correa, 2001), modelos de blocos interconectados (Wiener, 1949); (Narendra e Gallman, 1966); (Wigren, 1993); (Patwardhan e Lakshminarayanan, 1998); (Pearson e Pottman, 2000); (Coelho, 2002).

Enfoques diferentes têm sido abordados no que se refere a estudos sobre

sistemas não-lineares. Encontra-se neste campo de estudos vários trabalhos aprofundados sobre redes neurais artificiais. Estas redes são sistemas computacionais estruturados numa aproximação baseada em ligações. Esta técnica apresenta ótimos resultados, porém possui como dificuldade a extração de informações dos modelos encontrados (Narendra, 1990). Seguindo esta mesma linha, pode-se encontrar trabalhos de identificação usando Sistemas Fuzzy (lógica nebulosa) e Computação Evolucionária. Estas técnicas conseguem descrever bem as não-linearidades e incertezas dos sistemas dinâmicos. A grande utilização de Lógica Nebulosa em identificação e controle de sistemas surge com a necessidade de se processar informações vagas e imprecisas.

Há uma infinidade de maneiras de se estimar os parâmetros de um sistema e, conseqüentemente, obter um modelo matemático que reproduza de maneira satisfatória o sistema em questão (Barroso, 2004). Ao longo da história, o ser humano se preocupa em obter modelos que possam explicar o que acontece a sua volta. Na primeira metade do século passado, o estimador de mínimos quadrados foi um importante algoritmo para estimar constantes desconhecidas em modelos que são lineares em tais parâmetros (Eykhoff, 1974). Infelizmente, esse estimador torna-se tendencioso quando os dados têm ruído correlacionado. E em se tratando de coleta de dados de um sistema real sempre haverá presença de ruído. Para minimizar essas dificuldades, uma outra família de estimadores foi desenvolvida e que passou a ser chamada de métodos de predição de erro, PEM (prediction error methods). Uma importante característica dessa família de estimadores é que, juntamente com o modelo do processo, é necessário estimar um modelo de ruído para evitar a polarização. Contudo, existem outros estimadores não tendenciosos que não requerem o ajuste de um modelo de ruído, como o estimador de variáveis instrumentais (Young, 1980). Neste caso, a idéia é encontrar um instrumento que não seja correlacionado com o ruído, mas seja correlacionado com um dos regressores (Aguirre, 2007).

Devido à sua popularidade e simplicidade, o método de estimação de parâmetros muito utilizado é o dos Mínimos Quadrados. Este método é uma técnica de otimização matemática que procura encontrar o melhor ajustamento para um conjunto de dados, tentando minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre a curva ajustada e os dados (Aguirre, 2007). Essas diferenças são conhecidas como resíduos. Como já foi dito, este método polariza o resultado. Uma saída para isto foi encontrar uma maneira de levar em consideração o ruído presente nos dados. Assim, desenvolveu-se os Mínimos

Quadrados Estendidos, onde a parte responsável pelo ruído é modelada e tenta-se sanar o problema da polarização.

Nesse cenário, começam a ser estudados os primeiros trabalhos de identificação de sistemas utilizando uma forma diferenciada de estimação de parâmetros. Trata-se do uso de Desigualdades Matriciais Lineares aplicadas à modelagem matemática de sistemas. Este trabalho vai tratar especificamente com LMI e o uso de informações auxiliares, que são informações adicionais ao critério dos MQ, na estimação de parâmetros com o emprego de técnicas multiobjetivo. A abordagem LMI mostra-se muito útil dentro de Controle Robusto e Estudos sobre Estabilidade de Sistemas.

1.1 Motivação

Observa-se que nas últimas décadas, a identificação de sistemas ganhou uma grande importância na vida humana. Há uma vasta quantidade de trabalhos que utilizam diferentes métodos para modelar sistemas. Sendo assim, o uso de Desigualdades Matriciais Lineares em identificação passa a ser uma maneira diferenciada de se criar modelos matemáticos de sistemas dinâmicos. Em identificação de sistemas, a informação auxiliar possui uma importância destacada. É com ela que se incorpora ao modelo características estáticas presentes no sistema. Este trabalho vai utilizar a informação dos pontos fixos do sistema, onde o problema é escrito na forma do somatório dos erros quadráticos e posteriormente convertido como uma desigualdade matricial. A importância e o impacto de tal abordagem pode ser verificada diante do elevado número de artigos na área de controle de sistemas presentes nos recentes congressos da área, tais como *IEEE, Conference on Decision and Control* ou *American Control Conference*.

1.2 Objetivos

As técnicas multiobjetivos foram desenvolvidas visando à determinação de um conjunto de soluções dentro do qual se verifica o compromisso entre vários objetivos. O conjunto dessas soluções é denominado Pareto-Ótimo. A presente dissertação abordará a identificação multiobjetivo de sistemas dinâmicos não-lineares escrevendo o problema no formato LMI. Para testar tal metodologia, serão modelados sistemas clássicos da área de identificação,

onde os parâmetros serão encontrados via LMI. Pretende-se com isso apresentar uma maneira alternativa de modelagem de sistemas utilizando tais técnicas .

1.3 Estrutura da Dissertação

O Capítulo 1 é responsável por fornecer uma idéia geral sobre o que vem a ser identificação de sistemas. São apresentados alguns roteiros importantes na arte de modelagem matemática de sistemas. O capítulo também é composto por objetivos, motivação e estrutura da Dissertação.

O Capítulo 2 vai mostrar quais são os estudos mais recentes envolvendo identificação de sistemas. Primeiramente são apresentados alguns trabalhos que envolvem diversas técnicas de modelagem de sistemas. Logo após, vários trabalhos mostrarão a importância da metodologia multiobjetivo aplicada a diversos estudos de casos envolvendo a identificação de sistemas. Por fim, serão apresentados trabalhos em que a abordagem LMI é utilizada em muitas áreas da engenharia.

O Capítulo 3 faz uma descrição sucinta sobre Sistemas Dinâmicos Não-Lineares, abordando alguns conceitos importantes da área. Também é feita uma introdução sobre a teoria de identificação de sistemas. Posteriormente o capítulo abordará a Identificação Multiobjetivo de Sistemas. É feita uma introdução de conceitos importantes, como o Pareto-ótimo de soluções, utilizados em tal abordagem. É apresentada a importância da informação auxiliar, ou *a priori* em identificação de sistemas. Por fim, o capítulo traz uma introdução teórica sobre o que vem a ser LMI e seu uso em outras áreas importantes da Engenharia Elétrica.

O Capítulo 4 apresenta a base matemática do uso de LMIs em identificação de sistemas. Algumas equações da Identificação Multiobjetivo são convertidas para o formato LMI de maneira simples, mostrando que o método possui muitas aplicações. É mostrado também a possibilidade de se impor restrições ao modelo, de acordo com as necessidades de operação.

No Capítulo 5 são feitos alguns estudos de casos clássicos em identificação de sistemas através da abordagem LMI. Há identificação de 3 sistemas conhecidos da área, um estudo sobre o esforço computacional das LMIs e a capacidade de incorporação de restrições ao modelo via LMI, o que é mais trabalhoso utilizando outros métodos.

No Capítulo 6 será feita a conclusão do trabalho e sugestões sobre pes-

quisas futuras envolvendo LMI em identificação de sistemas.

Revisão bibliográfica

2.1 Introdução

Dentro da literatura especializada em identificação de sistemas há uma quantidade muito grande de trabalhos que usam diferentes métodos para modelar um sistema. Este capítulo é dedicado a mostrar um pouco dos trabalhos mais recentes que utilizam variadas técnicas de identificação. Posteriormente será dado um enfoque aos trabalhos que usam a metodologia multiobjetivo e por fim, alguns trabalhos situarão o tema LMI no que tem sido estudado nos últimos anos abordando tal técnica.

2.2 Contextualização

A identificação de sistemas abrange os mais variados tipos de técnicas para se encontrar um modelo que possa representar determinado sistema. Diversos trabalhos têm sido desenvolvidos procurando encontrar modelos mais simples, que possuam um número menor de parâmetros, porém com maior capacidade de se reproduzir toda a dinâmica do processo. Como exemplos, pode-se citar alguns trabalhos relacionados. Em (Pearson e Pottman, 2000), os autores fazem uso de informações sobre o estado permanente para fazer a identificação de um sistema via modelos de Hammerstein e Winner. Bazaci e Majd (2003) fazem a identificação de um sistema que combina os benefícios de linearização “feedback”, redes neurais e modelagem caixa-cinza. Em (Cavallo e Natale, 2007) os autores propõem um algoritmo não-iterativo para identificar os parâmetros de um modelo em tempo contínuo, utilizando estruturas

flexíveis. A abordagem caixa-cinza é adotada para preservar o significado físico dos parâmetros e impor restrições ao modelo. O trabalho de (Neve e Marchesi, 2007) envolve um esquema de identificação não-paramétrico para alguns conjuntos populacionais via processos estocásticos gaussianos. Em (Along e Raimondi, 2007) os autores fazem um trabalho envolvendo modelagem de conversores eletrônicos não-lineares usando métodos de identificação do tipo caixa-preta. Este sistema é identificado através de uma aproximação de modelos de Hammerstein. Em (Qiang e Huang, 2008) é feita a identificação de um sistema constituído por um pêndulo duplo invertido através de algoritmos genéticos. Eles apresentam um método que melhora a capacidade de convergência global, aumentando a diversidade populacional e evitando a convergência prematura. Chen e Hu (2008) fazem a identificação de um sistema sem o uso de instrumentos de parametrização. No trabalho de (Remsfelt e Rossberg, 2008) é feita uma identificação não-paramétrica para resolver o problema de alocação de sensores em ambientes de alto risco. Em (Gonzales-Olvera e Tang, 2010) é apresentada uma estrutura baseada em identificação caixa-preta em tempo contínuo recorrente de redes *neuro-fuzzy* para sistemas não-lineares, usando apenas medições de entrada e saída do sistema. Em (Wang e Xu, 2011) é feita uma combinação de métodos clássicos de identificação de sistemas não-lineares, criando um algoritmo híbrido. Neste trabalho (Teixeira e Aguirre, 2011) abordam o problema de estimação de parâmetros de um sistema não-linear via algoritmo de mínimos quadrados com incerteza ponderada. Esta abordagem leva em conta a incerteza presente em dados dinâmicos e estáticos. Em (Wernholt e Moberg, 2011) é feito um estudo do problema de estimação de parâmetros com conhecimento *a priori* de um sistema multivariável, não-linear e instável. A proposta é de um procedimento de identificação que utiliza modelos intermediários locais que permitem uma melhor compreensão dos dados.

Este trabalho vai utilizar a metodologia multiobjetivo onde será usada a informação auxiliar dos pontos fixos do sistema. Na identificação caixa-preta são conhecidos apenas os dados de entrada e saída do sistema. O modelo depende fortemente da qualidade dos dados dinâmicos coletados. Nem sempre os dados possuem toda a informação necessária para se construir um modelo. Ao contrário, na modelagem caixa-cinza, em muitos casos, a informação auxiliar está disponível. E conseqüentemente o modelo consegue ter um desempenho melhor. Pode-se citar alguns trabalhos onde algum tipo de informação é utilizada. Em (Tulleken, 1994) o problema do uso da informação auxiliar é

discutido na etapa de estimação de parâmetros usando modelos ARMAX e a informação utilizada é fornecida pela estabilidade e ganho estático na forma de restrições. Petrick (1997) utiliza a informação auxiliar na seleção de estruturas de modelos. Ele cita a existência de poucas ferramentas nesta etapa onde a informação auxiliar é utilizada. O trabalho mostra que é possível se utilizar o resultado do cálculo dos expoentes de *Lyapunov* na determinação da estrutura. O trabalho de (Abonyi e Szeifert, 2001) faz uma identificação caixa-cinza com auxílio de *lógica fuzzy*. As restrições são baseadas em informações conhecidas *a priori* do sistema em estudo. Em (Sanchez e Villar, 2006) o assunto tratado se refere à proposta de uma estimativa de modelos de sistemas caóticos através de técnicas multiobjetivos. Os modelos são discretos, construídos sobre blocos e otimizados, apresentando grande precisão e baixa complexidade. No trabalho de (Bloch e Petrosino, 2008) são explorados algoritmos genéticos aliados a técnicas multiobjetivos para identificação de *sistemas fuzzy Takagi-Sugeno (TS)*. Usam essa abordagem para determinar o *Pareto-ótimo* e conseguem bons resultados na seleção das variáveis de entrada e realizam uma otimização local dos modelos adquiridos utilizando uma abordagem de aprendizado denominada ANFIS. Ramos e Herrero (2008) fazem o tratamento de um procedimento necessário para a identificação de um modelo não-linear de uma câmara climática (temperatura e humidade) utilizando algoritmos evolucionários, onde são aplicadas técnicas multiobjetivos. Um método de otimização multiobjetivo para estimar um conjunto de modelos não-lineares *Pareto-ótimo* é empregado considerando várias restrições. Em (Yuan, 2009) são utilizadas técnicas de programação genética através de algoritmos evolucionários paralelos (*HFC-GP*) para a identificação estocástica de sistemas dinâmicos não-lineares. Utilizando estruturas NARX e NARMAX aliadas a técnicas multiobjetivos, os autores demonstraram que (*HFC-GP*) é muito eficaz no combate à convergência prematura, tendo bons resultados se comparado a outros métodos de identificação. No trabalho de (Shao e Erhgott, 2009) é proposto um método para aproximar um conjunto não-dominado de um problema multiobjetivo de programação não-linear, onde as funções-objetivo e o conjunto factível são convexos. Neste caso os objetivos e as restrições são diferenciáveis e os autores descrevem uma maneira eficiente de se realizar a etapa principal do algoritmo, a qual consiste na construção de um hiperplano que separa um ponto exterior a partir de um conjunto viável no espaço. Em (Liu e Wang, 2010) é desenvolvido um sistema de controle para ambientes ultra-silenciosos que abrigam teles-

cópios espaciais e laser de comunicação. São ambientes altamente sensíveis a qualquer tipo de ruído. Para isso o autor desenvolve este projeto com o auxílio de controle robusto multiobjetivo H_∞ e Síntese μ com base em valores singulares. Em (Jayakumari, 2011) é feita uma aproximação com o uso de algoritmos genéticos aplicados à otimização multiobjetivo na produção industrial. Ele aborda o assunto através de um conjunto de eventuais necessidades de produção com probabilidades determinadas. Neste conjunto probabilístico estão presentes todas as restrições, colocadas de forma aleatória, do setor de produção de uma dada indústria. No trabalho de (Liefogh, 2011) o autor trata da concepção, implementação e análise experimental de *Metaheurísticas* para resolver problemas de otimização multiobjetivo. O desempenho deste método é experimentado em um problema de roteamento envolvendo duas ou três funções-objetivo, a fim de lidar com as incertezas que podem ocorrer durante o processo.

A grande aplicação do uso de desigualdades matriciais lineares está mais concentrada na teoria de controle robusto e estabilidade de sistemas. Dentro da identificação de sistemas esta metodologia ainda não foi muito desenvolvida. Há poucos trabalhos que usam LMI em modelagem de sistemas. Como exemplo pode-se citar o trabalho de (Amato e Cosentino, 2007) em que é feita a reconstrução de uma rede biológica a partir de dados de uma série temporal, utilizando abordagem LMI. Neste caso o problema é resolvido com o auxílio de informações prévias do sistema em questão. Outros trabalhos mostram o quão importante é a abordagem LMI em outras áreas. Em (Gahinet e Nemirovskii, 1993) os autores apresentam o pacote de software *LMI-Lab* para manipulação de LMIs. Neste método os problemas são resolvidos em tempo polinomial, evitando grandes esforços computacionais. O trabalho de (Ikeda e Tanaka, 1999) aborda novas condições de estabilidade via LMI para sistemas de controle *fuzzy* em tempo contínuo e discreto. Em (Fujii e Shimomura, 1999) trata-se da abordagem de uma técnica LMI baseada na síntese H_2/H_∞ de controladores, que tem o potencial de evitar alguns problemas clássicos dentro de LMIs. Esta técnica permite realizar mudanças de variáveis para o projeto de controle. Em (Ikeda e Tanaka, 2000) os autores apresentam uma abordagem unificada para controlar o caos através de um sistema de controle baseado em LMIs. No trabalho de (Langari e Kwangtre, 2000) é apresentado um método de projeto sistemático para PDC (compensação paralela distribuída) do tipo Takagi-Sugeno para sistemas *fuzzy*. A estabilidade do estimador utilizado é determinada por técnicas LMIs derivadas do es-

tado *fuzzy*. O trabalho de (Fares e Noll, 2001) aborda a formulação LMI em um ambiente não-convexo. Para tal, eles utilizam uma técnica denominada *Lagrangeano Estendido*. Fujimori (2004) utiliza uma nova ferramenta para otimizar a realimentação de saída estática através de técnicas LMIs. Em (Patra e Mukherjee, 2006) é feita uma análise de sistemas LTI com incertezas através de técnicas LMIs. Um estudo local é feito com o objetivo de se determinar a estabilidade do sistema. Saif e Chen (2006) fazem um projeto para uma classe de sistemas não-lineares com entradas *Lipschits* desconhecidas. Tal sistema é denominado NUIO (nonlinear unknown input observer). Para evitar uma matriz não-linear, que é condição necessária de um sistema NUIO, os autores reformulam o problema em termos de LMI. No trabalho de (Lim e Lee, 2008) é proposto um método de projeto em tempo discreto de controladores PID multivariável via otimização LMI. Em (Ranchao e Weiwei, 2008) é feita uma discussão sobre sincronização caótica exponencial por redes neurais, tendo como base a *Teoria de Estabilidade de Lyapunov* e técnicas LMIs. Devido à facilidade com que as equações são escritas sob a forma de LMIs, a simulação numérica do problema mostra boa eficácia no que se refere ao esquema de controle não-linear. Em (Qaiser e Bhatti, 2009) os autores usam LMIs para o projeto de controladores robustos que foram usados em reatores nucleares. No trabalho de (Saif, 2009) o autor utiliza formulação LMI para determinar a estabilidade de sistemas MIMO. Em (Lam, 2011) é feito um estudo sobre a estabilidade de sistemas de controle *fuzzy*. A abordagem é feita com base na *Teoria de Lyapunov*, onde as restrições são escritas na forma de LMI satisfazendo as condições de estabilidade do sistema.

2.3 Conclusões do capítulo

Neste capítulo foram enunciados alguns trabalhos que envolvem a área de identificação de sistemas. As possibilidades de se modelar um sistema são muitas. Porém, não se pode afirmar com certeza absoluta se uma técnica ou outra é a melhor. Isto vai depender de cada caso. E cabe à pessoa que está trabalhando no processo de modelagem decidir pela melhor técnica, de acordo com aquilo que ela deseja.

Percebe-se que, por ser uma técnica recente, o uso de LMIs aplicadas à identificação de sistemas possui apenas um trabalho que foi descrito no capítulo. A grande aplicação desta técnica está concentrada na área de controle de sistemas. Com isso abre-se um grande conjunto de possibilidades que

podem ser investigadas utilizando LMIs em modelagem de sistemas.

