Análise Paramétrica do Método Sem Malha *Element Free Galerkin* em Problemas Eletrostáticos

Tadeu de Brito Oliveira Porto

Dissertação apresentada
ao
Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica
da
Associação Ampla entre UFSJ e CEFETMG
para
obtenção do título
de
Mestre em Engenharia Elétrica

Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica - PPGEL
Orientadora: Prof^{a}. Dr^{a}. Úrsula do Carmo Resende
Co-orientador: Prof. Dr. Eduardo Henrique da Rocha Coppoli

Belo Horizonte, setembro de 2012

Análise Paramétrica do Método Sem Malha
Element Free Galerkin **em Problemas Eletrostáticos**

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em vinte e sete de setembro de dois mil e doze (27/09/2012).

Comissão Julgadora:

- Prof^{a}. Dr^{a}. Úrsula do Carmo Resende (orientadora) - CEFET-MG

  _____

- Prof. Dr. Eduardo Henrique da Rocha Coppoli (co-orientador) - CEFET-MG

  _____

- Prof. Dr. Marco Aurélio de Oliveira Schroeder (convidado) - UFSJ

  _____

- Prof. Dr. Renato Simões Silva (convidado) - LNCC

  _____

Agradecimentos

Agradeço a minha família, Lúcia, Emília e Airton Porto, e a minha noiva, Cristiane Oliveira, por me fazerem aprender, cada dia mais, a importância e o valor do amor, sentimento esse, que me dá subsídios para que eu possa superar os poucos obstáculos que a vida me proporciona.

Agradeço ao meu co-orientador, Prof. Dr. Eduardo Henrique da Rocha Coppoli, pela imensa ajuda na troca de conhecimentos e por compartilhar comigo, com muita boa vontade, sua grande experiência acadêmica.

Em especial, agradeço a minha orientadora, Profa. Dra. Úrsula do Carmo Resende, que, acredito eu, nunca perderá essa habilidade monstruosa de ser mãe de uma dezena de filhos ao mesmo tempo. Professora, é com muito carinho e satisfação que digo que, assim como em meu trabalho de graduação, sua força, (extrema) paciência, inteligência, confiança e verdadeira orientação foram de fundamental importância para que eu realizasse esta dissertação.

Por fim, não posso deixar de agradecer, mais uma vez, ao CEFET-MG por me acolher dos 13 aos 26 anos de idade (metade de uma vida, tenho mesmo muito o que agradecer). Desde o curso preparatório para ingressar na instituição, passando pelos ensinos médio e técnico, dois estágios supervisionados, uma graduação e um intercâmbio até este mestrado em engenharia elétrica. Não só a ajuda financeira foi extremamente importante, mas também todos os valores impagáveis e insubstituíveis que aprendi os quais certamente utilizarei o resto da minha vida. Fico feliz por não me sentir como mais um tijolo no muro e espero, um dia, poder retribuir à altura tal ajuda, na forma de serviços para a imensa população brasileira.

Já perdemos muito tempo
brincando de perfeição
esquecemos o que somos:
simples de coração...

Humberto Gessinger

Resumo

Porto, T. B. O. **Análise Paramétrica do Método Sem Malha** *Element Free Galerkin* **em Problemas Eletrostáticos**. 2012. 120 f. Dissertação (Mestrado) - Mestrado em Engenharia Elétrica - PPGEL, Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012.

Diante das dificuldades de se resolver alguns problemas de valor de contorno analiticamente, diversos métodos numéricos foram pensados e desenvolvidos, desde o último século até os dias atuais. Cita-se, por exemplo, os métodos sem malha que, criados como uma alternativa aos consagrados métodos com malha (*e.g* método dos elementos finitos e das diferenças finitas), utilizam uma distribuição de pontos (nós) em um domínio fechado para o cálculo de uma função desconhecida. Esses métodos são relativamente novos, assim, investigações acerca dos mesmos são importantes e desafiadoras. Nesse sentido, este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de avaliar o método sem malha Elemento Livre de Galerkin (*Element Free Galerkin - EFG*), aplicando tal método a dois problemas de valor de contorno provenientes da eletrostática: capacitor de placas paralelas e cilíndrico. São testados, ainda, diferentes valores dos principais parâmetros do EFG em prol de verificar a importância desses no resultado final, além de tentar produzir, assim, uma possível alternativa para uma configuração ótima desse método. Para tanto, a metodologia utilizada é: primeiramente discorrer sobre o conceito e a história dos métodos *meshless* em destaque na literatura consultada; em segundo lugar demonstrar a formulação geral do EFG para que, por fim, se possa apresentar os resultados desse método aplicado aos problemas eletrostáticos em questão. Com a análise de tais resultados, verifica-se, a priori, que o EFG é capaz de produzir funções aproximadas com respostas muito semelhantes dos valores analíticos dos capacitores em estudo. Conclui-se, ainda, que a escolha dos parâmetros adequados utilizados para a construção do EFG influi diretamente na precisão da resposta final obtida pelo do método EFG, acarretando, portanto, em uma possível configuração otimizada do método.

Palavras-chave: Método sem Malha, Element Free Galerkin, Eletrostática.

Abstract

Porto, T. B. O. **Parametric Analysis of the Meshless Method Element Free Galerkin in Electrostatic Problems**. 2012. 120 f. Dissertation - Master Degree in Electrical Engineering - PPGEL, Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012.

In order to solve some boundary value problems (BVP), several numerical methods are being developed and upgraded since the last century until nowadays. For instance, it can be cited the meshless (also known as meshfree) methods, a new class of numerical techniques that are receiving notable attention from the scientific community since the last two decades. These methods are used to solve some BVP's using only a set of points (nodes) without connecting them in a mesh structure, such as mesh-based methods like the finite element. Accordingly to that, this work was developed to attempt to evaluate the method Element Free Galerkin (EFG) applying it in two electrostatic BVP's: a parallel-plate and a cylindrical capacitor. It is also verified the impact of the main parameters from the EFG on the final result, with the objective of produce a possible alternative to an optimum configuration for this method. Therefore, the methodology used in this study is: at first, it is discussed the concept and the history of meshfree methods highlighted in the literature; secondly, it is demonstrate the general formulation of the EFG to finally present the result of this method applied to the electrostatic problems. With the analysis of the results, it was found that the EFG is capable of producing the approximated function with values very similar to the analytical ones, considering the capacitors in study. It was also conclude that the choice of suitable parameters used to construct the EFG influences directly in the precision of the final answer obtained by the method, resulting therefore in a possible optimized configuration.

Keywords: Meshless Method, Element Free Galerkin, Eletrostatic.

Sumário

Lista de Abreviaturas **vii**

Lista de Símbolos **viii**

Lista de Figuras **x**

Lista de Tabelas **xii**

1 Introdução **1**

1.1 Objetivos 3

1.2 Contribuições 3

1.3 Considerações iniciais 3

1.4 Organização do Trabalho 4

2 Revisão Bibliográfica dos Métodos sem Malha: Conceito, Formulação e História **6**

2.1 Formulação Geral de um Método *Meshless* 7

2.1.1 Definição 7

2.1.2 Problema de Valor de Contorno Generalizado 9

2.1.3 Conceitos e Notações Preliminares 10

2.2 Principais Métodos sem Malha 18

2.2.1 *Smooth Particle Hydrodynamics - SPH* 19

2.2.2 *Diffuse Element Method - DiEM* 21

2.2.3 *Reproducing Kernel Particle Method - RKPM* 23

2.2.4 *The Partition of Unity Method - PU* 24

2.2.5 *H-p Cloud Method - HpC* 24

2.2.6 *Finite Point Method - FP* 26

2.2.7 *Meshless Local Petrov-Galerkin - MLPG* 27

2.2.8 *Point Interpolation Method - PIM* 28

2.2.9 *Gradient Smoothing Method - GSM* 30

2.2.10 Considerações Finais 31

3 O método ***Element Free Galerkin*** **34**

3.1 Construção das funções de forma: o método dos mínimos quadrados móveis - MLS . 36

3.1.1 O método dos mínimos quadrados móveis interpolante - IMLS 40

3.2 Formulação da forma fraca: O método dos resíduos ponderados - WRM 41

3.3 Discretização do espaço e das funções: o método de Galerkin - GM 44

3.4 Imposição das condições de contorno: o método dos multiplicadores de Lagrange - MML . . . 46
3.5 Imposição das condições de interface: o critério da visibilidade - VC . . . 48
3.6 Integração do problema: o método da quadratura de Gauss . . . 49
3.7 Formulação final: o *Element Free Galerkin* . . . 50
3.7.1 Formulação matemática . . . 50
3.7.2 Construção e possível solução do sistema de equações lineares . . . 53
3.8 Considerações Finais . . . 58

4 EFG aplicado ao problema eletrostático um: capacitor de placas paralelas 60
4.1 Apresentação do problema: Capacitor de placas paralelas e dois dielétricos . . . 61
4.1.1 Formulação Matemática . . . 61
4.1.2 Solução analítica . . . 63
4.2 Pontos a serem observados no EFG . . . 65
4.3 Resultados . . . 66
4.3.1 Análise de erro: as normas de Lesbegue e Hilbert . . . 66
4.3.2 Solução numérica base . . . 67
4.3.3 Influência do tamanho do raio de suporte (domínio de influência) . . . 70
4.3.4 Influência da relação entre o número de nós e os pontos de integração . . . 73
4.3.5 Proposta de solução numérica com EFG otimizado . . . 74
4.4 Considerações Finais . . . 75

5 EFG aplicado ao problema eletrostático dois: capacitor cilíndrico 77
5.1 Apresentação do problema: Capacitor 2D cilíndrico dois dielétricos distintos . . . 78
5.1.1 Formulação Matemática . . . 78
5.1.2 Solução Analítica . . . 79
5.2 Resultados . . . 81
5.2.1 Solução base . . . 81
5.2.2 Influência do tamanho do raio de suporte (domínio de influência) . . . 84
5.2.3 Influência da relação entre o número de nós e os pontos de integração . . . 85
5.2.4 Influência da relação entre o número de nós . . . 86
5.2.5 Proposta de solução numérica com EFG otimizado . . . 87
5.3 Considerações Finais . . . 89

6 Conclusões 90
6.1 Considerações Finais . . . 90
6.2 Conclusões . . . 91
6.3 Sugestões para Pesquisas Futuras . . . 92

Referências Bibliográficas 93

Lista de Abreviaturas

DiEM	*Diffuse Element Method* - Método dos elementos difusos
EDP	Equação Diferencial Parcial
EFG	*Element Free Galerkin Method* - Método Elemento livre de Galerkin
FDM	*Finite Difference Method* - Método do Elemento Finito
FEM	*Finite Element Method* - Método do Elemento Finito
FP	*Finite Point Method* - Método do Ponto Finito
GSD	*Gradient Smoothing Domains* - Domínios do Método do Gradiente Suavizado
GM	*Galerkin Method* - Método de Galerkin
GSM	*Gradient Smoothing Method* - Método do Gradiente Suavizado
HpC	*Hp-Cloud Method* - Método de nuvens Hp
IMLS	*Interpolating Moving Least Square Method* - Método dos Mínimos Quadrados Móveis Interpolante
LPIM	*Local Point Interpolation Method* - Método local da Interpolação Pontual
MoM	*Moving of Moments* - Método dos Momentos
MLS	*Moving Least Square Method* - Método Mínimos Quadrados Móveis
MLPG	*Meshless Local Petrov-Galerkin* - Método Local de Petrov-Galerkin Sem Malha
MLM	*Method of Lagrange Multipliers* - Método dos Multiplicadores de Lagrange
PIM	*Point Interpolate Method* - Método da Interpolação Pontual
PUM	*Partition of Unity Method* - Método de Partição da Unidade
PUFEM	*Partition of Unity Finite Element Method* - Método de partição da unidade
PVC	Problema de Valor de Contorno
PVF	Problema de Valor de Fronteira
RKPM	*Reproducing Kernel Particle Method* - Método de partículas Reproduzidas de Kernel
RPN	Relação entre o número de Pontos de integração e o número de Nós (em %)
SPH	*Smothing Particle Hydrodinamics Method* - Método da partícula hidrodinâmica suavizada
VC	*Visibility Criterion - VC* - Critério de Visibilidade
WRM	*Weighted Residual Method* - Método dos Resíduos Ponderados

Lista de Símbolos

índice h	Define que a função é discreta
$D^{\iota}[f(x)]$	A derivada de ordem ι da função f(x)
V	Potencial Elétrico
f	Fonte de excitação
Ω	Domínio principal de um PVC
g	Fonte de excitação
Γ_n	Fronteira Natural
V_p	Valor de V na fronteira essencial
Γ_e	fronteira essencial
Γ	fronteira do domínio PVC que limita Ω
$\mathbb{L}^p$	Espaço de Lesbegue de ordem p
$\|v\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$	Norma da função v no espaço de Lesbegue de segundo grau
$\mathbb{H}^m$	Espaço de Hilbert de ordem m
$\|v\|^2_{\mathbb{H}^m(\Omega)}$	Norma da função v no espaço de Hilbert de ordem m
$\mathbb{H}^1_0$	Espaço de Hilbert de primeira ordem que satisfaz as condições de contorno essenciais
$\Phi(x)$	Função de Forma
$\widehat{W}$	Função Janela
r	Raio de suporte do suporte compacto de uma função
a	Ponto de integração
x	Nó de discretização
α	Constante de aumento do raio de suporte
$\delta(x)$	Função Delta de Dirac
δ_{IJ}	Função Delta de Kronecker
ϵ	Permessividade elétrica
ϵ_0	Permessividade elétrica do vácuo
C^k	Consistência de ordem k
$V(x)$	Potencial elétrico
$\mathbf{p}^T$	Base polinomial do MLS
d_l	Distância base para cálculo do raio de suporte
$\Pi(R)$	Funcional do erro ponderado
$T(x)$	Função de Teste

$B(V,V)$	Forma bilinear simétrica da função V
$F(V)$	Funcional linear da função V
λ	Multiplicados de Lagrange
$\mathbf{K}$	Matriz do sistema de equações lineares do EFG
$\mathbf{F}$	Matriz do sistema de equações lineares do EFG
$\mathbf{D}$	Densidade de fluxo elétrico
ρ_s	Densidade superficial de carga elétrica
$\mathbf{E}$	Intensidade de campo elétrico
$\mathbf{n}$	Vetor normal a superfície
$e(x)$	Função erro
$\|e(x)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$	Norma do erro $e(x)$ no espaço $\mathbb{L}^2(\Omega)$
$\|e(x)\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}$	Norma do erro $e(x)$ no espaço $\mathbb{H}^1(\Omega)$

Lista de Figuras

2.1 Domínio e Condições de Contorno de um PVC generalizado 10
2.2 Representação da propriedade de translação da Função Janela 15
2.3 Representação da propriedade de dilatação da Função Janela 16
2.4 Linha do tempo dos principais métodos *meshless* 19
2.5 Técnicas de aproximação e discretização para os principais métodos *meshless* 33

3.1 Domínio de Influência do ponto **a** englobando os nós de discretização $x_1 = 0$ e $x_2 = 0,5$ (adaptado de [Cingoski *et al.* , 1997]) 37
3.2 Domínio de Influência do ponto **a** quando aplicado o critério de visibilidade para a interface entre os meios 1 e 2 (adaptado de [Cingoski *et al.* , 1997]) 49
3.3 Esquema simplificado para a resolução de um PVC com a utilização do método EFG 51
3.4 Esquema básico para a construção e aplicação do EFG (adaptado de [Liu , 2010]) . . 54
3.5 Problema de geometria irregular com uma distribuição de nós arbitrária (adaptado de [Cingoski *et al.* , 1997]) 55
3.6 Representação do raio de suporte, ponto de integração e malha de fundo para o primeiro *loop* (adaptado de [Cingoski *et al.* , 1997]) 55
3.7 Representação do raio de suporte, ponto de integração e malha de fundo para o segundo *loop* (adaptado de [Cingoski *et al.* , 1997]) 57

4.1 Capacitor de placas paralelas com dois dielétricos distintos 62
4.2 Potencial elétrico para o capacitor de placas paralelas, analítico e numérico, obtido pelo EFG (Solução Base) 69
4.3 Campo elétrico para o capacitor de placas paralelas, analítico e numérico, obtido pelo EFG (Solução Base) 69
4.4 Erro pela variação de tamanho do raio de suporte (capacitor de placas paralelas) . . 71
4.5 Potencial elétrico para o capacitor de placas paralelas, analítico e numérico, obtido pelo EFG para $\alpha = 5$ 72
4.6 Potencial elétrico para o capacitor de placas paralelas, analítico e numérico, obtido pelo EFG para $\alpha = 7$ 72
4.7 Erro pela variação da relação entre pontos e nós (capacitor de placas paralelas) . . . 74
4.8 Potencial elétrico para o capacitor de placas paralelas, analítico e numérico, obtido pelo EFG (após análise de parâmetros) 75
4.9 Campo elétrico para o capacitor de placas paralelas, analítico e numérico, obtido pelo EFG (após análise de parâmetros) 76

5.1 Capacitor cilíndrico com dois dielétricos distintos e concêntricos 78
5.2 Potencial elétrico para o capacitor cilíndrico, analítico e numérico, obtido pelo EFG (Solução Base) 83
5.3 Campo elétrico para o capacitor cilíndrico, analítico e numérico, obtido pelo EFG (Solução Base) 83
5.4 Erro pela variação de tamanho do raio de suporte (capacitor cilíndrico) 84
5.5 Erro pela variação da relação entre pontos e nós (capacitor cilíndrico) 85
5.6 Erro pela variação de número de nós (capacitor cilíndrico) 86
5.7 Potencial elétrico para o capacitor cilíndrico, analítico e numérico, obtido pelo EFG (após análise de parâmetros) 88
5.8 Campo elétrico para o capacitor cilíndrico, analítico e numérico, obtido pelo EFG (após análise de parâmetros) 88

Lista de Tabelas

4.1 Tabela com valores de erro nas normas de Lesbegue e Hilbert para o potencial e o campo calculado pelo método EFG e referente ao capacitor Figura 4.1 (Solução base) 70
4.2 Tabela com valores de erro nas normas de Lesbegue e Hilbert para o potencial e o campo calculado pelo método EFG (após análise de parâmetros) e referente ao capacitor Figura 4.1 (Solução ótima) 75

5.1 Tabela com valores de erro nas normas de Lesbegue e Hilbert para o potencial e o campo calculado pelo método EFG e referente ao capacitor Figura 5.1 (solução base) 82
5.2 Tabela com valores de erro nas normas de Lesbegue e Hilbert para o potencial e o campo calculado pelo método EFG e referente ao capacitor Figura 5.1 (solução ótima) 87

Capítulo 1

Introdução

Equações diferenciais parciais (EDP's) são importantes expressões matemáticas que representam o comportamento de conhecidos fenômenos naturais. Na hipótese de se representar um sistema governado por uma EDP é comum, ainda, considerar restrições de geometria e condições naturais do mesmo, formando, assim, um problema de valor de contorno (PVC). Esses PVC's - também conhecidos como problemas de valor de fronteira (PVF) - são extremamente comuns em estudos de engenharia, por representarem fenômenos físicos sob a forma matemática [Boyce e DiPrima , 2007]. Exemplos de EDP's podem ser observados em problemas tradicionais de diferentes áreas, como: (1) a lei de Faraday para o eletromagnetismo [Sadiku , 2004]; (2) a equação de calor que modela a condução térmica em um sólido [Incropera *et al.* , 2008]; e (3) a equação de onda para a propagação de onda em um meio [Halliday *et al.* , 2003].

Com o crescimento da tecnologia e do conhecimento humano, os problemas desenvolvidos na engenharia se tornam cada vez mais elaborados, aumentando, assim, a dificuldade de modelá-los. Consequentemente, equações oriundas de sistemas complexos assumem formas mais trabalhadas, acarretando em expressões de soluções analíticas quase sempre impossíveis. Sendo assim, devido à dificuldade de se resolver analiticamente certos PVC's, diversos métodos numéricos foram desenvolvidos no último século, podendo-se citar, entre os mais conhecidos, os métodos: dos momentos (*Method of moments - MoM*) [Harrington , 1968]; das diferenças finitas (*Finite Difference Method - FDM*) [LeVeque , 2007] e dos elementos finitos (*Finite Element Method - FEM*) [Strang e Fix , 2007]. Esses métodos, também conhecidos como métodos baseados em malha (*Mesh-based methods* - [Viana , 2006]), envolvem a geração de diversas malhas aplicadas a diferentes geometrias. Portanto, segundo Liu [2010], quando o domínio a ser dividido possui um forma geométrica complexa,

a resolução dos PVC's envolvidos no mesmo se torna mais difícil. Salienta-se, ainda, que em casos de sistemas dinâmicos no qual a geometria varia com o tempo é necessário a formação de um novo arranjo de malhas a cada mudança de domínio, aumentando, assim, o esforço para a utilização desses métodos [Coppoli , 2010]. Nesse sentido, outros tipos de métodos numéricos, os chamados sem malha (*meshless* ou *meshfree*), foram pensados e desenvolvidos para realizar uma solução confiável de PVC's sem depender de malhas.

Não obstante à sua importância e aplicação, os métodos *meshless* têm sua história recente tornando-os, assim, um tema de investigação interessante e desafiadora. Segundo Liu [2010], existem diversas metodologias que utilizam as técnicas sem malha, além disso, cresce consideravelmente investigações acerca do assunto. Basicamente, esses métodos consistem em espalhar nós em um domínio onde existe uma função desconhecia governada por um PVC. Logo após, é determinada a influência que cada ponto exerce, calculando a interação de todos os pontos, uns com os outros, mediante uso de técnicas de aproximações. Posteriormente, é montado um sistema de equações a partir do PVC para que, por último, seja encontrada uma função discreta que descreve aproximadamente a função desejada.

Uma das técnicas sem malha mais aplicadas desde a sua criação é conhecida como método do Elemento Livre de Galerkin (*Element-Free Galerkin - EFG*) [Belytschko *et al.* , 1994]. Apesar de apresentar bons resultados em diversas áreas da engenharia (vide [Schwer *et al.* , 2000]; [Coppoli *et al.* , 2012]; [Zhang *et al.* , 2012] e [Liu *et al.* , 2006]), até então, existem poucos estudos na literatura tradicional que abordem uma possível otimização dos principais parâmetros desse método. Pode-se atribuir tal feito não só à juventude do EFG, mas também ao aparecimento contínuo de novas técnicas sem malha, dividindo o interesse da comunidade entre mais métodos a cada ano.

Apesar de perder um pouco de espaço devido, entre outros fatores, à utilização de malhas de fundo para realizar a integração numérica presente no método [Viana , 2006], o EFG ainda pode ser encontrado em importantes investigações atuais, como Liu [2010]; Lima [2011]; Coppoli [2010] e Gong *et al.* [2009].

Tendo em vista, então, a importância de investigações acerca de novas técnicas numéricas como os *meshfree* e, também, a possível necessidade de um estudo mais profundo sobre o EFG, essa dissertação tem o objetivo principal de analisar os principais parâmetros desse método aplicando-o

a problemas eletrostáticos: um sistema de geometria mais simples (capacitor de placas paralelas); e um problema de geometria menos trivial (capacitor cilíndrico). Em posse de tal análise, pode-se, assim, verificar os possíveis impactos desses parâmetros na eficiência do EFG, acarretando, portanto, em uma provável configuração otimizada do método.

1.1 Objetivos

Essa dissertação tem como objetivo principal a análise paramétrica do método *Element Free Galerkin* aplicando-o a problemas clássicos do eletromagnetismo estático: capacitores de placas paralelas e cilíndrico.

Salienta-se, ainda, que objetivos secundários como: a apresentação detalhada dos principais métodos *meshless* e a investigação mais profunda sobre o EFG também existem, uma vez que os mesmos podem auxiliar em futuras investigações acerca de métodos sem malha.

1.2 Contribuições

As principais contribuições deste trabalho são as seguintes:

- Item 1. A possibilidade de um melhor entendimento do método *element free Galerkin*, uma vez que alguns de suas principais características são estudadas e observadas;
- Item 2. Auxílio em investigações acerca dos métodos sem malha em geral, pois é dada ênfase aos principais métodos presentes na literatura;
- Item 3. Uma investigação inicial sobre **uma possível** otimização do método *element free Galerkin*, pois parâmetros pertencentes à técnica são variados em prol de encontrar uma resposta mais eficiente em termos de complexidade computacional e fidelidade à solução correta.

1.3 Considerações iniciais

Fundamentado nas metas propostas e nas possíveis contribuições desta dissertação, pode-se destacar algumas considerações iniciais que visam explicitar a metodologia utilizada aqui em prol do alcance dos objetivos.

Primeiramente, optou-se por uma apresentação mais detalhada dos métodos sem malha, uma vez que, sendo técnicas recentes, existem ainda, espaços para novas investigações que possam aprimorar a teoria dos mesmos. Além disso, argumenta-se que as os métodos *meshfree* possuem características semelhantes, assim, a teoria de uma determinada técnica pode auxiliar no desenvolvimento ou melhoria de uma outra.

Em segundo lugar, é apresentado o método EFG e todas as ferramentas numéricas envolvidas em sua formulação original. É demonstrado, também, um exemplo de como o EFG pode ser aplicado à uma equação de Laplace no sentido de ilustrar de que forma esse método pode ser utilizado para a resolução de um problema de valor de contorno.

Por fim, é aplicado o método em estudo em dois problemas eletrostáticos distintos, um capacitor de placas paralelas, sistema mais simples cujos resultados obtidos visam demonstrar importantes características do EFG. E, também, um capacitor cilíndrico, um problema mais complexo, cujos resultados têm o objetivo de ilustrar a eficiência do EFG aplicado à um problema pouco explorado nos estudos multidisciplinares de *meshless* e engenharia elétrica. Salienta-se, ainda, que para ambos problemas é verificada a possibilidade de otimização do EFG.

1.4 Organização do Trabalho

Tendo em vista a introdução deste estudo e, ainda, sob a perspectiva das suas considerações iniciais esta dissertação é construída da seguinte forma:

No Capítulo 2, é apresentada a revisão bibliográfica dos principais métodos sem malha, abordando desde suas origens até a formulação geral dos mesmos. São estabelecidos, também, algumas notações que são utilizadas durante todo o trabalho.

No Capítulo 3, é discorrido sobre a teoria e a formulação geral do EFG visando aprofundar sobre os principais conceitos do método.

No Capítulo 4, são demonstrados resultados do EFG aplicado a um problema simples com o objetivo de investigar algumas das principais características do método.

No Capítulo 5, é aplicado o EFG em um sistema pouco explorado nas referências investigadas para a realização desse trabalho, um capacitor cilíndrico preenchido com dois dielétricos distintos e concêntrico, com os objetivos de: (1) apresentar uma solução diferente aos estudos de EFG aplicado a problemas eletromagnéticos; (2) verificar a eficiência desse método frente a um problema mais complexo e (3) estudar a possibilidade de otimização do método.

No Capítulo 6, por fim, são feitas as conclusões e considerações finais deste trabalho, assim como é proposta a possibilidade de algumas investigações futuras.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica dos Métodos sem Malha: Conceito, Formulação e História

Neste capítulo é apresentada uma revisão bibliográfica geral dos principais métodos sem malha presentes na literatura. Para tanto, o mesmo é divido em três partes distintas: primeiramente descreve-se a teoria geral de um método sem malha, assim como os principais parâmetros e características desse; em um segundo momento, é discorrido sobre alguns conceitos e nomenclaturas importantes não somente para a apresentação dos métodos *meshfree*, mas também para manter uniformes notações utilizadas neste trabalho; e, por último, aborda-se os principais tipos de métodos *meshless* disponíveis.

Salienta-se que essa divisão é organizada de tal forma pela importância dada, nesta dissertação, aos principais métodos sem malha tradicionalmente estudados e desenvolvidos. Acredita-se que o melhor entendimento dos mesmos e de algumas notações comuns a esses são importantes para uma investigação mais aprofundada sobre o EFG.

Nesse sentido, o conceito discutido neste capítulo procura apresentar as principais características que cercam um método sem malha qualquer. Objetiva-se, ainda, discorrer sobre as principais ferramentas *meshfree* e alguns de seus atributos mais importantes, auxiliando, assim, no desenvolvimento deste trabalho.

2.1 Formulação Geral de um Método *Meshless*

Para que se possa apresentar os principais métodos sem malha propostos até os dias atuais se fez necessário, neste trabalho, discorrer a priori sobre a idéia básica dessa ferramenta numérica. Em posse, então, dessa teoria pode-se ponderar sobre as particularidades de cada método e, consequentemente, analisá-los de maneira mais profunda.

Portanto, na presente seção é discutido o conceito de um método sem malha. Posteriormente, tendo em vista a necessidade de manter uniforme todas formulações expostas neste estudo, é também apresentado um PVC genérico cujas principais nomenclaturas (*i.e.* domínio, condições de contorno, funções essenciais) são utilizadas durante toda dissertação. Em terceiro lugar é discorrido sobre algumas teorias e aspectos comuns existentes nas técnicas sem malha. Com relação às nomenclaturas, optou-se por utilizar letras e formas clássicas do eletromagnetismo, uma vez que esta dissertação representa um estudo pertencente à engenharia elétrica. Entretanto, toda formulação aqui apresentada pode ser utilizada em problemas semelhantes, como o escoamento de fluidos, forças em uma treliça e um sistema massa e mola, por exemplo.

2.1.1 Definição

Os métodos sem malha são utilizados para estabelecer um sistema de equações algébricas associado ao domínio de um problema sem o uso pré-definido de uma malha, e, se acaso houver o uso dessa, o método a utiliza de uma forma flexível [Liu , 2010]. Um método *meshless* usa uma quantidade de nós espalhados dentro do domínio e das fronteiras, representando, assim, toda a geometria envolvida no problema, *i.e.* domínio e contornos, sendo que as funções desconhecidas são, então, aproximadas localmente utilizando esses nós [Liu , 2010].

É importante, também, discorrer sobre quais características definem um método como sem malha, pois existem diferentes maneiras de construí-los. Em sua revisão, Belytschko *et al.* [1996] escreveu que embora muitas técnicas *meshless* utilizem malhas em pelo menos alguma parte de sua formulação, descontinuidades e problemas dinâmicos podem usualmente ser tratados sem a necessidade de criação de novas malhas, portanto esses métodos podem ser considerados como sem malha.

Uma década depois, Viana [2006] argumentou que não existia nenhuma classificação formal para métodos sem malha, entretanto alguns autores consideram que somente métodos que utilizam a

técnica de aproximação que obedece ao Delta de Kronecker (vide Seção 2.1.3) são ditos como verdadeiros métodos sem malha.

Em um passado mais atual, Liu [2010] frisou que é necessário ter certa flexibilidade para definir um método *meshfree*. Assim, é permitido o uso de malhas contanto que: a malha seja gerada automaticamente; operações numéricas (integração, interpolação, entre outras) vão além da concepção do "elemento"; e a solução não pode ser muito dependente da qualidade da malha. Ainda segundo o próprio Liu, essa definição mais flexível reconhece uma realidade sobre os métodos sem malha: (1) muitos desses métodos utilizam algum tipo de malha mesmo que de uma maneira mais "livre"; (2) a mais importante motivação para desenvolver um método sem malha foi reduzir a dependência do uso de malhas de boa qualidade, que são difíceis de criar e demandam grande esforço computacional, quando aplicadas a geometrias complexas; e (3) se uma malha pode ser criada automaticamente, e ajuda, de alguma maneira, a obter resultados mais precisos e confiáveis, não existe alguma razão para não utilizá-las. Dessa maneira, esta dissertação considera, também, certa flexibilidade para classificar um método sem malha, seguindo, portanto, a proposta expressa por Liu [2010].

