Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Universidade Federal de São João Del Rei

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA ELÉTRICA-PPGEL

Bruno Macedo Gonçalves

Síntese de Controladores Robustos PI/PID Multi-malhas Descentralizados para Sistemas com Domínios Politópicos de Incerteza

Belo Horizonte

2012

Bruno Macedo Gonçalves

Síntese de Controladores Robustos PI/PID Multi-malhas Descentralizados para Sistemas com Domínios Politópicos de Incerteza

Dissertação de Mestrado submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro Federal de Eduacação Tecnológica de Minas Gerais, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: **Modelagem e Controle de Sistemas - Sistemas de Controle**.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Nunes Gonçalves

Belo Horizonte

2012

Agradecimentos

A minha namorada, amigos e familiares, por sempre estar me incentivando a seguir em frente, pelo carinho e compreensão durante a realização desse trabalho.

Ao meu orientador, professor Dr. Eduardo Nunes Gonçalves por ensinar e compartilhar todo o seu conhecimento, pela confiança e paciência.

Ao Departamento de Engenharia Elétrica do CEFET/MG pelo apoio e os recursos fornecidos para o pleno desenvolvimento e finalização desta dissertação.

A todos os professores que eu tive a honra de ser aluno durante esta caminhada.

Ao apoio das agências CAPES, CNPq e FAPEMIG.

A todos os demais, não nomeados, que de forma direta ou indireta contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

Muitas vezes, o controle de processos industriais multivariáveis é realizado usando arquiteturas multi-malhas, em que vários controladores SISO PI ou PID são empenhados em controlar diferentes canais da planta. Uma dificuldade ao empregar esta estratégia surge devido a diferentes interações entre as malhas de controle que pode fazer com que a ação de controle em uma malha gere perturbações significativas em outras malhas. Este trabalho apresenta um novo procedimento de sintonia de controladores robustos PI/PID multi-malhas descentralizados aplicado a sistemas dinâmicos incertos lineares invariantes no tempo. O problema de controle é formulado como um problema de otimização não convexo considerando os parâmetros dos controladores PI/PID como variáveis de otimização. Os objetivos de controle são: atender as especificações da resposta de rastreamento, desacoplar as múltiplas malhas de controle, rejeição de perturbações e atenuação de ruídos de medição. É proposto aplicar aproximação de modelo $\mathcal{H}_\infty$ para atingir os dois primeiros objetivos. O processo multivariável e os controladores PI/PID descentralizados são representados no espaço de estados. Modelos politópicos são utilizados para representar o sistema incerto. O procedimento proposto para resolver o problema de otimização tem sido aplicado com sucesso em diferentes áreas de controle robusto. Exemplos numéricos são apresentados para ilustrar a eficácia do procedimento de sintonia proposto.

Palavras-chave: Controle PID multi-malhas robusto, controle descentralizado, aproximação de modelo $\mathcal{H}_\infty$, modelos politópicos.

Abstract

Often, the multivariable control of industrial processes is performed using multi-loop architectures, in which multiple SISO PI or PID controllers are dedicated to control various channels of the plant. One difficulty in employing this strategy arises due to different interactions among the control loops which can cause the control action in a loop to generate significant disturbances in other loops. This work presents a new tuning procedure for robust decentralized milti-loop PI/PID controllers applied to linear dynamical uncertain invariant time systems. The control problem is based on a non-convex optimization problem considering the parameters of PI/PID controllers as optimization variables. The control aims are: to meet the specifications of the tracking reference signal response, to decouple the multiple control loops, to reject disturbance and to attenuate measurement noise. It is proposed to apply $\mathcal{H}_\infty$ model approximation to achieve the first two objectives. The multivariable process and the decentralized controller PI/PID are represented in state space. Polytopic models are used to represent the system uncertainty. The proposed procedure to solve the optimization problem has been successfully applied to various problems in the area of robust control. Numerical examples are presented to illustrate the efficiency of the proposed tuning procedure.