Conceitos Preliminares

3.1 Introdução

Este capítulo apresentará uma breve descrição de alguns conceitos comumente utilizados em identificação de sistemas. Será dada uma visão mais abrangente do que vem a ser um *sistema* e suas principais características. Posteriormente, a temática sobre *identificação de sistemas* será explorada mostrando quais são as principais etapas de tal processo, juntamente com a metodologia multiobjetivo. Por fim, a teoria básica sobre LMIs vai ser apresentada com o objetivo de fornecer uma base matemática para seu uso em identificação de sistemas.

3.2 Sistemas Dinâmicos

Segundo o Dicionário Aurélio, *sistema* é definido como:

“Um sistema é um grupo de elementos interdependentes ou que interagem regularmente, e que formam um todo”.

Assim, um sistema é uma combinação de componentes que atuam juntos e realizam um objetivo determinado; um sistema não necessariamente tem que ser físico. Tem-se diferentes tipos de sistemas, e, de fato, quase tudo com o que se tem contato na vida é um sistema ou forma parte de um sistema. Um sistema pode ser qualquer objeto no qual variáveis de diferentes tipos interagem e produzem sinais observáveis. Estes sinais observáveis são conhecidos como saídas; os estímulos externos que afetam o sistema, e que

podem ser controlados, são chamados de entradas. Outros estímulos que afetam o sistema são as perturbações que se apresentam de forma aleatória e incontrolada. Agora, adicionando a palavra *dinâmico*, tem-se que um sistema dinâmico é aquele cujo modelo matemático é constituído por equações diferenciais ou a diferenças, onde o tempo é uma variável independente, ou seja, é aquele em que alguns dos seus aspectos variam com o tempo (Correa, 2001).

Já de acordo com a visão de (Monteiro, 2006) um sistema pode ser definido como um conjunto de objetos agrupados por alguma interação ou interdependência, de modo que existam relações de causa e efeito nos fenômenos que ocorrem com os elementos desse conjunto. A partir desta etapa do texto, o termo *sistema dinâmico* será abordado de forma mais matemática.

Em (Kalman e Arbib, 1970) um sistema é dito ser monovariável se e somente se ele possui uma única entrada e uma única saída. Por outro lado, um sistema é multivariável se e somente se ele possui mais de uma entrada e/ou mais de uma saída. As variáveis $u(t)$ e $y(t)$ representam os sinais de entrada e de saída de um sistema, respectivamente. Quando o sistema é do tipo multivariável, $u(t)$ e $y(t)$ são vetores cujas componentes representam as diversas entradas e saídas do sistema. Um sistema é classificado como dinâmico quando o valor atual de sua saída $y(t)$ depende do valor atual da entrada $u(t)$ aplicada e também da evolução temporal da entrada e da saída. Um sistema é classificado como estático quando o valor atual de sua saída $y(t)$ depende apenas do valor atual da entrada $u(t)$ aplicada. Como exemplos de sistemas dinâmicos temos: variação de tensão entre as placas de um capacitor, variação da massa de um foguete em ação, variação de determinada população, etc. A Figura 3.1 mostra a representação de um sistema. Neste caso é demonstrado o sistema caótico de Rossler. A Figura 3.2 demonstra a série temporal de tal sistema, ou seja, são os dados de saída do sistema.

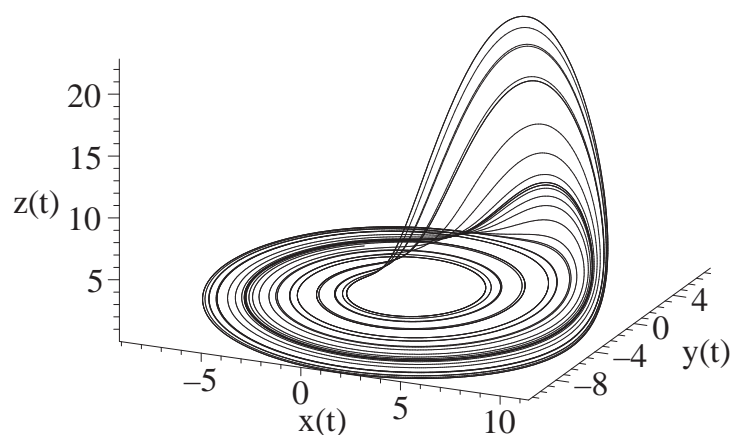
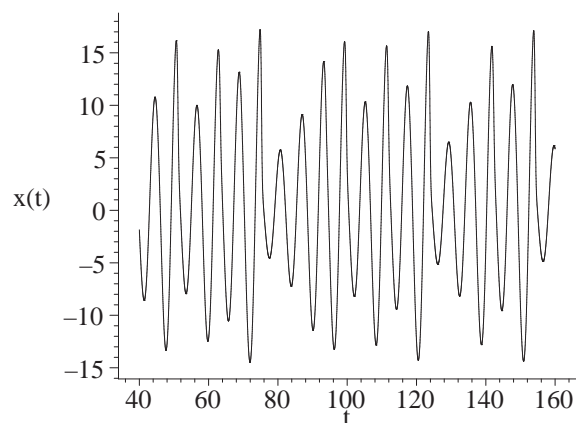


Figura 3.1: Sistema Dinâmico

Figura 3.2: Série temporal da variável $x(t)$

3.2.1 Classificação dos sistemas dinâmicos

Em geral, os sistemas dinâmicos apresentam uma classificação que serve para distinguir diferentes tipos de situações e diferentes tipos de modelos que podem ser construídos e usados para se estudar a evolução temporal de um sistema. De acordo com (Monteiro, 2006) eles podem ser classificados como:

- Quanto à variável temporal, o sistema pode ser contínuo ou discreto: O sistema é de tempo discreto se o tempo t é um número inteiro. Já de tempo contínuo, o tempo t é um número real.
- Quanto ao tipo de modelo, um sistema pode ser linear ou não-linear: A forma mais geral de se escrever uma equação de diferença linear de

ordem n para a variável dependente $x(t)$ é:

$$a_0(t)x(t+n) + a_1(t)x(t+n-1) + \cdots + a_n(t)x(t) = F(t). \quad (3.1)$$

A forma mais geral de se escrever uma equação diferencial linear de ordem n para a variável dependente $x(t)$ é:

$$a_n(t)\frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0(t)x(t) = F(t). \quad (3.2)$$

Um exemplo de sistema não-linear pode ser escrito da seguinte forma:

$$\frac{d^5 x(t)}{dt^5} + \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 - (x(t))^3 = 0. \quad (3.3)$$

- Quanto aos parâmetros do modelo, um sistema pode ser a parâmetros fixos ou variáveis no tempo:
Num sistema a parâmetros fixos, os coeficientes $a_j(t)$ são constantes. Assim, o tempo só pode aparecer explicitamente na função de entrada $F(t)$. Num sistema a parâmetros variáveis, um ou mais coeficientes $a_j(t)$ são funções explícitas do tempo t . Na verdade, em sistemas físicos reais, não existem parâmetros constantes. Tais grandezas variam muito lentamente em relação às grandezas que possuem rápida variação.
- Quanto à memória, um sistema pode ser instantâneo ou dinâmico:
Num sistema instantâneo (sem memória) a resposta em um dado momento depende apenas da excitação nesse mesmo instante. Já em um sistema dinâmico, a resposta em um dado instante depende dos valores das entradas passadas.
- Quanto à conservação de energia, os sistemas podem conservativos ou dissipativos:
Um sistema é dito conservativo quando ele consegue preservar a energia acumulada em seu estado, ou seja a energia em um dado instante de tempo é igual à energia em um instante anterior. Já em um sistema dissipativo esta energia diminui com o passar do tempo.

3.2.2 Estabilidade de Sistemas

Estabilidade é uma palavra usada para caracterizar tanto uma solução quanto uma equação diferencial (ou uma equação de diferença). A estabilidade de uma solução é determinada pelo comportamento das soluções cujas condições iniciais pertençam à sua vizinhança. A estabilidade de uma equação diferencial (ou de diferença) é determinada pelo comportamento de equações isomórficas cujos valores dos parâmetros são próximos aos da equação estudada (Monteiro, 2006).

A estabilidade é um tópico de elevada importância em análises de sistemas dinâmicos, pois determina qual a condição dinâmica de um ponto de equilíbrio. Do ponto de vista de engenharia, nos sistemas reais pode haver perturbações externas aos sistemas que podem levá-los a situações de instabilidades, bem como condições de operações que apresentam comportamentos instáveis, periódicos, quase-periódicos, ou até mesmo caóticos.

A teoria de Lyapunov para estabilidade de sistemas dinâmicos pode ser resumida em três categorias:

- estabilidade;
- estabilidade assintótica;
- estabilidade assintótica global.

Do ponto de vista matemático, em um sistema dinâmico não-linear há possibilidade de existência de vários pontos de equilíbrio, bem como a inexistência dos mesmos.

Um ponto de equilíbrio x^* é dito estável em t_0 , se para cada $\epsilon > 0$, existe um $\delta(t_0, \epsilon) > 0$ tal que:

$$\|x(t_0) - x^*\| < \delta(t_0, \epsilon) \Rightarrow \|x(t) - x^*\| \forall t \geq t_0.$$

Onde $\|\cdot\|$ é a Norma Euclidiana para vetores. No caso de pontos de equilíbrio instáveis tem-se o caso contrário. No caso de sistemas discretos o ponto de equilíbrio x^* é dito estável em k_0 se para cada $\epsilon > 0$ existe um $\delta(k_0, \epsilon)$ tal que:

$$\|x(k_0) - x^*\| < \delta(k_0, \epsilon) \Rightarrow \|x(k) - x^*\| \forall k \geq k_0.$$

Um ponto de equilíbrio x^* é dito assintoticamente estável em t_0 se:

1. é estável em t_0 ;

2. é atrativo;
3. existe um número $\delta_1(t_0)$ tal que:

$$\|x(t_0) - x^*\| < \delta_1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*\| = 0.$$

Se o sistema é discreto, um ponto de equilíbrio x^* é dito assintoticamente estável em k_0 se:

1. É estável em k_0 ;
2. é atrativo;
3. existe um número $\delta_1(k_0)$ tal que:

$$\|x(k_0) - x^*\| < \delta_1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k) - x^*\| = 0.$$

3.3 Identificação de Sistemas

3.3.1 Introdução

Segundo (Aguirre, 2007), *Identificação de Sistemas* é a área do conhecimento que estuda técnicas alternativas de modelagem matemática. Ou seja, em relação a um determinado sistema tem-se apenas um conjunto dados de entrada e dados de saída e, às vezes algum tipo de informação a respeito de seu comportamento. De posse dessas informações tenta-se criar um modelo matemático (equações diferenciais ou diferença) que possa reproduzir, com a máxima aproximação possível, o comportamento estático e dinâmico deste sistema. Esta seção tem por objetivo introduzir conceitos fundamentais para a identificação de sistemas e com isso contribuir para um melhor entendimento de quais são as etapas e os métodos mais comumente utilizados na literatura especializada dentro de modelagem de sistemas.

3.3.2 Etapas de Identificação de Sistemas

As principais etapas de um problema de identificação de sistemas, empregadas em sistemas lineares e não-lineares, podem ser encontradas em (Ljung, 1999):

- testes dinâmicos e coletas de dados;
- escolha da representação matemática;

- seleção da estrutura do modelo;
- estimação dos parâmetros do modelo;
- validação do modelo.

3.3.3 Teste dinâmico e coleta de dados

Esta etapa tem por objetivo garantir que, nos dados a serem modelados, estejam presentes todas as frequências de interesse e que estas possuam as características estáticas e dinâmicas do sistema. O sinal de excitação tem como função determinar as características dinâmicas e estáticas do sistema em toda a faixa de frequência de interesse e excitar a planta de maneira tal que todas as não-linearidades estejam presentes nos dados coletados. Outro aspecto importante nesta fase se refere ao tempo de amostragem, ou seja, o tempo entre duas amostras. Deve ser o suficiente para garantir todas as informações relevantes do sistema. Segundo Nyquist (Aguirre, 2007), a frequência de amostragem de um sinal analógico, para que possa posteriormente ser reconstituído com o mínimo de perda de informação, deve ser igual ou maior a duas vezes a maior frequência do espectro desse sinal. Na prática opta-se por um frequência de amostragem entre 5 a 10 vezes maior que a frequência de interesse (Aguirre, 2007).

3.3.4 Escolha da representação matemática

Dentro da literatura sobre identificação de sistemas há uma extensa quantidade de formas de se representar um sistema (Wernholt e Moberg, 2011). O mesmo sistema pode ser representado através de vários modelos matemáticos. Há várias formas em que as equações que descrevem um sistema podem ser escritas. Eles podem ser representados por modelos lineares e não-lineares. Dentro das representações lineares, pode-se citar:

1. função de transferência, onde o sistema é descrito no domínio da frequência relacionando a saída e a entrada, em termos da variável s ;
2. representação em espaço de estados, onde o sistema é descrito por um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem;
3. modelos ARX (auto-regressivo com entrada exógena);

4. modelos ARMAX (auro-regressivo, média móvel e entrada exógena).

Já como representações não-lineares, tem-se:

1. função de base radial (Haykin, 1994);
2. modelos de blocos interconectados (Correa, 2001);
3. redes neurais artificiais (Pedroza e Pedreira, 2000);
4. modelos *fuzzy*;
5. modelos NARX e NARMAX.

3.3.5 Seleção da estrutura do modelo

Segundo (Aguirre, 2007) a necessidade de se escolher um valor adequado para a ordem de um sistema pode ser apreciada verificando-se que, se a ordem usada for menor do que a ordem *efetiva* do sistema real, o modelo não possuirá a complexidade estrutural necessária para reproduzir a dinâmica do sistema. No caso contrário, quando a ordem do modelo for muito maior do que a necessária, a estimação dos parâmetros será malcondicionada. Em se tratando de modelos lineares, a determinação da estrutura é menos complexa do que quando se trabalha com modelos não-lineares. Um dos procedimentos utilizados para a estimação da ordem ou o número de parâmetros de um sistema é denominado Critério de Akaike (Aguirre, 2007). Já quando se trata de seleção de estrutura, uma das formas comumente utilizadas é denominada *ERR* (error reduction ratio) ou taxa de redução de erro, que associa a cada termo candidato um índice correspondente à contribuição deste na explicação da variância dos dados de saída (Billings S. A., 1997).

- **Critério de Akaike:** ele é definido como:

$$AIC(n_\theta) = N \ln[\sigma_{erro}^2(n_\theta)] + 2n_\theta, \quad (3.4)$$

em que N é o número de dados, $\sigma_{erro}^2(n_\theta)$ é a variância do erro de modelagem (erro de predição de um passo à frente ou resíduos) e $n_\theta = \dim[\hat{\theta}]$. Esse critério estabelece um compromisso entre a qualidade dos ajustes de identificação e procura por representações mais simples. O número de termos representados por AIC minimiza a variação dos resíduos de identificação partindo de uma estrutura previamente ajustada

por um critério de seleção de estrutura. De acordo com a equação (3.4), à medida que termos são incluídos no modelo, o número de graus de liberdade aumenta permitindo um ajuste aos dados mais exatos. Assim, σ_{erro}^2 diminui à medida que n_θ aumenta. Esta equação é formada por dois termos, onde o primeiro quantifica a diminuição na variância dos resíduos resultante da inclusão de um termo e a segunda parcela penaliza a inclusão de cada termo. Deve ser lembrado que este método é estatístico e não garante necessariamente que o modelo encontrado seja um modelo válido.

- **Taxa de redução de erro ou ERR:** em se tratando de modelos não-lineares é complicado se definir uma ordem significativa para a inclusão de termos candidatos no modelo. Uma forma de ordenar hierarquicamente os termos candidatos é utilizando a taxa de redução de erro (ERR) que associa a cada termo candidato um índice correspondente à contribuição deste na explicação da variância dos dados de saída. Para ver isto de forma matemática, define-se a variância do erro de modelagem $\xi(k)$ como sendo:

$$var\xi(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[y^T y - \sum_{i=1}^N g_i^2 \omega_i^T \omega_i \right], \quad (3.5)$$

em que g_i indica os elementos do vetor de parâmetros \mathbf{g} e ω_i indica regressores ortogonais e \mathbf{y} é o vetor contendo os dados de saída.

Supondo que nenhum termo fosse acrescentado ao modelo a variância de $\xi(k)$ seria igual ao erro quadrático da saída $y(k)$. A cada termo acrescentado, a variância $\xi(k)$ decresce de um fator igual a $\frac{1}{N}(g_i^2 \omega_i^T \omega_i)$, em que ω_i indica o termo incluído e g_i seu respectivo parâmetro. A redução no valor da variância pode ser normalizada com relação ao erro quadrático médio do sinal de saída. Assim, o ERR de cada termo é definido como sendo:

$$[ERR] = \frac{(g_i^2 \omega_i^T \omega_i)}{y^T y}. \quad (3.6)$$

3.3.6 Estimação dos parâmetros do modelo

Na estimação dos parâmetros de um modelo, podem ser utilizados diversos tipos de estimadores. Um dos mais comumente utilizados é o estimador

de mínimos quadrados (MQ), cujo princípio reside em encontrar uma solução (vetor de parâmetros estimados $\hat{\theta}$) que minimize o somatório do quadrado do erro de predição, e é aplicado a estruturas lineares nos parâmetros (Nepomuceno, 2002). Em estruturas não-lineares pode-se utilizar, por exemplo, o estimador de mínimos quadrados estendidos (MQE). Tal estimador tem por objetivo amenizar a polarização dos parâmetros estimados.

3.3.7 O Estimador de Mínimos Quadrados

Existem diversos procedimentos que são utilizados em identificação de sistemas. Alguns deles são amplamente difundidos em quase todas as áreas do conhecimento humano. Um desses métodos é conhecido como o Método dos Mínimos Quadrados (Nepomuceno, 2002). É uma técnica de otimização matemática que procura encontrar o melhor ajustamento para um conjunto de dados, tentando minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre a curva ajustada e os dados. Estas diferenças são conhecidas como resíduos (Aguirre, 2007). É utilizado para determinar os parâmetros de uma relação funcional entre duas ou mais grandezas de um fenômeno ou o valor mais provável de uma única grandeza medida várias vezes. A única exigência deste método consiste em que os erros que afetam as medições sejam aleatórios.