Em posse do conceito geral de um método *meshfree*, pode-se, então, destacar as principais propriedades que caracterizam essa ferramenta utilizada para resolver problemas de valor de contorno. Segundo Liu [2010], existem duas categorias para tais métodos: os de aproximação direta e os de aproximação indireta. A primeira categoria, também conhecida como técnica de forma forte, discretiza a equação diferencial parcial de maneira direta, enquanto o outro método estabelece, primeiramente, um sistema de equações alternativo baseado na forma fraca da EDP para depois resolve-la. Esse sistema é governado pelo mesmo fenômeno físico e é, usualmente, apresentado sob a forma integral.

De acordo com Liu [2010] é possível levantar pelo menos três aspectos comuns entre os mesmos, são esses:

Distribuição de pontos e determinação dos domínios: Todos os métodos estabelecem limites no domínio do problema de valor de contorno e, posteriormente, distribuem pontos em toda geometria estabelecida (inclusive nos contornos).

Técnicas de aproximação: Para cada nó distribuído no domínio é estabelecida uma função de

forma. Geralmente, essas funções advém de três principais técnicas de interpolação: por representação integral, diferencial ou séries.

Técnicas de discretização: Quando o método é de aproximação direta, discretiza-se a forma forte do problema diretamente. Quanto da utilização da aproximação indireta, é necessário o uso de ferramentas numéricas, uma para montar a forma fraca do problema e outra para discretizá-la.

Considerando ainda a teoria presente em Liu [2010], pode-se dizer que um método sem malha genérico segue as seguintes etapas básicas: primeiramente é feita a representação do domínio e uma primeira discretização, graças aos pontos (usualmente chamados de nós) distribuídos ao longo da geometria do PVC. Em seguida, é utilizado um método de aproximação e definida a função de forma geral para cada nó do domínio. Nessa função, são determinados também, os domínios de influência (ou suporte) de cada nó. Logo após, mediante a discretização das formas fraca ou forte, é formado o sistema de equações a ser determinado em prol da resolução final do problema de valor de contorno. Comenta-se, ainda, que a maioria dos métodos aqui apresentados necessitam de uma técnica numérica de integração, sendo que, a mais utilizada, é a quadratura gaussiana.

2.1.2 Problema de Valor de Contorno Generalizado

Esta subseção destina-se a apresentar um PVC genérico para, então, auxiliar na exibição dos métodos sem malha presentes nesse trabalho.

Considere um problema de valor de contorno qualquer, 2D, conforme ilustrado na Figura 2.1. A formulação geral para um PVC genérico pode ser representada por:

$$D^{\iota_1}[V] = f, \qquad \texttt{em} \quad \Omega \tag{2.1}$$

$$D^{\iota_2}[V] = g, \qquad \texttt{em} \quad \Gamma_n \tag{2.2}$$

$$V - V_p = 0, \qquad \texttt{em} \quad \Gamma_e \tag{2.3}$$

Sendo: D^{ι_1} e D^{ι_2} operações derivada de ordens ι_1 e ι_2, respectivamente; V uma função contínua definida; f uma fonte de excitação, ambos no domínio Ω; g uma condição de contorno natural sobre a fronteira Γ_n e V_p o valor de V para os pontos sobre a fronteira Γ_e (condição de contorno essencial).

Pode-se dizer que a construção do modelo matemático que define o PVC está fundamentada em

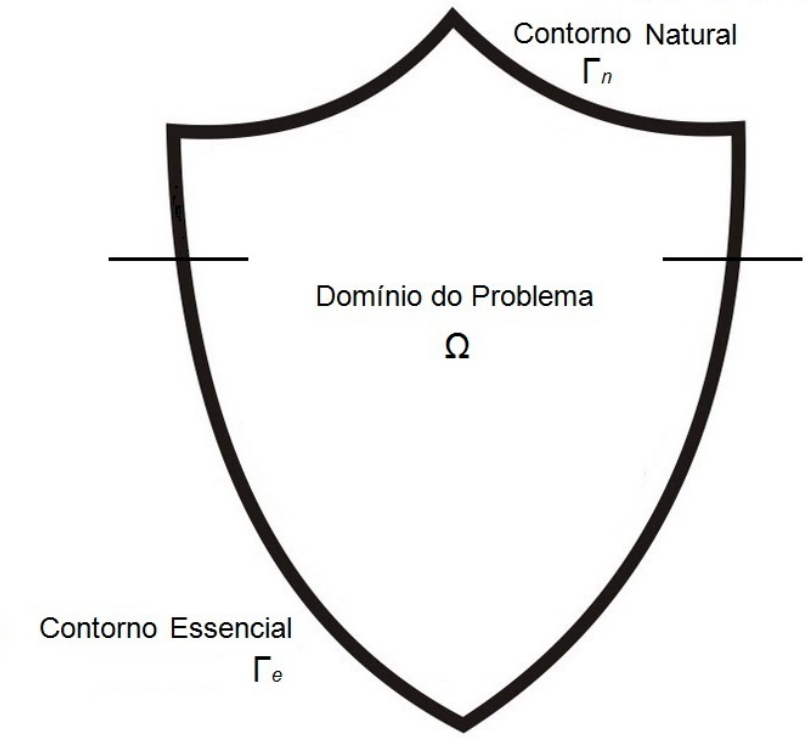

Figura 2.1: *Domínio e Condições de Contorno de um PVC generalizado*

duas partes principais: primeiramente, determina-se um modelo que represente a geometria original, estabelecendo o domínio do problema (Ω) limitado por uma fronteira ($\Gamma = \Gamma_e + \Gamma_n$). Em seguida, determina-se um conjunto de equações matemáticas válidas no domínio e nos contornos. Essas equações são formadas pela equação diferencial que governa o problema, equação (2.1), e as condições de contorno impostas nas fronteiras - equações (2.2), condição de contorno natural, e (2.3), condição de contorno essencial [Boyce e DiPrima , 2007].

2.1.3 Conceitos e Notações Preliminares

Nesta subseção discorre-se sobre algumas características e nomenclaturas importantes para apresentação de cada método numérico específico, tem-se assim:

Equações de Poisson e Laplace

Uma das ferramentas fundamentais para a utilização de um método sem malha é a técnica de aproximação. Conforme explicitado na seção 2.1.1 a aproximação pode ser direta, ou seja, aplicada diretamente na forma forte da equação diferencial parcial, ou indireta na qual obtém-se uma forma fraca da EDP que rege o problema em questão [Liu , 2010].

Nesse trabalho, até então, nenhuma forma forte em si foi explicitamente apresentada, uma vez que o EDP observado na seção 2.1.2 - equações (2.1) a (2.3) - é uma forma absolutamente generalizada. Dessa maneira, tendo em vista a necessidade de se apresentar a formulação das formas forte e fraca, optou-se por utilizar nesta subseção a equação de Poisson, uma das mais utilizadas em diversas áreas do conhecimento. Uma EDP que apresente a característica dessa equação pode representar não só um problema eletrostático como também problemas de astronomia, fluidos e condução de calor.

É comum, ainda, atribuir a essa equação condições que se apresentam naturalmente no problema. Esses estados, conhecidos como condições de contorno ou de fronteira são um conjunto de restrições inerentes ao domínio que, quando utilizadas junto a equação, formam um PVC. As condições mais conhecidas são as de Dirichlet, representando a condição essencial, e de Neumann, retratando a condição natural.

Considerando a geometria e as expressões correspondentes à Figura 2.1, uma equação de Poisson presente em tal domínio pode ser descrita como:

$$\nabla^2 V = f \Rightarrow \nabla \cdot (\nabla V) = f \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = f \tag{2.4}$$

Sujeito às condições de contorno de Dirichlet e Neumann, respectivamente:

$$V(x, y) = V_0 \qquad \forall x, y \in \Gamma_e \tag{2.5}$$

e

$$(-\epsilon \nabla V) \cdot \mathbf{n} = D_0 \qquad \forall x, y \in \Gamma_n \tag{2.6}$$

sendo: n um vetor normal a superfície Γ_n; ϵ constante que representa uma característica do meio; D_0 e V_0 condições de contorno

Pode-se, ainda, considerar uma resposta natural do sistema, ou seja, desconsiderar qualquer fonte externa. Para tanto tem-se que $f = 0$, formando, assim, a equação de Laplace (2.7).

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = 0 \tag{2.7}$$

Espaços e normas de Lesbegue e Hilbert

Sabe-se que o método numérico para a resolução de um PVC consiste na procura de uma função que descreva, aproximadamente, o comportamento de uma outra função desconhecida em um domínio. Observa-se que essa busca pode conduzir a funções que satisfaçam o problema parcialmente e, muitas vezes, não satisfatoriamente. Sendo assim, é importante procurar essa função aproximada em espaços que tenham características importantes para o bom funcionamento do método como estabilidade e convergência como, por exemplo, os espaços de Lesbegue e Hilbert [Liu , 2010].

Considere duas funções distintas, v e w. Segundo Liu [2010], o espaço de Lesbegue - denotado por $\mathbb{L}^p(\Omega)$, $p \geq 1$ - é definido por:

$$\mathbb{L}^p(\Omega) = \left\{ v | \int_\Omega |v|^p d\Omega < \infty \right\} \tag{2.8}$$

Fazendo $p = 2$, tem-se que:

$$\mathbb{L}^2(\Omega) = \left\{ v | \int_\Omega |v|^2 d\Omega < \infty \right\} \tag{2.9}$$

O espaço $\mathbb{L}^2(\Omega)$ implica, por definição, que qualquer função v pertencente a ele é de quadrado integrável (integral é fechada) em Ω [Liu , 2010]. Essencialmente, isso significa que a função pode até ser descontínua, mas que a mesma deve ser limitada no sentido integral conforme demonstrado na equação (2.9): pelo menos um trecho definido deve ser contínuo sobre o domínio do problema [Liu , 2010]. É importante, também, conhecer a norma da função v em $\mathbb{L}^2(\Omega)$, definida pelo produto interno:

$$(w, v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \int_\Omega wv d\Omega \quad \Rightarrow \quad \|v\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \underbrace{\int_\Omega v^2 d\Omega}_{(v,v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}} \tag{2.10}$$

Percebe-se que a característica de um produto interno da equação (2.9) permite que $\mathbb{L}^2(\Omega)$ possa ser classificado como um espaço de Hilbert. Salienta-se que esse espaço, nomeado em homenagem

a David Hilbert, é uma generalização do espaço Euclidiano, no qual não precisa estar restrito a um número finito de dimensões. A importância do espaço de Hilbert é garantir importantes propriedades a função que a ele pertence (*i.e.* os axiomas que determinam um produto interno), além de assegurar importantes notações como ângulo e distância e obedecer uma relação de completude[1], certificando, assim, que determinados limites existam quando esperado [Liu , 2010].

Um espaço de Hilbert, segundo Liu [2010], pode ser representado por:

$$\mathbb{H}^m(\Omega) = v|D^\alpha v \in \mathbb{L}^2(\Omega), \forall|\alpha| \leq m \tag{2.11}$$

A equação (2.11) representa um espaço que hospeda todas as funções nas quais as derivadas de ordem até m são de quadrado integrável[2]. Nesse sentido, pode-se definir o produto interno - equação (2.12) - e a norma completa - equação (2.13) - para $\mathbb{H}^m(\Omega)$ [Liu , 2010], tal que:

$$(w, v) = \sum_{\alpha \leq M} \int_\Omega (D^\alpha v)(D^\alpha w) d\Omega \tag{2.12}$$

e

$$\|v\|_{\mathbb{H}^m(\Omega)} = \left(\sum_{\alpha \leq M} \int_\Omega (|D^\alpha v|^2 + v^2) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.13}$$

Analisando a natureza de uma EDP de primeira ordem, observa-se que a função a ser encontrada, assim como a sua derivada primeira, devem ser de quadrado integrável. Sendo assim, fazendo $m = 1$, tem-se o seguinte espaço de Hilbert:

$$\mathbb{H}^1(\Omega) = v|v \in \mathbb{L}^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in \mathbb{L}^2(\Omega), i = 1, \cdots, d \tag{2.14}$$

sendo: x variável da função v

Ainda para referências futuras é importante demonstrar as funções de $\mathbb{H}^1(\Omega)$ que satisfaçam as condições essenciais de contorno - $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$ equação (2.15 - e um subespaço discreto de $\mathbb{H}^1(\Omega)$ - equação (2.11) - criado mediante técnicas de interpolação que garantem a compatibilidade (vide seção 2.1.3), sendo:

[1]Completude significa que uma aproximação de consistência C^k deve ser completamente consistente para todas as ordem abaixo da k-ésima, ou seja, de 0 até $k - 1$

[2]Para que $f(x)$ seja uma função quadrado integrável, então $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$.

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) = \{v \in \mathbb{H}^1(\Omega) | v = 0 \ \text{ em } \ \Gamma_e\} \tag{2.15}$$

e

$$\mathbb{H}_h^1(\Omega) = v \in \mathbb{H}^1(\Omega) | v = \phi^H(x)\mathbf{d}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^{N_m} \tag{2.16}$$

sendo $\phi^h(x) = [\phi_1^h(x)\phi_2^h(x)\cdots\phi_{N_m}^h(x)]$ a matriz com todas as funções de formas nodais; $\mathbf{d} = \{v_1 v_2 \cdots v_{N_m}\}$ o vetor com todos os valores nodais da função em questão e $N_m \in \mathbb{N}^*$

Funções com suporte compacto

A utilização de funções de forma, peso ou teste são fundamentais para a construção de um método sem malha. Apesar de possuírem propriedades distintas, essas funções têm características em comum como possuir valores nulos fora de seu suporte. Considerando o método *Element Free Galerkin*, por exemplo, tal característica é importante para que o sistema de equações lineares final seja esparso, o que aumenta a eficiência computacional [Liu , 2010].

Pode-se dizer que o suporte de uma função é o menor subconjunto fechado do domínio no qual sua imagem não é nula. Esse subconjunto pode, ainda, ser denominado como de suporte compacto, caso seja limitado [Viana , 1998]. Nos métodos sem malha, em geral, o suporte compacto de uma função é proporcional à distância entre dois pontos distintos: a e x.

Considerando um ponto $a \in \Omega$ como ponto de origem, e x variando de x_1 até x_I $(I = 1, 2, 3, \cdots, N)$ pode-se verificar a seguinte função de suporte compacto (denominada função janela nos métodos sem malha):

$$\widehat{W_I} = \begin{cases} W(a - x_I) \neq 0 & \text{se} \quad 0 \leq \frac{\|a - x_I\|}{r} \leq 1 \\ W(a - x_I) = 0 & \text{se} \quad \frac{\|a - x_I\|}{r} > 1 \end{cases} \quad \forall x_I \in \Omega, \quad I = 1, 2, 3, \cdots, N \tag{2.17}$$

sendo: r o tamanho (ou raio) de suporte; N o número de nós a serem observados

Segundo Viana [1998], observa-se que a função janela tem duas propriedades distintas e importantes:

Propriedade de translação: verifica-se que o numerador $\|a - x_I\|$ atribui à função janela uma característica de poder se deslocar por todo o domínio. Por exemplo, conforme a Figura 2.2, pode-se transladar a função sobre os pontos $a = -2$; $a = 0$ e $a = 2$. Essa propriedade é extremamente importante, pois o movimento de translação é um dos parâmetros essenciais para que o método dispense o uso de malhas.

Propriedade de dilatação: nota-se agora, mediante a análise do denominador, que o raio de suporte r, quando modificado, afeta diretamente o tamanho do suporte da função, assim sendo, essa característica lhe proporciona a denominação de raio (ou distância) de suporte. Observa-se, na Figura 2.3, que a dilatação é utilizada como parâmetro de refinamento, portanto, deve-se atentar para a escolha adequada de r.

Destaca-se que o tamanho do suporte da função em um ponto é idêntico ao domínio de influência desse mesmo ponto [Viana , 1998]. Sendo assim, a escolha adequada de uma função janela implicará diretamente na eficácia da solução desejada. Percebe-se que a variação das propriedades de $\widehat{W}$ influenciam diretamente no domínio de influência da função de forma, ou seja, definem de que maneira pontos e nós irão interagir entre si. Com mudanças na propriedade de dilatação, pode-se modificar a geometria do domínio de influência, sendo que, os mais comuns são os circulares e os retangulares. Não obstante a importância da translação, nota-se que a propriedade de dilatação é ainda mais suscetível a mudanças, e confere, assim, grande sensibilidade à função janela, pois r pode assumir qualquer número real positivo. Portando, a escolha do raio de suporte, assim como a álgebra da função em geral, acarretam em diferentes domínios de influência da função de forma. Salienta-se, ainda, que o raio de suporte r é objeto de estudo nessa dissertação, uma vez que a sua correta seleção interfere consideravelmente na solução aproximada.

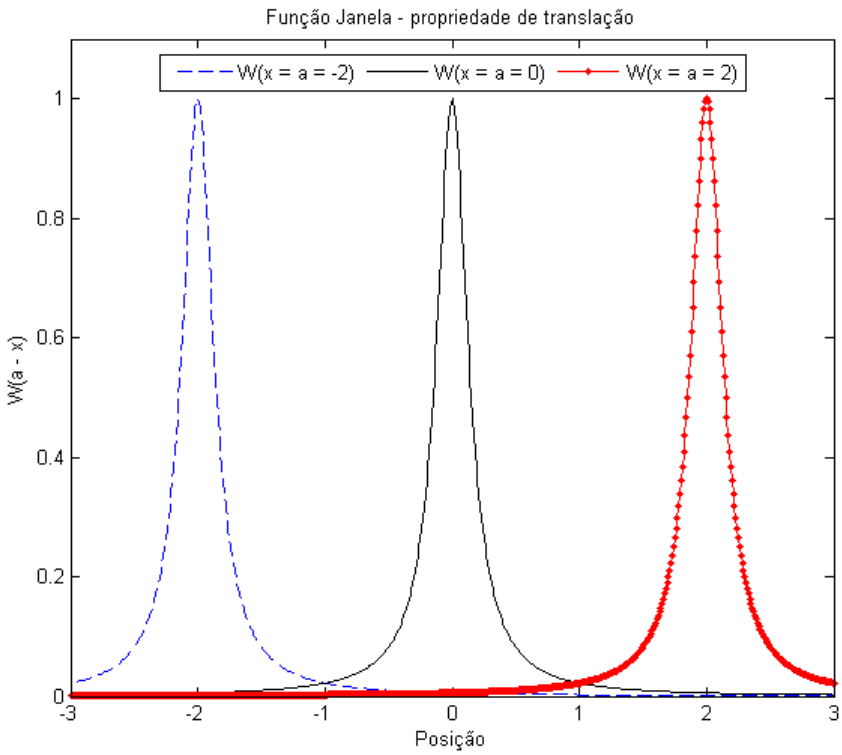

Figura 2.2: *Representação da propriedade de translação da Função Janela*

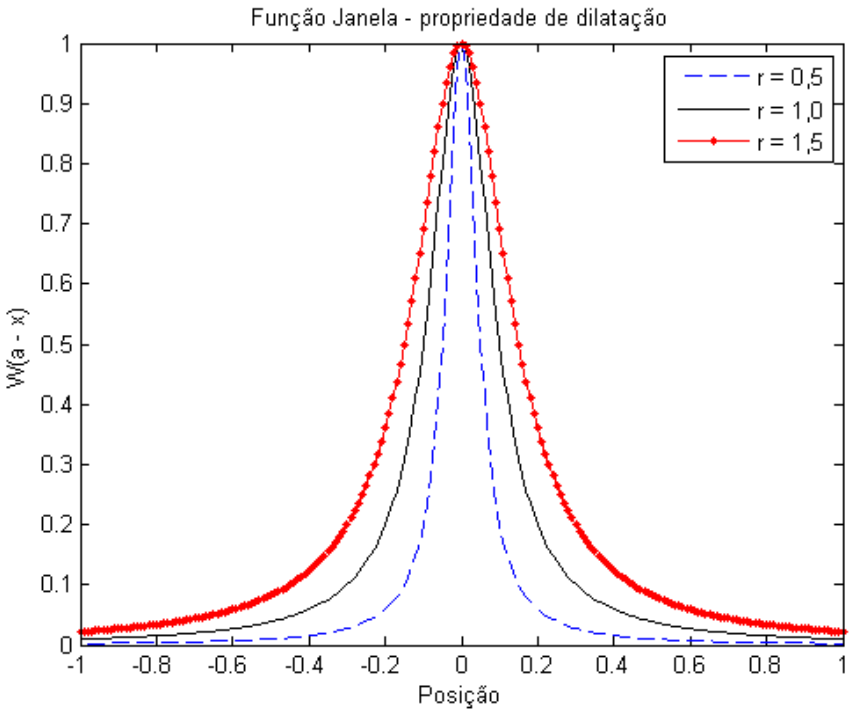

Figura 2.3: *Representação da propriedade de dilatação da Função Janela*

Delta de Dirac

A função contínua delta de Dirac $\delta(x)$, quando discretizada, carrega duas propriedades interessantes para o estudo de um método *meshfree*: a propriedade do delta de Kronecker δ_{ij}, que é importante para o tratamento das condições de contorno, e a propriedade da partição da unidade, que auxilia na obtenção da consistência do método [Li e Liu , 2007]. Amplamente utilizada desde a época de Joseph Fourier, no começo do século XIX, contudo introduzida formalmente por Paul Dirac apenas no final da década de vinte do século passado, a função $\delta(x)$ é aplicada em diversas áreas do conhecimento. Uma comum expressão para o delta de Dirac é:

$$\delta_\kappa(x) = \lim_{\kappa \to 0} \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \leq \frac{\kappa}{2} \\ \frac{1}{\kappa} & \text{se} \quad -\frac{\kappa}{2} \leq x \leq \frac{\kappa}{2} \\ 0 & \text{se} \quad x \geq \frac{\kappa}{2} \end{cases} \tag{2.18}$$

Segundo Li e Liu [2007], verifica-se, então, as seguintes propriedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = \int_{-\frac{\kappa}{2}}^{\frac{\kappa}{2}} \frac{1}{\kappa} dx = 1 \tag{2.19}$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\zeta - x)\Phi(\zeta)d\zeta = \Phi(x) \tag{2.20}$$

Sendo que a equação (2.19) é o análogo contínuo do delta de Kronecker (δ_{ij}), uma vez que:

$$\delta_{ij} = \delta_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases} \tag{2.21}$$

E a equação (2.20) é o análogo contínuo da partição da unidade, conforme pode ser verificado na equação (2.36).

Consistência e Compatibilidade

É importante, também, destacar alguns conceitos frequentemente utilizados nessa dissertação. São eles a consistência e a compatibilidade, importantes para a correta construção da forma fraca. Tem-se, assim:

Consistência Na lógica de conjuntos, a propriedade da consistência de uma função indica que essa não possui nenhuma contradição[3]. As funções de formas - Φ - utilizadas nos métodos sem malha em geral devem cumprir uma certa ordem de convergência. Segundo Liu [2010], o grau de consistência dessas funções é comumente medido pela ordem da função polinomial que a aproximação utilizada por Φ é capaz de, com precisão, reproduzir localmente (*i.e.* em todos os elementos ou células que formam todo o domínio). A nomenclatura aqui utilizada é: se a aproximação é capaz de produzir exatamente uma função constante, então ela tem ordem zero de consistência, representada por C^0. No geral, portanto, se a aproximação pode produzir um polinômio com o grau até a *k-ésima* ordem precisamente, então ela tem uma consistência C^k.

Compatibilidade A compatibilidade de uma função está associada à continuidade da mesma em todo o domínio do problema em questão. Qualquer modelagem numérica que usa aproximação local está sujeita à incompatibilidade, sendo que, para métodos sem malha, ela pode ocorrer em locais onde o domínio de influência local atualiza os nós do suporte [Liu , 2010].

[3]Incompatibilidade entre duas ou mais proposições (*e.g* Função multivalorada)

2.2 Principais Métodos sem Malha

Da necessidade de um método alternativo aos métodos com malha (*e.g.* FEM ou FDM) para o cálculo de PVC's nasceu o primeiro método sem malha conhecido na literatura: o método das partículas Hidrodinâmicas Suavizadas (*Smoothed Particle Hydrodynamics - SPH*), desenvolvido não só pelos pesquisadores Gingold e Monaghan [1977], como também pelo astrofísico Lucy [1977].

Apesar dos bons resultados apresentados pelo SPH, apenas depois de pouco mais de uma década, no começo dos anos 90, é que os métodos *meshless* começaram a ganhar destaque na comunidade acadêmica, com o Método dos Elementos Difusos (*Diffuse Element Method - DiEM*), proposto, a priori, por Nayroles *et al.* [1992]. Ainda na última década do século XX, foram apresentadas outras importantes investigações acerca dos métodos *meshfree*, destacando-se: o Método Galerkin Sem Elemento (*Element Free Galerkin - EFG*), [Belytschko *et al.* , 1994]; o Método de partículas Reproduzidas de Kernel (*Reproducing Kernel Particle Method - RKPM*) Liu *et al.* [1995]; o Método de nuvens Hp (*Hp-Cloud - HpC*) Duarte e Oden [1996]; o Método do Ponto Finito (*Finite Point - FP*) [Oñate *et al.* , 1996]; o Método de Partição da Unidade (*Partition of Unity Method - PUM* [Babuska , 1996]; e o Método Local de Petrov-Galerkin Sem Malha (*Meshless Local Petrov-Galerkin - MLPG*) [Alturi e Zhu , 1998]. Acredita-se que o interesse pelos métodos sem malha esteja intrinsecamente ligado ao avanço tecnológico dos computadores, isso justifica o crescente número de investigações sobre os mesmos nas duas últimas décadas [Coppoli , 2010].

Ainda no começo do século XXI os métodos *meshless* continuaram a inspirar diversos autores a investigar as suas principais características. Cita-se, por exemplo, as obras [Liu , 2003]; [Fasshauer , 2007] e [Liu e Gu , 2005]. A pesquisa se intensificou, dando espaço a novas técnicas como o método da interpolação pontual (*Point Interpolate Method - PIM*) [Liu e Gu , 2001], o método do gradiente suavizado (*Gradient Smoothing Method*) [Xu e Liu , 2008] e, ainda, métodos híbridos que mesclam técnicas diferentes com e sem malha *e.g.* [Ho *et al.* , 2005]. A evolução cronológica das técnicas sem malha pode ser observada na Figura 2.4.

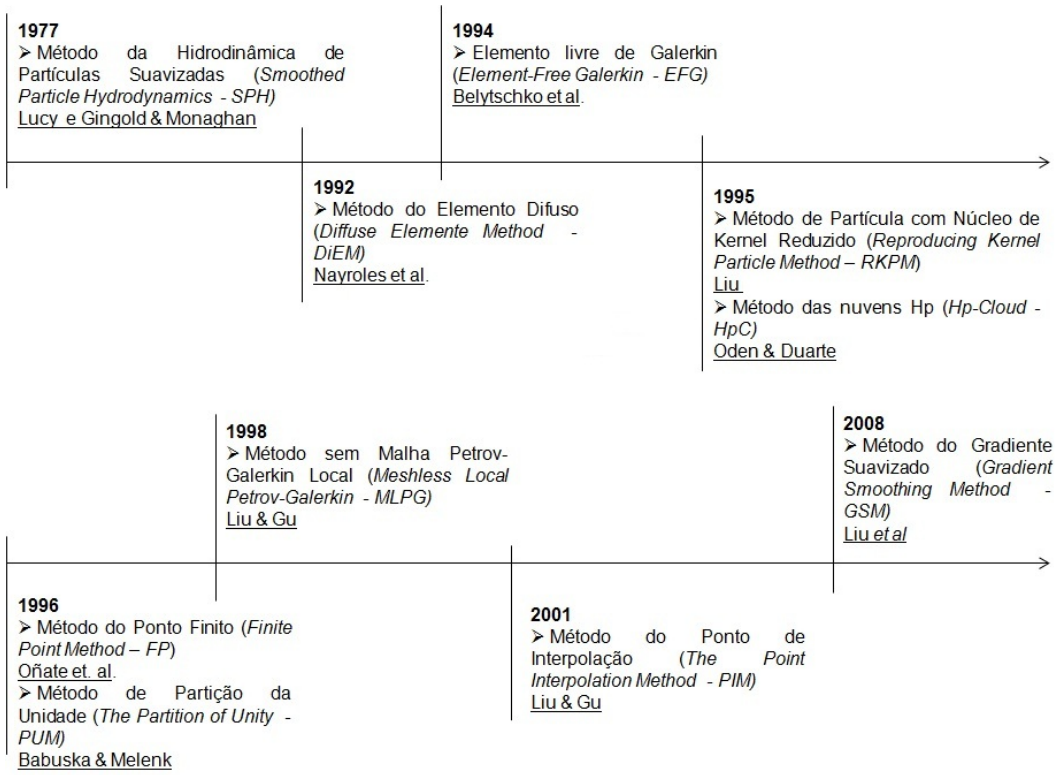

Figura 2.4: *Linha do tempo dos principais métodos meshless*

No sentido de ilustrar a evolução dos métodos sem malhas, desde a primeira idealização até o presente, a seguir são apresentados, de maneira resumida, alguns dos métodos *meshfree* mais importantes disponíveis na literatura. Reitera-se que todas as técnicas a seguir explicitadas apresentam ampla complexidade, portando, discorrê-las de forma a explicá-las completamente necessitaria de uma extensa revisão bibliográfica, que foge do objetivo desta dissertação. Optou-se, portanto, por apresentar apenas a essência de cada técnica, ou seja, breve histórico, descrição geral do método, formulação matemática básica e as características capitais (*e.g.* pontos fortes e fracos e principais aplicações). Salienta-se, por fim, que o método utilizado neste trabalho, o *Element Free Galerkin*, possui um Capítulo exclusivo para sua apresentação, e deste modo as considerações e ponderações sobre o mesmo são mais completas e trabalhadas em seu capítulo específico - Capítulo 3.

2.2.1 *Smooth Particle Hydrodynamics - SPH*

Pensado para solucionar problemas de astrofísica tridimensionais, o método da hidrodinâmica de partículas suavizadas é conhecido como o pioneiro dos métodos sem malha. Segundo Viana [2006], a idéia fundamental dessa ferramenta é substituir um domínio (comumente um fluido) por uma série de partículas móveis e transformar a equação diferencial parcial geral em aproximações integrais de Kernel.

Na implementação do SPH representa-se o estado de um sistema mediante um número arbitrário de partículas distribuídas ao longo de um domínio, enquanto a função é calculada mediante as interações entre as mesmas. Essas partículas se movem livremente no espaço, carregam todas as informações computacionais necessárias e, assim, podem ser consideradas como pontos de interpolação que formam a estrutura computacional para a discretização no domínio utilizadas em prol de resolver a equação desejada [Liu , 2010]. Assim, a formulação básica desse método pode ser descrita como:

Considere função $V(x)$, observada na equação de Poisson (2.4), é possível representá-la integralmente por:

$$V(x) = \int_{-\infty}^{\infty} V(\xi)\delta(x-\xi)d\xi \tag{2.22}$$

sendo: x e ξ as posições de diferentes pontos; $\delta(x)$ a função delta de Dirac e $V(x)$ a função desejada.

Segundo Coppoli [2010], no método em questão $V(\mathbf{x})$ pode ser aproximada pela seguinte forma integral:

$$V^h(x) = \int_{\Omega} V(\xi)\widehat{W}(x-\xi, r)d\xi \tag{2.23}$$

sendo: $V^h(x)$ a função $V(x)$ aproximada; $(\widehat{W})(x-\xi, r)$ função peso (ou suavização) e r o comprimento de suavização (análogo ao raio de suporte para as funções janela).

Representando a equação 2.23 na forma discreta, tem-se:

$$V^h(x) = \sum_{I} \widehat{W}(x-x_I)V_I\mathbb{V} \tag{2.24}$$

sendo: $\mathbb{V}$ o volume da partícula I e V_I o valor discreto de $V(x)$ no ponto I.