Keywords: Robust multi-loop PID control, decentralized control, $\mathcal{H}_\infty$ model approximation, polytopic models.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Acrônimos

1DOF	-	“One-Degree-Of-Freedom” - Um Grau de Liberdade
2DOF	-	“Two-Degree-Of-Freedom” - Dois Graus de Liberdade
BLT	-	“Biggest Log-modulus Tuning”
BMI	-	“Bilinear Matrix Inequality” - Desigualdade Matricial Bilinear
BnB	-	“Algoritmo Branch And Bound“
CEA	-	“Cone Ellipsoidal Algorithm” - Algoritmo Cone Elipsoidal
CLP	-	“Controlador Lógico Programável”
CPs	-	“Controladores Programáveis”
DRG	-	“ Decentralized Relative Gain” - Ganho Relativo Descentralizado
DRGA	-	“Dynamic Relative Gain Array” - Arranjo de Ganhos Relativos Dinâmico
ERGA	-	“Effective Relative Gain Array” - Arranjo de Ganhos Relativos Efetivos
GA	-	“Genetic Algorithm” - Algoritmo Genético
HIIA	-	“Hankel Interaction Index Array” - Arranjo de Índices de Interação De Hankel
IAE	-	“Integral of the Absolute Magnitude of the Error” - Integral do Valor Absoluto do Erro
ICC	-	“Iterative Continuous Cycling”
IM	-	“Interaction Measure” - Medidas de Interação
IMC	-	“Internal Model Control” - Controle por Modelo Interno
ISE	-	“Integral of the Square of the Error” - Integral do Quadrado do Erro
ITAE	-	“Integral of Time Multiplied by Absolute of the Error” - Integral do Tempo Multiplicado pelo Valor Absoluto do Erro
ITSE	-	“Integral of Time Multiplied by the Squared Error” - Integral do Tempo Multiplicado Pelo Quadrado do Erro
LMI	-	“Linear Matrix Inequality” - Desigualdade Matricial Linear
LQG	-	“Linear Quadratic Gaussian” - Linear Quadrático Gaussiano
MIMO	-	“Multiple Input, Multiple Output” - Múltiplas Entradas, Múltiplas Saídas
MPC	-	“Model Predictive Control” - Controle Preditivo baseado em Modelo
PI	-	“Controlador Proporcional-Integral “
PID	-	“Controlador Proporcional-Integral-Derivativo“
PM	-	“Participation Matrix” - Matriz de Participação
PRGA	-	“Performance Relative Gain Array ” - Arranjo de Ganho Relativo de Desempenho
RGA	-	“Relative Gain Array” - Arranjo de Ganhos Relativos
RNGA	-	“Relative Normalized Gain Array” - Arranjo de Ganhos Normalizados Relativos
SDP	-	“Semidefinite Programming” - Programação Semidefinida
SeDuMi	-	“Self-Dual-Minimization“

SISO - “Single Input, Single Output” - Uma Entrada, Uma Saída
TITO - “Two-Input, Two-Output” - Duas Entradas, Duas Saídas