Uma vez escolhida a estrutura de um modelo, deve-se estimar os seus parâmetros para que o modelo possa se aproximar do comportamento dinâmico do sistema real (Barroso, 2004). Isto é normalmente feito em modelos polinomiais aplicando-se técnicas de mínimos quadrados (MQ) aos dados de identificação. De acordo com (Aguirre, 2007), assume-se que se conhece o valor estimado do vetor de parâmetros, $\hat{\theta}$, e que é cometido um erro ξ ao se tentar explicar o valor observado y a partir do vetor de regressores \mathbf{x} e de $\hat{\theta}$, ou seja,

$$y = \mathbf{x}^T \hat{\theta} + \xi. \quad (3.7)$$

Representando este resultado sob forma matricial tem-se:

$$\mathbf{y} = \Psi^T \hat{\theta} + \xi, \quad (3.8)$$

sendo que $\xi \in \mathbb{R}^N$ é o vetor de erros cometidos ao se tentar explicar \mathbf{y} como $\Psi^T \hat{\theta}$. Neste caso Ψ é denominada Matriz de Regressores e $\hat{\theta}$ os parâmetros a ser encontrados. Desta forma, é conveniente fazer com que $\hat{\theta}$ minimize ξ

em algum sentido. Para tanto define-se o somatório do quadrado dos erros:

$$J_{MQ} = \sum_{i=1}^N \xi(i)^2 = \xi^T \xi = \|\xi\|^2, \quad (3.9)$$

que nada mais é do que um índice que quantifica a qualidade de ajuste de $\Psi^T \hat{\theta}$ ao vetor de dados \mathbf{y} . Portanto é vantajoso que o valor estimado de $\hat{\theta}$ minimize J_{MQ} . Substituindo ξ , presente na equação 3.8, em (3.9), tem-se:

$$\begin{aligned} J_{MQ} &= (\mathbf{y} - \Psi \hat{\theta})^T (\mathbf{y} - \Psi \hat{\theta}) \\ J_{MQ} &= \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \Psi \hat{\theta} - \hat{\theta}^T \Psi^T \mathbf{y} + \hat{\theta}^T \Psi^T \Psi \hat{\theta}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

A fim de minimizar a função custo J_{MQ} com respeito a $\hat{\theta}$ é necessário resolver $(\partial J_{MQ} / \partial \hat{\theta}) = 0$. Fazendo-se isso, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{MQ}}{\partial \hat{\theta}} &= -(\mathbf{y}^T \Psi)^T - \Psi^T \mathbf{y} + (\Psi^T \Psi + \Psi^T \Psi) \hat{\theta} \\ \frac{\partial J_{MQ}}{\partial \hat{\theta}} &= -\Psi^T \mathbf{y} - \Psi^T \mathbf{y} + 2\Psi^T \Psi \hat{\theta}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Igualando-se a equação 3.11 a zero, tem-se:

$$\hat{\theta} = [\Psi^T \Psi]^{-1} \Psi^T \mathbf{y}. \quad (3.12)$$

Para que $\hat{\theta}$ seja mínimo, é necessário que

$$\frac{\partial^2 J_{MQ}}{\partial \hat{\theta}^2} = 2\Psi^T \Psi > 0. \quad (3.13)$$

A equação 3.13 é definida positiva por definição. O estimador que fornece o valor de $\hat{\theta}$, o qual minimiza o somatório do quadrado dos erros, é dado por:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{MQ} &= \arg_{\theta} \min J_{MQ} \\ \hat{\theta}_{MQ} &= [\Psi^T \Psi]^{-1} \Psi^T \mathbf{y} \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.3.8 O Estimador Estendido de Mínimos Quadrados

O método descrito anteriormente apresenta um problema quando o ruído apresenta correlação com algum regressor fazendo com que os parâmetros encontrados sejam polarizados. Isto ocorre por que alguma dinâmica não foi devidamente explicada pelo modelo (Barroso, 2004). A polarização do estimador *MQ* acontece quando o erro que aparece na equação de regressão, $y = \Psi\hat{\theta} + e$, for autocorrelacionado e ao mesmo tempo o modelo possuir regressores da saída.

Se os resíduos de identificação forem modelados como um processo de média móvel da seguinte maneira

$$e(k) = c_i\nu(k - i) + \nu(k), \quad (3.15)$$

sendo $\nu(k)$ ruído branco, os termos $\nu(k - i)$ podem ser incorporados à matriz de regressores e os seus respectivos parâmetros constituem o vetor de parâmetros do modelo da seguinte forma:

$$\mathbf{y}^* = \Psi^*\hat{\theta}^* + \mathbf{e}^*, \quad (3.16)$$

sendo que $\mathbf{y}^* = \mathbf{y}$, $\mathbf{e}^* = [\nu(k), \dots, \nu(k + N - 1)]^T$,

$$\Psi^* = \begin{bmatrix} \vdots & \nu(k - 1) \\ \vdots & \nu(k) \\ \Psi & \nu(k + 1) \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \nu(k + N - 1) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Logo a nova estimativa por mínimos quadrados, levando em conta o ruído presente nos dados de saída, é dada por:

$$\hat{\theta}^* = [\Psi^{*\text{T}}\Psi^*]^{-1} \Psi^{*\text{T}}\mathbf{y} \quad (3.18)$$

3.3.9 Validação do modelo

Um modelo será considerado válido se incorporar as características do sistema que são fundamentais para uma determinada aplicação (Duarte, 2009).

A validação dinâmica tem por finalidade verificar se o modelo estimado é capaz de representar a dinâmica do sistema em questão. A capacidade de generalização de um modelo deve ser analisada usando uma massa de dados de validação diferente da massa de dados de identificação. Dessa forma, é possível verificar se o modelo consegue explicar uma outra massa de dados do mesmo sistema.

Para validar um modelo dinamicamente, pode-se usar a simulação livre do mesmo, que consiste em usar um conjunto de dados do sistema, os de validação, e as previsões passadas, na matriz de regressores. O fluxograma Figura 3.3 descreve estas etapas.

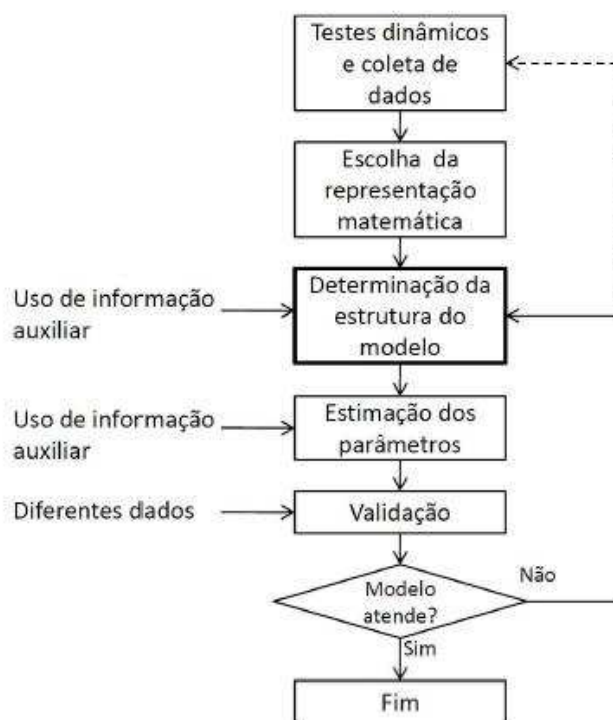


Figura 3.3: Fluxograma de Identificação de Sistemas (Duarte, 2009)

3.4 Técnicas de agrupamento de termos e pontos fixos

O ponto de partida na análise de sistemas não-lineares envolve a localização e a caracterização da estabilidade dos pontos fixos do sistema utilizando modelos matemáticos (Aguirre, 2007). A determinação dos pontos fixos de um sistema é dado pela resolução da equação proveniente do agrupamento de termos (Barroso, 2004). Os pontos fixos de um modelo discreto autônomo são definidos como aqueles pontos para os quais $y(k)=y(k+i)$, com $i \in \mathbb{Z}$. No caso de modelos não autônomos, os pontos fixos podem ser definidos para valores constantes do sinal de entrada. A estrutura NARX (não-linear auto-regressivo com entrada exógena) foi usada, a princípio, para a modelagem de alguns sistemas que serão estudados adiante. Uma estrutura deste tipo é dada por:

$$y(k) = F^l[y(k-1), \dots, y(k-n_y), u(k-\tau_d), \dots, u(k-n_u)] + e(k), \quad (3.19)$$

sendo $k=1 \dots N$. F^l uma função não-linear qualquer, $y(k)$ e $u(k)$, são respectivamente, saída e entrada do sistema, que têm seus atrasos representados por n_y e n_u respectivamente. O termo τ_d representa o atraso puro de tempo e $e(k)$ representa as incertezas. Os termos $y(k-i)$, com $i = (1, \dots, n_y)$ e $u(k-j)$, com $j = (1, \dots, n_u)$, são chamados regressores de processo do modelo.

O modelo NARX (3.19) pode ser reescrito como (Aguirre, 2007):

$$y(k) = \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^m \sum_{n_1, n_m}^{n_y, n_u} c_{p, m-p} \prod_{i=1}^p y(k-n_i) \prod_{m}^{i=p+1} u(k-n_i), \quad (3.20)$$

sendo:

$$\sum_{n_1, n_m}^{n_y, n_u} \equiv \sum_{n_l=1}^{n_y} \dots \sum_{n_m}^{n_y}. \quad (3.21)$$

Os monômios da equação (3.20) são agrupados de acordo com a sua ordem $m(0 \leq m \leq l)$, sendo l o grau de não-linearidade do modelo. Cada termo de ordem m contém fatores multiplicativos em $y(k-i)$ e $(m-p)$ fatores multiplicativos em $u(k-j)$. Os parâmetros destes termos são representados por $c_{p, m-p}(n_l \dots n_m)$ nos quais $(n_l \dots n_m)$ indicam os atrasos de cada fator constituinte do monômio considerado.

O primeiro somatório da equação 3.20 faz referência aos monômios da equa-

ção 3.19, separando-os de acordo com a sua ordem. O somatório faz referência ao número de fatores em $y(k-i)$ no termo considerado. Dentro do conjunto de termos de ordem m , um termo qualquer pode ser acessado através do ajuste do valor p adequado. Por fim, o último somatório permite que seja feita a distinção entre os termos de (3.20), através dos ajustes dos atrasos de cada um dos fatores constituintes do termo.

Analisando-se o modelo em estado estacionário para entradas constantes, tem-se:

$$\begin{aligned} y(k-1) &= y(k-2) = \dots = y(k-n_y) \\ u(k-1) &= u(k-2) = \dots = u(k-n_u), \end{aligned} \quad (3.22)$$

aplicando (3.22) em (3.20) chega-se a:

$$y(k) = \sum_{n_l, n_m}^{n_y, n_u} c_{p, m-p}(n_l, \dots, n_m) \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^m y(k-1)^p u(k-1)^{m-p}. \quad (3.23)$$

O conjunto de termos da forma $y(k-i)^p u(k-j)^{m-p}$ é denominado agrupamento de termos (Aguirre, 2007). Estes serão representados por $\Omega_{y^p u^{m-p}}$. A constante

$$\sum_{n_l, n_m}^{n_y, n_u} c_{p, m-p}(n_l, \dots, n_m),$$

é o coeficiente de termos $y(k-1)^p u(k-1)^{m-p}$ e será representado por $\sum y^p u^{m-p}$. Todos os termos pertencentes a um dado agrupamento de termos explicam o mesmo tipo de não-linearidade do modelo.

A título de exemplificação serão mostrados alguns equacionamentos básicos para a determinação dos pontos fixos de modelos NAR (não-linear e auto-regressivo). Este tipo de estrutura foi escolhida devido à sua simplicidade por não apresentar termos referentes à entrada dos sistemas. Posteriormente, esta estrutura também será usada na modelagem de alguns sistemas.

Como já foi dito, a determinação dos pontos fixos de um sistema é dada pela resolução da equação proveniente do agrupamento de termos. Sendo assim, tem-se os seguintes equacionamentos básicos (Nepomuceno, 2002):

$$\left(\sum_y - 1 \right) y + \sum_0 = 0, \quad (3.24)$$

o ponto fixo é dado por:

$$\bar{y} = \frac{\sum_0}{1 - \sum_y}. \quad (3.25)$$

Onde Σ significa o somatório de termos semelhantes.

Para modelos quadráticos escritos sob a mesma forma de (3.24), tem-se:

$$\sum_{y^2} y^2 + \left(\sum_y - 1 \right) y + \sum_0 = 0, \quad (3.26)$$

sendo que os pontos fixos são dados por:

$$\bar{y}_{1,2} = \frac{1 - \sum_y \pm \sqrt{\Delta}}{2 \sum_{y^2}}, \quad (3.27)$$

sendo $\Delta = (\sum_y - 1)^2 - 4 (\sum_{y^2}) (\sum_0)$.

Desta forma pode-se definir o conjunto Φ dos coeficientes de agrupamento do referido modelo pela seguinte equação:

$$\Phi = \left[\sum_{y^l}, \dots, \sum_{y^2}, \left(\sum_y - 1 \right), \sum_0 \right]. \quad (3.28)$$

3.5 Identificação Multiobjetivo de Sistemas

3.5.1 Introdução

O uso de informações auxiliares dentro da identificação de sistemas tornou-se uma ferramenta útil ao se reproduzir matematicamente um sistema real. Este tipo de informação faz com que o modelo possua características desejáveis (Barbosa, 2010). Por exemplo, a informação dos pontos fixos do sistema. Utilizando ela, o modelo construído apresenta características estáticas que estão presentes no sistema real. Esta técnica é conhecida como *Identificação Caixa-Cinza*, ou seja, tem-se uma informação prévia do sistema (*informação a priori*). De um modo mais genérico, a identificação que utilizar um ou mais tipos de informação auxiliar de qualquer procedência, associada a técnicas de estimação de parâmetros será chamada *Identificação Multiobjetivo* (Nepomuceno, 2002). A idéia por trás desse tipo de identificação é achar um caminho ótimo para combinar as informações dinâmicas, que podem conter erro de medida significativo, e estáticas, que contêm informações precisas sobre os coeficientes de agrupamento de termos, mas não é

capaz de sozinha estimar os parâmetros do sistema (Barroso, 2004).

Dentro da área de Otimização de Sistemas, existem problemas nos quais há vários objetivos a ser alcançados ao invés de apenas um (Nepomuceno, 2002). Geralmente esses objetivos são conflitantes entre si, e, raramente existe uma solução que seja ótima para todos objetivos simultaneamente. Ao se referir a *objetivos conflitantes* tem-se a idéia de objetivos que não podem ser minimizados ou maximizados ao mesmo tempo. Por exemplo: custo e impacto ambiental em uma dada empresa. Se o custo for minimizado o impacto ambiental será alto, caso contrário, se o impacto ambiental for mínimo, o custo será elevado. Desse modo, haverá soluções que serão melhores se comparadas a outras em algum ou alguns objetivos. Assim, tem-se um conjunto de soluções denominado *Pareto-ótimo*. A determinação desse conjunto é uma das principais etapas do *Problema Multiobjetivo*. A princípio não existe uma solução única que minimize simultaneamente todas as funções objetivos. Este tipo de problema tende a possuir um conjunto limitado de infinitas soluções. Mas é necessário encontrar uma solução que seja a melhor entre todas. O conjunto Pareto-ótimo contém as soluções candidatas a se tornar essa solução única. A Figura 3.4 exemplifica o que vem a ser o *Pareto-ótimo*.

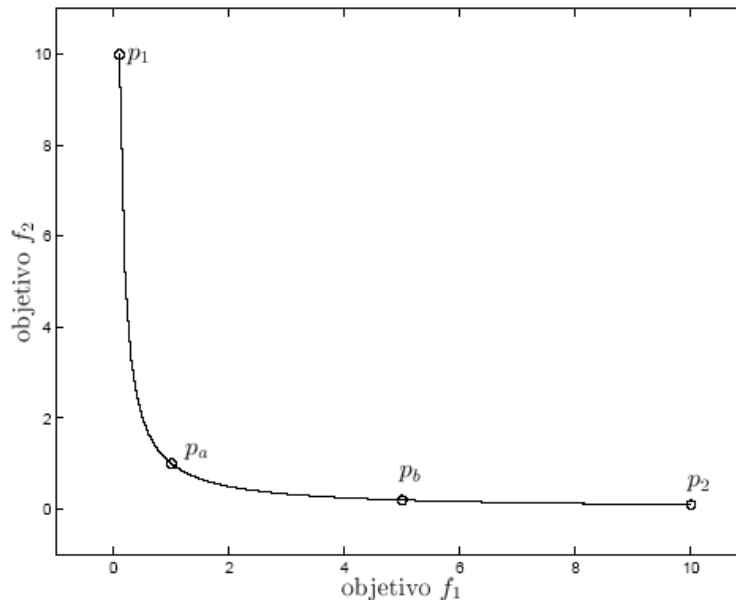


Figura 3.4: Pareto-ótimo, (Nepomuceno, 2002)

Na Figura 3.4 percebe-se que, por se tratar de um problema multiobjetivo, à medida que se melhora um dos objetivos há uma conseqüente piora do outro objetivo. Sendo assim, é necessário encontrar qual seria a melhor solução onde haja um aproveitamento máximo dos objetivos. A escolha da melhor solução deve ser uma etapa na qual o conjunto de possíveis soluções é reduzido até a determinação desta. Esta etapa, denominada etapa de decisão, deve incluir uma sistemática de busca da melhor solução, supondo a existência de uma *função utilidade*, que exhibe um padrão de preferências coerente e ordenado (Barroso, 2004).

3.5.2 Formulação Multiobjetivo

Nesta etapa do trabalho, serão discutidas as formulações dos processos envolvidos no *Problema de Otimização Multiobjetivo*.

3.5.3 Determinação das Soluções eficientes

Considere o vetor de funções-objetivo:

$$J(\hat{\theta}) = \begin{bmatrix} J_1(\hat{\theta}) \\ J_2(\hat{\theta}) \\ \vdots \\ J_m(\hat{\theta}) \end{bmatrix}^T. \quad (3.29)$$

Como já foi dito, não existe uma solução única que minimize, simultaneamente, as m funções-objetivo. Sendo assim, um grande número de soluções pode ser encontrado, caracterizando assim o Pareto-ótimo. O que pode ser verificado em:

$$\hat{\theta}^* \in \hat{\Theta}^* \iff \{\nexists \hat{\theta} : J(\hat{\theta}) \leq J(\hat{\theta}^*) \text{ e } J(\hat{\theta}) \neq J(\hat{\theta}^*)\}, \quad (3.30)$$

em que $\hat{\theta}^*$ é o conjunto de parâmetros estimados e $\hat{\Theta}^*$ é o espaço de parâmetros. A solução será eficiente se e somente se não existir um outra solução que melhore um dos objetivos sem a degradação de pelo menos outro objetivo (Nepomuceno, 2002).

3.5.4 Busca pela solução Eficiente

A solução desejada deve ser tal que satisfaça as alternativas a seguir:

1. a menor quantidade de consultas ao decisor (humano ou automático) possível;
2. as alternativas dadas ao decisor devem ser de fácil compreensão;
3. o encadeamento dessas etapas de decisão conduz a diferentes estruturas para o mecanismo de decisão.

Em um caso, em que há a intervenção de um decisor humano, pode-se seguir uma das seguintes possibilidades:

- apresentação de preferências a posteriori: será determinado um conjunto de soluções que seja representativo de todo o conjunto de soluções eficientes antes de iniciar qualquer interação com o decisor humano;
- apresentação de preferências progressivas: a consulta é feita ao decisor juntamente com o processo de determinação de soluções eficientes. Cada consulta ao decisor é utilizada para determinar os parâmetros de uma nova busca de um ponto pertencente ao conjunto de soluções de soluções eficientes;
- apresentação de preferências *a priori*: agora o decisor é previamente consultado e formula uma certa estrutura de preferências que não dependem do conhecimento das alternativas concretas que vierem a se colocar. Este ponto pode ser entendido como um caso de otimização mono-objetivo. Entretanto, esta é uma forma de agregar múltiplos objetivos em um problema de otimização (Barroso, 2004).