Como um método da natureza de Lagrange, e com a utilização de partículas suavizadas para interpolar pontos e representar materiais em regiões discretas, o SPH pode lidar com interfaces de materiais, superfícies livres e contornos que se movem [Liu , 2010]. Entretanto, existem também pontos negativos consideráveis nesse método, como não possuir consistência de ordem C_1 em regiões próximas às fronteiras e ter uma função de forma que não satisfaz o delta de Kronecker [Coppoli , 2010].

Ainda sim, o método da hidrodinâmica de partículas suavizadas é amplamente utilizado na área acadêmica, tanto como base para outros métodos (*e.g.* RKPM) quanto para resolver PVC's associados às diversas disciplinas. Por exemplo, a técnica SPH é utilizada para a resolução de problemas de impacto em superfície livre, eletromagnetismo, fenômenos de explosão e condução de calor [Oger *et al.* , 2005], [Mendes , 2010], [Vignjevic , 2004] e [Liu e Liu , 2008], respectivamente.

2.2.2 *Diffuse Element Method - DiEM*

Segundo Liu [2010], pouco mais de uma década depois do surgimento da primeira ferramenta *meshless*, um outro método foi desenvolvido com características distintas: baseado no técnica de Galerkin [Rezende , 2005], o método dos elementos difusos foi o primeiro método a construir suas funções de forma utilizando o método dos mínimos quadrados móveis (*moving least square method - MLS*) [Lancaster e Salkauskas , 1981]. A principal característica dessa técnica é substituir a interpolação utilizada no FEM pela a interpolação oriunda dos métodos dos mínimos quadrados móveis [Viana , 2006].

De maneira geral, o DiEM utiliza o método de Galerkin (*Galerkin Method - GM)*, aplicado a forma fraca da EDP, para desenvolver um sistema de equações discretizadas cuja resposta é uma aproximação da solução original.

Considerando o PVC genérico da equação (2.1) e assumindo que $f = 0$ e $n = 2$, a formulação básica do DiEM pode ser obtida:

$$D^2[V] = 0 \tag{2.25}$$

Assim, se V for solução da Eq. (2.25), pode-se assumir uma função ortogonal $\Phi(x) \in L_2(\Omega)$ tal que:

$$\int_\Omega D^2[V(x)]\Phi(x)dx = 0 \tag{2.26}$$

Definindo uma solução $V^h \equiv V$, pode-se considerar que:

$$V^h = \sum_{j=1}^{N} a_j \phi_j \tag{2.27}$$

sendo: ϕ_j um sistema de funções definidas em Ω, linearmente independentes, que satisfazem as condições de contorno e a_j coeficientes a serem encontrados em proal de determinar o valor de V^h.

Substituindo a equação(2.27) na equação(2.26):

$$\int_{\Omega} D^2 \left[\sum_{j=1}^{N} a_j \phi_j \right] \Phi(x) dx = 0 \tag{2.28}$$

sendo: $\Phi(x)$ a função de forma do DiEM.

Pelo MLS, segundo Li e Liu [2007], pode-se representar $\Phi(x)$ e sua derivada por:

$$\Phi^T(x) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x}) \tag{2.29}$$

$$\frac{\partial \Phi^T}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{P}^T(\mathbf{x})}{\partial x_i}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{P}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\partial x_i}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x})\right) \tag{2.30}$$

Entretanto, para o DiEM, considera-se a seguinte aproximação para a derivada:

$$\frac{\partial \Phi^T}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{P}^T(\mathbf{x})}{\partial x_i}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x}) \tag{2.31}$$

Cita-se que as principais características do DiEM são: aumento do grau de suavidade da aproximação realizada; as derivadas das funções de forma não são completas; necessidade de outros métodos para satisfazer as condições de contorno; a aproximação é baseada em uma distribuição irregular de nós; e a suavidade da aproximação depende diretamente do grau de suavidade dos pesos utilizados [Ghorbani , 2010].

Por fim, comenta-se que a partir do nascimento do DiEM os métodos *meshless* ganharam mais destaque na comunidade internacional, assim, consequentemente, houveram mais investigações acerca desse e de outros métodos sem malha. Um exemplo da importância do DiEM é que a partir de sua generalização, foi possível criar o método *Element Free Galerkin*, umas das técnicas sem malha mais utilizadas [Liu , 2010]. Além disso, acredita-se ainda, que o DiEM foi a primeira ferramenta aplicada a problemas de eletromagnetismo [Coppoli , 2010].

2.2.3 *Reproducing Kernel Particle Method - RKPM*

Sabe-se que o método da hidrodinâmica de partículas suavizadas apresenta falhas de consistência, uma vez que a interpolação utilizada não forma uma partição da unidade [Li e Liu , 2007]. No intuito, então, de corrigir essa deficiência uma outra técnica foi proposta em meados dos anos noventa: o método de partículas reproduzidas de kernel [Liu *et al.* , 1995]. Verificou-se que a melhor opção para corrigir o SPH era aperfeiçoar o seu núcleo de Kernel. Assim foi projetada uma função corretiva que, aplicada à função de suavização - equação (2.23) - acarreta em novas características que levariam à um método não só mais confiável e preciso [Aluru , 1999] como também consistente e completo (a respeito de sua completude) [Li e Liu , 2007].

Para apresentar de forma clara a falta de consistência do SPH, considera-se a seguinte exemplo unidimensional (proveniente da equação (2.23)):

$$\int_{\Omega} (\widehat{W})(x-\xi, r)dx = 1 \tag{2.32}$$

$$\int_{\Omega} x^k (\widehat{W})(x-\xi, r)dx = 0, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.33}$$

As equações (2.32) e (2.33) representam duas propriedade da função peso, uma vez que essa é oriunda da função delta de Dirac. Entretanto, essas condições só se aplicam para formas contínuas, pois o erro de truncamento presente na equação (2.32) - forma discreta da equação (2.33) - pode acarretar na invalidez dessas propriedades [Li e Liu , 2007].

Sendo assim, a função corretiva é, então, aplicada à equação geral do SPH, originando:

$$V^h(x) = \int_{\Omega} V(\xi) C(x-\xi, r)(\widehat{W})(x-\xi)d\xi \tag{2.34}$$

sendo: $C(x-\xi, r)$ a função corretiva.

As similaridades entre os métodos RKPM e SPH permanecem em suas características, consequentemente, as aplicações de ambos são análogas. As diferenças principais entre esses métodos são relativas à função de correção que garante qualquer grau consistência ao RKPM, assim como sua completude. Contudo a função de peso modificada pode não ser positiva e também não cair

monotonicamente [Viana , 2006]. Comenta-se, ainda, que a utilização do método do núcleo reproduzido de kernel requer um esforço computacional bem maior em detrimento ao uso do método da hidrodinâmica de partículas suavizadas [Li e Liu , 2007].

2.2.4 *The Partition of Unity Method - PU*

Além do MLS, existem outras técnicas para construir as funções de forma, *e.g.* os métodos de partição da unidade [Liu , 2010]. Segundo Li e Liu [2007], esses métodos buscam fazer uma partição de unidade e multiplicá-la com outras bases independentes (o que pode ser considerado como mandatário para uns ou simplesmente desejável para outros) para resolver as equações diferenciais parciais específicas. Pode-se definir esse método como:

Considere $\Omega \subset \Re^d (d = 1, 2, 3)$ um domínio aberto limitado. Tem-se, ainda, que $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_I$ formam uma família de I conjuntos abertos em $\Re^d$ [Li e Liu , 2007]. Admite-se, ainda, que existem famílias de funções nas quais:

$$0 \leq \Phi_1 \leq 1, \qquad \forall x \in \Omega_I \tag{2.35}$$

Assim, o somatório pode ser descrito como:

$$\Phi_1(x) + \Phi_2(x) + \cdots + \Phi_{NP}(x) = 1 \qquad \forall x \in \Omega \tag{2.36}$$

A condição apresentada na equação (2.36) representa a partição da unidade. Outra propriedade distinta do PU é que os conjuntos de suportes $\{\Omega\}_I$ podem ser sobrepostos e eles não necessariamente formam uma subdivisão (malha) de Ω contanto que eles gerem uma cobertura para Ω.

Segundo Li e Liu [2007], se $\Phi_I(x)$ for proveniente de uma interpolação por elementos finitos, forma-se o chamado *partition of unity finite element method (PUFEM)*. Esse método oferece flexibilidade nos cálculos, especialmente quando se têm algum conhecimento prévio sobre o problema sob análise. Por fim, salienta-se que o PUFEM tem a habilidade de construir um espaço mais suave, o que é necessário para equações diferenciais de maiores graus [Melenk e Babuska , 1996].

2.2.5 *H-p Cloud Method - HpC*

Oriundo também da técnica de partição da unidade, o HpC foi idealizado na década de noventa por Duarte e Oden [1996]. Segundo Li e Liu [2007] O HpCM introduz o enriquecimento tipo p a

uma discretização sem malha, além de vincular uma sequência polinomial de Legendre juntamente com o método dos mínimos quadrados móveis.

A idéia básica em torno do HpC é a construção de bases hierárquicas utilizando uma partição da unidade $\mathcal{G}_N = \{\Phi_I^l(x)\}$. Essas classes de funções podem ser construídas com um custo computacional semelhante ao utilizado nas funções de forma do PUFEM e possuem a propriedade de poder garantir que $P_p \subset span\{\mathcal{F}_N^{l,p}\}$ - equação (2.38) - sendo $\mathcal{P}_p$ o espaço polinomial de grau menor ou igual a p [Li e Liu , 2007].

A formulação básica do método pode ser apresentada da seguinte maneira: considere $\mathcal{L}_p$ um conjunto de polinômios L_{ijk} em $\Re^3$, tal que:

$$L_{ijk} = L_i(x_i)L_j(x_j)L_k(x_k), \qquad 0 \leq i,j,k \leq p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_{ijk} = \sum_{I \in \wedge} L_{ijk}(X_I)\Phi_I^l(x) \tag{2.37}$$

sendo: L_i, L_j e L_k polinômios de legendre de graus i, j e k em $\Re$, respectivamente

Assim, tendo em vista a definição do método HpCM, deve-se adicionar, hierarquicamente, elementos bases apropriados na partição da unidade original, $\{\Phi_I^l(x)\}_{I \in \wedge}$ de forma que a base resultante reproduza um polinômio de grau $p > l$. Duarte e Oden [1996] sugerem o uso da seguinte função para reproduzir L_{ijk}:

$$\mathcal{F}_N^{l,p} = \Big(\{\Phi_I^l(x)\} \bigcup \{\Phi_I^l(x)L_{ijk}(x)\} : I \in \wedge; 0 \leq i,j,k \leq p; i \text{ ou } j \text{ ou } k > l; p : l\Big) \tag{2.38}$$

O método de nuvens H-p é uma técnica robusta principalmente quando lida com equações cuja solução apresenta um comportamento localizado, tais como problemas de camada limite (mecânica dos fluidos) [Liu , 2010]. Salienta-se, ainda, que a utilização da versão *h-p* acarreta em taxas exponenciais de convergência, além de apresentar uma boa regularidade na solução obtida. Por fim, segundo Duarte e Oden [1996], ressalta-se que é possível obter soluções aproximadas $C^2(\Omega)$ em PVC's de segunda ordem sem dificuldades e que ordens superiores de regularidade podem ser alcançadas sem acréscimo considerável de custo.

2.2.6 *Finite Point Method - FP*

Ainda nos anos noventa, outra técnica *meshless* foi proposta para a resolução de problemas de valor de fronteira, o *finite point method*. Conhecido por ser uma ferramenta puramente sem malha ([Viana , 2006]), essa técnica utiliza o tradicional MLS como aproximação das funções de forma, além de usar amostras da forma forte da EDP para obter um sistema discreto de equações cuja resposta é a solução aproximada [Oñate *et al.* , 2001]. Salienta-se que a possibilidade de se trabalhar diretamente com a forma forte da EDP advém do fato de que a função de forma utilizada no método é o próprio delta de Dirac [Li e Liu , 2007], sendo que essa técnica é denominada o método da colocação.

Matematicamente, o método pode ser descrido como: Considere a equação (2.27) que representa a aproximação da função desconhecida V. Assume-se, também, um problema governado pelas equações (2.1), (2.2) e (2.3). De acordo com o FP, o sistema de equações discretas é encontrado substituindo a aproximação presente na equação (2.27) nas equações (2.1) à (2.3), alocando a equação diferencial em cada ponto de análise do domínio, assim:

$$\left[D^n[V^h]\right]_p = 0, \qquad p = 1, 2, \ldots, N_r \tag{2.39}$$

$$\left[D^m[V^h]\right]_r = 0, \qquad r = 1, 2, \ldots, N_n \tag{2.40}$$

$$[V^h]_s - V_0 = 0, \qquad s = 1, 2, \ldots, N_e \tag{2.41}$$

Sendo: N_n e N_e o número de pontos pertencentes às fronteiras Γ_n e Γ_e, respectivamente; N_r o número de pontos no domínio Ω

O que leva a um sistema algébrico de equações:

$$\mathbf{K}\mathbf{V}^h = \mathbf{f} \tag{2.42}$$

Sendo: $\mathbf{K}$ a matriz de "rigidez"; $\mathbf{V}^h$ um vetor com parâmetros pontuais v_i^h e $\mathbf{f}$ um vetor de forças conhecidas agindo nos pontos

Diferente de outros métodos de colocação de pontos, o mérito do FP é a excelente estabilidade que pode ser alcançada. Graças ao grande suporte das funções de teste, uma simples equação de colocação sem malha envolve muito mais partículas que a usualmente utilizada no método das

diferenças finitas. Dessa forma, isso proporciona efeito de estabilização até o termo convectivo em simulações de problemas de mecânica dos fluidos em geral [Li e Liu , 2007].

2.2.7 *Meshless Local Petrov-Galerkin - MLPG*

Completando os métodos *meshless* de destaque do final do século XX, o método local de petrov-galerkin sem malha é uma técnica que apresenta a aproximação diferente para construir uma discretização *meshfree*. Essa ferramenta é conhecida por implementar a forma integral do método dos resíduos ponderados (*Weighted Residual Method - WRM*) combinada em um subdomínio de um nó, formando a chamada forma fraca local [Coppoli , 2010]. Nota-se, também, que o próprio nome do MLPG demonstra a principal característica desse método: a adição do nome *Petrov* ao nome *Galerkin* evidencia uma considerável mudança no método de galerkin clássico. Tal diferença se dá ao fato da função de base ser diferente da função de peso e mesmo que essas tenham a mesma expressão analítica, elas podem ter diferentes tamanhos de domínios de influência e, consequentemente, cobrirem um número diferente de partículas. Ou seja, essas funções são diferentes ainda que sejam provenientes do mesmo procedimento de aproximação, *e.g. MLS* [Li e Liu , 2007].

Considere o WRM aplicado ao GM e o PVC apresentado na Seção 2.1.2. Sabe-se, ainda, que o MLPG apresenta uma forma fraca local para a equação geral do problema, assume-se, então, Ω_I^{te} como o suporte da função de teste correspondente do iésimo nó e Ω_I^{fr} o dual para função de forma. Nesse sentido, pode-se desenvolver a equação (2.43):

$$\int_{\Omega} \left[\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) - f\right] w d\Omega = 0 \tag{2.43}$$

Considerando domínio local, chega-se a:

$$\int_{\Omega_I^{te}} \left[\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) - f\right] w d\Omega = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega_I^{te}} \left[\nabla \cdot (w_i \epsilon \nabla V)\right] d\Omega - \int_{\Omega_I^{te}} \left[\epsilon \nabla w_i \cdot \nabla V)\right] d\Omega = \int_{\Omega_I^{te}} \left[f\right] w_i d\Omega \tag{2.44}$$

Sendo: w a função peso (ou teste) proveniente da formulação da forma fraca

Pode-se, ainda, escrever a equação (2.44) com integrais nos contornos, mediante o uso do teorema da divergência. Assim:

$$\int_{\Gamma_I} w_i \epsilon \frac{\partial V}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Omega_I^{te}} \left[\epsilon \nabla w_i \cdot \nabla V)\right] d\Omega = \int_{\Omega_I^{te}} \left[f\right] w_i d\Omega \tag{2.45}$$

Sendo: n o vetor normal a superfície Γ e Γ_I a soma do contorno do domínio de influência da função de teste (Ω_I^{tr}) adicionado às intersecções dessa fronteira com os contornos naturais e essenciais do problema.

Salienta-se que existem diversas maneiras de se tentar implementar o método petrov-galerkin sem malha, principalmente no que tange à escolha de diferentes funções de teste. Usualmente, opta-se por escolher as funções: delta de *Dirac*; degrau; resíduo da equação diferencial representada em sua forma fraca; e alguma função no qual w_i seja nulo no contorno Ω_I^{te}.

Nota-se que uma das dificuldades encontradas no MLPG é a integração nos contornos gerados pela intersecção de domínios, uma vez que esses podem possuir uma geometria muito complexa [Coppoli , 2010]. Segundo Liu [2010], o MLPG se comporta bem tanto para problemas estáticos quanto para problemas dinâmicos, contudo, seu tempo de processamento não é tão eficiente quando comparado ao FEM, uma vez que as matrizes geradas são assimétricas e as funções de formas obtidas pelo MLS são mais complexas.

2.2.8 *Point Interpolation Method - PIM*

Criado como alternativa para o uso do método dos mínimos quadrados móveis, o PIM, basicamente, utiliza a interpolação polinomial para a construção das funções de forma [Viana , 2006]. O conceito fundamental do PIM é interpolar a função desejada utilizando valores nodais do domínio de influência de um ponto de interesse [Coppoli , 2010]. Dessa maneira, pode-se resolver problemas de valores de contorno diretamente.

Pode-se apresentar a formulação genérica do PIM da seguinte maneira:

$$\Phi^h(x, x_Q) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) a_i(x_Q) \tag{2.46}$$

Sendo: n o número de nós no domínio de suporte de um ponto x_Q; $\varphi_(x)$ as funções de base definidas no espaço de coordenadas cartesianas $x^T = [x, y, z]$ e $a_i(x_Q)$ o coeficiente para a função de base

A definição da função de base do PIM, acarreta em diferentes versões para o método. Segundo Coppoli [2010], as principais técnicas de interpolação pontual são:

1. PIM Polinomial

   Conforme observa-se pelo próprio nome do método, o PIM polinomial utiliza como sua função de base um polinômio. Fazendo então $\varphi_i(x) = p_i(x)$ obtém-se a seguinte equação na forma matricial:

   $$\Phi^h(x, x_Q) = \mathbf{p}^T(x)\mathbf{a}(X_Q) \tag{2.47}$$

   Essa técnica apresenta algumas falhas como a singularidade da matriz de interpolação e a não garantia de continuidade da função de aproximação [Viana , 2006]. Assim, foram desenvolvidas outras técnicas (descritas a seguir) no sentido de melhorar o PIM polinomial. Todavia, existem pontos positivos nessa ferramenta que devem ser destacados: a função de forma satisfaz o delta de Kronecker e possui suporte compacto; o processo pode ser automatizado com pouco aumento do esforço computacional e se a base polinomial for completa de grau n a função de base também terá tal grau de consistência.

2. PIM Radial

   O método em epígrafe utiliza a função de base radial [Coppoli , 2010]. Assim, a formulação do PIM Radial pode ser apresentada como:

   $$\Phi^h(x, x_Q) = \mathbf{R}^T(x)\mathbf{a}(X_Q) \tag{2.48}$$

   O PIM radial apresenta características parecidas com o PIM polinomial, entretanto, vale ressaltar duas diferenças pontuais entre esses: a matriz momento do PIM radial é simétrica e possui inversa; e a eficiência computacional desse é comparável com a do FEM [Coppoli , 2010].

3. PIM radial com reprodução polinomial

   A combinação dos dois métodos PIM apresentados até então gera a técnica de interpolação pontual com reprodução polinomial. Essa técnica foi proposta com o objetivo de atrelar as melhores características dos PIM's polinomial e radial criando, assim, uma ferramenta mais consistente [Coppoli , 2010]. Assim sendo, a função geral do método é dada por:

$$\Phi^h(x) = \mathbf{R}^T(x)\mathbf{a} + \mathbf{p}^T(x)\mathbf{b} \tag{2.49}$$

Sendo: b o vetor de coeficientes dessa base.

Segundo Liu [2010], a inclusão de termos polinomiais auxilia não só no aumento da precisão como também na diminuição da sensibilidade dos resultados frente as parâmetros das funções radiais.

4. PIM local - *local point interpolation method - LPIM*

   Uma das maneiras idealizadas para melhorar os métodos PIM's foi a utilização do MLPG como método para discretização sem malha. A utilização da forma fraca local eliminou o problema de compatibilidade apresentado pelos outros métodos, uma vez que cada sub-domínio refere-se a um único nó, de modo que a aproximação na função base é contínua em qualquer parte [Coppoli , 2010]. Vale ressaltar que qualquer PIM pode ser utilizado como função de forma do MLPG, caracterizando assim o LIAM. Contudo, estudos apresentados em [Liu , 2010], apontam que os melhores resultados estão na utilização do LIAM com funções de forma radiais com reprodução polinomial.

De uma maneira geral, os principiais pontos positivos nos métodos de interpolação pontual são a alta precisão no ajuste de curvas e o cumprimento do delta de Kronecker por parte das funções de forma, facilitando, assim, a imposição das condições de contorno [Coppoli , 2010]. Por fim, segundo [Viana , 2006], o método LIAM foi aplicado em problemas de mecânica, tanto sólida quanto dos fluidos - [Liu e Gu , 2001] e [Wu e Liu , 2003], respectivamente - obtendo resultados satisfatórios.

2.2.9 *Gradient Smoothing Method - GSM*

Uma das evidências que demonstram a contemporaneidade dos métodos sem malha é, certamente, a quantidade de técnicas *meshless* que ainda são desenvolvidas. Um exemplo desse fato é o *Gradient Smoothing Method*, criado no final da década passada. Basicamente, o GSM utiliza a técnica do gradiente somada a uma função que lhe atribui uma melhor suavidade.

No método do gradiente suavizado, toda parcela desconhecida da função desejável é armazenada nos nós e suas derivadas, em muitos lugares, são consistentemente e diretamente aproximadas com o uso do gradiente suavizado em determinados domínios (chamados de *gradient smoothing domains - GSD's*). Uma vez que as derivadas são aproximadas, a implementação do GSM é tão simples como

a do FDM [Liu , 2010], já que a técnica sem malha trabalha com a forma forte da EDP.

Considerando uma função a ser encontrada V, pertencente a uma equação de Poisson, a formulação básica do método pode ser dada como [Xu e Liu , 2008]:

$$\nabla V_i \equiv \nabla V(\mathbf{x}_i) \approx \int_{\Omega_i} \nabla V(\mathbf{x}) \hat{w}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\mathbb{V} \tag{2.50}$$

Sendo: Ω_i o GDS de um ponto de interesse $\mathbf{x}_i$; $d\mathbb{V}$ um diferencial de volume e $\hat{w}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ a função de suavização

Pode-se dividir a integral da equação (2.50) por partes, assim:

$$\nabla V_i \equiv \oint_{\partial\Omega_i} V(\mathbf{x}) \hat{w}(\mathbf{x} - x_i) \mathbf{n} dS - \int_{\Omega_i} V(\mathbf{x}) \nabla \hat{w}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\mathbb{V} \tag{2.51}$$

Sendo: $\partial\Omega_i$ o contorno externo do GDS; n o vetor unitário normal a $\partial\Omega_i$ e dS um diferencial de superfície

Assumindo a função de suavização como de suporte compacto, o segundo termo da equação (2.51) é extinto. Pode-se, assim, aproximar uma equação de Poisson da seguinte maneira:

$$\nabla \cdot (\nabla V_i) \equiv \frac{1}{\alpha} \oint_{\partial\Omega_i} \mathbf{n} \cdot \nabla V dS \tag{2.52}$$

O GSM foi aplicado com sucesso a problemas de mecânica dos fluidos [Xu e Liu , 2008] e equações de Poisson geral [Liu , 2010]. Além disso, essa ferramenta é estável e eficiente aplicadas à esses problemas.

2.2.10 Considerações Finais

Neste capítulo foram apresentados os principais métodos sem malha presentes na literatura. Na Figura 2.5 apresenta-se um quadro resumo sobre os mesmos.

Infere-se que apesar de utilizarem diferentes métodos numéricos na formulação, os principais métodos demonstrados apresentam propriedades semelhantes como a necessidade de técnicas de aproximação para garantir a iteração entre os nós distribuídos ao longo do domínio do problema. Características como técnicas de discretização da EDP também podem ser observadas em comum em todos os métodos.

Pode-se salientar como principais destaques para os métodos estudados:

O SPH foi o primeiro método sem malha a ser lançado e tem como grande ponto positivo a sua facilidade de implementação. Contudo, a utilização de uma aproximação de Kernel mais simples acarreta em um método sem consistência C^1 e que tem funções de forma que não satisfazem o delta de Kronecker ou a propriedade de partição da unidade. Foi então desenvolvido o RKPM, um método semelhante ao SPH, tanto em propriedade quanto em aplicações, porém mais consistente, de melhor completude e de complexidade computacional maior.

O DiEM foi pioneiro na utilização da aproximação pelo o MLS, um dos métodos mais utilizados entre os *meshles*. O DiEM ficou conhecido por produzir uma função mais suave como solução e pode ser descrito como o início para outros importantes métodos sem malha como o EFG e o MLPG, métodos que se diferem, principalmente, pela a integração utilizada. Enquanto o EFG necessita de malhas de fundo para realizar a integração no domínio (fato que para alguns autores anulam a característica sem malha desse) o MLPG efetua a integração localmente, dispensando o uso de malhas de integração.

Utilizando um método de partição da unidade como técnica de aproximação, os métodos HpC e PU são semelhantes e se diferem, apenas, no tratamento dado à função de forma obtida por partição de unidade. As vantagens desses métodos são a obtenção de espaços suaves e bons resultados com consistência de segunda ordem sem alto custo computacional.

Outro método de aproximação que trabalha diretamente com a forma forte é o método da colocação. A sua utilização pode ser observada no método sem malha FP, cujas principais características são o comprimento do delta de Kronecker nas funções de forma e uma boa estabilidade tendo em vista outras técnicas que utilizam o método da colocação.

Dentre os métodos apresentados, os mais atuais são os PIM's e o GSM. A família de métodos PIM's são importantes por acrescentarem a propriedade de interpolação a funções de forma utilizadas no método de Galerkin ou no MLPG, acarretando na imposição direta das condições de contorno essenciais, para a resolução de PVC's. Já o GSM tem uma proposta diferente, aplicando o gradiente da função para realizar a aproximação e apresentado resultados estáveis e satisfatórios

para equações de Poisson em geral.

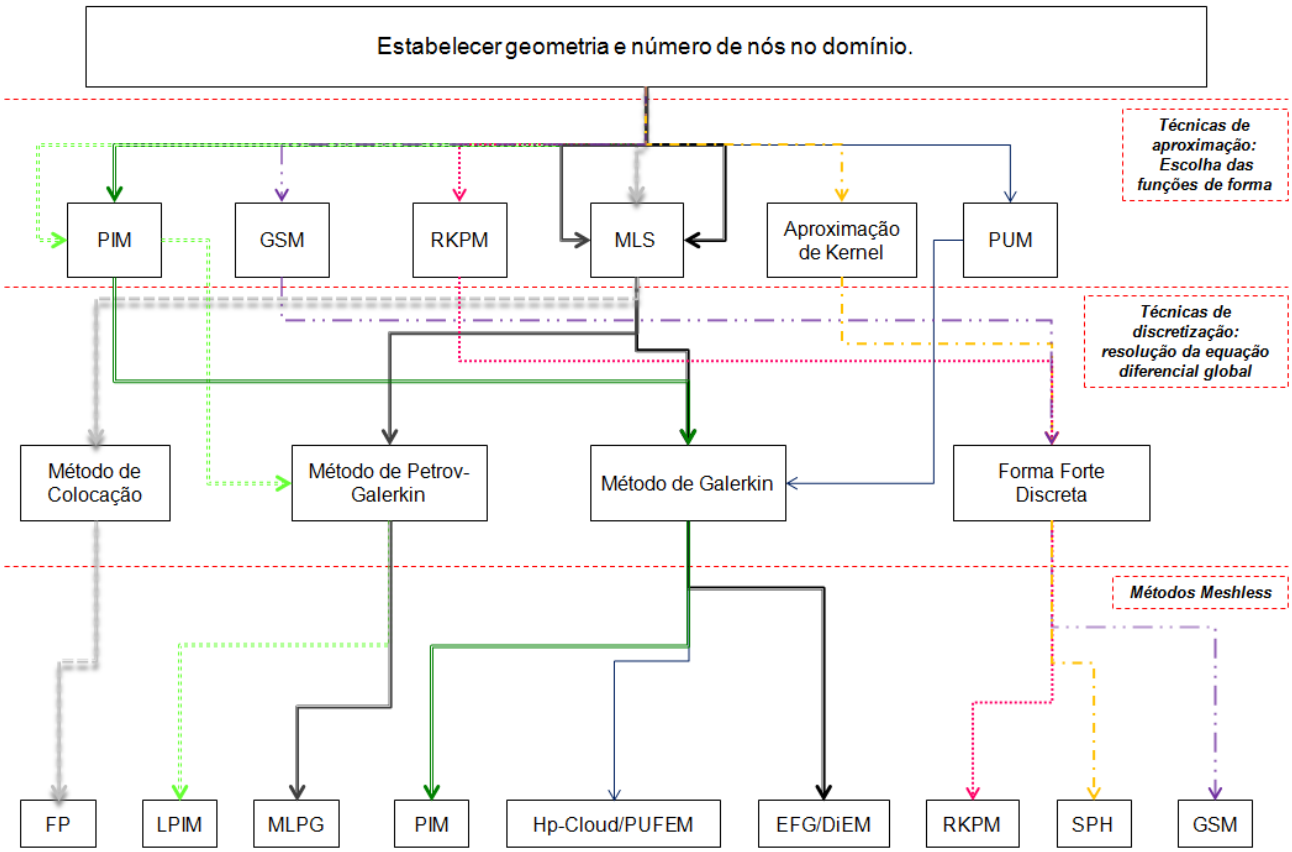

Figura 2.5: *Técnicas de aproximação e discretização para os principais métodos meshless*

Capítulo 3

O método *Element Free Galerkin*

Amplamente utilizado em na área de engenharia, o EFG é, atualmente, um dos métodos sem malha mais utilizados para a resolução PVC's. Inicialmente proposto para resolver um problema de mecânica [Belytschko *et al.* , 1994], essa técnica também já foi utilizada nas áreas: de física aplicada [Zhang *et al.* , 2012] para solucionar equações de onda; de engenharia elétrica, modelando um motor de indução [Coppoli *et al.* , 2012]; de engenharia civil para análise de falhas em concretos [Schwer *et al.* , 2000]; e, por fim, de engenharia aeroespacial para simular uma técnica utilizada para detectar pequenas fissuras e corrosões na superfície de aeronaves [Liu *et al.* , 2006].

Não só o número de investigações em diversas disciplinas comprovam o prestígio do EFG, mas também a sua aplicação em *softwares*, ou mesmo *frameworks*, exclusivas para resolver problemas de valor de fronteira utilizando método sem malha. Tal fato pode ser verificado no programa Mfree2D em Liu [2010] e na dissertação de Lima [2011], respectivamente.

O objetivo deste trabalho não é somente a resolução de um problema de valor de contorno eletromagnético, almeja-se, também, explorar os principais aspectos de um métodos sem malha de forma que se investigue como os parâmetros essenciais de essa técnica *meshfree* podem afetar sua eficiência. Sendo assim, a escolha do EFG se torna bastante atrativa, uma vez que, apesar de largamente utilizado, existem poucos estudos sobre sua a otimização.