3.5.5 Problema Multiobjetivo na forma computacional

Para se determinar o conjunto de soluções eficientes, a estratégia mais comum é caracterizar esse conjunto em termos de soluções de vários problemas mono-objetivos (Nepomuceno, 2002). Uma dessas estratégias é o chamado *problema de ponderação* P_ω (Chankong e Haimes, 1983). Considere:

$$W = \{\mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \ \omega_j \geq 0, \text{ e } \sum_{j=1}^n \omega_j = 1\}, \quad (3.31)$$

como sendo pesos não-negativos. O problema de ponderação é definido como $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ tal que:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^* = \arg \min_{\hat{\boldsymbol{\theta}} \in D} \sum_{i=1}^n \omega_i J_i(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \quad (3.32)$$

em que J_i são todos os objetivos e restrições.

Esse método, muito simples, é capaz de achar completamente o conjunto de soluções eficientes para problemas convexos. O Teorema 3.1, desenvolvido em (Nepomuceno, 2002), mostra uma eficiente estratégia computacional para resolver (3.32), para casos em que os funcionais J_i puderem ser expressos pelo somatório de erros quadráticos.

Teorema 3.1 *Seja $\omega_i \in \mathbb{R}^+$ e $J_i(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ com i, \dots, n funcionais denotados por:*

$$J_i(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \left(\mathbf{v}_i - G_i \hat{\boldsymbol{\theta}} \right)^T \left(\mathbf{v}_i - G_i \hat{\boldsymbol{\theta}} \right), \quad (3.33)$$

em que $\hat{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^{n_\theta \times 1}$, $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^{n_\nu \times 1}$ e $G_i \in \mathbb{R}^{n_\nu \times n_\theta}$.

O problema

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^* = \arg \min_{\hat{\boldsymbol{\theta}} \in D} J(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \arg \min_{\hat{\boldsymbol{\theta}} \in D} \sum_{i=1}^n \omega_i J_i(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (3.34)$$

tem por solução:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^* = \left[\sum_{i=1}^n \omega_i G_i^T G_i \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \omega_i G_i^T \mathbf{v}_i \right]. \quad (3.35)$$

3.5.6 Incorporação da Informação Auxiliar

As propriedades estruturais de modelos NARMAX polinomial podem ser utilizadas na identificação de sistemas não-lineares, particularmente na etapa de estimação de parâmetros (Bohlin, 1994). O tipo de informação auxiliar que será utilizado neste trabalho é o conhecimento da localização dos pontos fixos.

Para evitar uma grande variância nos parâmetros, o seguinte procedimento é empregado (Nepomuceno, 2002). O conjunto de parâmetros obtidos pelo método dos mínimos quadrados é usado como referência. Sendo assim, um conjunto de coeficientes de agrupamento pode ser determinado:

$$\Phi_{MQ} = [\Sigma_{MQy^1}, \dots, \Sigma_{MQy^2}, (\Sigma_{MQy} - 1), \Sigma_{MQ0}]. \quad (3.36)$$

Seja a Norma Euclidiana, $\|\cdot\|$, do conjunto de parâmetros a raiz quadrada do somatório dos quadrados dos parâmetros. A Norma Euclidiana do conjunto de parâmetros de qualquer modelo associado a determinados pontos fixos pode ser normalizada, a fim de igualar à Norma Euclidiana do conjunto Φ_{MQ} . Fazendo isso, tem-se o seguinte conjunto de coeficientes de agrupamento normalizado:

$$\Sigma = \frac{\|\Phi_{MQ}\|}{\|\Phi\|} [\Sigma_{y^1}, \dots, \Sigma_{y^2}, (\Sigma_y - 1), \Sigma_0]. \quad (3.37)$$

Para minimizar o erro de localização dos pontos fixos, a seguinte função deve ser minimizada:

$$J_{PF} = (\Sigma - \hat{\Sigma})^T (\Sigma - \hat{\Sigma}) = (\Sigma - S\hat{\Theta})^T (\Sigma - S\hat{\Theta}) \quad (3.38)$$

em que S é um mapeamento tal que $\hat{\Sigma} = S\hat{\Theta}$. A função (3.38) se enquadra no formato exigido pelo Teorema 3.1. É direto mostrar que para a situação em que há dois objetivos: erro quadrático e erro de localização dos pontos fixos, tem-se a estimativa da resposta estática

$$\hat{\theta} = [\omega_1 \Psi^T \Psi + \omega_2 S^T S]^{-1} [\omega_1 \Psi^T \mathbf{y} + \omega_2 S^T \Sigma]. \quad (3.39)$$

Fazendo uma variação de ω_1 e ω_2 de tal forma que $\omega_1 + \omega_2 = 1$. E esta variação é feita de maneira logarítmica ou linear. Na equação (3.39) o termo S é chamado de matriz de mapeamento linear. Essa matriz é responsável por levar o agrupamento de termos ao respectivo parâmetro.

3.6 Desigualdades Matriciais Lineares: LMIs

3.6.1 Introdução

O termo *LMI* vem do inglês *Linear Matrix Inequalities* o qual significa *Desigualdades Matriciais Lineares* (Boyd et al., 1994). As LMIs têm aparecido como uma nova e poderosa ferramenta na análise e projeto de sistemas de controle nos maiores eventos da área (Chilali e Gahinet, 1999). Com o desenvolvimento das técnicas de otimização convexa, as LMIs têm se tor-

nado uma importante ferramenta, com muitas aplicações presentes e futuras. Graças a uma manipulação adequada, problemas de controle puderam ser formulados em um espaço paramétrico convexo, como problemas de otimização, permitindo o uso de ferramentas computacionais eficientes para sua resolução (de Oliveira, 1999). Em particular, os problemas convexos, descritos pelas LMIs atraíram mais atenção, pela simplicidade, elegância, e principalmente pelo verdadeiro arsenal de métodos numéricos especializados disponíveis.

Uma grande vantagem da utilização das LMIs é que várias restrições e especificações de projeto podem ser formuladas de uma forma numericamente manejável. Uma vez descritos nesta forma, os problemas podem ser solucionados por eficientes algoritmos de otimização convexa, também chamados de *LMI solvers*. Muitos problemas que não têm solução analítica podem ser solucionados por meios numéricos, com garantias de se encontrar uma solução, quando esta existir (Silva, 2004).

Muitos problemas de controle e especificações de projeto têm a formulação LMI. Isto é especialmente verdade para a análise e projeto de sistemas que utilizam o princípio de *Lyapunov*, mas também para problemas de ótimo LQG (linear quadratic gaussian), controle H_∞ , controle H_2 , controle covariância, etc (Trofino, 2000)(Boyd et al., 1994).

Graças ao avanço do desenvolvimento de pacotes computacionais, esta técnica se tornou uma ferramenta possível na procura de soluções para os mais diversos problemas de otimização, controle de sistemas e, recentemente, identificação de sistemas. Outra grande virtude da abordagem LMI é a de possibilitar o tratamento simultâneo de vários requisitos de desempenho e robustez (Trofino, 2000). Isto se deve ao fato do surgimento de algoritmos de pontos interiores para a solução de problemas de otimização convexa, o que tornou possível solucionar numericamente LMIs de forma mais rápida e eficiente (Kanno, 2005). Desde então, diversas pesquisas vêm sendo desenvolvidas para a criação ou aperfeiçoamento de pacotes computacionais para a solução de problemas de otimização convexa. O uso de LMIs tem se mostrado altamente eficaz dentro da teoria de controle e sistemas quando se lida com um número elevado de variáveis. Devido à grande importância da identificação de sistemas no mundo atual, a aplicação de LMIs em modelagem de sistemas vislumbra um extenso horizonte de possibilidades e aplicações.

3.6.2 História do uso de LMIs

Segundo (Boyd et al., 1994), a história do uso das LMIs na análise de sistemas dinâmicos tem mais de 100 anos. A história começa no ano de 1890, quando Lyapunov publicou seu trabalho introduzindo o que chama-se de *Teoria de Lyapunov*. Ele formulou o estudo de estabilidade de sistemas dinâmicos através de uma desigualdade matricial. O grande destaque se deu na década de 1940, com *Lur'e, Postikov e outros* na extinta União Soviética. Eles aplicaram o método de Lyapunov em alguns problemas práticos de engenharia, especialmente no problema de estabilidade de sistemas de controle, com não-linearidades no atuador.

O próximo grande avanço ocorreu na década de 1960, quando Yakubovich, Popov, Kalman e outros, reduziram a solução de LMIs a um critério gráfico simples, que agora é chamado de *positive-real lemma*.

Em 1984, N. Karmarkar introduziu um novo método de programação linear que resolve os problemas descritos na forma de LMIs com convergência polinomial, muito eficiente na prática. Em 1988, Nesterov e Nemirovskii desenvolveram o método de pontos interiores que se aplicam diretamente nos problemas de programação convexa que envolvem LMIs. Em um estudo mais recente, as LMIs estão sendo objeto de muitas pesquisas por renomados pesquisadores mundiais, tendo sido aplicadas nas mais diversas áreas: controle de sistemas contínuos e discretos no tempo (Ramos e Peres, 2002); controle ótimo; controle robusto (Palhares e Peres, 1999); posicionamento de sensores e atuadores (Cominos e Munro, 2002); redução de modelos (Trofino e Coutinho, 2004); controle de sistemas não lineares e teoria de filtros robustos (Palhares e Peres, 2000); controle com estrutura variável (Yang e Tong, 1993); controle usando lógica fuzzy (Lian e Tu, 2006); localização de falhas estruturais (de Oliveira e Geromel, 1999).

3.6.3 Definição matemática de LMI

O uso de Desigualdades Matriciais Lineares na teoria de controle começou a se desenvolver a partir da década de 80, com a criação e aperfeiçoamento de algoritmos de otimização convexa, como pontos interiores (Trofino, 2000). A partir de então, muitos dos resultados usuais da teoria de controle e sistemas estão sendo reescritos como LMIs. Já existem no mercado pacotes computacionais eficientes para se resolver problemas envolvendo LMIs

(Palhares, 1998). Os pacotes mais conhecidos para a solução de LMIs são:

- LMILab presente no Matlab que usa o Método Projetivo para a solução do problema.
- LMITOOL presente no Scilab e Matlab que usa o Método Primal-Dual.

Outro ponto de suma importância é que na abordagem LMI a busca de soluções para problemas mais complexos, principalmente quando há presença de elementos incertos, pode ser simplificada devido às propriedades de convexidade e linearidade (Trofino, 2000).

3.6.4 Estabilidade Quadrática

A estabilidade de um ponto de equilíbrio é usualmente caracterizada de acordo com a teoria de *Lyapunov* para sistemas. Intuitivamente, a estabilidade de um sistema dinâmico está relacionada com a função energia deste sistema. Se a função energia do sistema é sempre não negativa e decresce com relação ao tempo, as trajetórias tendem à origem (Monteiro, 2006). Fazendo uma análise mais genérica, a teoria de *Lyapunov* garante que, para sistemas invariantes no tempo, o ponto de equilíbrio é estável se existe uma função escalar $v(x)$ tal que:

- $v(x) \succ 0, \forall x \neq 0 \in B_x$.
- $\dot{v}(x) \prec 0, \forall x \neq 0 \in B_x$.

Onde B_x significa uma região na vizinhança do ponto de equilíbrio.

A classe de funções escalares $v(x)$ para tal definição que pode ser facilmente verificada é a das funções quadráticas:

$$v(x) = x'Px \tag{3.40}$$

Onde P é uma matriz constante, real e simétrica. Se a condição $v(x) = x'Px \succ 0$ para todo $x \in B_x$, é equivalente a determinarmos uma matriz $P=P' \succ 0$. Se existir essa matriz P pode-se dizer que o sistema dinâmico é quadraticamente estável e que $v(x)$ é função de *Lyapunov* quadrática.

3.6.5 Desigualdades Matriciais Lineares: LMI

Segundo (Boyd et al., 1994) uma LMI é definida como:

$$F(x) \equiv F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \succ 0 \quad (3.41)$$

em que $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ é o vetor de variáveis de decisão; $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ para $i=0, \dots, m$ são matrizes simétricas dadas. Normalmente uma LMI não aparece na forma da equação 3.41, e sim na forma matricial como desigualdade de *Lyapunov*. Para se determinar a estabilidade de um sistema via equação de *Lyapunov* usa-se a relação:

$$A'P + PA + Q \succ 0 \quad (3.42)$$

Em que qualquer matriz $P = P' \succ 0$, é necessária para que a equação de *Lyapunov* $A'P + PA + Q = 0$ seja definida positiva e Q é uma matriz qualquer.

A LMI $F(x) \succ 0$ é uma restrição convexa, isto é, o conjunto:

$$\{x : F(x) \succ 0\}$$

é um conjunto convexo.

Nem todo resultado da Teoria de Sistemas aparece diretamente na forma de LMI, como a equação de *Lyapunov*. Mas algumas ferramentas da álgebra matricial ajudam a transpor estes resultados para uma formulação LMI. Uma dessas ferramentas é denominada Complemento de Schur (Barenthin e Jansson, 2000). O Complemento de Schur é um resultado da Teoria de Matrizes que ajuda na transformação de inequações não-lineares para a forma de LMI. Basicamente a LMI

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)' & R(x) \end{bmatrix} \succ 0 \quad (3.43)$$

com $Q(x) = Q(x)'$, $R(x) = R(x)'$ e $S(x)$ que são matrizes que dependem de maneira afim da variável x equivale a:

$$R(x) \succ 0, Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)' \succ 0 \quad (3.44)$$

3.6.6 Propriedades das LMIs:

O uso de desigualdades matriciais lineares dentro da teoria de sistemas e controle ganhou um grande impulso devido a duas importantes propriedades das LMIs (Trofino, 2000):

- Linearidade:

Na realidade a função $F(x)$ é uma função afim, pois em (3.41) para $x = 0$ temos que $F(0) = F_0$. Mas tornou-se usual chamá-la de LMI, pois tem-se que esta inequação afim pode-se tornar uma inequação linear pela simples troca de coordenadas.

- Convexidade:

Um conjunto χ é convexo se $\forall x, y \in \mathbb{R}$ e todo θ com $0 \leq \theta < 1$ tem-se que:

$$\theta x + (1 - \theta) y \in \chi$$

Ou seja, um conjunto χ será convexo se para quaisquer dois pontos x e $y \in \chi$ o segmento de reta unindo estes dois pontos também pertença ao conjunto. Pela teoria dos conjuntos tem-se que todo conjunto afim será também convexo. Note que uma LMI será também convexa nos dados se as matrizes F_i são afins em δ . A característica de convexidade é das mais importantes das LMIs, pois facilita, principalmente, a busca de soluções para sistemas incertos (Coutinho, 2000).

3.6.7 Complexidade computacional

Como já foi salientado, uma das mais importantes vantagens no uso de LMIs é a existência de pacotes computacionais para a sua solução. Mas como todo problema de otimização convexa, ou SPD (programação semi-definida), pode-se ter dificuldades numéricas na busca de soluções de uma LMI.

Algumas destas dificuldades apresentadas podem ocorrer devido ao mal condicionamento numérico dos dados, capacidade de memória das máquinas ou erros de precisão. Outro grande problema é o esforço computacional necessário para solucionar LMIs (Trofino, 2000). Grandes progressos foram feitos com o uso de algoritmos de pontos interiores para a sua solução, garantindo a solução do problema em tempo polinomial, ao invés da ordem exponencial

dada por outros algoritmos.

Uma aproximação da ordem de grandeza do número de operações é dada por:

$$\textit{Primal} - \textit{dual} : O(m^\alpha L^\beta). \quad (3.45)$$

$$\textit{Projetivo} : O(Lm^3 \log(V/\epsilon)). \quad (3.46)$$

Onde m é o número de variáveis e L é o número de LMIs e $\alpha \cong 2.1$ e $\beta \cong 1.2$. Perceba que o número de operações para a solução do problema via LMI é dependente do número de LMIs e do número de variáveis a ser buscada. Os softwares hoje existentes são capazes de manipular algumas centenas de variáveis de decisão.

3.7 Conclusões do capítulo

Foram apresentados alguns conceitos úteis em identificação de sistemas que utilizam a metodologia multiobjetivo. Toda a base matemática envolvendo LMI, apresentada no capítulo, será aplicada na identificação de sistemas usando técnicas LMIs. As estruturas apresentadas no capítulo serão, posteriormente, aplicadas em alguns estudos de casos.

LMI aplicada à Identificação de Sistemas

4.1 Introdução

Neste capítulo será apresentada uma técnica de estimação de parâmetros onde o problema é escrito no formato LMI. A principal função da abordagem LMI é transformar uma desigualdade não-linear em uma desigualdade matricial que possua termos lineares, que são mais simples de serem trabalhados. Quando se trata de identificação de sistemas, em que o objetivo é determinar os parâmetros de um modelo, tenta-se minimizar o erro cometido entre os parâmetros reais e os estimados. De posse da estrutura e do modelo a ser utilizado, deve-se estimar os parâmetros para que o modelo possa se aproximar do comportamento dinâmico do sistema real. Isto é normalmente feito em modelos polinomiais aplicando-se técnicas de mínimos quadrados (MQ) aos dados de identificação.

Esta dissertação vai encontrar esses mesmos parâmetros escrevendo o problema de uma maneira alternativa.

4.1.1 Metodologia

Assim, toma-se o modelo dinâmico que gera restrições que podem ser representadas pela Equação Matricial:

$$\mathbf{y} = \mathbf{\Psi}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\xi}. \quad (4.1)$$

Onde $\mathbf{\Psi}$ é a matriz de regressores do sistema e $\boldsymbol{\xi}$ representa os resíduos, ou seja, a diferença entre parâmetros estimados e reais. O vetor de parâmetros $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ pode ser estimado por técnicas de mínimos quadrados ao minimizar a função

custo:

$$J_{MQ}(\hat{\theta}) = (\mathbf{y} - \Psi\hat{\theta})^T(\mathbf{y} - \Psi\hat{\theta}). \quad (4.2)$$

Escrevendo este problema no formato de desigualdade matricial, utilizando o Complemento de Schur, chega-se à equação:

$$\begin{bmatrix} \lambda I & (\mathbf{y} - \Psi\theta) \\ (\mathbf{y} - \Psi\theta)^T & I \end{bmatrix} \succ 0, \quad (4.3)$$

em que I representa matrizes identidades com suas respectivas dimensões e λ representa a minimização do erro quadrático, ou seja, a LMI é montada de tal forma que minimiza λ e conseqüentemente minimiza o erro quadrático. Para encontrar as dimensões das matrizes identidades, considere a LMI genérica:

$$\begin{bmatrix} \lambda Q & S \\ S' & K \end{bmatrix} \succ 0, \quad (4.4)$$

em que Q , S , S' e K são respectivamente os elementos da equação 4.3 e suas dimensões são dadas por:

$$\begin{aligned} S &= (\mathbf{y} - \Psi\theta) \quad R(n \times m) \\ Q &= Q' \quad I(n \times n) \\ K &= K' \quad I(m \times m). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Outro aspecto importante em relação à montagem desta matriz, equação 4.3, é que ela foi construída de tal forma a ser semi-definida positiva. A equação 4.3 só é válida se a equação 4.6 for satisfeita.

$$\begin{cases} I \succ 0 \\ \lambda I - (\mathbf{y} - \Psi\theta) I^{-1} (\mathbf{y} - \Psi\theta)^T \succ 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Tendo feito isso, o problema já está escrito no formato LMI. Sendo assim,

o problema de otimização linear com restrições do tipo LMI pode ser resolvido por algoritmo de pontos interiores, presente no Toolbox LMITOOL do Scilab.

O algoritmo foi executado utilizando o software Scilab 5.2.1 em uma máquina que apresenta as seguintes características de hardware:

- Acer *ASPIRE* 5315-2698;
- Intel[®] Celeron[®] processor 560 (2,13 GHz, 533 MHz FSB, 1 MB L2 cache);
- Up to 252 MB Mobile Intel[®] Graphic Media Accelerator X3100;
- 1 GB DDR2;
- 120 GB HDD.

4.1.2 Incorporação das Informações Auxiliares usando LMI

O uso de informações auxiliares dentro da identificação de sistemas tornou-se uma ferramenta útil ao se reproduzir matematicamente um sistema real. Este tipo de informação faz com que o modelo possua características desejáveis (Nepomuceno, 2002). A utilização de informação auxiliar tem se mostrado uma alternativa viável para superar problemas nos dados de identificação, seja pela qualidade de informação ou pela quantidade (Barroso, 2004). Esta etapa da dissertação trata do uso da informação auxiliar fornecida pelos pontos fixos do sistema.

No estudo do problema multiobjetivo chegou-se à seguinte equação, já demonstrada no Capítulo 3 (eq. 3.39), que determina os parâmetros de algum sistema em estudo:

$$\hat{\theta} = [\omega_1 \Psi^T \Psi + \omega_2 S^T S]^{-1} [\omega_1 \Psi^T \mathbf{y} + \omega_2 S^T \Sigma]. \quad (4.7)$$

Escrevendo esta equação de forma a ser utilizada na formulação LMI, deve-se fazer algumas manipulações algébricas. Isto é mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= [\omega_1 \Psi^T \Psi + \omega_2 S^T S]^{-1} [\omega_1 \Psi^T \mathbf{y} + \omega_2 S^T \Sigma] \\ [\omega_1 \Psi^T \Psi + \omega_2 S^T S] \hat{\theta} &= [\omega_1 \Psi^T \mathbf{y} + \omega_2 S^T \Sigma] \\ [\omega_1 \Psi^T \mathbf{y} + \omega_2 S^T \Sigma] - [\omega_1 \Psi^T \Psi + \omega_2 S^T S] \hat{\theta} &= 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Dessa forma, a equação 4.8 está escrita na forma que é semelhante ao termo presente na equação 4.3, que não contém as informações auxiliares :

$$(\mathbf{y} - \Psi \hat{\boldsymbol{\theta}}). \quad (4.9)$$

Sendo assim, pode-se escrever a função custo que deve ser minimizada:

$$J_{MQ}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \left([\omega_1 \Psi^T \mathbf{y} + \omega_2 S^T \Sigma] - [\omega_1 \Psi^T \Psi + \omega_2 S^T S] \hat{\boldsymbol{\theta}} \right)^T \dots \\ \dots \left([\omega_1 \Psi^T \mathbf{y} + \omega_2 S^T \Sigma] - [\omega_1 \Psi^T \Psi + \omega_2 S^T S] \hat{\boldsymbol{\theta}} \right). \quad (4.10)$$

Para escrever o problema na forma de desigualdade matricial, aplica-se o Complemento de Schur:

$$\begin{bmatrix} \lambda I & A \\ B & I \end{bmatrix} \succ 0. \quad (4.11)$$

Em que:

$$A = \left([\omega_1 \Psi^T \mathbf{y} + \omega_2 S^T \Sigma] - [\omega_1 \Psi^T \Psi + \omega_2 S^T S] \hat{\boldsymbol{\theta}} \right);$$

$$B = \left([\omega_1 \Psi^T \mathbf{y} + \omega_2 S^T \Sigma] - [\omega_1 \Psi^T \Psi + \omega_2 S^T S] \hat{\boldsymbol{\theta}} \right)^T;$$

S é a matriz de mapeamento linear;

Σ é o vetor de agrupamento de termos;

ω_1 e ω_2 são pesos de forma que $\omega_1 + \omega_2 = 1$.

I são matrizes identidades com suas respectivas dimensões.

Para encontrar as dimensões das matrizes identidades, considere a LMI genérica:

$$\begin{bmatrix} \lambda Q & S \\ S' & K \end{bmatrix} \succ 0, \quad (4.12)$$

em que Q , S , S' e K são respectivamente os elementos da equação 4.11 e suas dimensões são dadas por:

$$\begin{aligned} S &= \left([\omega_1 \Psi^T \mathbf{y} + \omega_2 S^T \Sigma] - [\omega_1 \Psi^T \Psi + \omega_2 S^T S] \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) \quad R(n \times m) \\ Q &= Q' \quad I(n \times n) \\ K &= K' \quad I(m \times m). \end{aligned} \quad (4.13)$$

A equação 4.11 só é válida se a equação 4.12 for satisfeita:

$$\begin{cases} I \succ 0 \\ \lambda I - \left([\omega_1 \Psi^T \mathbf{y} + \omega_2 S^T \Sigma] - [\omega_1 \Psi^T \Psi + \omega_2 S^T S] \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) I^{-1} \dots \\ \dots \left([\omega_1 \Psi^T \mathbf{y} + \omega_2 S^T \Sigma] - [\omega_1 \Psi^T \Psi + \omega_2 S^T S] \hat{\boldsymbol{\theta}} \right)^T \succ 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Os pesos ω_1 e ω_2 foram variados utilizando um comando presente no Scilab 5.2.1 denominado “Linspace”. Este comando permite uma variação linear para o pesos de modo que $\omega_1 + \omega_2 = 1$.

Por se tratar de estimação de parâmetros utilizando a metodologia multi-objetivo, os resultados serão encontrados usando dois objetivos: erro de predição e erro de localização dos pontos fixos. Serão admitidos como os melhores modelos aqueles que apresentarem os pontos fixos mais próximos do sistema real. Com isso ao se melhorar um dos objetivos, conseqüentemente haverá uma piora de outro objetivo.

4.1.3 Imposição de Restrições em Identificação de Sistemas

Uma das vantagens de se escrever um problema identificação de sistemas via LMI é a capacidade de se impor restrições. Utilizando outros métodos de estimação de parâmetros essa tarefa torna-se muita trabalhosa, além de proporcionar um esforço maior da máquina. Escrevendo o problema no formato LMI a tarefa de se impor restrições ao modelo é mais simples, sendo que estas são escritas de forma direta, apenas acrescentando uma nova LMI ao algoritmo para cada restrição.

As restrições nada mais são do que certas características que são impostas ao modelo de acordo com as necessidades do regime de operação. Como

exemplo tem-se que os parâmetros fornecidos pelo modelo estejam dentro de uma determinada faixa de modo que o sistema seja estável ou deseja-se que os parâmetros do modelo estejam dentro de um intervalo qualquer pré-estabelecido.

Neste trabalho foi imposta a restrição de que o somatório dos parâmetros do modelo esteja dentro de um intervalo qualquer. Com isso mostra-se que ao se mudar a restrição consegue-se um novo modelo com novos parâmetros.

Como exemplo, admite-se necessário que o somatório dos parâmetros do modelo esteja dentro de um intervalo pré-estabelecido, da seguinte forma:

$$5 < teta(1) + teta(2) + teta(3) < 6, \quad (4.15)$$

ou seja, deseja-se que o somatório dos parâmetros esteja no intervalo [5, 6]. Para uma melhor compreensão, é mostrado como isto é feito dentro do algoritmo através de um trecho do programa:

```
stacksize('max')
LME=[]
n=size(P,1)
Q=eye(99,99)
K=eye(1,1)
S=(ys-P*teta)
LMI=list()
LMI(1) = [lambda*Q S
          S' K ];
LMI(2)= [teta(1)+teta(2)+teta(3)-5]; //
LMI(3)= [-teta(1)-teta(2)-teta(3)+6];
```

Para a incorporação das restrições é necessário escrever o comando “LMI=list()”. Este comando cria uma única LMI, onde a diagonal principal da matriz é composta por LMI(1), LMI(2) e LMI(3) e as outras posições da matriz são preenchidas por “zeros”. E para cada restrição escreve-se uma nova LMI.

Para os estudos de casos foram escolhidos alguns sistemas caóticos que serão modelados utilizando a abordagem LMI, isto com o objetivo de colocar à prova a metodologia. Estes sistemas são clássicos dentro da literatura especializada, tais como mapas senoidais com não-linearidades cúbicas e o circuito de Chua. Posteriormente será feito um estudo sobre o esforço com-

putacional sobre identificação de sistemas via LMI e por fim, serão impostas restrições a um modelo.

4.2 Conclusões do capítulo

Este capítulo foi dedicado a apresentar uma maneira diferenciada de identificação de sistemas. Tal técnica atua especificamente na parte de estimação de parâmetros. O capítulo mostrou como o problema do somatório dos erros quadráticos, mono e multiobjetivo, pode ser escrito no formato LMI. Por fim, foi mostrada a possibilidade de se incorporar restrições ao modelo.

Resultados e Discussões

5.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados alguns sistemas que foram identificados através da formulação LMI. Primeiramente será feita uma identificação de um sistema simples utilizando um modelo ARX (Auto-regressivo com entrada exógena), onde os parâmetros foram encontrados via LMI. No segundo trabalho foi feita uma identificação multiobjetivo de sistemas do tipo *caixa-cinza*, onde a informação auxiliar que foi fornecida é o valor dos pontos fixos do sistema em estudo, que é representado por um mapa senoidal. O terceiro trabalho utiliza abordagem LMI para mostrar a importância da identificação multiobjetivo na modelagem de sistemas, neste caso o sistema caótico de Chua será o objeto de estudo. A seguir é feito um breve estudo sobre o esforço computacional da abordagem LMI em identificação de sistemas. Para tal, será feita uma comparação entre Desigualdades Matriciais Lineares e o Método dos Mínimos Quadrados. Por fim, será feita uma identificação de um sistema onde serão introduzidas algumas restrições ao algoritmo via LMI. Todas as validações serão feitas através de simulação um passo a frente.

5.2 Identificação de um sistema utilizando um modelo ARX

Nesta seção será abordado o problema da identificação dos parâmetros de um sistema. Primeiramente esses parâmetros serão encontrados via Método

dos Mínimos Quadrados. Posteriormente esses valores serão calculados via LMI. Em ambos casos será utilizado o software Scilab. Para o cálculo dos parâmetros via LMI será utilizado o toolbox LMITOOL do Scilab.

Para o modelo ARX em questão foi utilizada a seguinte estrutura:

$$\Psi(k-1) = [y(k-1) \ y(k-2) \ u(k-3) \ u(k-1) \ u(k-2)]^T. \quad (5.1)$$

Sejam fornecidos os dados de entrada e saída do sistema em questão da seguinte forma:

$$y(k) = \begin{bmatrix} 12,2 \\ 11,8 \\ 11,8 \\ 11,6 \\ 11,8 \\ 12,2 \\ 13 \\ 14,4 \\ 16,2 \\ 15,8 \end{bmatrix}^T \quad u(k) = \begin{bmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ 2,5 \\ 2,5 \\ 2,5 \\ 2,23 \\ 2,20 \\ 2,20 \\ 2,21 \\ 2,20 \end{bmatrix}^T,$$

em que $u(k)$ e $y(k)$ se referem ao dados de entrada e saída, respectivamente. Os vetores de regressores são dados por:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 11,6 \\ 11,8 \\ 12,2 \\ 13 \\ 14,4 \\ 16,2 \\ 15,8 \end{bmatrix} \quad \Psi = \begin{bmatrix} 11,6 & 11,8 & 2,5 & 2,5 & 2,5 \\ 11,6 & 11,6 & 2,5 & 2,5 & 2,5 \\ 11,8 & 11,6 & 2,5 & 2,5 & 2,5 \\ 12,2 & 11,8 & 2,5 & 2,23 & 2,5 \\ 13 & 12,2 & 2,5 & 2,20 & 2,23 \\ 14,4 & 13 & 2,23 & 2,20 & 2,20 \\ 16,2 & 14,4 & 2,20 & 2,21 & 2,20 \end{bmatrix}.$$

O vetor de parâmetros a ser encontrado é dado por:

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \hat{\theta}_3 \\ \hat{\theta}_4 \\ \hat{\theta}_5 \end{bmatrix}.$$

Primeiramente calcula-se os parâmetros via Método dos Mínimos Quadrados, utilizando a relação:

$$\hat{\theta} = [\Psi^T \Psi]^{-1} \Psi^T y \quad (5.2)$$

Substituindo as informações do sistema em questão na equação 5.2, tem-se o seguinte vetor de parâmetros:

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} 3,4167 \\ -3,4799 \\ 4,7104 \\ 1,0410 \\ -0,6832 \end{bmatrix}.$$

Nesta etapa do trabalho, o problema da estimação dos parâmetros é escrito no formato *LMI*. No Capítulo 4 foi mostrado que o vetor de parâmetros $\hat{\theta}$ pode ser estimado por técnicas de mínimos quadrados ao minimizar a função custo:

$$J_{MQ}(\hat{\theta}) = (y - \Psi \hat{\theta})^T (y - \Psi \hat{\theta}). \quad (5.3)$$

Escrevendo este problema no formato de desigualdade matricial, utilizando o Complemento de Schur, chega-se à equação:

$$\begin{bmatrix} \lambda I & (y - \Psi \theta) \\ (y - \Psi \theta)^T & I \end{bmatrix} \succ 0, \quad (5.4)$$

em que I são matrizes identidades com suas respectivas dimensões, λ representa a minimização do erro quadrático. Esta matriz foi montada de forma a ser semi-definida positiva, ou seja, seus autovalores têm que ser maiores do que zero.

A equação 5.4 só é válida se a equação 5.5 for satisfeita.

$$\begin{cases} I \succ 0 \\ \lambda I - (y - \Psi\theta) I^{-1} (y - \Psi\theta)^T \succ 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

Tendo feito isso, o problema já está escrito no formato LMI. Dentro do software Scilab foi montado um programa com os dados no formato LMI e chegou-se aos seguintes resultados para o cálculo dos parâmetros do sistema em questão:

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} 3,4167 \\ -3,4799 \\ 4,7104 \\ 1,0410 \\ -0,6832 \end{bmatrix}.$$

Como pode-se notar ambos resultados, via MMQ e LMI, apresentam os mesmos valores. Com isso mostra-se que a abordagem *LMI* é uma maneira alternativa de estimação de parâmetros. Posteriormente será introduzida a informação auxiliar à formulação *LMI*.

5.3 Identificação de um mapa senoidal

Esta etapa do trabalho abordará a sistemática de identificação multiobjetivo, onde os objetivos a serem analisados são o erro de predição e a localização dos pontos fixos. Como já foi dito no Capítulo 3, a análise multiobjetivo tenta encontrar a melhor solução que atenda aos vários objetivos do sistema em questão. Não é possível achar a melhor de todas as soluções: se melhora-se um dos objetivos em consequência o outro (ou outros) serão prejudicados. Sendo assim, dentre todas as soluções presentes no Pareto Ótimo deve-se procurar por aquela que atenda às necessidades do sistema em questão. O problema da identificação multiobjetivo será escrito no forma de LMI, onde será utilizada a informação auxiliar da localização dos pontos fixos do sistema.

Os mapas unidimensionais são capazes de explicar o comportamento de sistemas físicos relevantes. Além disso, são modelos de fácil manipulação colaborando para o estudo de dinâmicas não-lineares. O mapa senoidal em

estudo apresenta não-linearidades cúbicas e é dado por:

$$x(k) = \alpha \sin(x(k-1)), \quad (5.6)$$

sendo $\alpha = 1,2\pi$. Para condição inicial $x(0) \in [-\pi, \pi]$ a equação 5.6 mapeia o intervalo $[-\pi, \pi]$ nele mesmo. Os pontos fixos do sistema real são dados por:

$$\bar{y} = 0; \pm 2,4383.$$

Primeiramente encontraremos os parâmetros do modelo via LMI sem a informação dos pontos fixos. Feito isto partiremos para a determinação dos parâmetros incorporando a informação auxiliar dos pontos fixos, ou seja, identificação caixa cinza usando técnicas LMIs. Para tal será utilizado um modelo NAR (Não-linear Auto-Regressivo), que é dado por:

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-1)^3 \quad (5.7)$$

A massa de dados foi gerada a partir da equação 5.6. Com isso foi determinada a matriz de regressores Ψ . De posse desta matriz, pode-se com o auxílio do Complemento de Schur, montar uma desigualdade matricial, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \lambda I & (y - \Psi\theta) \\ (y - \Psi\theta)^T & I \end{bmatrix} \succ 0 \quad (5.8)$$

Dentro do software Scilab montou-se um algoritmo com os dados no formato LMI e chegou-se aos seguintes resultados para o cálculo dos parâmetros do sistema em questão:

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} 2,6776 \\ -0,2458 \end{bmatrix}$$

Sendo assim, chegou-se ao seguinte modelo NAR:

$$y(k) = 2,6776y(k-1) - 0,2462y(k-1)^3 \quad (5.9)$$

O modelo obtido através formulação LMI possui os seguintes pontos fixos:

$$\hat{y} = 0; \pm 2,6121.$$

O passo seguinte se refere à incorporação da informação auxiliar através do conhecimento dos pontos fixos. Com isso pode-se escrever o problema na forma de LMI usando a relação que já foi descrita anteriormente (equação 3.38):

$$J_{PF} = \left(\Sigma - S\hat{\Theta} \right)^T \left(\Sigma - S\hat{\Theta} \right), \quad (5.10)$$

onde Σ é o vetor referente ao agrupamento de termos e S é definida como matriz de mapeamento linear, ou seja é a matriz que leva o agrupamento de termos ao seu respectivo valor de parâmetro $\hat{\theta}$.