Tendo em vista a teoria até aqui apresentada - sobre os métodos *meshless* em geral - e considerando, ainda, a definição presente em Liu [2010] e Viana [1998], pode-se dizer que o EFG tem quatro principais características:

- A técnica usual de aproximação utilizada para a construção das funções de forma é o método dos mínimos quadrados móveis. Todavia, em prol de facilitar a imposição das condições de contorno, pode-se optar por outro método de aproximação: o método dos mínimos quadrados móveis interpolante (*Interpolating Moving Least Square Method - IMLS*);

- A técnica de discretização empregada para a montagem do sistema de equações lineares final é o método de Galerkin' aplicado ao método dos resíduos ponderados (obtenção da forma fraca);

- Malhas de fundo (ou células de integração) são necessárias para a realização da integração numérica e a posterior resolução do sistema equações final. O método usualmente utilizado para integração é a quadratura gaussiana;

- As condições de contorno essenciais devem ser impostas, uma vez que as funções de forma do MLS não satisfazem o delta de Kronecker. Pode-se usar o métodos dos multiplicadores de Lagrange para tal feito.

Destaca-se, também, a possível utilização de uma técnica numérica que trate problemas de continuidade de materiais dentro do domínio em estudo. Segundo Belytschko *et al.* [1996], um método eficiente com tal finalidade é o método do critério de visibilidade (*Visibility Criterion - VC*).

Sendo assim, este capítulo tem o objetivo principal de discorrer, de maneira clara e concisa, sobre o método *Element Free Galerkin*. Para tanto, utiliza-se a seguinte estratégia de apresentação: inicialmente, são demonstradas as técnicas numéricas que formam o método, *i.e.* o método dos mínimos quadrados móveis (Interpolante ou não) para construção das funções de forma; o método dos resíduos ponderados para a obtenção da forma fraca; o método de Galerkin para o sistema final discreto, o método da quadratura de Gauss para integração; e uma técnica de imposição das condições de contorno: o método dos multiplicadores de Lagrange. Posteriormente, é apresentada a formulação do EFG e sua aplicação a um exemplo genérico, com o objetivo de demonstrar como essa técnica pode resolver um problema de valor de fronteira. Por fim, são explicitadas as principais características do EFG, como campo de aplicação e pontos fortes e fracos.

3.1 Construção das funções de forma: o método dos mínimos quadrados móveis - MLS

Em métodos sem malha o domínio Ω é representado por um conjunto de N nós, tal que $X_I \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, sendo $I = 1, 2, 3, \cdots, N$. Diferentemente do FEM, no qual a relação entre nós é definida pelos elementos (malhas) e sua conectividade, nos métodos *meshfree* não existe uma conexão rígida entre os mesmos, portanto, essa relação mútua não é conhecida a priori [Viana , 2006]. Assim, é importante construir uma aproximação para estabelecer a conexão entre os nós distribuídos ao longo do domínio, sendo que a função destinada a tal feito, é conhecida como função de forma (ou de base).

Sabe-se que a função de forma de um método *meshless* é uma de suas principais ferramentas numéricas. A escolha dessa função influencia diretamente nos bons atributos da técnica sem malha, como, por exemplo, consistência, compatibilidade e convergência Liu [2010]. Dentre as técnicas mais utilizadas destaca-se o método dos mínimos quadrados móveis que desde sua primeira utilização em um método *meshless* (no DiEM) apresentou resultados satisfatórios, ocasionando, assim, na continuidade de suas aplicações em outros métodos sem malha [Lancaster e Salkauskas , 1981]. Segundo Liu [2010], apresenta-se a seguinte formulação matemática para o MLS:

Considere a Figura 3.1 na qual é ilustrado um raio (ou distância) de suporte da função de forma para determinar um domínio de influência. Salienta-se que o raio de suporte pode possuir qualquer tamanho, contudo, geralmente, ele é calculado adicionando-se uma constante ao tamanho da distância d_l. Observa-se, ainda, que o ponto de integração a é onde a função é observada, e os nós x podem, ou não, serem englobados pelo domínio de influência de a. Destaca-se, ainda, que r pode ocasionar um domínio de influência circular (área clara e escura) ou um domínio retangular (área clara), dependendo de sua relação com a distância definida d_l.

Considere, agora, a PDE ' representado pela Figura 2.1 e as equações de (2.1) a (2.3). Assume-se, também, que $V^h(x_I) = [v_1, v_2, \cdots, v_I]$ é a aproximação da função desejada $V(x_I)$ no nó x_I, tal que $I \in \mathbb{N}^*$. Por representação em séries, tem-se:

$$V^h(a, x) = \sum_{j}^{m} p_j(x)\sigma_j(a) \equiv \mathbf{p^T}(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{a}) \tag{3.1}$$

sendo: m o número de termos dos monômios (base polinomial) e $\sigma(\mathbf{a})$ um vetor de coeficientes tal que $\sigma(\mathbf{a}) = \{\sigma_0 \ \sigma_1 \ \cdots \ \sigma_m\}$.

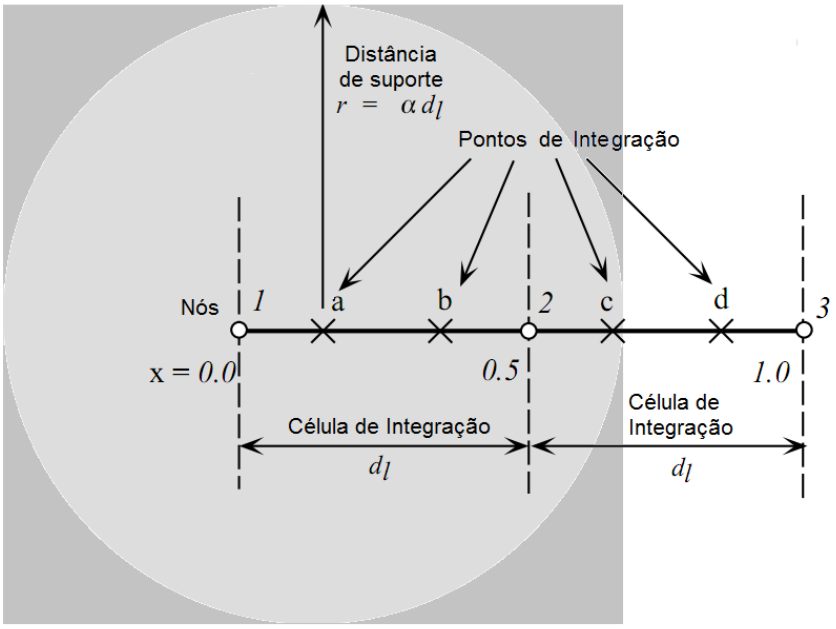

Figura 3.1: *Domínio de Influência do ponto* **a** *englobando os nós de discretização* $x_1 = 0$ *e* $x_2 = 0,5$ *(adaptado de [Cingoski et al. , 1997])*

Na equação (3.1), $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ é um vetor de funções de base que consiste, na maioria dos casos, de monômios que possuem a menor ordem que garante o mínimo de completude [Liu , 2010]. Entretanto, em prol de conseguir uma melhor eficiência ou produzir campos derivados de características específicas (*e.g.* singularidade, descontinuidade de interface), pode-se utilizar uma função mais completa, ou seja, que garanta mais que a completude mínima. No espaço de uma dimensão, uma base polinomial completa, de grau m, é representada por:

$$\mathbf{p^T}(\mathbf{x}) = \{p_0(x), p_1(x), p_2(x), \cdots, p_m(x)\} \Rightarrow \mathbf{p^T}(\mathbf{x}) = \{1, x, x^2, \cdots, x^m\} \tag{3.2}$$

Para os casos de segunda e terceira dimensões, são utilizados respectivamente: o triângulo numérico infinito formado por binômios de Newton, ou seja, o triângulo de Pascal e a sua generalização para uma dimensão superior, e a pirâmide de Pascal.

Assume-se, agora, que o suporte do domínio de influência do ponto de integração representado por a contém um conjunto de nós locais $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. Utilizando a equação (3.1) para calcular os valores aproximados da função desejada nesses nós, tem-se:

$$V^h(a, x_I) = \mathbf{p^T}(\mathbf{x_I})\sigma(\mathbf{a}), \qquad I = 1, 2, \cdots, n \tag{3.3}$$

Nota-se que $\sigma(\mathbf{a})$ é um vetor arbitrário de a. Sendo assim, o funcional quadrático do erro residual (Viana [1998]) pode ser construído utilizando os valores aproximados da função desejada e dos

parâmetros nodais ($v_I = V(x_I)$), de forma a minimizar $\sigma(a)$, assim:

$$\Pi(R) = \sum_{I}^{n} \widehat{W}(a - x_I) \left[V^h(a, x_I) - V(x_I)\right]^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Pi(R) = \sum_{I}^{n} \widehat{W}(a - x_I) \left[\mathbf{p^T}(\mathbf{x_I})\sigma(\mathbf{a}) - V_I\right]^2 \tag{3.4}$$

sendo: $\widehat{W}(a-x_I)$ a função janela; $\left[V^h(a, x_I) - V(x_I)\right]^2$ o erro residual; V_I o parâmetro nodal da função $V(a)$ e $\Pi(R)$ o funcional quadrático do erro residual R, tal que $R(a, x_I) = V^h(a, x_I) - V(x_I)$.

A função janela (ou peso), utilizada no MLS, cumpre dois importantes papéis na execução do método: primeiramente, ela fornece diferentes pesos para os resíduos em diferentes nós, dentro do domínio de suporte; por outro lado, ela garante que os nós entrem ou saiam do domínio de influência de uma maneira suave, enquanto há mudanças nos pontos de integração.

Na aproximação realizada pelo método dos mínimos quadrados móveis, no ponto arbitrário a, $\sigma(a)$ deve ser escolhida no sentido de minimizar a função do erro residual ponderado Π. Percebe-se então que:

$$\frac{\partial \Pi(R)}{\partial \sigma(a)} = 0 \tag{3.5}$$

O que resulta no seguinte sistema de equações lineares:

$$\mathbf{A}(\mathbf{a})\sigma(\mathbf{a}) = \mathbf{B}(\mathbf{a})\mathbf{d_s} \tag{3.6}$$

$\mathbf{A}(\mathbf{a})$ e $\mathbf{B}(\mathbf{a})$ são, respectivamente:

$$\mathbf{A}(\mathbf{a})\sigma(\mathbf{a}) = \sum_{I}^{n} \widehat{W}(a)\mathbf{p^T}(\mathbf{x_I})\mathbf{p}(\mathbf{x_I}) \tag{3.7}$$

e

$$\mathbf{B}(\mathbf{a}) = [\mathbf{B_1}\ \mathbf{B_2}\ \cdots\ \mathbf{B_n}] \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \widehat{W}(a)\mathbf{p}(\mathbf{x_I}) \tag{3.8}$$

sendo: $\widehat{W}(a) \equiv \widehat{W}(a-x_I)$ e $\mathbf{d_s} = \{V_1\ V_2\ \cdots\ V_n\}$ um vetor que coleta os parâmetros nodais (discretos) das funções variacionais para todos os nós no suporte do domínio.

Para encontrar $\sigma(a)$, assume-se que $\mathbf{A}$ é inversível. A equação (3.6) transforma-se então em:

$$\sigma(\mathbf{a}) = \mathbf{A^{-1}}(\mathbf{a})\mathbf{B}(\mathbf{a})\mathbf{d_s} \tag{3.9}$$

Substitui-se a equação (3.9) em (3.3), assim:

$$V^h(a, x_I) = \sum_I^n \sum_J^m p_j(x) \left(\mathbf{A^{-1}}(\mathbf{a})\mathbf{B}(\mathbf{a})\right)_{jI} V_I \tag{3.10}$$

Pode-se, também, definir uma função de forma Φ_I tal que:

$$\Phi_I(a) = \sum_J^m p_j(x) \left(\mathbf{A^{-1}}(\mathbf{a})\mathbf{B}(\mathbf{a})\right)_{JI} \Rightarrow \Phi_I(a) = \mathbf{p^T A^{-1} B_I} \tag{3.11}$$

Sendo assim, tem-se:

$$V^h(a) = \sum_I^n \Phi_I(a) V_I \tag{3.12}$$

ou

$$V^h(a) = \sum_I^n \phi(\mathbf{a})\mathbf{d_s} \tag{3.13}$$

sendo: $\phi(\mathbf{a}) = [\Phi_1(a)\ \Phi_2(a)\ \cdots\ \Phi_n(a)]$ a matriz da função de base do MLS.

Para determinar as derivadas espaciais da função de forma, que são necessárias para obter o sistema de equações discretas, é conveniente utilizar a derivação por partes, sendo assim $\phi(\mathbf{a})$ é reescrito utilizando a equação (3.11):

$$\phi(\mathbf{a})\mathbf{d_s} = \gamma^{\mathbf{T}}\mathbf{B}(\mathbf{a}) \tag{3.14}$$

sendo: $\mathbf{A}(\mathbf{a})\gamma^{\mathbf{T}} = p(a)$.

A derivada parcial de $\gamma^{\mathbf{T}}$ pode ser obtida como:

$$A\gamma_{,i} = p_{,i} - A_{,i}\gamma$$

$$A\gamma_{,ij} = p_{,ij} - (A_{,i}\gamma_{,ij} + A_{,j}\gamma_{,i} + A_{,ij}\gamma)$$

$$A\gamma_{,ijh} = p_{,ijk} - (A_{,i}\gamma_{,jk} + A_{,j}\gamma_{,ik} + A_{,k}\gamma_{,ij} + A_{,ij}\gamma_{,k} + A_{,ik}\gamma_{,j} + A_{,jk}\gamma_{,i} + A_{,ijk}\gamma) \tag{3.15}$$

sendo: i, j e k a representação das coordenadas x e y e $,i$ a derivada parcial referente a variável espacial i.

Por fim, a derivada espacial da função de forma Φ pode ser obtida como:

$$A\phi_{,i} = \gamma_{,i}^T B + \gamma^T B_{,i}$$

$$A\phi_{,ij} = \gamma_{,ij}^T B + \gamma_{,i}^T B_{,j} + \gamma_{,j}^T B_{,i} + \gamma^T B_{,ij}$$

$$A\phi_{,ij} = \gamma_{,ijk}^T B + \gamma_{,ij}^T B_{,k} + \gamma_{,ik}^T B_{,j} + \gamma_{,jk}^T B_{,i} + \gamma_{,i}^T B_{,jk} + \gamma_{,j}^T B_{,ik} + \gamma_{,k}^T B_{,ij} + \gamma^T B_{,ijk} \tag{3.16}$$

Salienta-se que as funções de forma do MLS não satisfazem ao delta de Kronecker, sendo assim, elas não podem ser usadas para construir interpolações, apenas uma aproximação da função [Lima , 2011]. Existem, ainda, outras características do método dos mínimos quadrados móveis que se pode destacar. Observa-se, por exemplo, que a consistência da aproximação do MLS depende completamente da ordem do monômio referente à equação (3.2), se a ordem de completude do monômio for k, a função de forma do MLS terá consistência C^k [Liu , 2010]. Entretanto, pode-se dizer, também, que ela não garante a consistência da função de forma [Liu , 2010].

Verifica-se, ainda, uma certa fragilidade no método: assume-se que a matriz **A** é inversível, todavia nota-se que tal suposição pode falhar, uma vez que essa matriz pode ser singular quando o número de nós no domínio local (dentro do suporte da função de forma) não for maior que o número de termos do polinômio base.

3.1.1 O método dos mínimos quadrados móveis interpolante - IMLS

É possível realizar uma adaptação no MLS de forma que a função de forma construída possa ter as propriedades do delta de Kronecker. Conforme demonstrado por [Marques *et al.* , 2007] tal feito pode ser alcançado com a utilização de uma função janela (ou peso - $\widehat{W}(a - x_I)$), segundo equação (3.4), singular. Consequentemente, as condições de contorno podem ser forçadas diretamente no sistema discreto final. Salienta-se, também, que o método que usa uma função de forma que cumpre o delta de Kronecker pode interpolar a função desejada, por isso o nome método dos mínimos quadrados interpolante.

O princípio básico do IMLS consiste em tornar a função janela infinita nos nós desejados x_I caso seja necessário interpolá-los [Coppoli , 2010]. Assim, nos nós os quais é feita a interpolação os valores podem ser impostos diretamente no sistema final discreto. A função janela garantirá que

apenas os pontos de interesse possuam algum valor, e os demais se aproximem rapidamente de zero [Lancaster e Salkauskas , 1981].

Segundo Coppoli [2010], dado dois pontos distintos, a e x_I, e um raio de suporte r_I, um exemplo de função janela que pode ser utilizada é:

$$\widehat{W}(a - x_I) = \frac{1}{\left(\frac{|a-x_I|}{r_I}\right)^{2n} + \beta} \tag{3.17}$$

sendo: n um número inteiro positivo e β um número real positivo e de valor dimensional pequeno.

Nota-se que o valor β deve ser suficientemente pequeno somente para garantir a não singularidade da função em termos de programação. Provas de que equações como a (3.17) obedecem aos critérios do delta de Kronecker podem ser encontradas em Li e Liu [2007] e [Marques *et al.* , 2007] .

Segundo Coppoli [2010], uma característica importante relacionada a esse tipo de função de janela é o modo como a mesma age sobre a esparsidade da matriz final, que representa a matriz ampliada do sistema discreto. Apesar dessa possuir um comportamento assintótico, as funções de forma associadas a elas possuem suporte compacto, uma vez que os domínios de influência de cada nó são limitados, isso garante a esparsidade do sistema final.

3.2 Formulação da forma fraca: O método dos resíduos ponderados - WRM

O método dos resíduos ponderados é considerado como uma das técnicas clássicas para a obtenção de formas fracas de sistemas de equações aproximados se tornando, assim, uma ferramenta matemática poderosa. O WRM é aplicável na maioria dos problemas de engenharia, incluindo mecânica dos fluidos, estruturas, eletromagnetismo, entre outros [Liu , 2010].

Considere o domínio generalizado ilustrado na Figura 2.1. A respeito desse domínio assume-se duas situações: que esse é um meio material cujas características são representadas pela letra ϵ e a existência, dentro de seus contornos, de uma função desconhecida que obedece ao comportamento

da equação de Poisson. Sendo assim, tem-se que:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\epsilon\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\epsilon\frac{\partial V}{\partial y}\right)=f \qquad \text{em} \qquad \Omega \tag{3.18}$$

Sujeito às condições de Neumann e Direchlet, respectivamente:

$$\epsilon\frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}}=g \qquad \text{em} \qquad \Gamma_n \tag{3.19}$$

e

$$V=V_0 \qquad \text{em} \qquad \Gamma_e \tag{3.20}$$

Aplicando o método dos resíduos ponderados, assumindo, assim, um resíduo π para o problema, tem-se que:

$$\pi=\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\epsilon\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\epsilon\frac{\partial V}{\partial y}\right)\right)-b \tag{3.21}$$

No sentindo de ponderar o resíduo admitido, uma função peso T é, então, acrescentada à função desconhecida e o resultado é integrado no domínio, assim:

$$\int_\Omega \pi T d\Omega=\int_\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\epsilon\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\epsilon\frac{\partial V}{\partial y}\right)\right)T d\Omega-\int_\Omega bT d\Omega \qquad \forall\ V,T\in\mathbb{H}^1 \tag{3.22}$$

Segundo Viana [1998], a função de teste pode ser qualquer função suficientemente regular, com domínio em Ω, que obedeça a equação integral (3.22).

A equação (3.22) é uma possibilidade de apresentação para a forma fraca do problema, todavia, não é possível observar nela as condições de condições de contorno do sistema. Utiliza-se, então, a integração por partes em todo domínio, incluindo as condições de contorno. Tem-se, assim:

$$\int_\Omega \pi T d\Omega=\int_\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\epsilon\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\epsilon\frac{\partial V}{\partial y}\right)\right)T d\Omega-\cdots\rightarrow$$

$$\rightarrow\cdots-\int_\Omega bT d\Omega-\int_\Gamma \epsilon\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)\cdot\mathbf{n}T d\Gamma \qquad \forall\ V,T\in\mathbb{H}^1 \tag{3.23}$$

sendo: $\mathbf{n}$ o vetor normal à superfície do contorno Γ.

Outra maneira de representação da equação (3.23) é assumindo que o termo $\int_\Omega \pi T d\Omega$ é nulo. Tal suposição pode ser feita uma vez que considera-se V como a solução do problema, assim, o

resíduo π se anula em cada subdomínio [Viana , 1998]. Tem-se, então:

$$\int_{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\epsilon\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\epsilon\frac{\partial V}{\partial y}\right)\right)Td\Omega-\int_{\Omega}bTd\Omega-\int_{\Gamma}\epsilon\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)\cdot\mathbf{n}Td\Gamma=0 \tag{3.24}$$

Pode-se dizer que a equação (3.24) é a forma fraca da equação de Poisson no domínio Ω.

Mesmo apresentando uma formulação consideravelmente simples, o método dos resíduos ponderados é aplicado em diversos métodos de resolução de PVC's, como, por exemplo, o método da colocação, o método dos momentos, o MLPG e na formulação de Galerkin [Lemos , 2007].

A despeito da simplicidade do WRM, o que acarreta a sua aplicação na em diversos métodos numéricos, diferentes maneiras de implementação podem originar solução de diferentes propriedades e precisões. Assim, a estabilidade e a convergência podem não ocorrer, assim como a solução encontrada pode não ser a solução correta para o problema [Liu , 2010]. Observa-se, ainda, que a forma forte do sistema de equações deve ser conhecida, portanto, é desejável que a escolha das funções de teste esteja de acordo com as características da sua respectiva forma forte. Nota-se, também, que se o conjunto de funções de base contém a solução exata, da mesma maneira o WRM apresentará a resposta correta contanto que as funções de peso sejam escolhidas no sentindo de dar estabilidade e convergência para o método. Essa particularidade do método dos resíduos ponderados implica que não existe erro numérico na computação da técnica, podendo ser, então, utilizada para testar métodos que o utilizam, como os *meshless* [Liu , 2010].

Ainda, segundo [Liu , 2010], o procedimento para a criação do modelo numérico discreto para resolver problemas estáticos usando o método dos resíduos ponderados é: (1) construir as funções de forma para aproximar a função desejada utilizando as variáveis dessa função nos nós do domínio; (2) Construir as funções de peso; (3) Substituir as funções de forma e de teste na forma fraca do problema obtendo, assim, um conjunto de equações algébricas e (4) resolver o conjunto de equações algébricas.

Salienta-se, ainda, que a quadratura do domínio Ω, usado na equação (3.24) não precisa englobar toda a geometria do problema. Quando quadraturas em domínios locais são utilizadas tem-se o chamado método dos resíduos ponderados locais. Nesse caso, as funções de teste e de base podem ser escolhidas independentemente, como no caso do método local de Petrov-Galerkin.

3.3 Discretização do espaço e das funções: o método de Galerkin - GM

Uma vez obtida a forma fraca do problema é necessário construir um sistema de equações discretas cuja solução resultará em uma função que descreve aproximadamente o comportamento físico que rege o PVC. Entretanto, a utilização do método dos resíduos ponderados para a solução desse problema permite que algumas classes de funções indesejadas façam parte da resposta final, graças ao relaxamento das condições que podem, por ventura, atender as equações da forma fraca. Sendo assim, segundo Liu [2010], em prol de obter uma solução estável e convergente deve-se optar por uma postura criteriosa para escolha das funções de aproximação.

Os espaços mais lembrados e presentes nos métodos sem malha, também utilizados no EFG, são os espaços de Lebesgue e de Hilbert, apresentados na Seção 2.1.3. Basicamente, esses espaços garantem que quaisquer funções que os pertencem são quadrado integráveis dentro do domínio do problema.

Mediante a análise da forma fraca do problema, equação (3.23), percebe-se a necessidade das funções presentes no problema respeitarem o critério dos espaços de Hilbert e Lesbegue. Considerando que a função desconhecida T pode assumir qualquer forma, inclusive $V = T$, o primeiro termo da equação (3.24) se transforma em:

$$\int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right) d\Omega \tag{3.25}$$

Percebe-se, então que V deve ser suficientemente regular para que seja integrável em Ω [Viana , 1998]. Para tanto, tem-se um caso clássico de um espaço $\mathbb{L}^p$ de segundo grau, ou seja $\mathbb{L}^2$, que possui propriedades que o classificam, também, como um espaço $\mathbb{H}^m$. Como a equação (3.25) apresenta uma derivada de primeiro grau, observa-se que o espaço em questão é de derivada primeira de quadrado integrável, portando V pertence a $\mathbb{H}^1$.

Sabendo que a função desejada V faz parte do espaço de Hilbert, o que garante sua estabilidade e convergência, passa-se, então, para o processo de discretização para a resolução do PVC. É importante tal feito pois $\mathbb{H}^1$ é um espaço de dimensão infinita o que inviabiliza a busca de funções no mesmo [Viana , 1998]. Para encontrar, então, uma função discreta (V^h) que descreva aproximada-

mente o comportamento de V, adota-se um espaço de Hilbert de primeiro grau finito, denominado $\mathbb{H}^{1,h}$. É importante, também, que a função nesse espaço obedeça as condições de contorno, *i.e.* $V^h \in \mathbb{H}^1_h$ deve se anular em Γ. Por fim, define-se um espaço discreto de derivadas primeira de quadrado integrável nulas nas fronteiras do problema, $\mathbb{H}^{1,h}_0$.

O método de Galerkin consiste na busca aproximada em um espaço de dimentão finita [Rezende , 2005]. Sendo assim, segundo Viana [1998], mediante o MG, pode-se buscar uma função discreta em um espaço também descontínuo. Nota-se que na forma fraca do problema de Poisson tem-se duas funções distintas a se obter: a função de teste, T, e a função a ser encontrada, V. Pelo o método de Galerkin, ambas podem ser descritas como:

$$T^h = \sum_{I=1}^{N} \zeta_I a_I \tag{3.26}$$

e

$$V^h = \sum_{I=1}^{N} \Phi_I V_I \tag{3.27}$$

sendo: $\mathbf{\Phi_I}$ e ζ_I funções de forma e a_I e V_I coeficientes a serem determinados

Assim, a forma fraca discreta, utilizada para a solução do EDP, é:

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\epsilon \frac{\partial V^h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\epsilon \frac{\partial V^h}{\partial y}\right)\right) T^h d\Omega - \int_\Omega b T^h d\Omega - \cdots \rightarrow$$

$$\rightarrow \cdots - \int_\Gamma \epsilon \left(\frac{\partial V^h}{\partial x} + \frac{\partial V^h}{\partial y}\right) \cdot \mathbf{n} T^h d\Gamma = 0 \qquad \forall\ V, T \in \mathbb{H}^1 \tag{3.28}$$

Salienta-se que uma importante característica do GM é utilizar a mesma função de forma para obter tanto a função de teste, T, quanto a função aproximada, V, ou seja, $\zeta_I = \Phi_I$.

O método de Galerkin é amplamente aplicado em diversas áreas da física e engenharia, como, por exemplo, equações diferenciais, análise, mecânica, termodinâmica, eletromagnetismo e hidrodinâmica [Rezende , 2005]. O fato dessa técnica poder ser aplicada na resolução de problemas de forma arbitrária e não haver conexões entre as aproximações e as formas variacionais do problema, fizeram com que o estudo de Galerkin, no começo do século passado, atingisse uma repercussão mundial no campo das investigações matemáticas.

3.4 Imposição das condições de contorno: o método dos multiplicadores de Lagrange - MML

O fato das funções de formas obtidas pelo MLS não cumprirem as propriedades do delta de Kronecker, implica na utilização de tratamento adequado para que as condições de contorno do problema sejam obedecidas. Existem alguns métodos que realizam tal feito, *e.g.* método dos multiplicadores de Lagrange (*method of Lagrange multipliers - MLM*) e método das penalidades sendo que nessa dissertação, é apresentado e estudado somente o primeiro.

Considere o problema genérico da equação de Poisson (2.4), apresentado na Seção 2.1.3 e forma fraca obtida pelo método dos resíduos ponderados, equação (3.23). Segundo Viana [1998], o problema original é auto-adjunto podendo ser solucionado, entre outras formas, pela minimização da seguinte função :

$$\Pi(V) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon \frac{\partial V^h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial V^h}{\partial y} \right) \right) T^h d\Omega - 2 \int_{\Omega} b T^h d\Omega \tag{3.29}$$

Escrevendo a equação (3.29) de forma simplificada:

$$\Pi(V) = B(V,V) - 2F(V) \tag{3.30}$$

sendo: $B(V,V)$ a forma bilinear simétrica e $F(U)$ o funcional linear

Tem-se o objetivo de fazer Φ estacionário com relação a qualquer variação de V em um conjunto de funções admissíveis, satisfazendo, assim, às condições de contorno essenciais. Portanto, para um $\varsigma \in \mathcal{R}$; um $T \in H_0^1(\Omega)$ e $V + \varsigma T \in H_0^1(\Omega)$, tendo em vista as propriedades de bilinearidade de B e linearidade de F [Viana , 1998], tem-se:

$$\Pi(V + \varsigma T) = \Pi(V) + 2\varsigma(B(V,T) - F(V)) + \varsigma^2 B(T,T) \tag{3.31}$$

Para uma pequena variação de V $(V + \varrho V)$, sendo $\varrho V = \varsigma T$, define-se a primeira variação do funcional Π:

$$\varrho\Pi(V,T) = \lim_{\varsigma \to 0} \frac{1}{\varsigma} \left[\Pi(V + \varsigma T) - \Pi(V) \right] \Rightarrow \varrho\Pi(V,T) = 2\left[B(V,T) - F(T) \right] \tag{3.32}$$

A equação (3.32) deve se anular para um $\Pi(V)$ estacionário, sendo assim:

$$\varrho\Pi(U,T) = 0 \Rightarrow [B(V,T) - F(T)] = 0, \qquad \forall T \in H_0^1(\Omega) \tag{3.33}$$

Se a solução de V não satisfaz as condições de contorno, o funcional $\Pi(V)$ pode não ser estacionário. Assim, os multiplicadores de Lagrange são usados para forçar tais condições, resultando em um novo funcional, denominado $\Pi'(V,\lambda)$ [Viana , 1998], tal que:

$$\Pi'(V,\lambda) = \Pi(V) + \int_{\Gamma_e} \lambda(V - V_0)d\Gamma \tag{3.34}$$

sendo: λ os multiplicadores de Lagrange que atuam na fronteira Γ_e para impor as condições de contorno essenciais

Fazendo, então, o Π' estacionário, em relação a V com os multiplicadores de Lagrange e assumindo pertubações $\varrho V = \varsigma_1 T$ e $\varrho\lambda = \varsigma_2 P$, para $\varsigma_1, \varsigma_2 \in \mathcal{R}$ tem-se que:

$$\varrho\Pi'(V,\lambda) = \varrho\Pi(V) + \int_{\Gamma_e} \varrho\lambda(V - V_0)d\Gamma + \int_{\Gamma_e} \lambda(\varrho V)d\Gamma \tag{3.35}$$

Para que Π' seja estacionário, $\varrho\Pi'$ deve ser nulo para todas as variações de $\varrho\Pi$ e $\varrho\lambda$. Portanto:

$$\begin{aligned} &V - V_0 = 0, \qquad \text{em } \Gamma_e; \\ &\varrho V = 0, \qquad \text{em } \Gamma_e; \\ &\varrho\Pi = 0, \qquad \text{em } \Omega \end{aligned} \tag{3.36}$$

A condição de funcional estacionário requer que a equação (2.4) seja satisfeita, sendo assim, a função V, que faz Π' estacionário, é a solução da equação que satisfaz as condições de contorno de Dirichlet. Efetua-se, então, o cálculo da primeira e da segunda variação de Π' [Viana , 1998], obtendo:

$$\begin{aligned} \varrho\Pi'(V + \varsigma_1 T, \lambda) &= \lim_{\varsigma_1 \to 0} \frac{1}{\varsigma_1} \left[\Pi'(V + \varsigma_1 T, \lambda) - \Pi'(V,\lambda)\right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \varrho\Pi'(V + \varsigma_1 T, \lambda) &= [B(V,T) - F(T)] + \int_{\Gamma_e} T\lambda d\Gamma \end{aligned} \tag{3.37}$$

e

$$\begin{aligned} \varrho\Pi'(V, \lambda + \varsigma_2 P) &= \lim_{\varsigma_2 \to 0} \frac{1}{\varsigma_2} \left[\Pi'(V, \lambda + \varsigma_2 P) - \Pi'(V,\lambda)\right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \varrho\Pi'(V, \lambda + \varsigma_2 P) &= \int_{\Gamma_e} P(V - V_0)d\Gamma \end{aligned} \tag{3.38}$$

Implica-se, consequentemente, em um sistema dado por:

$$[B(V,T) - F(T)] + \int_{\Gamma_e} T\lambda d\Gamma = 0 \tag{3.39}$$

e

$$\int_{\Gamma_e} P(V - V_0) d\Gamma = 0 \tag{3.40}$$

Escrevendo a forma fraca com os multiplicadores, tem-se, então:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right) T d\Omega - \int_{\Omega} bT d\Omega - \cdots \rightarrow$$

$$\rightarrow \cdots - \int_{\Gamma} \epsilon \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) \cdot \mathbf{n} T d\Gamma + \int_{\Gamma_e} T\lambda d\Gamma = 0 \qquad \forall\ V, T \in \mathbb{H}^1 \tag{3.41}$$

O uso dos multiplicadores de Lagrange implicará no aumento do número de incógnitas a serem determinadas na solução do sistema matricial final, o que se pode observar pelo acréscimo de um termo na forma fraca do problema. Apesar disso, essa técnica é amplamente aplicada nos métodos sem malha cuja função de forma não obedece o delta de Kronecker por ser considerado como preciso e eficiente [Viana , 1998].