Como já foi dito, os pontos fixos do sistema real são dados por:

$$\bar{y} = 0; \pm 2, 4383.$$

Com isso pode-se montar uma equação que possua estas raízes. Assim, chega-se à seguinte equação:

$$y^3 - 5,9453y \quad (5.11)$$

Após ter sido feito o agrupamento de termos, com o auxílio dos parâmetros determinados, encontra-se o seguinte vetor:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 \\ -4,9453 \end{bmatrix}.$$

A matriz de mapeamento linear S é dada por:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

No Capítulo 3 mostrou-se que a função custo a ser minimizada para a identificação multiobjetivo dos parâmetros do sistema é dada por:

$$\begin{aligned} J_{MQ}(\hat{\theta}) = & \left([\omega_1 \Psi^T \mathbf{y} + \omega_2 S^T \Sigma] - [\omega_1 \Psi^T \Psi + \omega_2 S^T S] \hat{\theta} \right)^T \dots \\ & \dots \left([\omega_1 \Psi^T \mathbf{y} + \omega_2 S^T \Sigma] - [\omega_1 \Psi^T \Psi + \omega_2 S^T S] \hat{\theta} \right). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Para escrever o problema na forma de desigualdade matricial, aplica-se o Complemento de Schur:

$$\begin{bmatrix} \lambda I & A \\ B & I \end{bmatrix} \succ 0. \quad (5.13)$$

Em que:

$$A = \left([\omega_1 \Psi^T \mathbf{y} + \omega_2 S^T \Sigma] - [\omega_1 \Psi^T \Psi + \omega_2 S^T S] \hat{\boldsymbol{\theta}} \right);$$

$$B = \left([\omega_1 \Psi^T \mathbf{y} + \omega_2 S^T \Sigma] - [\omega_1 \Psi^T \Psi + \omega_2 S^T S] \hat{\boldsymbol{\theta}} \right)^T;$$

I são matrizes identidades com suas respectivas dimensões;

S é a matriz de mapeamento linear;

Σ é o vetor de agrupamento de termos;

ω_1 e ω_2 são pesos de forma que $\omega_1 + \omega_2 = 1$.

A equação 5.13 só é válida se a equação 5.14 for satisfeita:

$$\begin{cases} I \succ 0 \\ \lambda I - \left([\omega_1 \Psi^T \mathbf{y} + \omega_2 S^T \Sigma] - [\omega_1 \Psi^T \Psi + \omega_2 S^T S] \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) I^{-1} \dots \\ \dots \left([\omega_1 \Psi^T \mathbf{y} + \omega_2 S^T \Sigma] - [\omega_1 \Psi^T \Psi + \omega_2 S^T S] \hat{\boldsymbol{\theta}} \right)^T \succ 0. \end{cases} \quad (5.14)$$

A equação 5.13 contém a informação auxiliar dos pontos fixos do sistema em questão. É uma informação a priori que tem-se fazendo com que o processo seja denominado Identificação Caixa Cinza. Os valores de ω_1 e ω_2 são variados de tal forma que $\omega_1 + \omega_2 = 1$, onde pode-se obter o conjunto Pareto-ótimo. É neste conjunto que estão presentes as melhores soluções para o sistema em questão.

Dentre as melhores soluções, a que mais se aproximou do sistema real foi o seguinte modelo:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} 2,2659 \\ -0,2128 \end{bmatrix}.$$

O modelo obtido através formulação LMI e incorporação da informação auxiliar possui os seguintes pontos fixos:

$$\hat{y} = 0; \pm 2,4387.$$

A Tabela 5.1 faz uma comparação entre os pontos fixos encontrados pelos modelos sem a informação auxiliar do ponto fixo e com a informação.

Tabela 5.1: *Comparação dos pontos fixos*

sistema real	sem informação auxiliar	com informação auxiliar
0	0	0
$\pm 2,4383$	$\pm 2,6121$	$\pm 2,4387$

Já a Figura 5.1 mostra o Pareto Ótimo, onde estão presentes os melhores modelos encontrados.

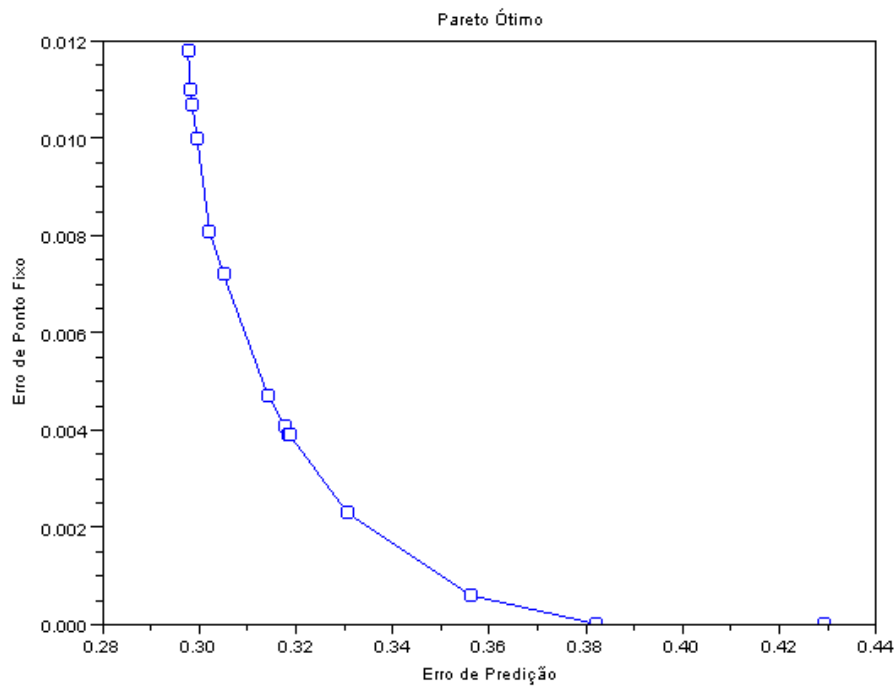


Figura 5.1: Pareto- mapa senoidal

A Tabela 5.2 mostra todos os valores encontrados durante as simulações, em que foram analisados 10 modelos.

Tabela 5.2: *Comparação dos melhores modelos*

modelo	ω_1	ω_2	θ_1	θ_2	PF	EP	ELPF
(1)	0,01	0,99	2,5353	-0,2349	0; \pm 2, 5565	0,31983	0,0047
(2)	0,1	0,9	2,6626	-0,2446	0; \pm 2, 6070	0,2976	0,0118
(3)	0,001	0,999	1,9542	-0,1904	0; \pm 2, 2384	0,7236	0,0368
(4)	0,999	0,001	2,6776	-0,2458	0; \pm 2, 6121	0,2975	0,02456
(5)	0,02	0,98	2,5998	-0,2394	0; \pm 2, 5846	0,3014	0,00817
(6)	0,009	0,991	2,5152	-0,2326	0; \pm 2, 5522	0,3177	0,00419
(7)	0,0088	0,9912	2,5119	-0,2323	0; \pm 2, 5509	0,3185	0,003958
(8)	0,0087644	0,9912356	2,5113	-0,2323	0; \pm 2, 5507	0,3186	0,003934
(9)	0,0067644	0,9932356	2,4699	-0,2289	0; \pm 2, 5337	0,3306	0,002391
(10)	0,0037644	0,9962356	2,3469	-0,2191	0; \pm 2, 4791	0,3820	0,000001

Em que:

ω_1 e ω_2 são os pesos de tal forma que $\omega_1 + \omega_2=1$;

θ_1 e θ_2 são os parâmetros do modelo;

PF são os pontos fixos do modelo;

EP é o erro de predição;

ELPF é o erro de localização dos pontos fixos do modelo.

De acordo com os resultados mostrados na Tabela 5.2, o modelo 10 foi o que apresentou os pontos fixos mais próximos do sistema real, pois foi o que minimizou o ELPF. Entretanto houve uma piora do outro objetivo fazendo com que o erro de predição sofresse um gradual aumento.

5.4 Importância do uso da informação auxiliar: Circuito de Chua

5.4.1 Circuito de Chua

O uso da informação auxiliar dentro da identificação de sistemas tornou-se uma ferramenta importante ao se incorporar ao modelo características que são desejadas. No caso em estudo faz-se o uso da informação auxiliar dos pontos fixos do sistema. Com isso insere-se ao modelo características estáticas que são desejáveis.

O objetivo de estudo de caso é demonstrar a importância do uso da informação auxiliar dentro de identificação de sistemas. O problema em questão, o Circuito de Chua, vai ser identificado através de técnicas LMIs onde será utilizada a informação auxiliar dos pontos fixos, conhecida *a priori*.

O Sistema Caótico de Chua consiste de um circuito elétrico composto por uma rede de elementos lineares passivos conectados a um componente não-linear ativo conhecido como diodo de Chua. Apesar de sua aparente simplicidade, este sistema apresenta um vasto conjunto de possibilidades para o seu comportamento dinâmico. O circuito é mostrado na Figura 5.2 e é composto por elementos lineares, com exceção do *diodo de Chua* que é um dipolo com a característica linear por partes. Este diodo possui resistência negativa e é o elemento que confere energia ao sistema, permitindo, assim, manter o circuito oscilando autonomamente. Assim, ele abrange pontos de equilíbrio, bifurcações, oscilações periódicas e atratores estranhos. O Circuito de Chua

é mostrado na Figura 5.2:

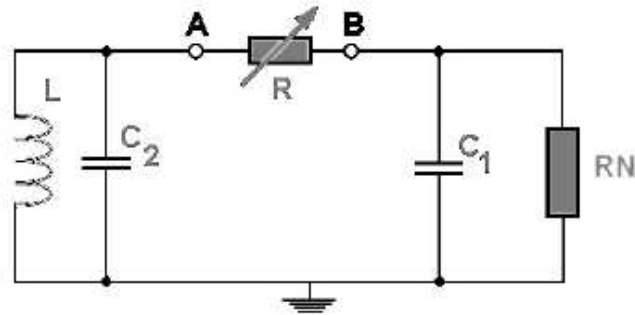


Figura 5.2: Circuito de Chua

Os dados referentes ao Circuito de Chua foram coletados a partir das equações características do referido sistema. As equações são dadas por:

$$\begin{aligned}
 C_1 \frac{dv_{c1}}{dt} &= \frac{(v_{c2} - v_{c1})}{R} - i_d(v_1) \\
 C_2 \frac{dv_{c2}}{dt} &= \frac{(v_{c1} - v_{c2})}{R} - i_L \\
 L \frac{di_L}{dt} &= -v_{C_2},
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

sendo que v_{C_i} é a tensão no Capacitor C_i , i_L é a corrente que atravessa o Indutor. A corrente i_d que passa pelo diodo de Chua (RN) é dada por:

$$\begin{cases} m_0 v_1 + B_p(m_0 - m_1) & v_1 < -B_p \\ m_1 v_1 & |v_1| \leq B_p \\ m_0 v_1 + B_p(m_1 - m_0) & v_1 > B_p \end{cases}$$

Os parâmetros do circuito de Chua utilizados para a geração dos dados são:

$C_1 = 1/9$ F; $C_2 = 1$ F; $L = 1/7$ H; $m_o = -0,5$; $m_1 = -0,8$; $B_p = 1$; $R = 1/0,669$ Ω .

A série temporal dos dados do Circuito de Chua é mostrada na Figura 5.3.

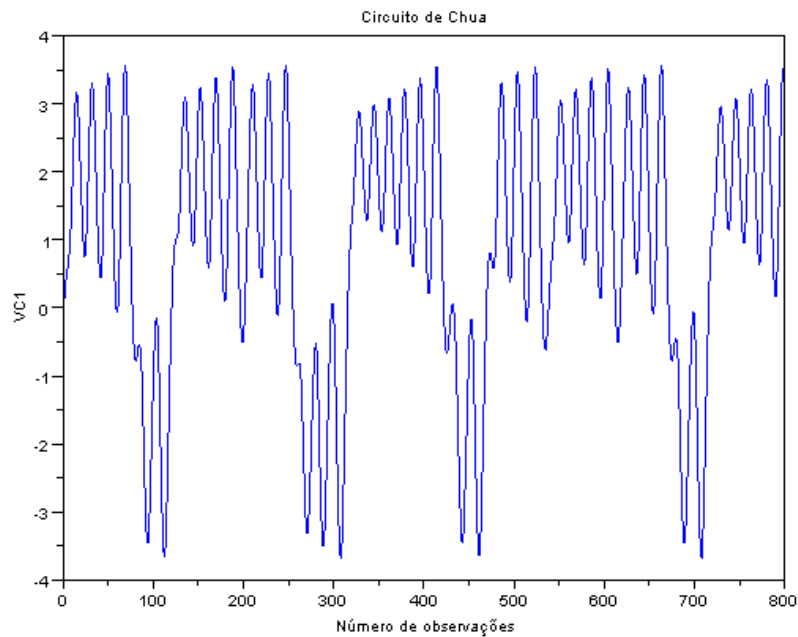


Figura 5.3: Série temporal do Circuito de Chua

Para se representar o atrator do sistema fez-se necessário reproduzir os dados, com o auxílio do programa Tisean 3.0.0 utilizando a função *delay*, de modo que os dados da série temporal fossem dispostos em 3 colunas. Tal atrator é mostrado na Figura 5.4.

Os pontos fixos do sistema previamente conhecidos são:

$$\bar{y} = 0; 2,2414337; -2,2663352. \quad (5.16)$$

A idéia é encontrar um novo modelo com o auxílio da informação dos pontos fixos que aproxime, o máximo possível, dos pontos fixos conhecidos

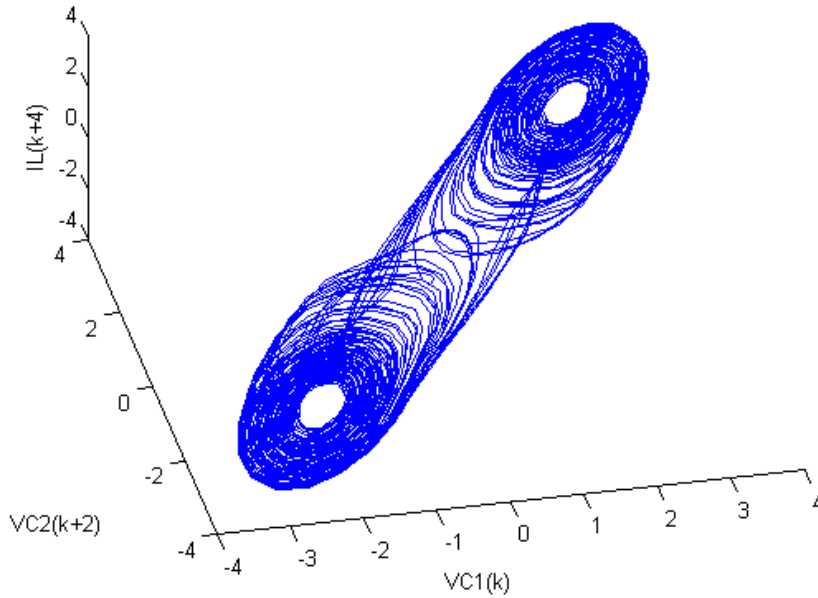


Figura 5.4: Atrator do Circuito de Chua

previamente. Com isso o novo modelo será forçado a possuir as características estáticas desejadas.

Primeiramente, foi feita uma identificação mono-objetivo, onde não é possível o uso da informação dos pontos fixos. Utilizando a equação 5.8, a qual é escrita no formato LMI, foi encontrado o seguinte modelo, cuja estrutura utilizada está presente em (Correa, 2001):

$$\begin{aligned}
 y(k) = & 2,6421555y(k-1) - 1,9656298y(k-2) \\
 & + 0,2012547y(k-5) + 0,1950944y(k-3) \\
 & - 0,00099115y(k-1)^2 - 0,4057574y(k-1)^3 \\
 & - 0,0294592y(k-5)^3 - 0,2330919y(k-2)^3 \\
 & - 0,0702459y(k-3)^2y(k-1) \\
 & + 0,0278871y(k-5)^2y(k-2) + 0,3026795y(k-5)y(k-2)^2 \\
 & + 0,6842902y(k-2)y(k-1)^2 \\
 & - 0,2906328y(k-5)y(k-2)y(k-1).
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

O modelo identificado, com o auxílio da equação 5.8, sem a informação auxiliar, apresenta os seguintes pontos fixos, calculados a partir da resolução da equação proveniente do agrupamento de termos:

$$\hat{y} = 0; 1,9174653; -1,8673625. \quad (5.18)$$

Esta etapa do trabalho fará o uso da informação auxiliar dos pontos fixos para criar um novo modelo. Neste modelo estarão presentes características estáticas do sistema real. A partir dos pontos fixos fornecidos previamente, monta-se o seguinte vetor de agrupamento de termos Σ :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 \\ -4,4880907 \\ 5,9872155 \end{bmatrix}. \quad (5.19)$$

Sendo assim, monta-se uma nova LMI conforme a equação 5.13. Nesta equação está presente a informação auxiliar dos pontos fixos do sistema em questão. Que, por fim, fornece o seguinte modelo:

$$\begin{aligned} y(k) = & 2,635383y(k-1) - 1,977437y(k-2) \\ & + 0,1928459y(k-5) + 0,2548708y(k-3) \\ & - 0,00114003y(k-1)^2 - 0,4119312y(k-1)^3 \\ & - 0,0304886y(k-5)^3 - 0,2434280y(k-2)^3 \\ & - 0,0700906y(k-3)^2y(k-1) \\ & + 0,0139263y(k-5)^2y(k-2) + 0,3515954y(k-5)y(k-2)^2 \\ & + 0,6958324y(k-2)y(k-1)^2 \\ & - 0,3264288y(k-5)y(k-2)y(k-1). \end{aligned} \quad (5.20)$$

O modelo encontrado fornece os seguintes pontos fixos:

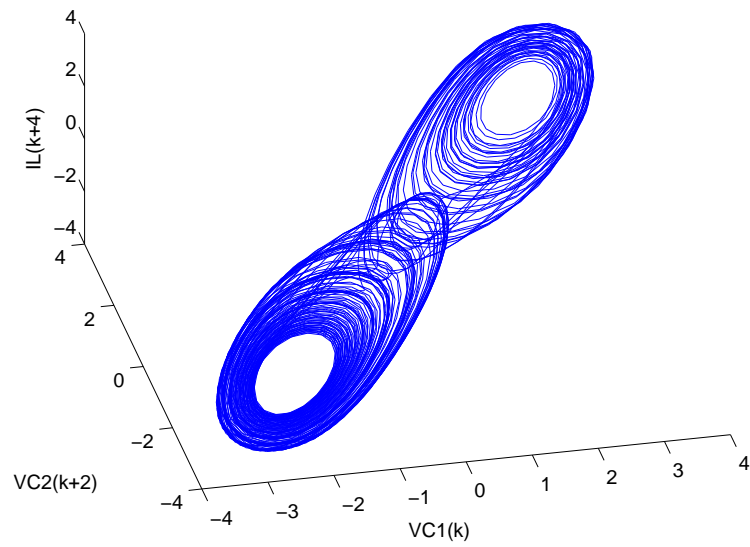
$$\bar{y} = 0; 2,22847405; -2,2616811. \quad (5.21)$$

A Tabela 5.3 faz uma comparação entre os pontos fixos encontrados:

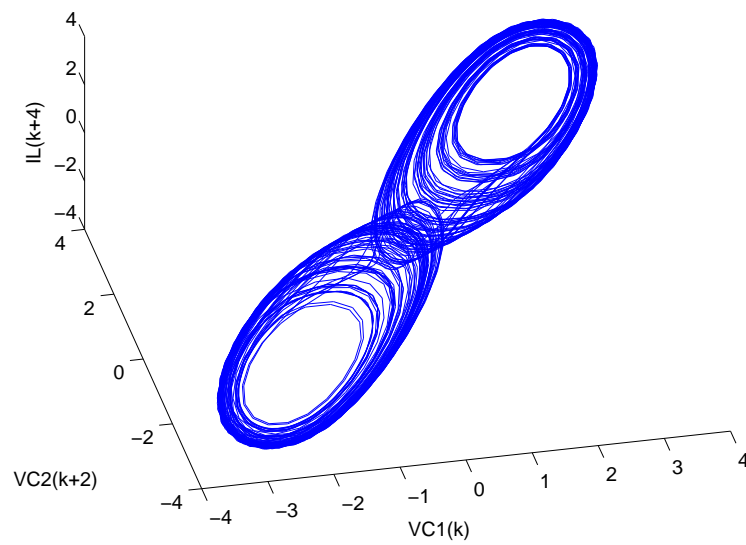
Tabela 5.3: *Quadro comparativo dos pontos fixos*

sistema real	sem informação auxiliar	com informação auxiliar
0	0	0
2,241	1,917	2,228
-2,267	-1,867	-2,261

A seguir são mostradas as representações gráficas dos modelos obtidos. As Figuras 5.5(a) e 5.5(b) representam os modelos do Circuito de Chua sem a informação do ponto fixo e com a informação auxiliar, respectivamente.



(a) LMI sem informação do ponto fixo



(b) LMI com informação do ponto fixo

Figura 5.5: Atratores dupla-volta (a) e (b)

A Figura 5.5(b) representa o modelo do Circuito de Chua com uso da informação auxiliar dos pontos fixos. Percebe-se pela representação que os pontos tiveram uma distribuição mais simétrica em cada volta do atrator se comparado ao gráfico do modelo sem o uso da informação auxiliar. Essa é uma característica desejável para o sistema de Chua que só foi possível se obter pelo uso da informação auxiliar dos pontos fixos. A simetria só foi possível a partir da formulação caixa-cinza, ou seja, houve uma melhora do modelo devido ao uso da informação *a priori* do referido sistema. Com isso pode-se mostrar a importância da identificação multiobjetivo de sistemas com o uso da abordagem LMI.

A título de curiosidade, a Figura 5.6 mostra um modelo que não está presente no Pareto. Ela é o resultado de um modelo em que a estrutura não foi devidamente selecionada, o que mostra o quão importante é o processo de seleção de estrutura dentro da identificação de sistemas. A estrutura de tal modelo é utilizada na equação 5.22 (Correa, 2001). As Figuras 5.7 e 5.8 se referem a outros tipos de modelos que foram encontrados e estão presentes no Pareto-ótimo.

$$\begin{aligned}
y(k) = & -2,6335683y(k-1) - 2,654236y(k-3) \\
& +1,2356842y(k-5) + 0,36542486y(k-2) \\
& -1,65474569y(k-3)^2 - 0,98652241y(k-1)^3 \\
& -1,63257854y(k-5)^3 - 2,365482215y(k-5)^3 \\
& -0,25487695y(k-2)^2y(k-1) \\
& +0,0139263y(k-3)^2y(k-2) + 0,3515954y(k-3)y(k-2)^2 \\
& +0,965425254y(k-2)y(k-1)^2 \\
& -0,3264288y(k-5)y(k-2)y(k-2).
\end{aligned} \tag{5.22}$$

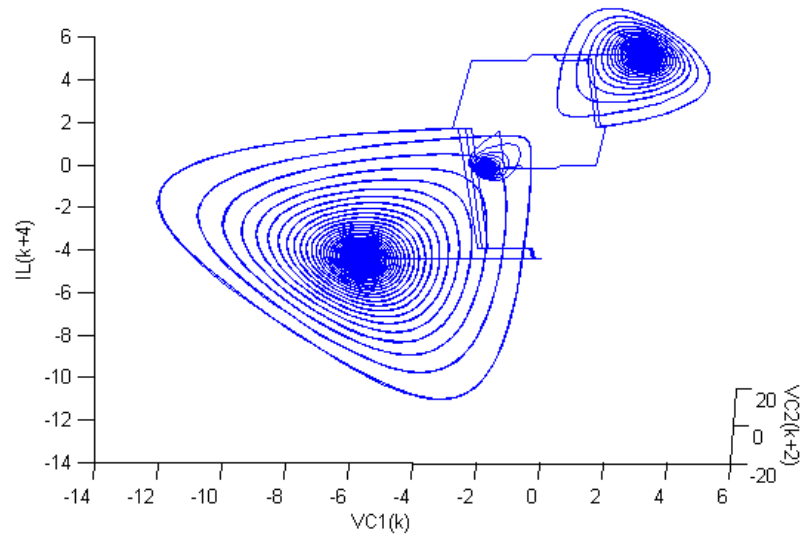


Figura 5.6: Modelo com estrutura incorreta

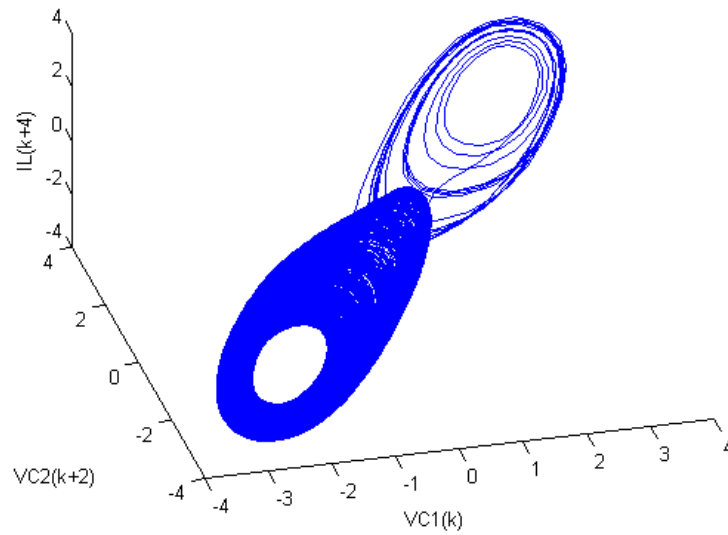


Figura 5.7: Modelo 1- Pareto

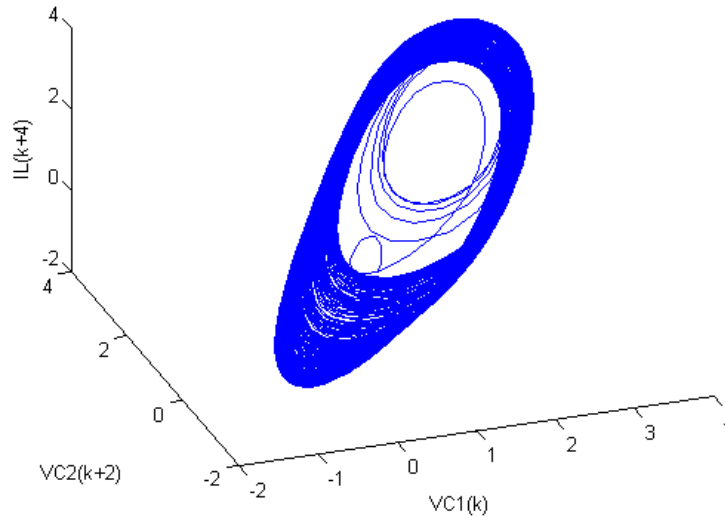


Figura 5.8: Modelo 2- Pareto

5.5 Estudo sobre o esforço computacional das LMIs

Mesmo com o grande avanço da capacidade das máquinas computacionais, sempre surge uma pergunta sobre alguma nova técnica de identificação de sistemas: qual o esforço de tal técnica para o computador?

Como já foi dito no Capítulo 4, uma das mais importantes vantagens no uso de LMIs é a existência de pacotes computacionais para a sua solução. Mas como todo problema de otimização convexa, ou SPD (programação semi-definida), pode-se ter dificuldades numéricas na busca de soluções de uma LMI. Algumas destas dificuldades apresentadas podem ocorrer devido ao mal condicionamento numérico dos dados, capacidade de memória das máquinas ou erros de precisão. Outro grande problema é o esforço computacional necessário para solucionar LMIs. A seguir será feita uma comparação, em termos de tempo de execução do algoritmo, entre dois métodos de identificação de sistemas: Mínimos Quadrados e LMI.

Para tal será gerada uma massa de dados a partir de uma função, onde este sistema será modelado usando estruturas de dois e três parâmetros. Os dados foram gerados a partir de:

$$y(k) = 2,6868y(k-1) - 0,2462y(k-1)^3 \quad (5.23)$$

Fazendo uma identificação mono-objetivo, ou seja, sem a informação auxiliar encontrou-se os seguintes modelos através da técnicas de mínimos quadrados e LMI:

Modelo via Mínimos Quadrados:

$$y(k) = 2,0618882y(k-1) + 0,0004133y(k-1)^4 - 0,0173905y(k-1)^5 \quad (5.24)$$

Modelo via LMI:

$$y(k) = 2,0618882y(k-1) + 0,0004133y(k-1)^4 - 0,0173905y(k-1)^5 \quad (5.25)$$

Percebe-se pelos modelos que os resultados são idênticos, mostrando que a técnica de identificação de sistemas via LMI é uma maneira alternativa de modelagem de sistemas.

Utilizando uma estrutura diferente com dois parâmetros apenas, chega-se aos seguintes modelos:

Modelo via Mínimos Quadrados:

$$y(k) = 0,6039860y(k-1)^3 - 0,0553777y(k-1)^5 \quad (5.26)$$

Modelo via LMI:

$$y(k) = 0,6039860y(k-1)^3 - 0,0553777y(k-1)^5 \quad (5.27)$$

A seguir é feita uma nova identificação do sistema em estudo, porém desta vez utilizando a abordagem multiobjetivo em que a informação auxiliar dos pontos fixos do sistema é usada. O processo será feito da seguinte maneira: os pesos ω_1 e ω_2 serão variados cinquenta vezes. Com isso será utilizada a média e o desvio padrão de todo o conjunto de parâmetros encontrados.

Os pontos fixos do sistema em questão, conhecidos previamente, são dados por:

$$\bar{y} = 0; \quad -2,6175; \quad 2,6175 \quad (5.28)$$

Após ter sido feito o agrupamento de termos a partir dos pontos fixos conhecidos e utilizando a equação multiobjetivo citada em 4.11, chega-se aos

seguintes modelos utilizando a estrutura com 3 parâmetros e desvio padrão igual a 1,15462:

Modelo via Mínimos Quadrados:

$$y(k) = 1,9563828y(k-1) + 0,0003539y(k-1)^4 - 0,0164770y(k-1)^5 \quad (5.29)$$

Modelo via LMI:

$$y(k) = 1,9563828y(k-1) + 0,0003539y(k-1)^4 - 0,0164770y(k-1)^5 \quad (5.30)$$

Já utilizando a estrutura que possui dois parâmetros, chega-se aos seguintes modelos com desvio padrão igual a 1,132546:

Modelo via Mínimos Quadrados:

$$y(k) = 0,6039860y(k-1)^3 - 0,0553777y(k-1)^5 \quad (5.31)$$

Modelo via LMI:

$$y(k) = 0,6039860y(k-1)^3 - 0,0553777y(k-1)^5 \quad (5.32)$$

A próxima etapa do trabalho faz uma comparação entre o esforço computacional da determinação dos modelos que foram descritos anteriormente. Para tal, a abordagem LMI será comparada ao Método dos Mínimos Quadrados, onde foram estudados os modelos que utilizam 2 e 3 parâmetros. Os valores presentes na Tabela 5.4 estão em segundos:

Tabela 5.4: *Comparação entre: MMQ e LMI*

Técnica Utilizada	Modelo com dois parâmetros	Modelo com três parâmetros
LMI: mono-objetivo	3,241 segundos	3,728 segundos
LMI: multiobjetivo	0,321 segundos	0,342 segundos
MMQ: mono-objetivo	0,0162 segundos	0,425 segundos
MMQ: multiobjetivo	0,0016 segundos	0,031 segundos

Pode ser notado claramente que há um esforço computacional maior da abordagem LMI em comparação ao MMQ. Isto já era esperado, pois a otimização convexa requer um gasto maior da máquina, uma vez que a modelagem via MMQ é iterativa e via LMI é analítica. Nota-se claramente que a abordagem multiobjetivo reduziu o esforço computacional. Isto ocorreu devido ao cancelamento de linhas ou colunas que a equação multibjetivo proporciona, fazendo com que as matrizes finais sejam de menor dimensão. Porém, apesar de apresentar um esforço maior, a abordagem LMI apresenta outras vantagens que outros métodos não possuem. Algumas delas já foram enunciadas ao longo do trabalho, tais como: a existência de pacotes computacionais, a facilidade com que as equações são escritas, possibilidade de resolução de problemas altamente complexos. Além destas vantagens, a que mais se destaca na abordagem LMI é a possibilidade de se impor restrições ao problema, o que é mais trabalhoso na análise MMQ. O próximo tópico faz um estudo mais detalhado sobre esta grande vantagem do uso de LMIs em identificação de sistemas.

5.6 Imposição de Restrições em Identificação de Sistemas

Como já foi mostrado, a abordagem de identificação de sistemas via LMI possui um esforço computacional maior do que o Método dos Mínimos Quadrados. O grande diferencial da formulação LMI é a capacidade de se incorporar restrições ao modelo, o que é mais trabalhoso através de MMQ.

Neste trabalho foi imposta a restrição de que o somatório dos parâmetros do modelo esteja dentro de um intervalo qualquer. Com isso mostra-se que ao se mudar a restrição consegue-se um novo modelo com novos parâmetros.

Para tal repete-se o procedimento efetuado anteriormente. A partir de uma função conhecida gera-se dados e através da abordagem LMI cria-se um modelo. A função utilizada é dada por:

$$y(k) = 2,6868y(k-1) - 0,2462y(k-1)^3 \quad (5.33)$$

O vetor de regressores é dado por:

$$y(k-1) = [y(k-1) \quad y(k-1)^4 \quad y(k-1)^5]^T \quad (5.34)$$

Para a determinação dos parâmetros do modelo recorre-se à formulação LMI do problema:

$$\begin{bmatrix} \lambda I & (y - \Psi\theta) \\ (y - \Psi\theta)^T & I \end{bmatrix} \succ 0, \quad (5.35)$$

Neste caso interessa-se em se impor uma condição ao modelo de forma que seus parâmetros sejam calculados de acordo com a restrição. Para este trabalho escolheu-se a seguinte restrição: deseja-se que o somatório dos parâmetros do modelo esteja dentro de um intervalo pré-determinado dado por:

$$5 < teta(1) + teta(2) + teta(3) < 6, \quad (5.36)$$

ou seja, deseja-se que o somatório dos parâmetros esteja entre 5 e 6.

Para tal restrição acrescenta-se ao algoritmo duas novas LMIs, do seguinte modo:

```
LMI=list()
LMI(1) = [lambda*Q  S
          S'  K ];
LMI(2)= [teta(1)+teta(2)+teta(3)-5];
LMI(3)= [-teta(1)-teta(2)-teta(3)+6].
```

Feito isto o modelo encontrado é dado por:

$$y(k) = 2,0618882y(k-1) + 0,0004133y(k-1)^4 - 0,0173905y(k-1)^5 \quad (5.37)$$

A representação do modelo (equação 5.37) é dada pela Figura 5.9:

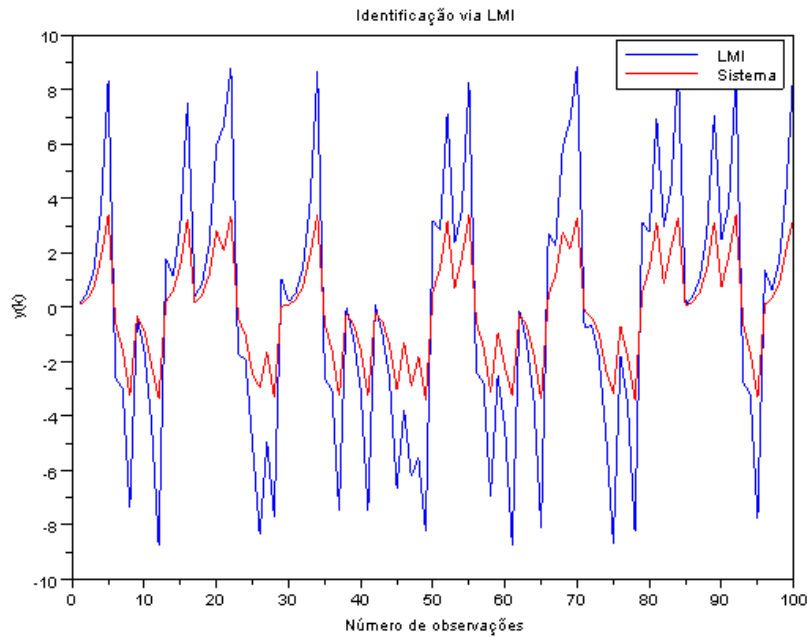


Figura 5.9: Restrição 1

Para provar que o método funciona, cria-se um novo modelo utilizando uma nova restrição:

$$1 < \text{teta}(1) + \text{teta}(2) + \text{teta}(3) < 3, \quad (5.38)$$

O novo modelo é dado por:

$$y(k) = 5,0409544y(k-1) + 0,0027853y(k-1)^4 - 0,0437397y(k-1)^5 \quad (5.39)$$

O modelo (equação 5.39) mostra que é possível incorporar restrições à identificação via abordagem LMI, o que é mais difícil quando se utiliza o Método

dos Mínimos Quadrados. A vantagem de se utilizar o formato LMI, ao se incorporar restrições, é que estas podem ser escritas de maneira direta evitando gastos computacionais. O novo modelo (equação 5.39) é mostrado na Figura 5.10:

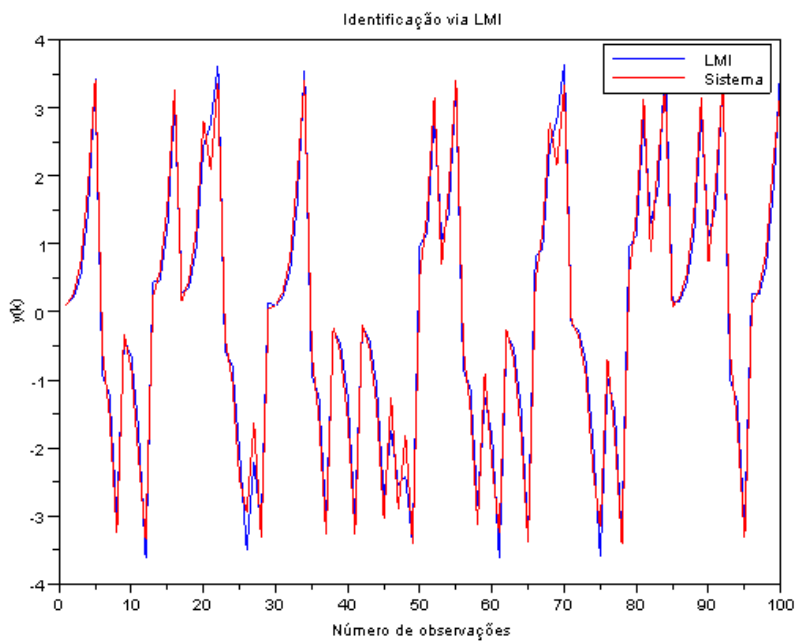


Figura 5.10: Restrição 2

Conclusão e Pesquisas Futuras

6.1 Introdução

Dentro da literatura sobre identificação de sistemas há um vasto volume de trabalhos que utilizam técnicas diferenciadas de modelagem de sistemas. Esta dissertação teve como objetivo principal introduzir uma técnica alternativa de identificação de sistemas através de desigualdades matriciais lineares, que atua especificamente na etapa de estimação de parâmetros. A princípio foi feita uma breve introdução da teoria matemática de LMI, mostrando suas principais características e vantagens perante outros métodos. Posteriormente o Problema do Somatório do Erro Quadrático, mono e multiobjetivo, foi escrito no formato LMI proporcionando o cálculo de parâmetros de determinado modelo.