3.5 Imposição das condições de interface: o critério da visibilidade - VC

Existem PVC's que apresentam descontinuidade entre os materiais presentes em seus domínios. Em alguns métodos tradicionais baseados em malha a condição de interface é imposta de forma que os meios sejam subdomínio do problema, ou seja, a interface entre os diferentes materiais se torna uma condição de contorno. Todavia, nos métodos sem malha, a imposição das condições de interface não é tão direta, e funciona, na realidade, com a implementação da descontinuidade na função de forma [Viana , 1998].

O critério de visibilidade consiste, basicamente, em introduzir descontinuidades na função de forma quando a interface entre dois meios é ultrapassada pelo suporte da função [Viana , 1998]. Considere, por exemplo, o domínio de influência ilustrado na Figura 3.2 (extensão da Figura 3.1). Supõe-se, ainda, uma interface presente no nó representado pela abscissa $x = 0,5$, na qual se encontram dois

meios distintos. Se o raio de suporte r, oriundo do ponto de a que pertencente ao meio 1, encontra um material distinto (meio 2), os nós são excluídos desse domínio de influência. Em outras palavras, o suporte criado em um meio é ceifado na região de outro meio. Assim, como a função de forma é nula fora do seu suporte, os nós de um meio não entram no cálculo do outro meio [Viana , 1998].

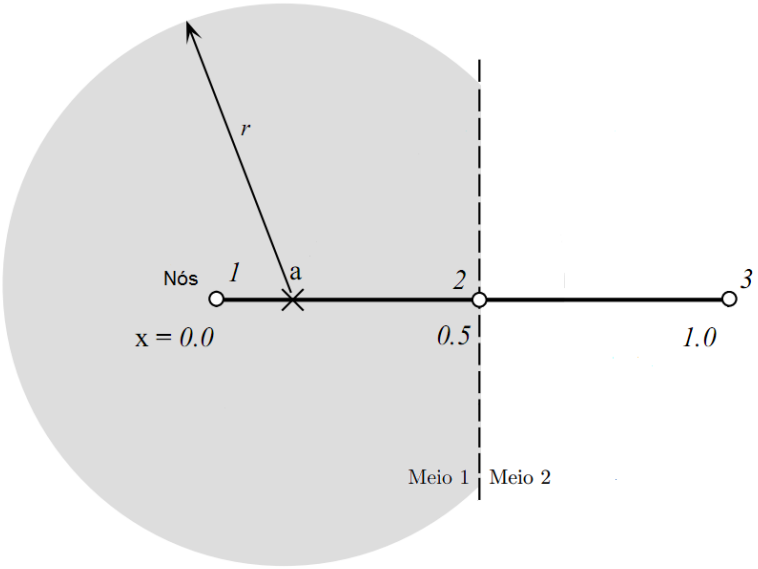

Figura 3.2: *Domínio de Influência do ponto* **a** *quando aplicado o critério de visibilidade para a interface entre os meios 1 e 2 (adaptado de [Cingoski et al. , 1997])*

Ainda de acordo com a Figura 3.2, pode-se concluir que o nó 1 se encontra no suporte da função de forma, enquanto o nó 3 não. Existem, também, nós que estão incluídos na interface entre os dois meios distintos (nó 2). Para esses casos, considera-se que esses pontos pertencem aos dois meios, ou seja, se ora é englobado pelo suporte presente no meio 1, outrora, é abarcado por um suporte no meio 2.

Um ponto negativo na utilização do VC é a descontinuidade presente na função de forma que pode atrapalhar, de certa forma, na derivada da mesma (importantes para a resolução do sistema final). Todavia, pode-se dizer que o critério de visibilidade apresenta pouca complexidade de implementação [Viana , 1998].

3.6 Integração do problema: o método da quadratura de Gauss

Observa-se que a forma fraca de um EDP possui termos integrais e, portanto, é plausível assumir que a resolução do EFG dependa da solução de equações integrais. Uma das ferramentas mais tradicionais para a resolução de integrais de maneira numérica é o método da Quadratura de Gauss,

que, além de ser proposta como alternativa para o EFG por seus autores originais, também é utilizada nesse trabalho. Todavia, optou-se por não apresentar a formulação básica desse método, uma vez que essa ferramenta é amplamente difundida e utilizada em problemas numéricos em geral.

Belytschko *et al.* [1994] propõem a geração de um arranjo de células que auxiliam na geração dos pontos da quadratura. Esse procedimento consiste em gerar um arranjo de células regulares que envolva todo o domínio de estudo. Essas são independentes dos nós distribuídos no domínio pelo o método *meshless* em questão; Em cada célula, pontos de integração são gerados pelo método de Gauss. Como o conjunto de células é independente da geometria do problema, alguns pontos de integração podem ficar fora do domínio. Entretanto, não há problema em tal ocorrência, uma vez que esses pontos podem ser tecnicamente ignorados [Viana , 1998].

Ainda segundo Viana [1998], para a implementação da integração numérica das integrais obtidas no EFG é necessário gerar células não só no domínio como também nos contornos. Para importantes autores como Liu [2010], Belytschko *et al.* [1996], a geração do arranjo de células não elimina a característica dos métodos *meshless*, uma vez que a finalidade única desse arranjo é auxiliar a geração de pontos de quadratura (ou integração).

3.7 Formulação final: o *Element Free Galerkin*

Em posse, então, das principais ferramentas acerca do EFG, constrói-se, por fim, a formulação final desse método sem malha. Recorda-se aqui, a idéia básica do EFG, que consiste em utilizar o método dos resíduos ponderados aplicado à técnica de Galerkin para a obtenção de uma forma fraca discreta, o que possibilita a resolução do problema por meio de um sistema de equações lineares. As funções de forma associadas ao GM são criadas mediante o uso do MLS ou IMLS, e a integração do domínio, quando necessário, é feita pela quadratura de Gauss. Vale salientar, também, que o fato do MLS tradicional não cumprir as propriedades do delta de Kronecker, implica na necessidade do tratamento para o cumprimento das condições de contorno, tal feito pode ser realizado utilizando o MML.

3.7.1 Formulação matemática

Na Figura 3.3 observa-se um esquema simplificado do *Element Free Galerkin*. Tendo em vista tal ilustração, pode-se discorrer sobre a formulação do método.

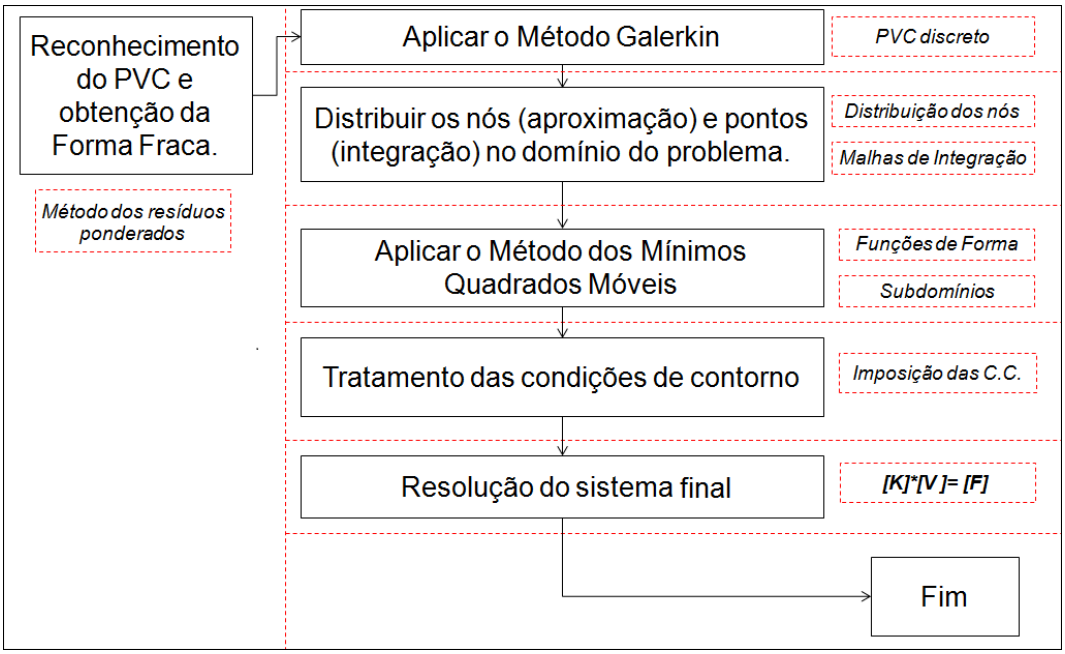

Figura 3.3: *Esquema simplificado para a resolução de um PVC com a utilização do método EFG*

Do método de Galerkin, aplicado juntamente com o WRM, tem-se a forma fraca conforme apresentada na equação (3.28), entretanto é comum, também, descrevê-la de uma maneira diferente. Segundo Viana [1998], considerando que as funções de teste pertecem ao espaço de Lesbegue de segundo grau e as condições de contorno naturais, ou seja de Neumann, são homogêneas em Γ_n observa-se que o termo da fronteira Γ dessa forma fraca se anula, portanto:

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\epsilon \frac{\partial V^h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\epsilon \frac{\partial V^h}{\partial y}\right)\right) T^h d\Omega - \int_\Omega b T^h d\Omega = 0 \qquad \forall\ V, T \in \mathbb{H}^1 \tag{3.42}$$

Assim sendo, a equação (3.42) pode ser denominada como a forma fraca homogênea da equação de Poisson. Nesta dissertação, todos problemas investigados são considerados homogêneos e lineares, portanto, trata-se como forma fraca para o EFG a própria equação (3.42). No sentido, então, de simplificar as apresentações dessa equação, descreve-se a mesma pela seguinte denominação:

$$B(V^h, T^h) = F(T^h) \tag{3.43}$$

sendo: $B(V^h, T^h)$ a forma bilinear simétrica $B(V^h, T^h) = \int_\Omega \left(\frac{\partial T^h}{\partial x}\left(\epsilon \frac{\partial V^h}{\partial x}\right) + \frac{\partial T^h}{\partial y}\left(\epsilon \frac{\partial V^h}{\partial y}\right)\right) d\Omega$ e $F(T^h)$ um funcional linear tal que $F(T) = \int_\Omega b T^h d\Omega$

Sabendo que a função de forma Φ obtida no MLS é a mesma tanto para a função de teste $T^h = \sum_{I=1}^{N} \zeta_I a_I$, quanto para a função aproximada $V^h = \sum_{I=1}^{N} \Phi_I V_I$ de Galerkin e, considerando,

ainda, que o conjunto de variáveis a_I são constantes arbitrárias, tem-se que:

$$\sum_{J=1}^{N} a_J \left[B\left(\sum_{I=1}^{N} \Phi_I V_I, \Phi_J \right) - F(\Phi_J) \right] = 0 \tag{3.44}$$

Assume-se que $a_J = 1,\ \forall J \in \mathbb{N}^*$, obtendo assim o seguinte sistema de equações lineares:

$$\sum_{J=1}^{N} \sum_{I=1}^{N} V_{1I} K_{JI} = F_{1J} \tag{3.45}$$

Portanto:

$$K_{JI} = B(\Phi_I, \Phi_J) \Rightarrow K_{JI} = \int \epsilon \left[\left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial x} \frac{\partial \Phi_J}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial y} \frac{\partial \Phi_J}{\partial y} \right) \right] d\Omega \tag{3.46}$$

e

$$F_{1J} = F(\Phi_J) \Rightarrow F_{1J} = \int b \Phi_J \tag{3.47}$$

Na forma matricial, tem-se que:

$$[\mathbf{K}] * [\mathbf{V}] = [\mathbf{F}] \Rightarrow \begin{bmatrix} \nabla\Phi_1 \epsilon \nabla\Phi_1 & \cdots & \nabla\Phi_1 \epsilon \nabla\Phi_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \nabla\Phi_N \epsilon \nabla\Phi_1 & \cdots & \nabla\Phi_N \epsilon \nabla\Phi_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b\Phi_1 \\ \vdots \\ b\Phi_N \end{bmatrix} \tag{3.48}$$

O último passo para a construção do sistema é o tratamento das condições de contorno. Na hipótese do uso dos MLM, uma vez que a forma fraca é modificada - vide equação (3.41) - é necessário um novo arranjo para o sistema final. Comparando a equação (3.41) com a forma fraca (3.28) percebe-se que existe o acréscimo de mais um termo. Relembrando que o sistema é linear e homogêneo, pode-se obter a seguinte expressão:

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon \frac{\partial V^h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial V^h}{\partial y} \right) \right) T^h d\Omega - \int_\Omega b T^h d\Omega + \int_{\Gamma_e} b T \lambda^h d\Gamma = 0 \qquad \forall\ V, T \in \mathbb{H}^1 \tag{3.49}$$

Pelo método de Galerkin, e utilizando a nomeclatura presente em Viana [1998], a função λ^h pode ser escrita como:

$$\lambda^h = \sum_{k=1}^{NF} N_{\lambda_K} \lambda_k \tag{3.50}$$

sendo: NF o número de nós nas fronteiras e N_λ funções de interpolação de Lagrange

Considerando que o sistema representado por (3.48) advém da forma fraca reduzida, verifica-se que um sistema derivado da utilização dos multiplicadores de Lagrange deve conter, em suas matrizes, termos que correspondam a função λ. Tendo em vista as equações (3.39) e (3.40), que descrevem

os requisitos para que a utilização dos MML, garantam as condições de contorno, observa-se que os termos a serem acrescentados são:

$$G_{JK} = \int_{\Gamma_e} \Phi_J N_{\lambda_K} \lambda_k d\Gamma \tag{3.51}$$

correspondente à equação (3.39), e:

$$Q_K = \int_{\Gamma_e} N_{\lambda_K} V_0 d\Gamma \tag{3.52}$$

correspondente à equação (3.40). Assim sendo, tem-se um novo sistema de equações lineares, no qual:

$$[\mathbf{KK}] * [\mathbf{X}] = [\mathbf{FF}] \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G^T} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} \tag{3.53}$$

Sendo assim, tem-se os sistemas finais que devem ser resolvidos para encontrar a função aproximada V^h. A seguir, é apresentada uma possibilidade genérica para a solução desse sistema de equações lineares.

3.7.2 Construção e possível solução do sistema de equações lineares

Em posse, então, do sistema final (3.48), cuja solução fornece uma aproximação da função desejada V, pode-se descrever, segundo Figura 3.4, um esquema básico para sua construção e solução.

Destaca-se nesse esquema a presença de um ciclo que representam a quadratura de Gauss, *loop* esse que varre cada ponto de integração. Nota-se que tanto a matriz **K** quanto a matriz **F** - equações (3.46) e (3.47), respectivamente - possuem termos integrais, que se tornam somatórios na aproximação numérica de Gauss. Esses somatórios originam o *loop* apresentado na Figura 3.4.

Para melhor ilustrar a construção e solução do sistema final oriundo do método EFG, é apresentado um exemplo. Admite-se uma função desconhecida V, cujo comportamento obedece a uma equação de Laplace, sujeita às condições de contorno de Dirichlet e Neumann, numa geometria irregular. Considere, ainda, que essa geometria já foi preenchida com uma distribuição de nós arbitrária, conforme é ilustrado na Figura 3.5.

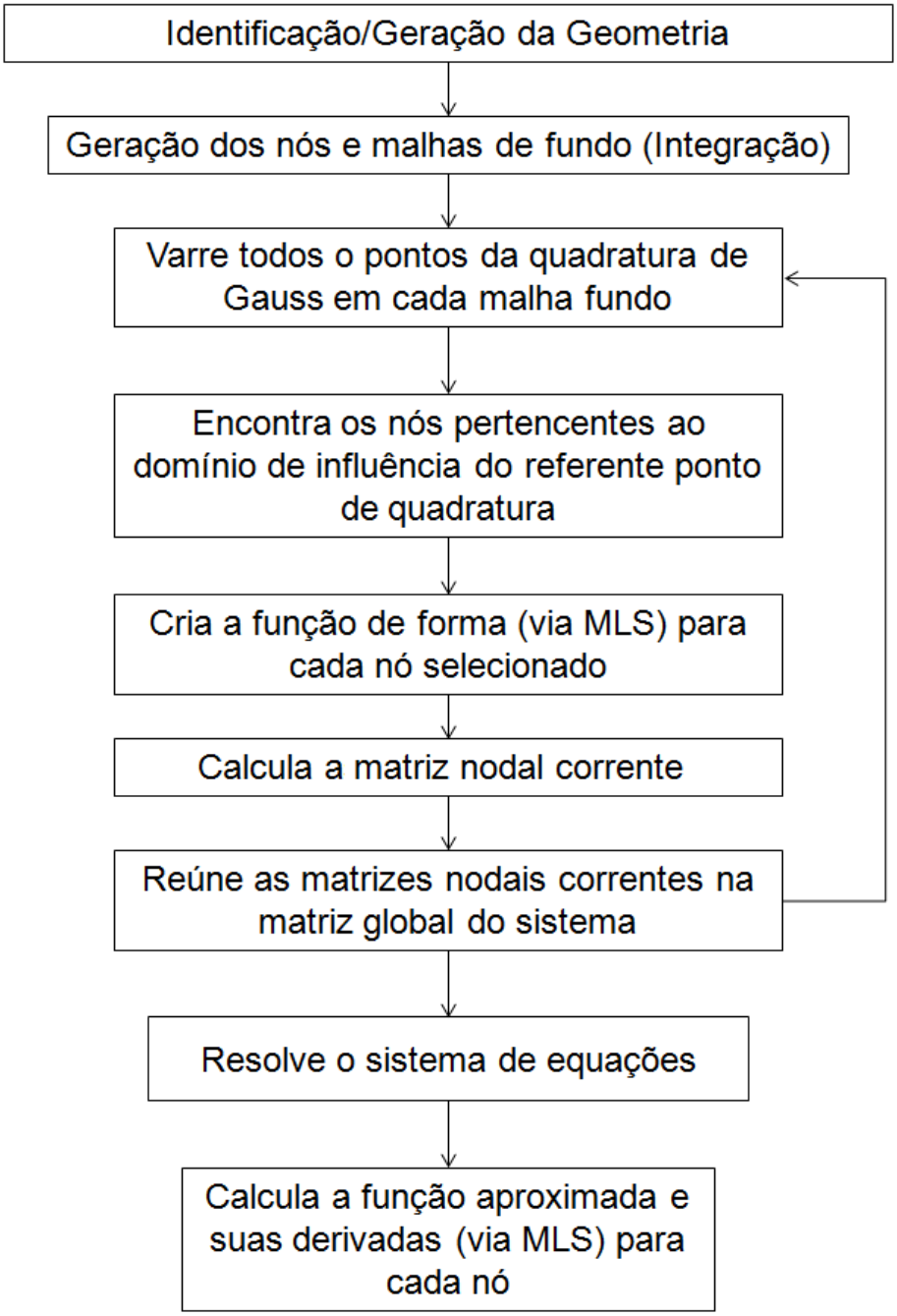

Figura 3.4: *Esquema básico para a construção e aplicação do EFG (adaptado de [Liu , 2010])*

Observa-se que o sistema (3.48), se torna, para tal problema, a expressão - equação (3.54) - representada a seguir:

$$\begin{bmatrix} \nabla\Phi_1 \epsilon \nabla\Phi_1 & \cdots & \nabla\Phi_1 \epsilon \nabla\Phi_{25} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \nabla\Phi_{25} \epsilon \nabla\Phi_1 & \cdots & \nabla\Phi_{25} \epsilon \nabla\Phi_{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.54}$$

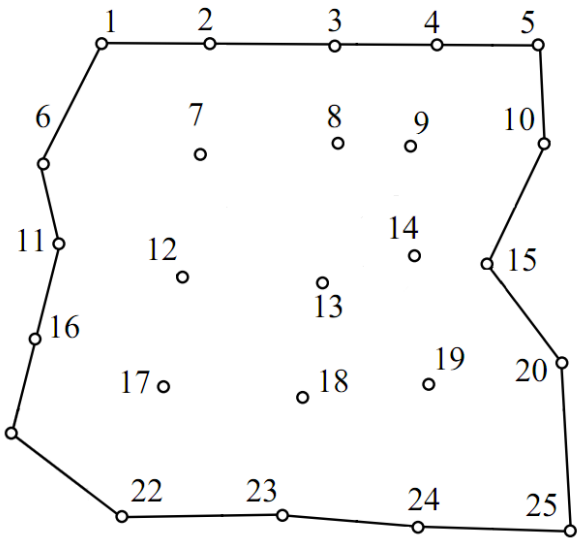

Figura 3.5: *Problema de geometria irregular com uma distribuição de nós arbitrária (adaptado de [Cingoski et al. , 1997])*

Seguindo o esquema representado no começo dessa seção, Figura 3.4 deve-se, agora, gerar malhas de fundo - oriundas do método da quadratura de gauss - definindo, assim, os pontos nos quais ocorrem a integração. Sabe-se que cada ponto deve possuir, associado a ele, um raio de suporte (r) que define o domínio de influência desse ponto. Esse subdomínio engloba os nós do problema que participam da integração. Pode-se, nesse sentido, acrescentar à Figura 3.5 as células de fundo, os pontos de Gauss (representados pela letra x), e o domínio de influência de cada nó. Tem-se, assim, a Figura 3.6.

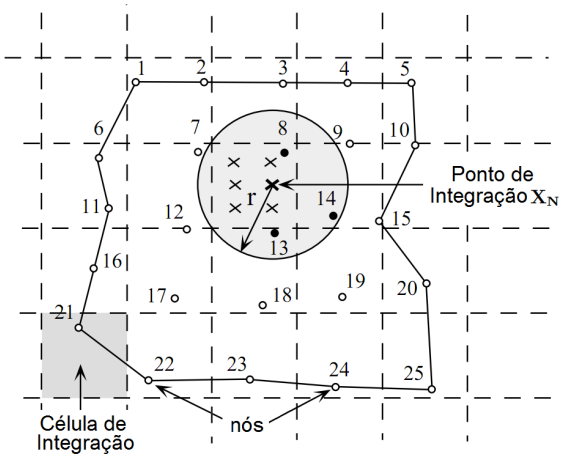

Figura 3.6: *Representação do raio de suporte, ponto de integração e malha de fundo para o primeiro loop (adaptado de [Cingoski et al. , 1997])*

O próximo passo é, então, proceder com o *loop* em cada ponto x de Gauss (denominado por X_N). Percebe-se que existem N *loops* na formulação, ou seja, o número de pontos de gauss definem o número de ciclos.

Ainda segundo o esquema presente na Figura 3.4, percebe-se que o *loop* é dividido em três etapas: definir quais nós se encontram no domínio de influência do ponto X_N em questão; criar as funções de formas Φ e, por fim, determinar a matriz correspondente a cada ponto (matriz $\mathbf{K_{X_N}}$). Por fim, deve-se somar essa matriz local à matriz global ($\mathbf{K}$) do sistema, de forma que:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{K_1} + \mathbf{K_2} + \cdots + \mathbf{K_{X_N}}]_{25\text{x}25} \tag{3.55}$$

Sendo que:

$$\mathbf{K_{X_N}} = [k_{I,J}]_{25\text{x}25} \tag{3.56}$$

Defini-se, ainda, cada elemento da matriz $\mathbf{K_{X_N}}$ pela denominação $k_{I,J}$, de maneira que:

$$k_{I,J} = \nabla\Phi_I \epsilon \nabla\Phi_J \tag{3.57}$$

Para o exemplo sob análise, nota-se que $N = 120$ uma vez que existem vinte células de integração que possuem, dentro de si, um arranjo com seis pontos de Gauss. Verifica-se, ainda, que para o ponto de gauss em destaque (ilustrado na Figura 3.6) os nós 8, 14 e 13 se encontram dentro de seu raio de suporte. Assim, a matriz local gerada dentro desse *loop* é representada por:

$$K_{X_N} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k_{8,8} & 0 & \cdots & 0 & k_{8,13} & k_{8,14} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k_{13,8} & 0 & \cdots & 0 & k_{13,13} & k_{13,14} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k_{14,8} & 0 & \cdots & 0 & k_{14,13} & k_{14,14} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{3.58}$$

Considera-se, agora, a Figura 3.7.

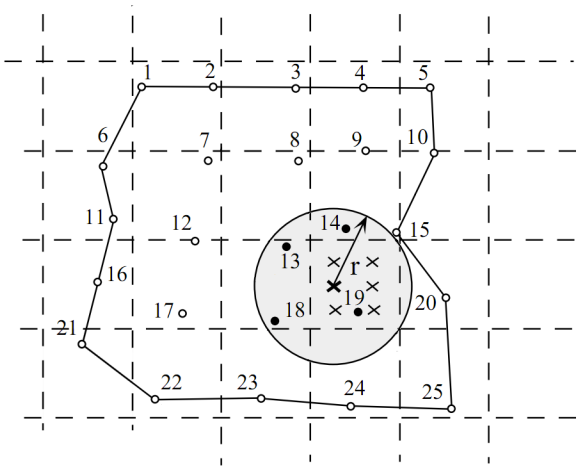

Figura 3.7: *Representação do raio de suporte, ponto de integração e malha de fundo para o segundo loop (adaptado de [Cingoski et al. , 1997])*

Analogamente, pode-se realizar o mesmo procedimento agora para o ponto de gauss destacado na Figura 3.7. A matriz **K** é, então:

$$K_{X_{N+1}} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k_{13,13} & k_{13,14} & 0 & \cdots & 0 & k_{13,18} & k_{13,19} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k_{14,13} & k_{14,14} & 0 & \cdots & 0 & k_{14,18} & k_{14,19} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k_{18,13} & k_{18,14} & 0 & \cdots & 0 & k_{18,18} & k_{18,19} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k_{19,13} & k_{19,14} & 0 & \cdots & 0 & k_{19,18} & k_{19,19} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{3.59}$$

Assume-se nesse momento que todos os *loops* sobre os pontos de integração foram realizados. Observa-se que ao fim desse ciclo, obtém-se uma matriz **K** simétrica, cuja diagonal quase sempre possuirá termos diferentes de zero (pode aparecer algum termo nulo, de acordo com o problema em questão). É necessário, porém, ter cautela para que essa matriz não seja singular, devido a presença de muitos zeros em seus elementos. Por fim, argumenta-se que atitudes como aumentar o número de pontos de gauss assim como variar o raio de suporte contribuem diretamente para a obtenção da não singularidade nessa matriz.

Salientando que, a essa altura da formulação, as funções de forma Φ, assim como suas derivadas, possuem valores definidos, assume-se que os termos $k_{I,J}$ são números conhecidos e, portanto, ao término dos *loops*, tem-se um sistema linear $[\mathbf{K}] * [\mathbf{V}] = 0$ com o número equilibrado de incógnitas e equações.

Ressalta-se que é necessário ainda a imposição das condições de contorno para a solução final do sistema linear. Esse processo depende do método de tratamento que é útilizado: se for feita a escolha pelo MLM, são acrescentadas as matrizes $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{G}$ - equações (3.51) e (3.52) - ao sistema final; se a opção for pelo IMLS, os valores já conhecidos das condições de contorno essenciais são impostos diretamente na matriz $[\mathbf{K}]$, isto é, um nó $k_{I,J}$ que pertença ao contorno das condições essenciais tem o valor desta condição.

Em posse, então, dos vinte e cinco valores pertencentes a matriz de resultados $\mathbf{V}$ pode-se, por fim, calcular a função aproximada que descreverá o comportamento da função desejada V. Para tanto, é comum usar a função de forma obtida pelo MLS (ou IMLS) aplicada à equação discreta do GM - equação 3.27 - para tal aproximação [Liu , 2010].

3.8 Considerações Finais

Neste capítulo foi apresentado o método sem malha EFG de forma a destacar as técnicas numéricas utilizadas para sua formulação geral. Em resumo, pode-se afirmar que a construção do EFG passa pela: criação das funções de forma, com o uso do MLS (ou IMLS); formulação da forma fraca discreta, utilizando o método de Galerkin aplicado ao WRM; imposição das condições de contorno e de interface, quando necessário, empregando o MLM ou o CV, respectivamente; e integração realizada pelo método da quadratura de Gauss. Por fim, mediante análise da formulação do EFG, destaca-se as seguintes características do método:

Muitas técnicas numéricas empregadas no FEM podem ser utilizadas no EFG, resultando, assim, numa transição simplificada de um método para o outro [Coppoli , 2010]. Entretanto, o processo de cálculo das funções de formas e imposição das condições de fronteira, quando necessário, é mais complexo, em termos de implementação, quando comparado ao FEM. Portanto, o EFG é compu-

tacionalmente mais dispendioso [Guedes , 2006].

O EFG possui consistência de ordem k quando é utilizado funções de peso C^k para o cálculo das funções de forma. Pode-se dizer, ainda, que quando obtida a consistência C^1 nas funções de forma (e derivadas) o método tem bons resultados para o cálculo de deformações e tensões [Guedes , 2006]. Comenta-se, ainda, que as condições de contorno essenciais não podem ser impostas diretamente quando as funções de forma não obedecem ao delta de Kronecker.

Capítulo 4

EFG aplicado ao problema eletrostático um: capacitor de placas paralelas

Uma análise significativa sobre um método como o EFG requer, principalmente, uma familiaridade profunda sobre as ferramentas numéricas envolvidas. Sendo assim, optou-se nesta dissertação por fazer uma análise sobre o EFG primeiramente sobre um sistema simples para depois utilizá-lo em um PVC menos trivial.

Nesse sentido, este capítulo apresenta o método EFG aplicado a um problema eletrostático bidimensional: um capacitor de placas paralelas preenchido por dois meios dielétricos distintos. O objetivo é, então, verificar algumas das principais características do EFG, uma vez que utilizando esse método *meshless* em um sistema de fácil solução tais propriedades tendem a aparecer sem influências de fatores externos ao método, como erros numéricos ou mesmo de construção do programa. Assim, as peculiaridades do método podem ser estudadas em sua forma natural, facilitando, assim, a compreensão do porquê de tais ocorrências.

Comenta-se que a configuração do EFG escolhida foi em sua forma mais tradicional, ou seja, com a aproximação realizada pelo MLS e a imposição das condições de contorno essenciais feita pelo MML, como pode ser observado no artigo original do método, Belytschko *et al.* [1994]. É importante argumentar, ainda, que uma eventual comparação entre o EFG com MLS mais o MML e o EFG com IMLS não é realizada neste capítulo específico, uma vez que na literatura pode-se

encontrar estudo bem semelhante, *e.g* Coppoli [2010].

4.1 Apresentação do problema: Capacitor de placas paralelas e dois dielétricos

A obtenção de campo ou potencial elétrico - $\mathbf{E}$ ou V, respectivamente - empregando problemas de valor de contorno são soluções amplamente utilizados na engenharia elétrica. Um exemplo clássico de um PVC deste tipo é o cálculo dessas grandezas elétricas para capacitores com diferentes formas geométricas. Para o capacitor em epígrafe, apresenta-se a seguinte formulação.

4.1.1 Formulação Matemática

Segundo Sadiku [2004], a formulação para um PVC proveniente de um capacitor 2D pode ser obtida a partir da forma diferencial da Lei de Gauss, 4equação (4.1):

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \tag{4.1}$$

Sendo: $\mathbf{D}$ o vetor que representa a densidade de fluxo elétrico e ρ a densidade de carga elétrica

Destaca-se que a relação entre a intensidade e a densidade de campo elétrico é dada por:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \tag{4.2}$$

Sendo: ϵ a permissividade elétrica do meio material

e a relação entre potencial e campo elétrico pode ser obtida por:

$$V = -\int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot dl \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla V \tag{4.3}$$

Aplicando a equação (4.3) e (4.2) na equação (4.1), obtém-se:

$$\nabla \cdot (-\epsilon \nabla V) = \rho \tag{4.4}$$

Percebe-se que a equação (4.4) tem a forma de uma equação de Poisson. Sendo assim, tem-se uma EDP na qual se pode encontrar a função V mediante a solução de um problema de valor de

contorno. Segue-se, então, a formulação do PVC:

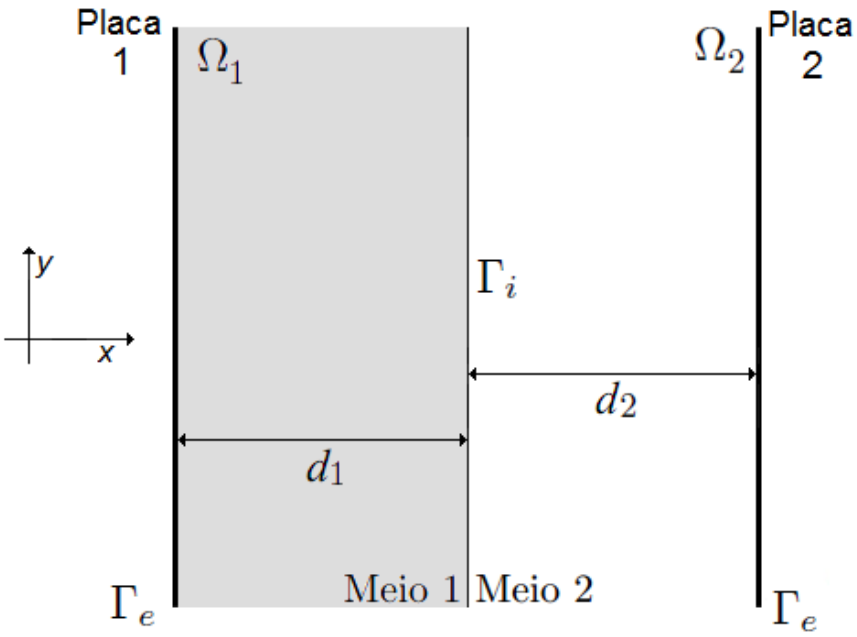

Figura 4.1: *Capacitor de placas paralelas com dois dielétricos distintos*

Considere um capacitor de placas paralelas no sistema de coordenadas retangulares (Figura 4.1) cuja a densidade de carga ρ, no dielétrico, é nula. Para cada meio específico, o potencial elétrico pode ser obtido pela equação de Laplace. Entretanto, para a interface (Γ_i) a permissividade elétrica, ϵ, é descontínua, invalidando assim a premissa da equação (4.4). Portando, para essa fronteira se faz necessário considerar as condições de interface dielétrico-dielétrico [Sadiku , 2004], sendo que, considera-se apenas a componente normal à fronteira Γ_i uma vez que não existe componente de campo transversal para o capacitor ilustrado. Sendo assim:

$$\mathbf{D_1} \cdot \hat{n_1} = \mathbf{D_2} \cdot \hat{n_2} \Rightarrow \mathbf{D_1} \cdot \hat{n_1} - \mathbf{D_2} \cdot \hat{n_2} = 0 \tag{4.5}$$

Sendo: $\hat{n_1}$ e $\hat{n_2}$ vetores unitários normais à fronteira Γ_i correspondentes ao meio 1 e ao meio 2, respectivamente

Substituindo, a equação (4.2) na equação (4.5):

$$\epsilon_1 \mathbf{E_1} \cdot \hat{n_1} - \epsilon_2 \mathbf{E_2} \cdot \hat{n_2} = 0 \tag{4.6}$$

Por fim, o problema de valor de contorno para o capacitor ilustrado na Figura 4.1 é dado por:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\epsilon_m \frac{\partial V(x,y)}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\epsilon_m \frac{\partial V(x,y)}{\partial y}\right) = 0 \qquad \forall x, y \in \Omega_m \quad m = 1, 2 \tag{4.7}$$

Sujeito às condições de contorno de Dirichlet e interface (condição de fluxo nulo), respectivamente:

$$V(x,y) = \begin{cases} V_{01} & \text{para} \quad \text{Placa 1} \\ V_{02} & \text{para} \quad \text{Placa 2} \end{cases} \qquad \forall x, y \in \Gamma_e \tag{4.8}$$

e

$$(-\epsilon \nabla V(x,y)) \cdot \hat{n} = 0 \qquad \forall x, y \in \Gamma_i \tag{4.9}$$

4.1.2 Solução analítica

Considerando os meios materiais homogêneos, lineares e isotrópicos, admitindo, ainda, que para no capacitor ilustrado pela Figura 4.1 não existe variações de potencial V em y (linhas equipotenciais), a solução analítica é dada por:

Para um meio bidimensional qualquer, no qual a permissividade elétrica é dada por ϵ_m, tem-se a equação de Laplace:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\epsilon_m \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\epsilon_m \frac{\partial V}{\partial y}\right) = 0 \tag{4.10}$$

Com variações apenas em x a equação (4.10) transforma-se em:

$$\epsilon_m \frac{d^2 V(x)}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 V}{dx^2} = 0 \tag{4.11}$$

Assim, V pode ser obtido por integração simples, tal que:

$$\int \frac{d^2 V_m(x)}{dx^2} = \int 0 \rightarrow \frac{dV_m(x)}{dx} = A_m \rightarrow \int \frac{dV_m(x)}{dx} = \int A_m \Rightarrow V_m(x) = A_m x + B_m \tag{4.12}$$

Sendo: A_m e B_m constantes a serem determinadas pelas condições de contorno e interface

Assim o potencial em cada meio é dado por:

$$V_m(x) = \begin{cases} A_1 x + B_1 & \text{se} \qquad \epsilon_m = \epsilon_1 \\ A_2 x + B_2 & \text{se} \qquad \epsilon_m = \epsilon_2 \end{cases} \tag{4.13}$$

Pela condição de contorno Dirichlet, tem-se que:

$$V_1(x=0) = V_{01} \;\text{ e }\; V_2(x = d_1 + d_2) = V_{02} \tag{4.14}$$

E pela condição de interface, observa-se que:

$$|\epsilon_1 \mathbf{E_1}| - |\epsilon_2 \mathbf{E_2}| = 0 \rightarrow \epsilon_1 \frac{dV_1(x)}{dx} = \epsilon_2 \frac{dV_2(x)}{dx} \Rightarrow \tag{4.15}$$

Verifica-se que na interface o potencial deve ser o mesmo, assim:

$$V_1(x = d_1) = V_2(x = d_1) \tag{4.16}$$

Tem-se, então, um sistema com quatro equações - duas equações em (4.14), uma em (4.15) outra em (4.16) - e quatro incógnitas. Pode-se resolvê-lo da seguinte maneira:

$$V_1(x = 0) = V_{01} \rightarrow A_1(0) + B_1 = V_{01} \Rightarrow B_1 = V_{01} \tag{4.17}$$

Também:

$$\epsilon_1 \left| \frac{dV_1(x)}{dx} \right| = \epsilon_2 \left| \frac{dV_2(x)}{dx} \right| \rightarrow \epsilon_1 A_1 = \epsilon_2 A_2 \Rightarrow A_1 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} A_2 \tag{4.18}$$

Ainda:

$$V_2(x = d_1 + d_2) = V_{02} \rightarrow A_2(d_1 + d_2) + B_2 = V_0 \Rightarrow B_2 = V_{02} - A_2(d_1 + d_2) \tag{4.19}$$

Por fim:

$$V_1(x = d_1) = V_2(x = d_1) \rightarrow A_1 d_1 + B_1 = A_2 d_1 + B_2 \tag{4.20}$$

Substituindo as equações (4.18) e (4.19) na equação (4.20), tem-se que:

$$A_1 d_1 + B_1 = A_2 d_1 + B_2 \rightarrow \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} A_2 d_1 = A_2 d_1 + V_{02} - A_2(d_1 + d_2) - V_{01} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow A_2(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} d_1 - d_1 + d_1 + d_2) = (V_{02} - V_{01}) \Rightarrow A_2 = \frac{(V_{02} - V_{01})}{\left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} d_1 + d_2\right)} \tag{4.21}$$

Com o valor de A_2 pode-se encontrar A_1 e B_2 nas equações (4.18) e (4.19), portanto:

$$A_1 = \frac{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}(V_{02} - V_{01})}{(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} d_1 + d_2)} \Rightarrow A_1 = \frac{\epsilon_2(V_{02} - V_{01})}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2} \tag{4.22}$$

e

$$B_2 = V_{02} - \frac{(V_{02} - V_{01})}{(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} d_1 + d_2)}(d_1 + d_2) \rightarrow B_2 = V_{02}(1 - \frac{\epsilon_1(d_1 + d_2)}{(\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2) - \frac{V_{01}}{(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} d_1 + d_2)}(d_1 + d_2)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow B_2 = (V_{02} - V_{01}) \left(\frac{\epsilon_2 d_1 - \epsilon_1 d_1}{(\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2)} \right) \tag{4.23}$$

A solução analítica final, para o potencial elétrico, é então dada por:

$$V_1(x) = \frac{\epsilon_2 (V_{02} - V_{01})}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2} x + V_{01} \tag{4.24}$$

e

$$V_2(x) = V_{01} + \frac{\epsilon_1 (V_{02} - V_{01})}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2} x + (V_{02} - V_{01}) \left(\frac{\epsilon_2 d_1 - \epsilon_1 d_1}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2} \right) \tag{4.25}$$

Sendo que o módulo do campo elétrico uniforme é dado por:

$$|E_1(x)| = \frac{\epsilon_2 (V_{02} - V_{01})}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2} \tag{4.26}$$

e

$$|E_2(x)| = \frac{\epsilon_1 (V_{02} - V_{01})}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2} \tag{4.27}$$

4.2 Pontos a serem observados no EFG

Antes de apresentar a solução numérica para o problema proposto, faz-se algumas ponderações sobre determinadas precauções que devem ser tomadas na formulação geral do EFG, principalmente no que diz respeito à singularidade da matriz **K** - equação (3.48) - pertencente ao sistema linear discreto final.

Segundo Liu [2010], a singularidade da matriz **K** se deve, entre outros fatos, a adoção de poucos pontos de integração comparado aos nós de discretização. Mais precisamente, Liu [2010] explica que para uma matriz não singular o número de pontos de integração deve ser maior que, aproximadamente, 67% do número de nós.

Outro parâmetro que afeta a singularidade da matriz **K** é o tamanho do domínio de influência dos pontos de integração. Um pequeno raio de suporte implica em um baixo número de nós englobados pelo domínio de influência em questão. Segundo Belytschko *et al.* [1994] e Belytschko e Dolbow [1998], em prol de controlar o tamanho do raio de suporte r acrescenta-se uma constante de proporcionalidade α (vide Figura 3.1) à esse, sendo que $1 \leq \alpha \leq 4$. É igualmente importante apontar que altos valores de α (*e.g.* $\alpha > 4$) também podem levar a uma solução ineficaz do EFG devido a

erros causados pela extrapolação [Liu , 2010].

Nesse sentido, é possível observar quais precauções podem ser tomadas para a construção correta do EFG, o que pode auxiliar em uma análise paramétrica de um sistema mais complexo.

4.3 Resultados

Para a análise do EFG proposta nesta seção, optou-se discorrer sobre tal da seguinte forma: primeiramente, é apresentado de que maneira é analisado o erro presente na diferença das soluções obtidas pelo método e pela solução analítica. Posteriormente, é demonstrada uma solução numérica que serve de padrão (denominada solução base) para a análise das características do EFG citadas na Seção 4.2. Por fim, é feita a avaliação dessas características.

Para a solução do problema proposto foi desenvolvido um algoritmo na plataforma $MATLAB^{©}$ (versão 7.10.0 2010a) e para o processamento do programa foi utilizado um computador com a seguinte configuração: fabricante Dell; modelo Latitude E6520; processador Intel(R) Core(TM) i7-2620M CPU @ 2,70GHz; memória instalada (RAM) de 4,00GB; sistema operacional $Windows^{©}$7 de 64 Bits.

4.3.1 Análise de erro: as normas de Lesbegue e Hilbert

Uma maneira de verificar a eficácia de um método numérico é confrontar a sua resposta com uma solução confiável. Para casos de problemas que possuem solução analítica, a mesma pode ser utilizada como parâmetro de comparação. Uma maneira de fazer tal aferição é apresentar a diferença numérica entre as duas soluções, ou seja, o erro entre as mesmas. Para o potencial elétrico $V(x)$, por exemplo, esse erro pode ser apresentado como uma função dos valores numérico e analítico. Assim:

$$e(x) = V_{num}(x) - V_{ana}(x) \tag{4.28}$$

Sendo: $V_{num}(x)$ e $V_{ana}(x)$ a função potencial elétrico numérica (solução EFG) e analítica, respectivamente

Entretanto, essa apresentação desse erro pode ocasionar uma interpretação indesejada dos resultados. Por exemplo, se for apresentado apenas um erro médio dos valores, esse resultado pode ocultar um ponto que esteja destoando dos demais. Em contra partida, se for demonstrado apenas o erro máximo entre os valores, é possível que não se tenha a noção do comportamento da função como

um todo.

Sendo assim, uma maneira de apresentar o erro de forma a ter uma significativa informação sobre o mesmo é utilizar o conceito de medida das normas de Lesbegue e Hilbert, apresentadas na Seção 2.1.3. A norma de Lesbegue ($\mathbb{L}^2$) - equação (2.10) - realiza uma integração de todos os erros pontuais envolvidos, apresentando, assim, uma noção do comportamento geral do erro. Já a norma de Hilbert ($\mathbb{H}^1$) - equação (2.13) - apresenta uma análise sobre a derivada primeira do erro envolvido. Portanto, é possível distinguir se existem algum valor discrepante dos demais, uma vez que a derivada apontará um alto valor para uma variação brusca no erro. A função erro nas normas $\mathbb{L}^2$ e $\mathbb{H}^1$, respectivamente, é representada por:

$$\|e(x)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega e(x)^2 d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.29}$$

e

$$\|e(x)\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega \left(\frac{de(x)}{dx}\right)^2 d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega e(x)^2 d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.30}$$

Salienta-se, então, que um erro que apresente baixos valores nas normas $\mathbb{L}^2$ e $\mathbb{H}^1$ é considerado confiável, uma vez que o seu comportamento geral e local pode ser observado pela análise dessas normas. Exemplos de aplicação das normas de Lesbegue e Hilbert podem ser verificados nos estudos de Bosing [2006] e Schuh [2007].

4.3.2 Solução numérica base

Para verificar as características citadas na Seção 4.2 é preciso determinar alguns parâmetros que são comuns a todas as variações realizadas, *i.e.* número de nós no domínio, função janela utilizada, tipo de imposição das condições de contorno. A solução que contém tais parâmetros é denominada, neste trabalho, como solução base pois essa serve de padrão para as comparações realizadas.

Não obstante, é necessário também definir o problema em si, ou seja a sua geometria no plano cartesiano assim como os valores que definem os dielétricos usados e as condições de contorno. Sendo assim, considerando o capacitor ilustrado na Figura 4.1, define-se:

- O capacitor se encontra no plano cartesiano 2D cuja ordenada é representada pela letra y e a abscissa pela letra x. A posição de um ponto no plano é definida pela designação (x, y);

- A placa 1 é representada por um segmento de reta limitado pelos pontos $(0, \frac{1}{2})$ e $(0, -\frac{1}{2})$. O Potencial nessa placa é de um Volt (1V);
- A placa 2 é representada por um segmento de reta limitado pelos pontos $(1, \frac{1}{2})$ e $(1, -\frac{1}{2})$. O Potencial nessa placa é de dois Volts (2V);
- A fronteira entre os diferente dielétricos (interface material) é designada por um segmento de reta limitado pelos pontos $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Sendo assim, tem-se que $d_1 = d_2 = \frac{1}{2}$;
- O meio 1, delimitado pela placa 1 e a interface material, tem a permissividade relativa igual a um, $\epsilon_1 = \epsilon_0$[1];
- O meio 2, delimitado pela interface material e a placa 2, tem a permissividade relativa igual a quatro, $\epsilon_2 = 4\epsilon_0$;

Sobre a construção do método pode-se dizer:

- São utilizados cento e vinte e um (121) nós - representados pelas coordenadas (x_x, x_y) - em uma distribuição uniforme e retangular;
- Em termos dos pontos de integração, são utilizadas setecentos e oitenta e quatro (784), distribuídos em quarenta e nove células com dezesseis pontos cada - representados pelas coordenadas (a_x, a_y) - com a distribuição também uniformemente retangular;
- O número de pontos de integração é, aproximadamente, 650% maior que o número de nós;
- A constante de proporcionalidade utilizada para definir o tamanho do raio de suporte r (domínio de influência) tem o valor dois ($\alpha = 2$);
- Presente em Coppoli [2010], a função janela utilizada no MLS é a equação (4.31):

$$\widehat{W}_I(R) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4R^2 + 4R^3 & \text{se} \quad R \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4R + 4R^2 - \frac{4}{3}R^3 & \text{se} \quad \frac{1}{2} < R \leq 1 \\ 0 & \text{se} \quad R > 1 \end{cases} \tag{4.31}$$

sendo $R = \frac{|x_x - a_x||x_y - a_y|}{r^2}$

- Foi utilizado o método dos multiplicadores de Lagrange para impor as condições de contorno essenciais;
- Foi utilizado critério da visibilidade para o tratamento na descontinuidade entre os meios 1 e 2.

[1] ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo e tem o valor numérico de $8,85418782 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$

Tendo em vista, então, o problema proposto e o algoritmo desenvolvido, as soluções obtidas são apresentadas nas Figuras 4.2 e 4.3, sendo que os erros encontrados podem ser observados na Tabela 4.1:

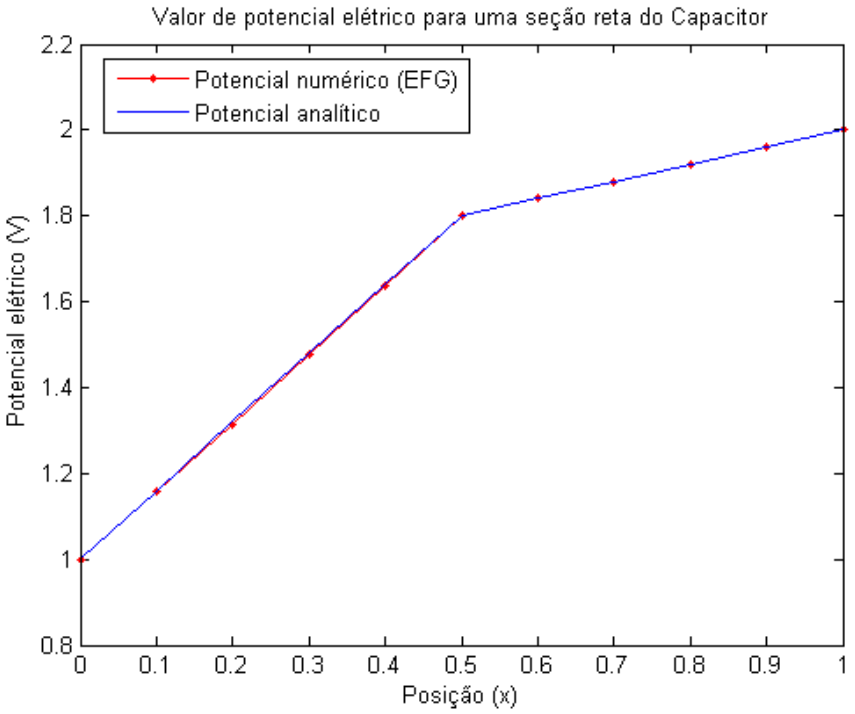

Figura 4.2: *Potencial elétrico para o capacitor de placas paralelas, analítico e numérico, obtido pelo EFG (Solução Base)*

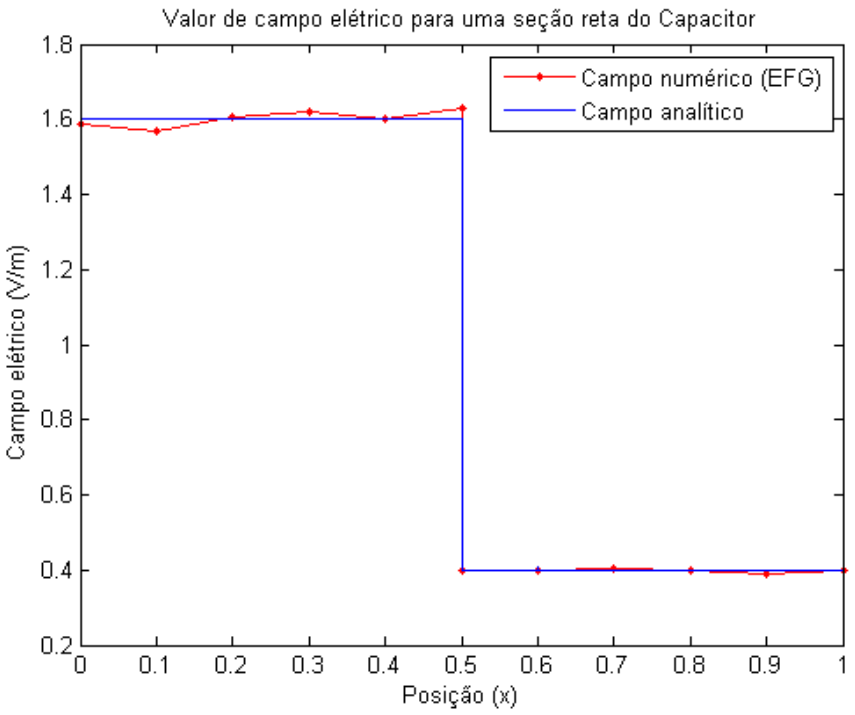

Figura 4.3: *Campo elétrico para o capacitor de placas paralelas, analítico e numérico, obtido pelo EFG (Solução Base)*

Parâmetro	Valor
Erro em $\mathbb{L}^2$ para potencial	$0,0027$
Erro em $\mathbb{H}^1$ para potencial	$0,1071$
Erro em $\mathbb{L}^2$ para campo	$0,1071$

Tabela 4.1: *Tabela com valores de erro nas normas de Lesbegue e Hilbert para o potencial e o campo calculado pelo método EFG e referente ao capacitor Figura 4.1 (Solução base)*

Infere-se que as soluções apresentadas possuem valores eficazes quando comparadas à resposta analítica. Vale ressaltar que as normas dos erros apresentadas realizam a integração em todo o domínio do problema, ou seja, todos os pontos calculados contribuem para o valor do erro. Portanto, pode-se afirmar que erros com ordem de grandeza de um décimo ou um centésimo revelam uma boa eficiência do EFG, uma vez que a ordem de grandeza envolvida é uma unidade.

Destaca-se, também, que os gráficos de potencial e campo elétrico demonstrados, Figuras 4.2 e 4.3, ilustram uma seção reta entre as placas do capacitor (define-se um valor de y constante e varia-se x). Essa medida foi tomada para apresentar o gráfico em 2D, uma vez que a informação sobre todos os nós pode ser observada nos valores de erro. Comenta-se que tal representação não interfere no valor de erro, uma vez que o mesmo é calculado utilizando pontos em todo o domínio do capacitor, sendo assim, a eficiência do método não é afetada pela baixa amostragem.

Observa-se, ainda, que o valor de erro do potencial na norma $\mathbb{H}^1$ se assemelha ao valor de erro do campo na norma $\mathbb{L}^2$. Isso ocorre pois, nesse problema, o campo é derivada primeira do potencial (equação 4.3) o que também ocorre com a norma $\mathbb{H}^1$ que é derivada primeira de $\mathbb{L}^2$. Sendo assim, para análises de erros posteriores desta dissertação o erro de campo na norma $\mathbb{L}^2$ não é apresentado, uma vez que o erro na norma $\mathbb{H}^1$ demonstra um significado semelhante.

4.3.3 Influência do tamanho do raio de suporte (domínio de influência)

O objetivo desta subseção é verificar de que forma o tamanho do domínio de influência pode afetar a eficácia do EFG. Para tanto, foram testados setenta e seis valores de α, sendo a variação feita em uma unidade de décimo no qual o primeiro valor foi $\alpha = 0,5$ e o último $\alpha = 8,0$. Os valores de erros obtidos são ilustrados na Figura 4.4.

Para os resultados obtidos comenta-se: (1) para os valores de $\alpha = 0,5$ até $\alpha = 1,0$ o $MATLAB^{©}$ foi incapaz de calcular devido à singularidade da matriz $\mathbf{K}$, consequentemente, as normas são apresentadas de $\alpha = 1,1$ até $\alpha = 8,0$. (2) Observa-se que os valores aplicáveis de α estão entre os

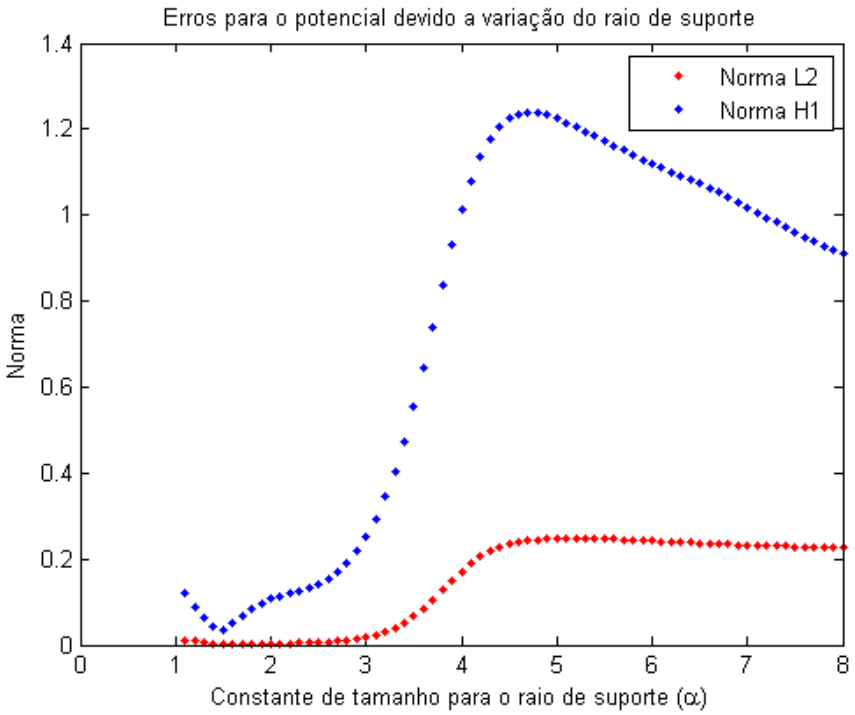

Figura 4.4: *Erro pela variação de tamanho do raio de suporte (capacitor de placas paralelas)*

números um e quatro conforme citado por Belytschko *et al.* [1994], Belytschko e Dolbow [1998] e Liu [2010].

Vale destacar que se por um lado o erro para pequenos domínios de influência acontecem pelo mal condicionamento da matriz **K**, o erro de extrapolação (segundo Liu [2010]) não é de trivial observação. Para ilustrar, então, o porquê desses erros discrepantes para valores de $\alpha > 3,5$ pode-se verificar a solução numérica do EFG para dois pontos $\alpha = 5$ (Figura 4.5) e $\alpha = 7$ (Figura 4.6).

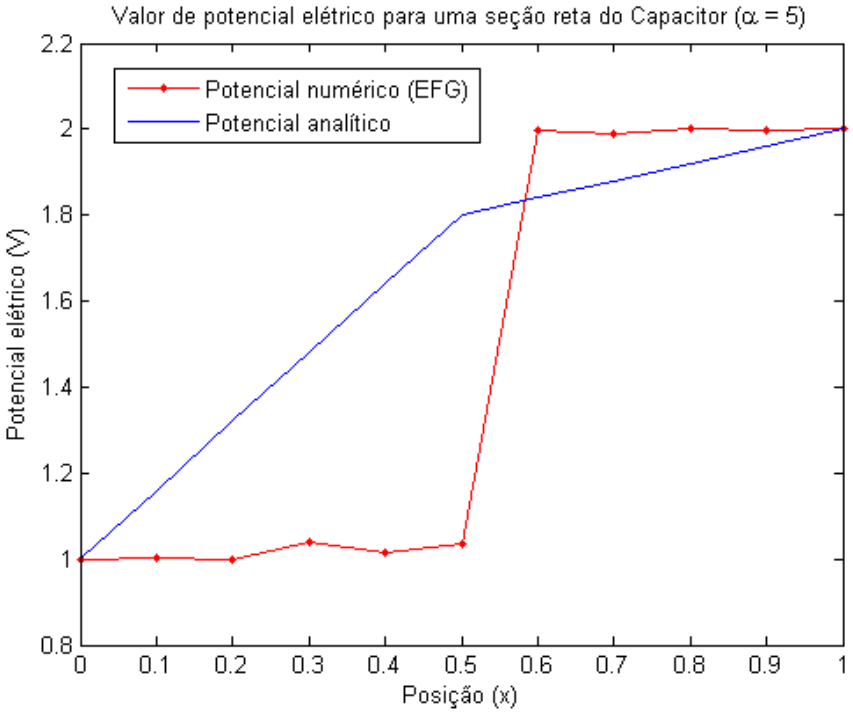

Figura 4.5: *Potencial elétrico para o capacitor de placas paralelas, analítico e numérico, obtido pelo EFG para* $\alpha = 5$

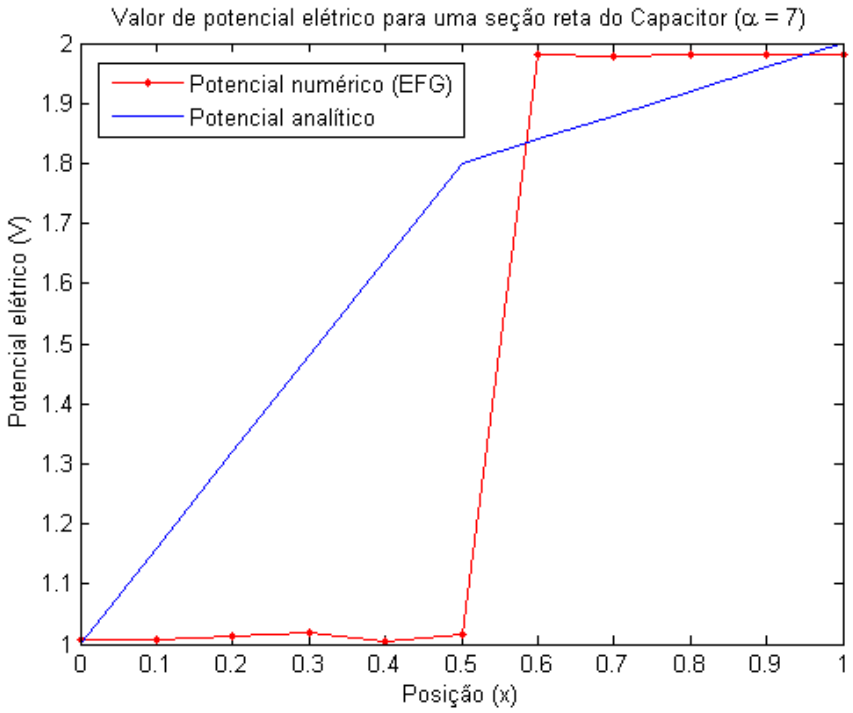

Figura 4.6: *Potencial elétrico para o capacitor de placas paralelas, analítico e numérico, obtido pelo EFG para* $\alpha = 7$

Observa-se, mediante análise das Figuras 4.5 e 4.6, como a extrapolação do raio de suporte pode interferir negativamente na resposta final do método. Pode-se citar, por exemplo, o visível não cumprimento das condições de contorno mesmo com a tentativa de imposição feita pelo método dos multiplicadores de Lagrange (Figura 4.6). Verifica-se, assim, que grandes domínios de influência acabam trazendo para a matriz final valores indesejados, como é o caso ilustrado nas figuras no qual os valores da fronteira influenciam diretamente mesmo em nós distantes. Conclui-se, então, que é extremamente importante escolher um domínio de influência que não seja tão pequeno que não cause a singularidade do sistema matricial final, mas que também não seja tão grande a ponto de causar a extrapolação de valores na resposta final.