6.2 Etapas da Dissertação

A dissertação foi escrita com a meta de contribuir com uma ferramenta na etapa de estimação de parâmetros de um sistema. O texto teve início com uma breve introdução sobre Sistemas Dinâmicos Não-Lineares e conceitos importantes sobre Identificação de Sistemas. Foi citado o Método dos Mínimos Quadrados, importante ferramenta dentro de modelagem de sistemas. Posteriormente, foi introduzido à dissertação tópicos essenciais sobre Identificação Multiobjetivo de Sistemas, tais como Pareto-ótimo, conhecimento *a priori* e informação auxiliar. Foi mostrado um pequeno roteiro para o cálculo dos pontos fixos de um modelo, por meio do agrupamento de termos.

A próxima etapa do trabalho se dedicou ao estudo de Desigualdades Ma-

triciais Lineares. Inicialmente desejou-se situar o texto em relação aos principais trabalhos desenvolvidos na área de engenharia que utilizam a abordagem *LMI*. Foi apresentada a definição matemática de LMI e suas principais propriedades, tais como Linearidade e Convexidade. Como nem todo resultado teórico de sistemas aparece no formato LMI, fez-se necessário o uso ferramentas da Álgebra Matricial para essa transformação. Foi usado o Complemento de Schur para transpor desigualdades não-lineares em LMIs. Com isso pôde-se aplicar LMI à identificação de sistemas, chegando ao seguinte resultado:

$$\begin{bmatrix} \lambda I & (y - \Psi\theta) \\ (y - \Psi\theta)^T & I \end{bmatrix} \succ 0. \quad (6.1)$$

Também foi possível escrever o resultado da metodologia multiobjetivo, desenvolvido em (Nepomuceno, 2002), na forma LMI:

$$\begin{bmatrix} \lambda I & A \\ B & I \end{bmatrix} \succ 0. \quad (6.2)$$

Em que:

$$A = \left([\omega_1 \Psi^T \mathbf{y} + \omega_2 S^T \Sigma] - [\omega_1 \Psi^T \Psi + \omega_2 S^T S] \hat{\boldsymbol{\theta}} \right);$$

$$B = \left([\omega_1 \Psi^T \mathbf{y} + \omega_2 S^T \Sigma] - [\omega_1 \Psi^T \Psi + \omega_2 S^T S] \hat{\boldsymbol{\theta}} \right)^T.$$

6.3 Análise dos resultados

O uso de LMI dentro de identificação de sistemas é algo recente. Para demonstrar que o método possui aplicações, ele foi utilizado na modelagem de sistemas clássicos, tais como Mapa Senoidais com não-linearidades cúbicas e o Circuito de Chua. Estes sistemas foram escolhidos com o objetivo de colocar à prova a proposta da dissertação, visto que tais sistemas são mais complexos e relevantes em outras áreas do conhecimento, como matemática, biologia, meteorologia, etc. Os resultados mostraram o esperado:

os modelos foram idênticos aos encontrados por outros métodos de identificação. O uso da análise multiobjetivo na modelagem do circuito de Chua mostrou-se importante devido ao uso da informação auxiliar dos pontos fixos do sistema. Graças a ela houve uma simetria maior no atrator dupla volta, o que é desejável quando se trata de sistemas caóticos. No caso do Mapa Senoidal a metodologia multiobjetivo permitiu a obtenção do conjunto denominado Pareto-ótimo. É nesse conjunto que estão presentes os melhores modelos encontrados. Nesse trabalho foram analisados dois objetivos: erro de localização dos pontos fixos e erro de predição.

A grande preocupação de uma nova proposta de modelagem de sistemas se refere ao esforço que esta técnica provoca no computador. A dissertação fez um estudo sobre o esforço computacional entre duas técnicas de identificação: MMQ e LMI. Mostrou-se que a metodologia LMI provoca um esforço maior da máquina. Isto ocorre por que a abordagem LMI é analítica e a de MMQ é iterativa. Porém, o uso de LMI em identificação possui vantagens que outros métodos não possuem: uso de pacotes computacionais presentes nos principais programas de análise matemática, facilidade com que as equações são escritas, busca de soluções em sistemas que apresentam incertezas politópicas e o mais importante: capacidade de se impor restrições ao problema, o que é mais trabalhoso em outros métodos.

O uso de LMI dentro de identificação de sistemas mostrou-se realizável e apresentou bons resultados nos estudos de casos. Devido à importância dessas desigualdades dentro da Teoria de Controle Robusto e estudos sobre Estabilidade de Sistemas, a abordagem LMI dentro de modelagem de sistemas pode ser ampliada para outros tipos de problemas, onde a escolha de modelos identificados seja adequado às necessidades específicas de cada situação.

6.4 Pesquisas futuras

Diante do que foi exposto e discutido nesta dissertação, podem-se enumerar algumas propostas para pesquisas futuras utilizando técnicas LMIs em identificação de sistemas. O desejo é que tais propostas sejam um dia conduzidas, já que constituem áreas promissoras dentro de identificação de sistemas. As propostas são apresentadas a seguir:

1. A partir dos modelos encontrados na dissertação, aplicar técnicas LMIs

- de controle robusto a tais sistemas;
2. utilizar outros tipos de informação auxiliar, além da fornecida pelos pontos fixos do sistema em estudo, como curva estática, ganho estático e expoente de Lyapunov;
 3. atuar em outras áreas da identificação de sistemas;
 4. utilizar outros critérios de identificação, além de escrever o problema do somatório dos erros quadráticos na forma LMI;
 5. identificação de sistemas que apresentam incertezas politópicas.

Bibliografia

- Abonyi, J. e Szeifert, F. (2001). Fuzzy modeling with multivariate membership functions: gray-box identification and control design. *IEEE Transactions on Systems*, 3(5):735–744.
- Aguirre, L. A. (2007). *Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não-lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. Editora UFMG.
- Along, F. e Raimondi, F. M. (2007). Nonlinear modeling of DC/DC converters using the Hammersteins approach. *IEEE Power Eletronics*, 22(6):1210–1221.
- Amato, F. e Cosentino, C. (2007). LMI based algorithm for the reconstruction of biological networks. *American Control Conference, ACC'2007*, 5:2720–2725.
- Barbosa, M. B. (2010). *Técnicas de Otimização Bi-Objetivo para a Determinação da Estrutura de Modelos NARX*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Barenthin, H. e Jansson (2000). Applications of mixed H-infinity and H2 input design in identification. *16th Word Congress on Automatic Control, IFAC, Praga, 2005*, 6:128–141.
- Barroso, M. F. S. (2004). *Métodos de Otimização Mono-Objetivo Aplicados à Identificação Caixa-Cinza de Sistemas Não-Lineares*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Bazaci, A. e Majd, V. J. (2003). Feedback linearization of discrete-time nonlinear uncertain plants via first principles-based serial neuro gray-box models. *Journal of Process Control*, 13(3):819–830.

- Billings, S. A. e Aguirre, L. A. (1995). Effects of the sampling time and identification of nonlinear models. *International Journal of Control*, 5(6):1541–1556.
- Billings, S. A. e Chen, S. (1989). Identification of MIMO nonlinear systems using a forward-regression orthogonal estimator. *International Journal of Control*, 49(6):2157–2189.
- Billings S. A., Zhu, Q. M. (1997). Rational model data smoothers and identification algorithms. *International Journal of Control*, 68(2):297–310.
- Bloch, I. e Petrosino, A. (2008). Identification of Takagi-Sugeno fuzzy systems basead on multi-objective genetic algorithms. *Lecture notes in artificial intelligence, Berlim, Germany*, 12:172–176.
- Bohlin, T. (1994). A case study of grey box identification. *Automatica*, 3:307–318.
- Boyd, S. P., Feron, E., e Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA.
- Casdagli, M. (1997). Recurrence plots revisited. *Physica D*, 108(2):12–44.
- Cassini, C. C. S. (1999). *Estimação recursiva de características estáticas não-lineares utilizando modelos polinomiais NARMAX*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Cavallo, A. e Natale, C. (2007). Gray-box Identification of Continuous-time Models of Flexible Structures. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 15(5):967–981.
- Chankong, V. e Haimes, Y. Y. (1983). *Multiobjective decision making: theory and methodology*. North-Holland (Elsevier).
- Chen, X. e Hu, Y. (2008). Nonparametric identification of regression models containing a misclassified dichotomos regressor without instruments. *Economic Letters*, páginas 381–384.
- Chilali, M. e Gahinet, P. (1999). Robust pole placement in LMI. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(12):2257–2270.

- Coelho, M. C. S. (2002). *Modelos de Hammerstein e de Wiener: conexões com modelos NARX e sua aplicação em identificação de sistemas não-lineares*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Cominos, P. e Munro, N. (2002). PID controllers: recent tuning methods and design to specification via LMI. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 149(1):46–53.
- Correa, M. V. (2001). *Identificação caixa-cinza de sistemas não-lineares utilizando representações NARMAX polinomiais e racionais*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Coutinho, D. F. (2000). *Análise de Sistemas Dinâmicos Não Lineares Incertos: uma Abordagem LMI*. Tese de Doutorado, UFSC- Santa Catarina, Brasil.
- de Oliveira, M. C. (1999). *Controle de Sistemas Lineares Baseado nas Desigualdades Matriciais Lineares*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas- SP- Brasil.
- de Oliveira, M. C. e Geromel, J. C. (1999). LMI characterization of structural and robust stability: the discrete-time case. *Linear Algebra and its Applications*, 296:27–38.
- Duarte, R. C. (2009). *Técnicas de Identificação Aplicadas à Modelagem de um Pêndulo Duplo Caótico*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Elsner, J. B. (1992). Predicting time series using a neural network as a method of distinguishing chaos from noise. *Journal of Physics A*, 25:843–850.
- Eykhoff, P. (1974). *System Identification Parameter and State Estimation*. Chichester, England: John Wiley & Sons.
- Fares, B. e Noll, D. (2001). An augmented Lagrangian method for a class of LMI constrained problems in robust control theory. *American Control Conference*, 5:3702–3708.
- Fujii, T. e Shimomura, T. (1999). Subspace controller design with uncommon LMI solutions. *American Control Conference*, páginas 547–554.

- Fujimori, A. (2004). Optimization of static output feedback using substitutive LMI formulation. *IEEE Transactions on Automatic Control.*, 6:995–999.
- Gahinet, P. e Nemirovskii, A. (1993). General purpose LMI solvers with benchmarks. *Decision and Control, 1993, Proceedings of 32nd IEEE Conference on*, 4:3162–3165.
- Gonzales-Olvera, M. A. e Tang, Y. (2010). Black-box identification of a class of nonlinear systems by a recurrent neurofuzzy network. *IEEE Transactions on*, 4(3):672–679.
- Haykin, S. (1994). *Neural Networks - a comprehensive foundation*. London: McMillan.
- Ikeda, T. e Tanaka, K. (1999). Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI design. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, páginas 250–265.
- Ikeda, T. e Tanaka, K. (2000). A unified approach to controlling chaos via a LMI fuzzy control system design. *Circuits and Systems: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, páginas 1021–1040.
- Jayakumari, F. (2011). A multi-objective genetic algorithm approach to the probabilistic manufacturing cell formation problem. *South African Journal of Industrial Engineering*, 6:199–212.
- Kalman, R. E. e Arbib, M. A. (1970). *Nonlinear Time Series Analysis*. McGraw-Hill Books Company, USA.
- Kanno, M. (2005). H₂ model reduction using LMIs. *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005, IEEE Seville, Spain*, páginas 5847–5892.
- Lam, H. K. (2011). LMI-based stability analysis for fuzzy model-based control systems using artificial T-S fuzzy model. *Fuzzy systems, IEEE Transactions on*, páginas 505–513.
- Langari, R. e Kwangtre, K. (2000). LMI based design of Takagi Sugeno fuzzy controllers using fuzzy estimator. *Decision and Control, 2000. Proceedings of the 38th IEEE Conference on*, 5:4343–4348.

- Leontaritis I. J. and., Billings, S. A. (1985). Input-output parametric models for nonlinear systems. Part ii: Stochastic nonlinear systems. *International Journal of Control*,, 41:329–344.
- Lian, K. e Tu, H. W. (2006). Stability conditions for LMI fuzzy control from viewpoint of membership functions. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, páginas 874–884.
- Liefogh, A. (2011). Metaheuristics for multi-objective optimization. *Operations Research and Management Science*, 8:219–222.
- Lim, J. e Lee, Y. (2008). Design of discrete-time multivariable PID controllers via LMI approach. *International Conference on, ICCAS'2008*, páginas 1867–1871.
- Liu, L. e Wang, B. (2010). Multi-objective robust active vibration control for flexure jointed structures of stewart plataforms via H-infinity. *Chinese Journal of Aeronautics*, 5:125–138.
- Ljung, L. (1999). *System Identification - Theory for the User*. Prentice- Hall International, New Jersey.
- Monteiro, L. H. (2006). *Sistemas Dinâmicos*. Editora Livraria da Física.
- Narendra, K. S. (1990). Identification and control of dynamical systems using neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1:2–27.
- Narendra, K. S. e Gallman, P. G. (1966). An iterative method for the identification of the nonlinear systems using a Hammerstein model. *IEEE Trans. Automat.*, 11(3):546–550.
- Nepomuceno, E. G. (2002). *Identificação Multiobjetivo de Sistemas Não-Lineares*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Neve, M. e Marchesi, L. (2007). Nonparametric identification of population models via Gaussian process. *Automatica*, 43(5):1134–1144.
- Palhares, R. M. (1998). *Filtragem Robusta: Uma Abordagem por Desigualdades Matriciais Lineares*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas.

- Palhares, R. M. e Peres, P. (1999). Robust H2 design with pole placement constraints via linear matrix inequalities. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 102(2):239–261.
- Palhares, R. M. e Peres, P. L. D. (2000). Robust filtering with guaranteed energy-to-peak performance : an LMI approach. *Automatica*, 36:851–858.
- Patra, S. e Mukherjee, S. (2006). Analysis of linear systems with input saturation and model uncertainty: an LMI approach. *Industrial Technology, ICIT 2006. IEEE International Conference on*, páginas 2262–2267.
- Patwardhan, R. S. e Lakshminarayanan, S. (1998). Constrained nonlinear MPC using Hammerstein and Wiener models: PLS framework. *AIChE Journal*, 44(7):1611–1622.
- Pearson, R. K. e Pottman, M. (2000). Gray-box identification of block oriented nonlinear models. *Journal of Process Control*, 3(4):301–315.
- Pedroza, L. C. C. e Pedreira, C. E. (2000). Uma nova metodologia para treinamento em redes neurais multicamadas. *Controle e Automação*, 11:49–54.
- Petrick, M. H. (1997). A priori nonlinear model structure selection for system identification. *Control Eng. Practice*, 5:1053–1062.
- Qaiser, S. H. e Bhatti, A. (2009). LMI-based robust control system design for research reactor. *Applied Sciences and Technology, 2009 6th International Bhurban Conference on*, páginas 207–211.
- Qiang, Q. e Huang, H. (2008). System identification of the double inverted pendulum based on genetic algorithm. *System and control in Aerospace and Astronautics, ISSCAA*, 2(1-2):1–5.
- Ramos, C. e Herrero, J. M. (2008). Nonlinear robust identification of a greenhouse model using multi-objective evolutionary algorithms. *Department of systems engineering and control, University of Valencia, Valencia, Spain*, 19:148–156.
- Ramos, D. C. e Peres, P. L. D. (2002). An LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(7):675–678.

- Ranchao, W. e Weiwei, Z. (2008). Synchronization of delayed chaotic neural networks via LMI. *Future Generation Communication and Networking Symposium, FGCNS'2008*, páginas 55–59.
- Remsfelt, A. e Rossberg, M. (2008). Optimal sensor locations for nonparametric identification of viscoelastic materials. *Automatica*, 44:28–38.
- Saif, A. (2009). Strong stabilization of MIMO systems: an LMI approach. *Systems, Signals and Devices, 2009. SSD'09 6th International Multiconference on*, páginas 1–6.
- Saif, M. e Chen, W. (2006). Unknown input observer design for a class of nonlinear system: an LMI approach. *American Control Conference*, páginas 9–13.
- Sanchez, L. e Villar, J. R. (2006). Obtaining transparent models of chaotic system with multi-objective simulated annealing algorithms. *Computer Science Department, Universidad de Oviedo, Gijo, Spain*, 2:145–151.
- Serra, G. L. O. (2005). *Propostas de metodologias para identificação e controle inteligente*. Dissertação de Mestrado, UNICAMP.
- Shao, L. e Erhgott, M. (2009). An approximation algorithm for convex multi-objective programming problems. *Journal Science Business*, 4:124–129.
- Silva, G. L. L. (2004). *Projeto de Filtros com Ordem Reduzida via Restrições Matriciais Lineares*. Dissertação de Mestrado, Unicamp- Campinas SP.
- Teixeira, B. O. S. e Aguirre, L. A. (2011). Using uncertain prior knowledge to improve identified nonlinear dynamic models. *Journal os Process Control*, 40(10):82–91.
- Trofino, A. (2000). *Controle robusto*. Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.
- Trofino, A. e Coutinho, D. F. (2004). Robust order reduction. *Proceeding of the 2004 American Control Conference, AACC, Boston, Massachusetts*, 12:3363–3368.
- Tulleken, H. J. A. (1994). Modeling chemical processes using prior knowledge and neural networks. *Automatica*, 40:1328–1340.

-
- Volterra, V. (1930). *Theory of functions*. Blackie and Sons.
- Wang, F. e Xu, X. (2011). Study on method of nonlinear system identification. *Intelligent computation technology and automation (ICICTA)*, 1:944–947.
- Wernholt, E. e Moberg, S. (2011). Nonlinear gray-box identification using local models applied to industrial robots. *Automatica*, 47(2):650–660.
- Wiener, N. (1949). *Extrapolation, inetrpolation and smoothing of stationary time series*. MIT Press, Cambridge, MA.
- Wigren, T. (1993). Recursive prediction error identification using nonlinear Wiener model. *Automatica*, 29(4):1011–1025.
- Yang, X. H. e Tong, B. (1993). Attenuation of structurally generated interior noise through active control. *Proceedings of the 1993 American Control Conference D*, páginas 1–7.
- Young, P. (1980). *A study in the analysis of stationary time series*. 2nd edition Estocolmo: Almqvist & Wiksel.
- Yuan, X. (2009). Identifying stochastic nonlinear dynamic systems using multi-objective hierarchical fair competition parallel genetic programing. *Journal of multiple-valued logic and soft computing, Philadelphia, USA*, 11:643–650.