4.3.4 Influência da relação entre o número de nós e os pontos de integração

Nesta subseção é verificada a influência da relação entre o número de pontos de integração e o número de nós na solução final do EFG. Para tanto, é fixado o número de nós (cento e vinte um conforme utilizado na Seção 4.3.2) e varia-se o número de pontos de integração. Ressalta-se que essa variação é feita no número de malhas de fundo e não no número de pontos em si, uma vez que o algoritmo foi desenvolvido para ter o número de células como entrada. Isso acarreta em um número limitado de variações dos pontos de integração, uma vez que as malhas de fundo são igualmente espaçadas no domínio.

São testadas dez possibilidades de relação entre os pontos de integração e o número de nós (abreviada pela sigla RPN - Relação Pontos Nós), sendo que essa diferença é expressa em porcentagem, ou seja, uma RPN de 200% significa que o número de pontos é 200% maior que o número de nós.

Ressalta-se que é ilustrado um gráfico com escala logarítmica (Figura 4.7) no eixo y para uma melhor análise sobre os baixos valores de erro nas normas utilizadas. Optou-se, ainda, por não apresentar RPN com valores maiores que 1000%, uma vez que pensar um algoritmo construído com tantos *loops*, mesmo para um sistema mais simples, onera muito o processamento.

Observa-se que os valores abaixo de 67%, conforme argumentado por Liu [2010], apresentam altos valores de erro nas normas $\mathbb{L}^2$ e $\mathbb{H}^1$, e consequentemente, erros provenientes de uma RPN alta, acima de 100%, possuem baixos valores. Percebe-se que o erro equivalente à RPN de 330,58% possui um menor valor de erro associado, entretanto, verifica-se que a curva correspondente se-

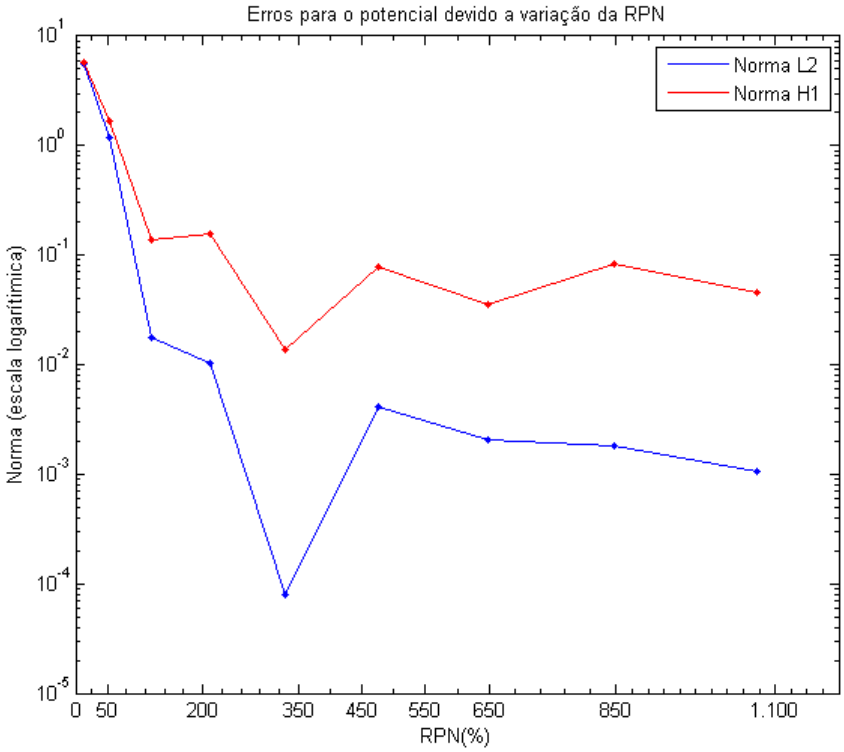

Figura 4.7: *Erro pela variação da relação entre pontos e nós (capacitor de placas paralelas)*

gue um comportamento esperado: atinge a estabilidade após um valor de RPN que garante a não singularidade da matriz **K**.

4.3.5 Proposta de solução numérica com EFG otimizado

Mediante a análise dos resultados anteriores, Seções 4.3.3 e 4.3.4, observa-se a possibilidade de utilizar valores de α e RPN que possam levar a uma eventual solução mais eficaz, ou seja de menor erro.

Assim, aplicando o valor de RPN próximo a 330% (400 pontos e 121 nós) e um raio de suporte definido pela constante $\alpha = 1,5$ (resultados que proporcionam nos menores erros, segundo Figuras 4.4 e 4.7) ao sistema apresentado na Seção 4.3.2, tem-se as respostas para potencial e campo elétrico, ilustradas nas Figuras 4.8 e 4.9, sendo os erros apresentados na Tabela 4.2.

Parâmetro	Valor
Erro em $\mathbb{L}^2$ para potencial	$8,0400 \cdot 10^{-5}$
Erro em $\mathbb{H}^1$ para potencial	$0,0139$

Tabela 4.2: *Tabela com valores de erro nas normas de Lesbegue e Hilbert para o potencial e o campo calculado pelo método EFG (após análise de parâmetros) e referente ao capacitor Figura 4.1 (Solução ótima)*

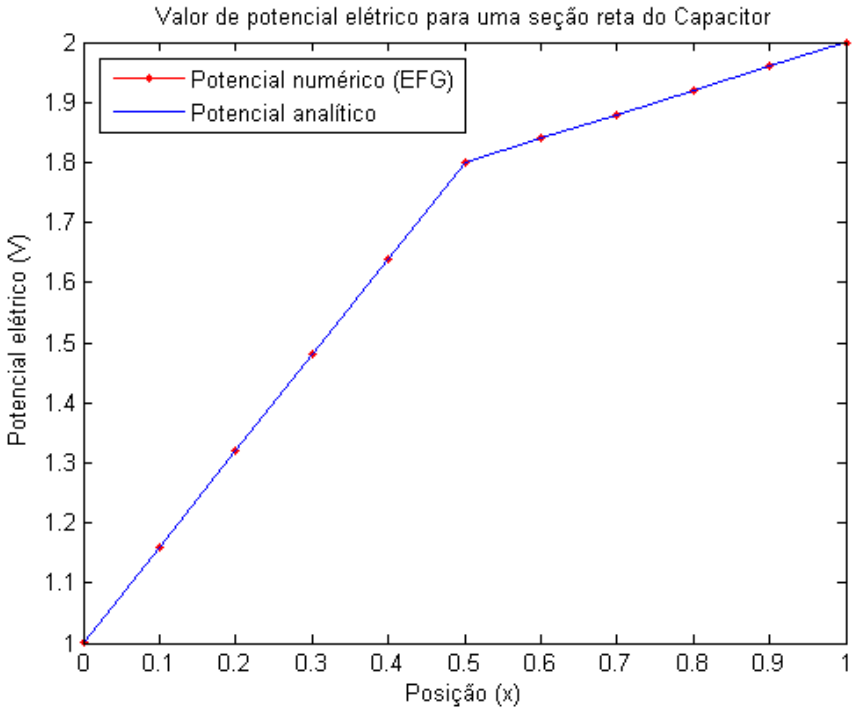

Figura 4.8: *Potencial elétrico para o capacitor de placas paralelas, analítico e numérico, obtido pelo EFG (após análise de parâmetros)*

Verifica-se que os erros obtidos apresentam valores excelentes. Observa-se, ainda, que tanto o potencial quanto o campo elétrico, numéricos, para a seção reta do capacitor ilustrada nas Figuras 4.8 e 4.9, apresentam resultados semelhantes ao analítico. Infere-se, então, que mediante uma análise do comportamento da solução numérica quando varia-se certos parâmetros do EFG é possível obter uma resposta otimizada, ou seja, encontra-se certos valores de entrada desse método que podem ser modificados em prol de se obter uma solução mais eficaz do problema.

4.4 Considerações Finais

Neste capítulo foi aplicado o método EFG a um problema eletrostático (capacitor de placas paralelas preenchido por dois meios dielétricos distintos). Verificou-se o peso que algumas características do EFG, ratificadas e estudadas na literatura, têm sobre o resultado final do método.

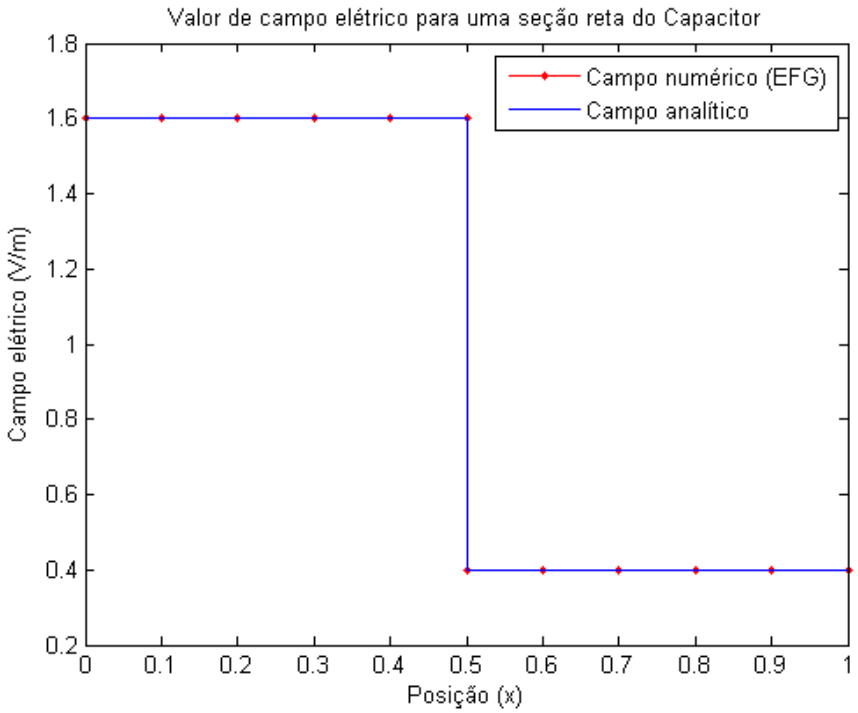

Figura 4.9: *Campo elétrico para o capacitor de placas paralelas, analítico e numérico, obtido pelo EFG (após análise de parâmetros)*

Observa-se que o método EFG é capaz de reproduzir uma solução eficaz, uma vez que os erros obtidos (Seções 4.3.5 e 4.3.2) apresentam baixos valores, comparados com a ordem de grandeza das variáveis do problema em questão. Salienta-se, ainda, que as simulações realizadas em prol de encontrar a função aproximada de campo e potencial, tal como nas Seções 4.3.5 e 4.3.2 apresentaram valores de tempo de simulação próximo a um segundo.

Conclui-se que o tamanho do domínio de influência, assim como a relação entre o número de pontos de quadratura e o número de nós são parâmetros do EFG, influenciam diretamente na eficiência da resposta obtida por esse método. Por fim, infere-se que uma análise paramétrica do EFG pode auxiliar numa possível otimização desse método, uma vez que o estudo das propriedades apresentadas na Seção 4.3.1 fomentou de forma direta na melhoria da aplicação dessas propriedades aperfeiçoando, consequentemente, a resposta final do EFG.

Capítulo 5

EFG aplicado ao problema eletrostático dois: capacitor cilíndrico

Nos capítulos prévios dessa dissertação é possível observar importantes aspectos acerca do método Elemento Livre de Galerkin, desde a contextualização histórica de criação do mesmo, passando pela sua formulação detalhada até a aplicação desse a um problema simples, fato que permite verificar características significativas desse método. Com base, então, nesse subsídio reunido, torna-se viável uma análise mais profunda do EFG, uma vez que existe uma familiaridade maior com a ferramenta, facilitando, assim, as devidas ponderações sobre a mesma.

Sendo assim, neste capítulo o método EFG é utilizado em um sistema mais complexo comparado ao Capítulo 4, um capacitor cilíndrico preenchido por dois dielétricos diferentes e concêntricos. O objetivo é verificar o comportamento do EFG quando o mesmo é empregado a um PVC mais complexo. Para tanto, são feitas análises semelhantes às presentes nas Seções 4.3.3 e 4.3.4, além de uma avaliação adicional: o comportamento dos valores de erro para uma variação no número de nós. Comenta-se, ainda, que a formulação escolhida para o EFG foi com a utilização do IMLS para a construção das funções de forma, uma vez que esse método proporciona menor complexidade de programação (devido a não necessidade de um método para a imposição das condições de contorno) e tempo de execução (uma vez que existem menos matrizes no sistema de equações final).

Salienta-se, também, que o sistema escolhido é pouco abordado na aplicação de métodos sem malha no eletromagnetismo. Mesmo a solução analítica de potencial e campo elétrico para tal capacitor é pouco explorada na literatura tradicional. Nesse sentido, é também objetivo deste capítulo poder

contribuir com mais um sistema eletromagnético resolvido por um método *meshless*.

5.1 Apresentação do problema: Capacitor 2D cilíndrico dois dielétricos distintos

Um PVC oriundo de um capacitor 2D cilíndrico com dois dielétricos distintos e concêntricos pode ser formulado como a seguir.

5.1.1 Formulação Matemática

A Figura 5.1 representa a seção 2D de um capacitor cilíndrico preenchido por dois meios diferentes (lineares, homogêneos e isotrópicos) e com uma densidade superficial de carga nula em ambos dielétricos, $\rho_s = 0$. Salienta-se que o comprimento do cilindro que representa tal capacitor é considerada muito maior que o raio externo ρ_b e, consequentemente,o problema pode ser analisado em duas dimensões.

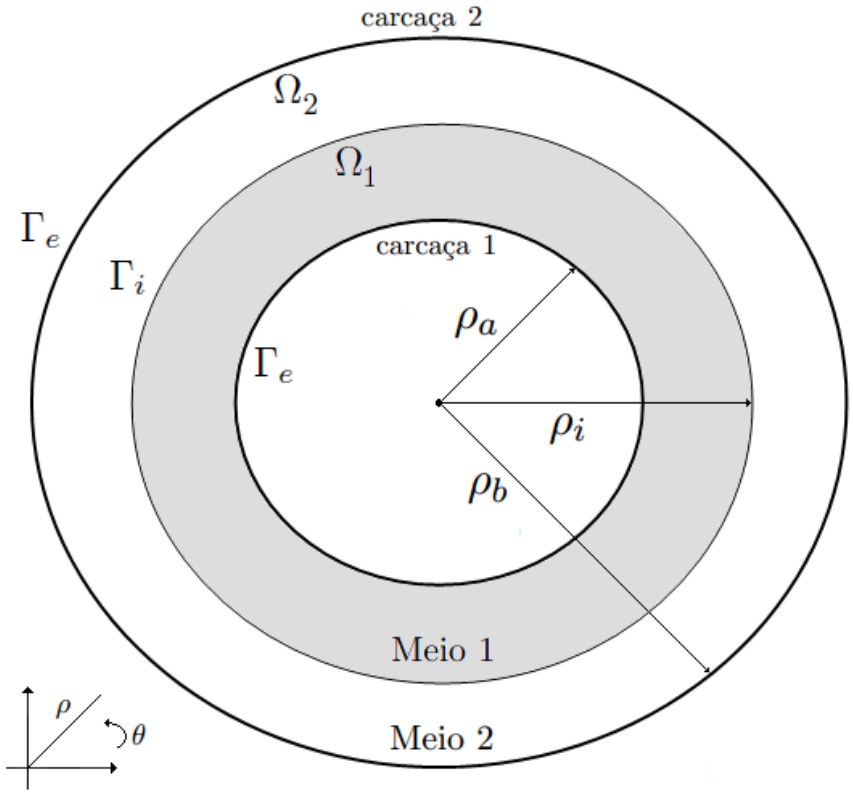

Figura 5.1: *Capacitor cilíndrico com dois dielétricos distintos e concêntricos*

Para determinar o potencial e o campo elétrico presentes no capacitor ilustrado pela Figura 5.1, devido a potenciais pré estabelecidos nas carcaças 1 e 2 e condições de contorno essenciais, deve-se resolver um problema de valor de fronteira proveniente da equação de Laplace.

Analogamente ao capacitor de placas paralelas, considera-se o PVC apresentado na seção 4.1.1 - equações (4.7 à 4.9) - entretanto em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(-\epsilon\rho\frac{\partial V(\rho,\theta)}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\epsilon\frac{\partial V(\rho,\theta)}{\partial\theta}\right)=0 \tag{5.1}$$

Sujeito às condições de contorno:

$$V(\rho,\theta)=\begin{cases} V_{01} & \text{para} \quad \text{Carcaça 1} \\ V_{02} & \text{para} \quad \text{Carcaça 2} \end{cases} \qquad \forall\rho,\theta\in\Gamma_e \tag{5.2}$$

e

$$(-\epsilon\nabla V(\rho,\theta))\cdot\hat{n_1}=0 \qquad \forall\rho,\theta\in\Gamma_i \tag{5.3}$$

5.1.2 Solução Analítica

Para o capacitor cilíndrico não há variações em θ, portanto a equação (5.1) transforma-se em:

$$\frac{d}{d\rho}\left(\epsilon_m\rho\frac{dV(\rho)}{d\rho}\right)=0\Rightarrow\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dV(\rho)}{d\rho}\right)=0 \qquad \forall\rho,\theta\in\Omega_m \quad m=1,2 \tag{5.4}$$

A solução genérica da equação (5.2) pode ser encontrada integrando-a por duas vezes, assim:

$$\int\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dV(\rho)}{d\rho}\right)d\rho=\int 0d\rho\rightarrow\rho\frac{dV_m(\rho)}{d\rho}=C_m\rightarrow\frac{dV_m(\rho)}{d\rho}=\frac{C_m}{\rho}\rightarrow\cdots$$

$$\cdots\rightarrow\int\frac{dV_m(\rho)}{d\rho}d\rho=\int\frac{C_m}{\rho}d\rho\Rightarrow V_m(\rho)=C_m\ln\rho+D_m \tag{5.5}$$

Sendo: C_m e D_m constantes a serem determinadas pelas condições de contorno e interface

Assim, o potencial em cada meio é dado por:

$$V_m(\rho)=\begin{cases} C_1\ln\rho+D_1 & \text{se} \qquad \epsilon_m=\epsilon_1 \\ C_2\ln\rho+D_2 & \text{se} \qquad \epsilon_m=\epsilon_2 \end{cases} \tag{5.6}$$

Pela condição de contorno Dirichlet, tem-se que:

$$V_1(\rho=\rho_a)=V_{01} \;\text{ e }\; V_2(\rho=\rho_b)=V_{02} \tag{5.7}$$

E pela condição de interface, observa-se que:

$$|\epsilon_1 \mathbf{E_1}| - |\epsilon_2 \mathbf{E_2}| = 0 \Rightarrow \epsilon_1 \frac{dV_1(\rho)}{d\rho} = \epsilon_2 \frac{dV_2(\rho)}{d\rho} \tag{5.8}$$

Verifica-se que na interface o potencial deve ser o mesmo, assim:

$$V_1(\rho = \rho_i) = V_2(\rho = \rho_i) \tag{5.9}$$

Seguindo a formulação apresentada para o capacitor de placas paralelas (Capítulo 4), os valores de C_1, D_1 são obtidos, respectivamente:

$$C_1 = \frac{V_{01} - V_{02}}{\ln \frac{\rho_i}{\rho_a} + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right) \ln \frac{\rho_b}{\rho_i}} \tag{5.10}$$

e

$$D_1 = V_{01} + C_1 \left(\ln \rho_i - \epsilon_1 \ln \frac{\rho_i}{\rho_a} \right) \tag{5.11}$$

Por fim, são obtidas, também as constantes C_2 e D_2:

$$C_2 = \frac{V_{01} - V_{02}}{\left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right) \ln \frac{\rho_i}{\rho_a} + \ln \frac{\rho_b}{\rho_i}} \tag{5.12}$$

e

$$D_2 = V_{02} - C_2 \ln \rho_b \tag{5.13}$$

Substituindo as constantes encontradas na equação (5.6) tem-se, então, o potencial analítico para um capacitor cilíndrico preenchido por dois dielétricos distintos e concêntricos.

Salienta-se que optou-se por discorrer de forma mais sintética sobre construção da solução analítica do potencial, pois uma apresentação completa já foi previamente demonstrada para o capacitor de placas paralelas.

5.2 Resultados

Além das análises destacadas na Seção 4.2 (*i.e* influência da RPN e do tamanho do domínio de influência) outra característica do EFG é observada neste capítulo: a análise da influência do número de nós sobre a resposta final, para o enriquecimento das possibilidades de otimização do EFG.

Assim, utilizando o mesmo critério de apresentação dos resultados do Capítulo 4 (exceto pela Seção 4.3.1), são apresentadas as seções a seguir.

5.2.1 Solução base

As características do capacitor cilíndrico ilustrado na Figura 5.1 são:

- O capacitor se encontra no plano cartesiano 2D e é ilustrado em coordenadas cilíndricas. A posição de um ponto no plano é definida pela designação (ρ, θ);
- A carcaça 1 é representada por uma circunferência de centro em (0,0) e raio igual a uma unidade de comprimento. O Potencial na mesma é de um Volt (1V);
- A carcaça 2 é representada por uma circunferência de centro em (0,0) e raio igual a duas unidades de comprimento. O Potencial na mesma é de dois Volts (2V);
- A fronteira entre os diferente dielétricos (interface material) é representada por uma circunferência de centro em (0,0) e raio igual a uma e meia unidade de comprimento;
- O meio 1, delimitado pela carcaça 1 e a interface material, tem a permissividade relativa igual a um, $\epsilon_1 = \epsilon_0$, enquanto o meio 2, delimitado pela interface material e a carcaça 2, tem a permissividade relativa igual a quatro, $\epsilon_2 = 4\epsilon_0$;

E sobre a construção do EFG pode-se dizer:

- São utilizados duzentos e setenta e cinco (275) nós - representados por coordenadas cartesianas (x_x, x_y) - entretanto, distribuídos em forma uniformemente cilíndrica;
- Em termos dos pontos de integração, são utilizados mil cento e trinta e quatro (1134) pontos - representados pelas coordenadas cartesianas (a_x, a_y) - distribuídos de maneira uniforme e retangular;
- O número de pontos de integração é , aproximadamente, 410% maior que o número de nós;

- A constante de proporcionalidade utilizada para definir o tamanho do raio de suporte r tem o valor dois ($\alpha = 2$). Acrescenta-se, ainda, que o domínio de influência utilizado é circular;

- A função janela utilizada no IMLS foi:

$$W = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{(x_x - a_x)^2 + (x_y - a_y)^2}}{r}\right)^n + \beta^n} \tag{5.14}$$

  Os valores utilizados para β e n foram $\beta = 0,05$ e $n = 7$;

- Foi utilizado critério da visibilidade para o tratamento na descontinuidade entre os meios 1 e 2;

- Para diminuir o esforço computacional do programa, foi considerado para os cálculos de campo e potencial elétrico apenas um quarto de cilindro. Devido à simetria do problema, a resposta pode ser facilmente extrapolada para um cilindro inteiro;

- Apesar da ilustração do capacitor em coordenadas cilíndricas na Figura 5.1, optou-se por utilizar os dados do programa em coordenadas cartesianas, uma vez que o algoritmo desenvolvido para o capacitor de placas paralelas também possui o mesmo tipo de entradas. As devidas transformações de coordenadas foram realizadas, quando necessárias, no algoritmo do capacitor cilíndrico.

Tendo em vista, então, o problema proposto e o algoritmo desenvolvido, as soluções obtidas são ilustradas nas Figuras 5.2 e 5.3, assim como os erros são apresentados na Tabela 5.1.

Parâmetro	Valor
Erro em $\mathbb{L}^2$ para potencial	$0,0099$
Erro em $\mathbb{H}^1$ para potencial	$0,0967$

Tabela 5.1: *Tabela com valores de erro nas normas de Lesbegue e Hilbert para o potencial e o campo calculado pelo método EFG e referente ao capacitor Figura 5.1 (solução base)*

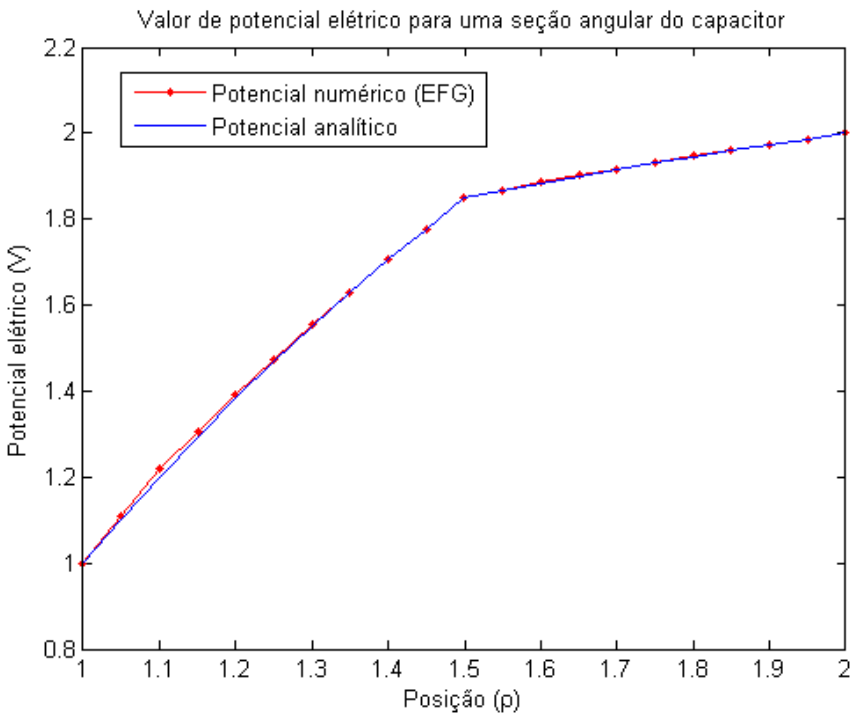

Figura 5.2: *Potencial elétrico para o capacitor cilíndrico, analítico e numérico, obtido pelo EFG (Solução Base)*

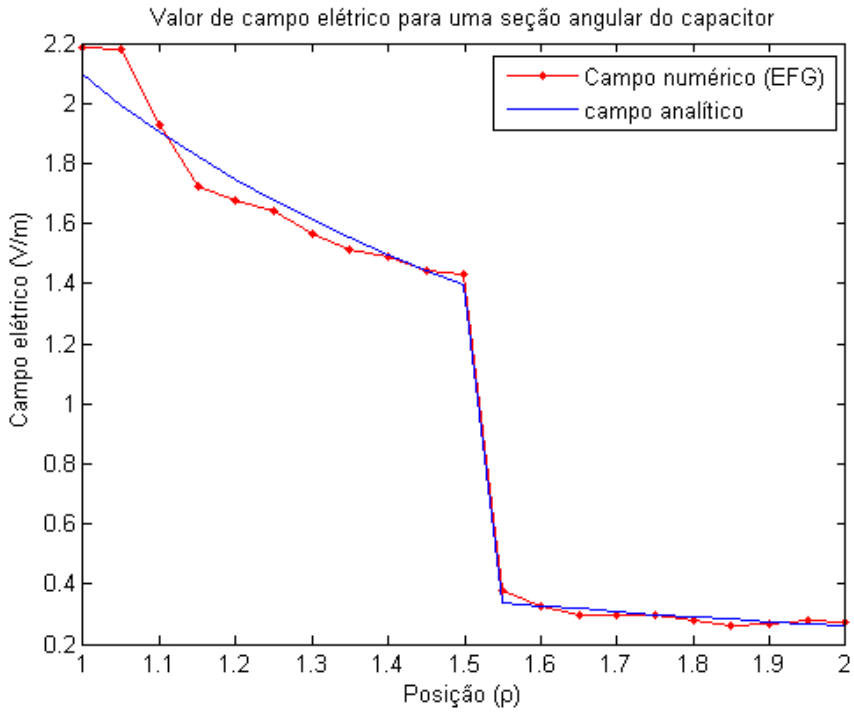

Figura 5.3: *Campo elétrico para o capacitor cilíndrico, analítico e numérico, obtido pelo EFG (Solução Base)*

Semelhante ao capacitor de placas paralelas, para tal caso, foi escolhida uma seção angular do capacitor, ou seja, define-se um valor constante de θ e varia-se ρ, para a apresentação dos valores de potencial e campo elétrico. Observa-se que o EFG apresentou valores baixos de erro e uma

resposta satisfatória dentro dos objetivos propostos.

5.2.2 Influência do tamanho do raio de suporte (domínio de influência)

Nesta subseção verifica-se o impacto da variação do tamanho do domínio de influência na eficácia da solução pelo EFG. Para tanto, é testado setenta e seis valores de α, variando uma unidade de décimo para os valores de $\alpha = 0,5$ até $\alpha = 8$. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 5.4.

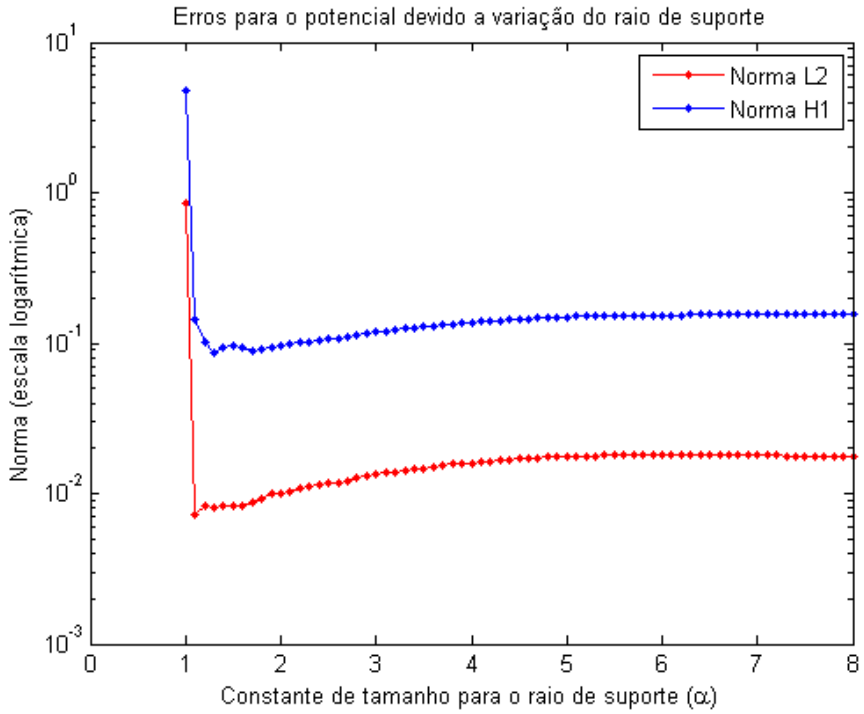

Figura 5.4: *Erro pela variação de tamanho do raio de suporte (capacitor cilíndrico)*

Assim como observado no Capítulo 4, e descrito por Belytschko *et al.* [1994] e Belytschko *et al.* [1996], valores de α menores que um acarretam em matriz $\mathbf{K}$ singular, consequentemente, o sistema não tem solução. Para o valores de $\alpha = 1$ o erro destoou dos demais, todavia para os demais valores de α para o raio de suporte os erros apresentaram valores reduzidos.

Comenta-se que o erro de extrapolação, observado na Seção 4.3.3 não foi verificado nesta análise. Salienta-se que para valores exagerados de α tal erro tende a aparecer, entretanto como já foi observada tal característica do EFG optou-se por não demonstrar aqui esta análise.

5.2.3 Influência da relação entre o número de nós e os pontos de integração

A influência da RPN é verificada nesta seção. Para tanto, semelhante ao capacitor de placas paralelas, é fixado o número de nós e varia-se o número de pontos de integração. São testadas nove possibilidades de RPN, sendo essa diferença expressa em porcentagem. Os erros obtidos, apresentados em escala logarítmica, são ilustrados na Figura 5.5.

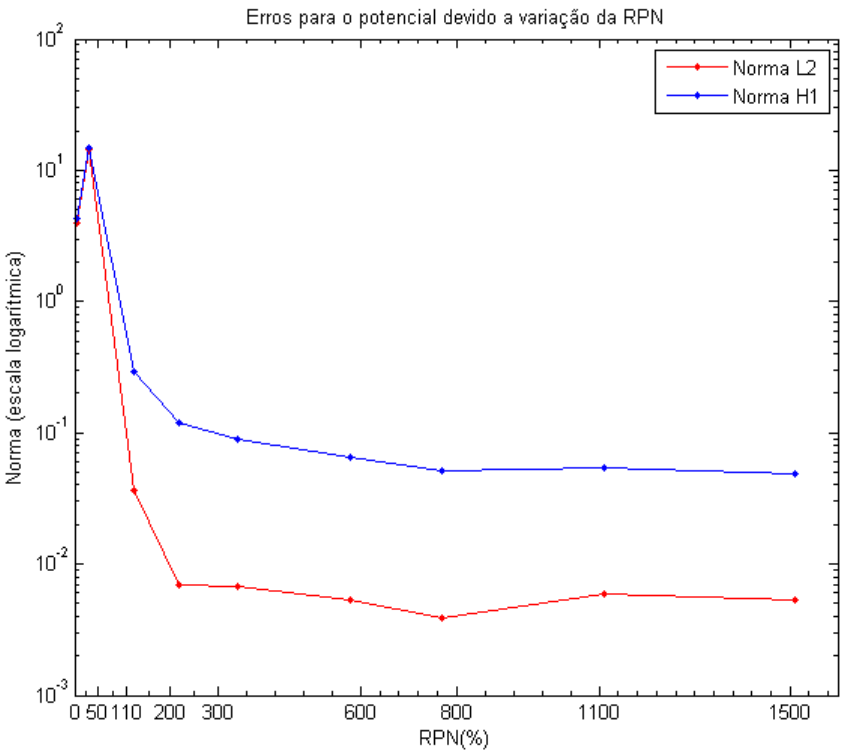

Figura 5.5: *Erro pela variação da relação entre pontos e nós (capacitor cilíndrico)*

Novamente, observa-se que uma RPN abaixo de 67% conduz a valores altos de erro. Salienta-se, ainda, que optou-se por uma variação um pouco maior de RPN (comparado ao capacitor de placas paralelas) devido à complexidade do problema.

Observa-se que o ponto com a mais baixa RPN não apresentou o menor valor de erro. Destaca-se, assim, que embora a matriz demasiadamente esparsa obtida para baixas RPN's acarrete em um valor indesejável de erro, a relação entre o erro e a RPN não é diretamente proporcional.

5.2.4 Influência da relação entre o número de nós

Para uma melhor tentativa de otimização do EFG mediante variação dos seus principais parâmetros, nesta seção é feita uma análise do comportamento do erro para diferentes valores de números de nós espalhados no domínio do problema.

Para tanto, foram verificadas dezesseis conjuntos de números de nós variados, conforme a necessidade, para manter uma distribuição uniforme em coordenadas cilíndricas. O resultado obtido é demonstrado na Figura 5.6.

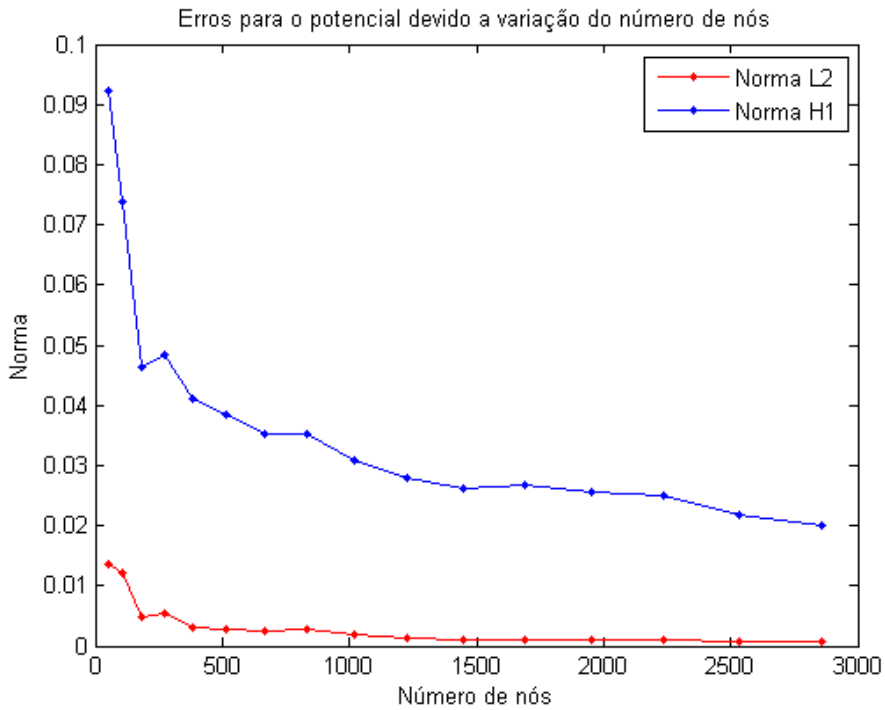

Figura 5.6: *Erro pela variação de número de nós (capacitor cilíndrico)*

Verifica-se que para qualquer número de nós os erros apresentam valores satisfatórios. Observa-se, ainda, que os erros tendem a se estabilizar após um número de nós superior a milésima unidade, portanto, pode-se obter respostas eficazes com menos nós, ou seja, com menor esforço computacional.

Em posse, então, das análises realizadas nas Seções de 5.2.2 até 5.2.4, apresenta-se a seguir uma possibilidade de otimização para o EFG aplicado ao capacitor ilustrado pela Figura 5.1.

5.2.5 Proposta de solução numérica com EFG otimizado

Utilizando os valores de $\alpha = 1.3$, RPN $\simeq 800$ e 2855 nós, parâmetros que apresentaram os menores valores de erro em suas respectivas análises na solução base desse problema, tem-se as respostas para potencial e campo elétrico, ilustradas nas Figuras 5.7 e 5.8, respectivamente. Os erros obtidos podem ser verificados na Tabela 5.2

Parâmetro	Valor
Erro em $\mathbb{L}^2$ para potencial	$4,6919 \cdot 10^{-4}$
Erro em $\mathbb{H}^1$ para potencial	$0,0314$

Tabela 5.2: *Tabela com valores de erro nas normas de Lesbegue e Hilbert para o potencial e o campo calculado pelo método EFG e referente ao capacitor Figura 5.1 (solução ótima)*

Assim como no capacitor do Capítulo 4 obteve-se uma melhora considerável para os valores de erro. Todavia, mesmo com o potencial elétrico numérico apresentando resultado semelhante ao analítico, observa-se, ainda, um erro considerável entre os campos elétricos numérico e analítico para uma seção angular do capacitor cilíndrico.

Esse erro pode ser atribuída à dificuldade de se obter a derivada da função logarítmica numericamente, uma vez que uma pequena variação dessa função pode acarretar numa mudança significativa de sua derivada. Para ilustrar tal fato, salienta-se que a maioria das principais referências desta dissertação, no campo da engenharia em geral, não apresentam a derivada da função aproximada obtida pelo EFG.

Mesmo com o valor de campo elétrico numérico visualmente destoante em comparação ao analítico (vide Figura 5.8) infere-se que a norma $\mathbb{H}^1$ do potencial, que representa o erro de campo, apresentou um bom valor tendo em vista que a mesma considera a diferença entre todos os pontos de integração na função aproximada e na função analítica.

Conclui-se, portanto, que com uma análise de alguns parâmetros do EFG é possível obter uma resposta otimizada. Salienta-se, ainda, que uma simulação de, aproximadamente, trinta e cinco segundos foi capaz de obter as respostas desejadas, mostrando, também, a eficiência computacional do método.

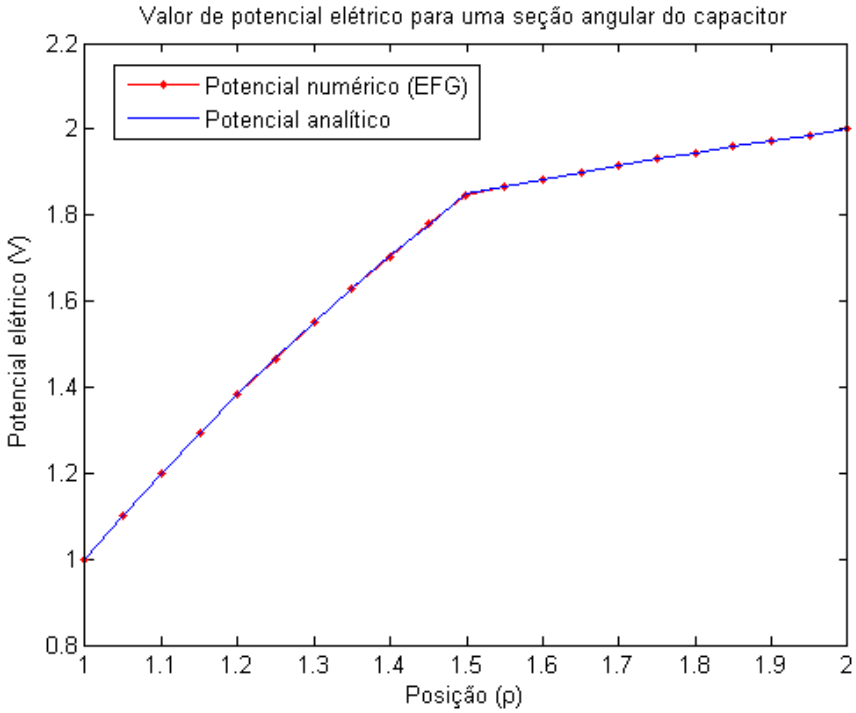

Figura 5.7: *Potencial elétrico para o capacitor cilíndrico, analítico e numérico, obtido pelo EFG (após análise de parâmetros)*

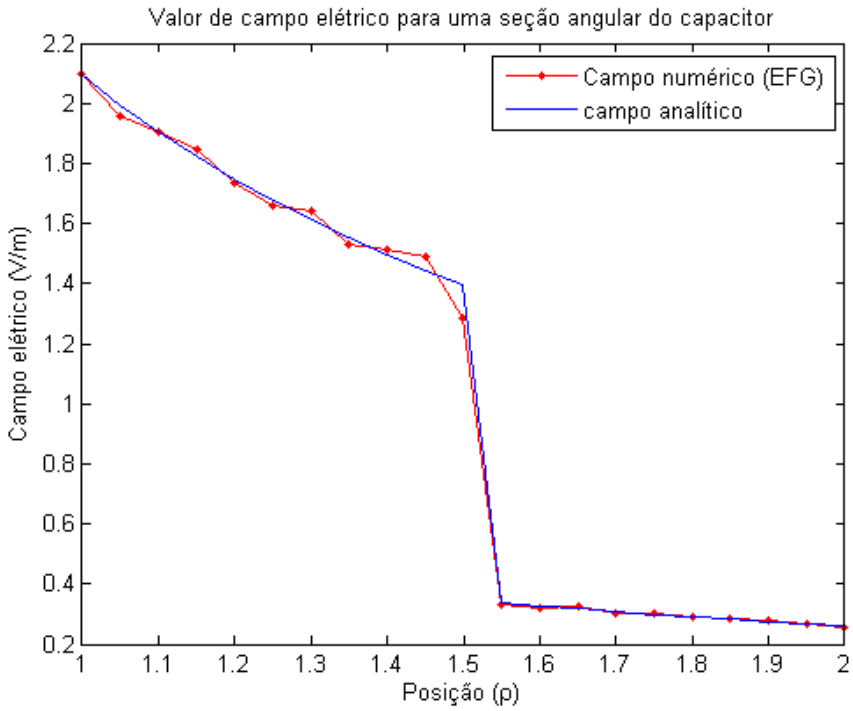

Figura 5.8: *Campo elétrico para o capacitor cilíndrico, analítico e numérico, obtido pelo EFG (após análise de parâmetros)*

5.3 Considerações Finais

Neste capítulo foi aplicado o EFG a um problema eletrostático pouco explorado na literatura convencional dos métodos sem malha, o capacitor cilíndrico preenchido por dois meios dielétricos distintos e concêntricos. Semelhante à análise realizada no Capítulo 4, verificou-se o peso que o número de nós e de pontos de integração, assim como do tamanho do raio de suporte do EFG, têm sobre a solução final do método.

Verifica-se que o método EFG é capaz de reproduzir uma função aproximada não só para um problema simples, mas também para um sistema de geometria mais complexa. Ainda, infere-se novamente que o tamanho do domínio de influência, assim como a relação entre o número de pontos de quadratura e o número de nós, são parâmetros do EFG que influenciam diretamente na eficiência da resposta final.

Conclui-se, por fim, que uma análise paramétrica do EFG auxilia na possibilidade de otimização desse método, uma vez que, em ambos Capítulos 4 e 5 o estudo das propriedades apresentadas auxilia diretamente na melhoria da aplicação dessas em prol de uma solução mais eficaz do EFG.

Capítulo 6

Conclusões

Neste capítulo são discutidas as considerações finais do trabalho, assim como são apresentadas as conclusões obtidas durante todo o processo de confecção desse. Por último, e definitivamente não menos importante, são apresentadas algumas propostas de trabalhos futuros que visam fomentar possíveis continuações para este estudo.

6.1 Considerações Finais

Nesta dissertação foi desenvolvido um algoritmo para a resolução de problemas de valor de contorno eletrostáticos. O programa foi construído com base no método númerico sem malha Elemento Livre de Galerkin, *Element Free Galerkin - EFG*, e apresentou bons resultados quando aplicado à dois tipos de capacitores: de placas paralelas e cilíndrico. Destaca-se, ainda, que foi feita uma análise dos principais parâmetros do EFG em prol de encontrar a melhor forma de utilização das ferramentas numéricas que fomentam o método e foram obtidos resultados precisos de campo e potencial elétrico, quanto comparados com as respectivas soluções analíticas. Para a realização de tal feito, este estudo seguiu a seguinte metodologia:

Primeiramente foi apresentado, no Capítulo 1, as principais justificativas para a realização deste trabalho, desde a aplicação dos métodos numéricos para a utilização de PVC's até a importância da utilização dos métodos *meshless*, em detrimento dos métodos com malha. Foi destacado, ainda, a contemporaneidade das técnicas sem malha, o que acarreta em investigações interessantes e desafiadoras.

Em um segundo momento, no Capítulo 2, discorreu-se, basicamente, sobre os principais méto-

dos sem malha encontrados na literatura tradicional. Tal estudo foi feito de forma a demonstrar as principais características e ferramentas numéricas que podem, por ventura, ser utilizadas nos *meshless*.

Posteriormente, no Capítulo 3, foi apresentado o EFG e suas principais ferramentas numéricas. A explanação foi feita no sentido de demonstrar a construção e o funcionamento geral desse método, que desde a criação dos *meshfree*, se mostrou eficiente aplicados à diversos PVC's.

Nos capítulos 4 e 5, por fim, foram apresentados os principais resultados obtidos mediante a utilização do EFG para a resolução de PVC's provenientes dos capacitores de placas paralelas e cilíndrico, respectivamente. Foi possível verificar e explorar importantes propriedades do EFG presente nas principais referências investigadas, o que levou a uma otimização significativa do método, acarretando, assim, em respostas com valores de erros muito baixos.

6.2 Conclusões

Todo o processo de pesquisa deste trabalho possibilitou as seguintes conclusões: inferiu-se que existem muitos estudos atuais sobre os métodos sem malha e que os mesmos já foram aplicados em diversos PVC's tradicionais de diferentes áreas da física e engenharias. Não obstante a tal fato, o número de investigações acerca dessas técnicas não param de crescer, acarretando, assim, em novos métodos provenientes das combinações de diferentes ferramentas numéricas.

Verificou-se, também, que o EFG é um importante método *meshless* amplamente utilizado em PVC. As ferramentas numéricas que compõem os métodos proporcionam a ele boa estabilidade, completude e convergência. Assim, mesmo sendo um método que possui malhas de fundo para realizar as integrações necessárias, o EFG é considerado como um método sem malha. A respeito das técnicas numéricas que, juntas, formam o chamado Elemento Livre de Galerkin, pode-se dizer que o MLS (interpolante ou não), responsável pela construção das funções de forma, apresenta boa consistência, enquanto o WRM aplicado ao GM, métodos que realizam a discretização dos domínios do PVC, auxiliam na formulação da forma fraca discreta. Observa-se, também, que o VC e o MML permitem, quando necessário, o tratamento das condições de contorno e interface do problema, sendo que a integração necessária é realizada pelo consagrado método da quadratura gaussiana.

Conclui-se, ainda, que o EFG é um método numérico eficiente e confiável para o cálculo de potencial elétrico em problemas eletrostáticos. Verifica-se que a resposta de campo elétrico (derivada da função de forma) apresenta valores satisfatórios, porém inferiores aos valores de potencial, sendo que, para o capacitor cilíndrico foi encontrada maior dificuldade para a obtenção de uma resposta que apresentasse baixo valor de erro.

Por fim, infere-se que a quantidade de parâmetros e métodos numéricos presentes no EFG permitem uma gama de variações, possibilitando, assim, uma otimização do mesmo. Essa configuração ótima do EFG pode ser encontrada mediante análise de algumas de suas principais características como: (1) o raio de suporte que define o tamanho do domínio de influência; (2) o número de nós; (3) o número de pontos de integração e (4) a relação entre o número de nós e pontos.

6.3 Sugestões para Pesquisas Futuras

Sugere-se os seguintes temas para futuras investigações:

Otimização do método EFG: Pode-se otimizar o EFG com a análise de algumas de suas principais características. Todavia, existem outros parâmetros presentes no método que podem ser modificados em prol da obtenção de uma resposta mais eficiente, são esses: (1) função janela utilizada; (2) polinômio base do MLS; (3) métodos de imposição das condições de contorno e interface, entre outros. Sugere-se, ainda, a utilização de algum algoritmo de otimização para tal.

EFG aplicado a problemas dinâmicos: Apesar da crescente aplicação dos métodos *meshless* em problemas eletromagnéticos, há, ainda, espaço para a utilização dessas técnicas em sistemas dinâmicos, uma vez que existem um número pequeno de investigações acerca de tal assunto, quando comparado a abordagem de problemas estáticos.

Derivadas das funções de forma: Poucos estudos na literatura tratam das derivadas da função de forma, ou seja, a derivada da função desejada como uma das saídas principais do método.

Representação domínios de influência: Em grande parte das principais referências dos métodos sem malha, o domínio de influência é representado pelo o tamanho do seu raio de suporte. Sugere-se uma apresentação diferente para tais domínios: por unidade de área. Assim, a percepção de quantos domínios de influência estão presentes no domínio total do problema em estudo aumentaria.

Referências Bibliográficas

Alturi e Zhu (1998) S. N. Alturi e T. Zhu. A new meshless local petrov-galerkin (mlpg) approach in computational mechanics. *Computational Mechanics*, 22:117–127. Citado na pág. 18

Aluru (1999) N. R. Aluru. A reproducing kernel particle method for meshless analysis of microelectromechanical systems. *Computational Mechanics*, 23:324–338. Citado na pág. 23

Babuska (1996) I. Babuska. The partition of unity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40:727–758. Citado na pág. 18

Belytschko e Dolbow (1998) T. Belytschko e J. Dolbow. An introduction to programming the meshless element free galerkin method. *Archives of Computational Methods in Engineering: State of the art reviews*, 5:207–241. Citado na pág. 65, 71

Belytschko *et al.* **(1994)** T. Belytschko, Y.Y Lu e L. Gu. Element-free galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:229–256. Citado na pág. 2, 18, 34, 50, 60, 65, 71, 84

Belytschko *et al.* **(1996)** T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ e M. Fleming. Meshless methods: An overview and recent developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering on meshless Methods*, 139:3–47. Citado na pág. 7, 35, 50, 84

Bosing (2006) Paulo R. Bosing. *Método de Galerkin Descontínuo para Equações Elípticas de Alta Ordem.* Tese de Doutorado, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado de São Paulo, Brasil. Citado na pág. 67

Boyce e DiPrima (2007) Willaim E. Boyce e Richard C. DiPrima. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.* LTC, oitava ed. Citado na pág. 1, 10

Cingoski *et al.* **(1997)** V. Cingoski, N. Miyamoto e H. Yamashita. Element-free galerkin method for electromagnetic field computations. Relatório técnico, Hiroshima University, Higashi-Hiroshima, JAP. Citado na pág. x, 37, 49, 55, 57

Coppoli *et al.* **(2012)** E. H. R. Coppoli, R. C. Mesquita e R. S. Silva. Induction machines modeling with meshless methods. *IEEE Transactions on Magnetics*, 48:847–850. Citado na pág. 2, 34

Coppoli (2010) Eduardo R. Coppoli. *Modelagem de Dispositivos Eletromagnéticos Através de Métodos sem Malha.* Tese de Doutorado, Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional, Laboratório Nacional de Computação Científica, Brasil. Citado na pág. 2, 18, 20, 22, 27, 28, 29, 30, 40, 41, 58, 61, 68

Duarte e Oden (1996) C. A. Duarte e J. T. Oden. H-p clouds - an h-p meshless method. *Numerical methods for Partial Differential Equations*, 12:673–705. Citado na pág. 18, 24, 25

Fasshauer (2007) Gregory E. Fasshauer. *Meshfree approximation Methods with Matlab.* World Scientific Co. Pte. Ltd., primeira ed. Citado na pág. 18

Ghorbani (2010) M. Ghorbani. Diffuse element kansa method. *Applied Mathematical Sciences*, 4:583–594. Citado na pág. 22

Gingold e Monaghan (1977) R.A. Gingold e J.J. Monaghan. A numerical approach to the testing of fisson hypothesis. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181:375–389. Citado na pág. 18

Gong *et al.* **(2009)** S. G. Gong, G. L. Xie, J. P. Zhang, S. H. Nie e Y. M. Li. Study on sensitivity analysis and shape optimization of fe-efg coupled method. *Computational Mechanics*, 20:117–128. Citado na pág. 2

Guedes (2006) Cristina C. F. F. M. Guedes. *Métodos sem Malha em Problemas de Mecânica Computacional. Aplicação a Processos de Enformação Plástica.* Tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Portugal. Citado na pág. 59

Halliday *et al.* **(2003)** David Halliday, Robert Resnick e Jearl Walker. *Fundamentos de Física - Volume 2.* LTC, sétima ed. Citado na pág. 1

Harrington (1968) Roger. F. Harrington. *Field Computation by Moment Method.* The Macmillan Company. Citado na pág. 1

Ho *et al.* **(2005)** S. L. Ho, S. Yang, H. C. Wong, E. W. Lo e G. Ni. Refinement computations of eletromagnetics fields using fe and meshless methods. *IEEE Transactions on Magnetics*, 41: 1456–1459. Citado na pág. 18

Incropera *et al.* **(2008)** Frank P. Incropera, David P. DeWitt, Theodore L. Bergman e Adrienne S. Lavine. *Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa.* LTC, sexta ed. Citado na pág. 1

Lancaster e Salkauskas (1981) P. Lancaster e K. Salkauskas. Surfaces generated by moving least squares methods. *Mathematics of Computation*, 37:141–158. Citado na pág. 21, 36, 41

Lemos (2007) Eduardo M. Lemos. Implementação dos métodos de resíduos ponderados por quadraturas gaussianas. Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil. Citado na pág. 43

LeVeque (2007) Randall J. LeVeque. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations, Steady State and Time Dependent Problems.* SIAM. Citado na pág. 1

Li e Liu (2007) Shaofan Li e Wing K. Liu. *Meshfree Particle Methods.* Springer, primeira ed. Citado na pág. 16, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 41

Lima (2011) Naísses Z. Lima. Desenvolvimento de um framework para o métodos sem malha. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação de Engenharia Elï¿½trica, Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil. Citado na pág. 2, 34, 40

Liu (2003) G. R. Liu. *Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method.* CRC Press, primeira ed. Citado na pág. 18

Liu (2010) G. R. Liu. *Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method.* CRC Press, segunda ed. Citado na pág. x, 1, 2, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 17, 20, 21, 22, 24, 25, 28, 30, 31, 34, 36, 37, 40, 41, 43, 44, 50, 54, 58, 65, 66, 71, 73

Liu e Gu (2005) G. R. Liu e Y. T. Gu. *An Introduction to meshfree methods and their programming.* Springer, primeira ed. Citado na pág. 18

Liu e Liu (2008) G. R. Liu e M. B. Liu. *Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method.* Wellesley-Cambridge, primeira ed. Citado na pág. 21

Liu e Gu (2001) G.R Liu e Y. T. Gu. A point interpolation method for two-dimesional solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50:937–951. Citado na pág. 18, 30

Liu *et al.* **(1995)** W. K. Liu, S. Jun, S. Li, J. Adee e T. Belytschko. Reproducing kernel particle methods for structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:1655–1679. Citado na pág. 18, 23

Liu *et al.* **(2006)** X. Liu, Y. Deng, Z. Zeng, L. Udpa e J. S. Knopp. An element-free galerkin model for simulating magneto-optic imaging with application to aerospace industry. *Materials Evaluation*, 62:1009–1013. Citado na pág. 2, 34

Lucy (1977) L.B. Lucy. A numerical approach to the testing of fisson hypothesis. *The Astronomical journal*, 82:1013–1024. Citado na pág. 18

Marques *et al.* **(2007)** G. N. Marques, J. M. Machado, S. L. Verardi, S. Stephan e A. J. Preto. Interpolating efgm for computing continuous and discontinuos electromagnetic fields. *International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Eletronic Engineering*, 26(5): 1411–1438. doi: 10.1108/03321640710823082. Citado na pág. 40, 41

Melenk e Babuska (1996) J. M. Melenk e I. Babuska. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. Relatório Técnico TR-96-01, Eidgenossische Technische Hochschule, Zurich, SWL. Citado na pág. 24

Mendes (2010) Miguel L. Mendes. Utilização do método da hidrodinâmica de partículas suavizadas aplicado à resolução de problemas eletromagnéticos. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil. Citado na pág. 21

Nayroles *et al.* **(1992)** R. Nayroles, G. Touzot e P. Villon. Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, 10:307–318. Citado na pág. 18

Oñate *et al.* **(1996)** E. Oñate, S. Idelsohn, O. C. Zienkiewicz e R. L. Taylor. A finite point method in computational mechanics. applications to convective transport and fluid flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:3839–3866. Citado na pág. 18

Oñate *et al.* **(2001)** E. Oñate, C. Sacco e S. Idelsohn. Advances in the finite point method for meshless analysis of incompressible flow problems. Em *Computational Fluid Dynamics Conference*, páginas 1–24. Citado na pág. 26

Oger *et al.* **(2005)** G. Oger, B. Alessandrini e P. Ferran. Sph biphasic simulation of free surface impact. Em *Thematic Conference on Meshless Methods*, páginas A33.1–A33.6. Citado na pág. 21

Rezende (2005) Veridiana O. Rezende. Método de galerkin. Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá, Universidade Estadual de Maringá, Brasil. Citado na pág. 21, 45

Sadiku (2004) Matthew N. O. Sadiku. *Elementos de Eletromagnetismo*. Bookman, terceira ed. Citado na pág. 1, 61, 62

Schuh (2007) Luciane I. A. Schuh. Método de galerkin descontínuo com penalização de fluxos para problemas elípticos. Dissertação de Mestrado, Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil. Citado na pág. 67

Schwer *et al.* **(2000)** L. E. Schwer, C. Gerlach e T. Belytschko. Element-free galerkin simulations of concrete failure in dynamic uniaxial tension test. *Journal of Engineering Mechanics*, 126: 443–454. Citado na pág. 2, 34

Strang e Fix (2007) Gilbert Strang e George Fix. *An Analysis of the Finite Element Method*. SIAM, segunda ed. Citado na pág. 1

Viana (1998) Simone A. Viana. Estudo dos métodos sem malha na resolução de problemas eletromagneticos. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil. Citado na pág. 14, 15, 34, 37, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52

Viana (2006) Simone A. Viana. *Meshless Methods Applied to Computational Eletromagnetics*. Tese de Doutorado, Department of Electronic & Electrical Engineering, University of Bath, United Kingdom. Citado na pág. 1, 2, 7, 19, 21, 24, 26, 28, 29, 30, 36

Vignjevic (2004) E. Vignjevic. Review of development of the smooth particle hydrodynamics (sph) method. Relatório técnico, Cranfield University, Cranfield, UK. Citado na pág. 21

Wu e Liu (2003) Y. L. Wu e G. R. Liu. A meshfree formulation of local radial point interpolation method (lrpim) for incompressible flow simulation. *Computational Mechanics*, 30:355–365. Citado na pág. 30

Xu e Liu (2008) G. Xu e G. R. Liu. A meshfree formulation of local radial point interpolation method (lrpim) for incompressible flow simulation. *International journal for Numerical Methods in Fluids*, 58:1101–1133. Citado na pág. 18, 31

Zhang *et al.* **(2012)** Z. Zhang, D. M. Li, Y. M. Cheng e K. M. Liew. The improved element-free galerkin method for three-dimensional wave equation. *Acta Mechanica Sinica*, 28:808–818. Citado na pág. 2, 34