Lista de Símbolos

$\mathcal{L}_2[0,\infty)$	-	espaço dos sinais contínuos de energia limitada, i.e., $\int_0^\infty f^T(t)f(t)dt < \infty$
$\in$	-	pertence a
$\mathbb{R}$	-	corpo dos números reais
$\mathrm{Tr}(A)$	-	traço da matriz A
$E(\cdot)$	-	esperança matemática do argumento
$\|T\|_2$	-	norma $\mathcal{H}_2$ da matriz de transferência T
$\|T\|_\infty$	-	norma $\mathcal{H}_\infty$ da matriz de transferência T
$\triangleq$	-	igual por definição
$\overline{\sigma}(A)$	-	valor singular máximo da matriz A
$\left[\begin{array}{c\|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$	-	realização da matriz de transferência $T = C(sI - A)^{-1}B + D$
Ω	-	domínio politópico de incerteza
α	-	vetor de coeficientes da combinação convexa ou de parâmetros incertos
$\widetilde{\Omega}$	-	conjunto finito de pontos do domínio politópico de incerteza
T_{cn}	-	matriz de transferência relacionando as saídas da planta e os ruídos de medição
T_{cd}	-	matriz de transferência relacionando as saídas da planta e os distúrbios
E	-	matriz de transferência do erro de aproximação do modelo
$\subset$	-	está contido em
$v(\cdot)$	-	conjunto de vértices do argumento (politopo)
α_u	-	$\alpha \in \Omega$ onde ocorre instabilidade do sistema em malha fechada
α_2	-	$\alpha \in \Omega$ onde ocorre o valor máximo de $\|T_{cn}\|_2$
α_∞	-	$\alpha \in \Omega$ onde ocorre o valor máximo de $\|T_{cd}\|_\infty$
α_m	-	$\alpha \in \Omega$ onde ocorre o valor máximo de $\|E\|_\infty$
ξ	-	precisão relativa usada no critério de parada do procedimento geral de projeto
$\exists$	-	existe
A $\leftarrow$ B	-	atribui o valor de B a variável A
∇f	-	gradiente (ou subgradiente) da função f
ε	-	precisão relativa usada como critério de parada no algoritmo elipsoidal
N_ε	-	número de iterações observado no critério de parada do algoritmo elipsoidal
I, I_d	-	matriz identidade, matriz identidade de ordem $d \times d$
δ_c	-	custo ε-garantido $\mathcal{H}_2$
γ_c	-	custo ε- garantido $\mathcal{H}_\infty$

$*$	-	em matrizes simétricas, corresponde a termos simétricos em relação à diagonal
$A \succ 0$	-	matriz A é definida positiva
$A \succeq 0$	-	matriz A é semi-definida positiva
$A \prec 0$	-	matriz A é definida negativa
$A \preceq 0$	-	matriz A é semi-definida negativa

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contextualização

Muitos sistemas de controle de importância prática encontrados na indústria química e de processo, tais como em controle de nível, colunas de destilação, reatores químicos, trocadores de calor e redes de distribuição de fluidos, envolvem em sua maioria o controle de múltiplas variáveis de saída através de múltiplas variáveis de entrada.

Diante da complexidade que envolve os processos industriais, é justificada a necessidade de se projetar e implementar sistemas de controle multivariáveis. Sistemas de controle com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO, do inglês *Multiple-Input Multiple-Output*) como apresentado na Figura 1.1, são inerentemente mais difíceis de projetar e implementar do que sistemas de controle de uma única entrada e uma única saída (SISO, do inglês *Single-Input Single-Output*), uma vez que cada variável manipulada (sinal de entrada) pode afetar diversas variáveis controladas (sinais de saída), causando interações entre as malhas . Estas interações causam acoplamentos no sistema fazendo com que o projeto e a sintonia de controle não sejam uma tarefa fácil.

Nas últimas décadas este tópico tem despertado interesse de pesquisadores e muitas abordagens de controle multivariável avançado têm sido propostas (Goodwin et al., 2001; Skogestad e Postlethwaite, 1996). Embora um esforço considerável tenha sido dedicado a este problema, o projeto e a implementação de um sistema de controle MIMO ainda representa um grande desafio para pesquisadores e engenheiros práticos.

A grande maioria das técnicas de controle resulta em controladores que não têm qualquer estrutura específica, ou seja, controladores multivariáveis completos nos quais se utilizam todas as saídas de processo disponíveis em conjunto para tomar decisões sobre todas as entradas. Apesar de existirem técnicas de controle avançadas que apresentam resultados satisfatórios mesmo na presença de interações entre as malhas, tratar o problema de controle a partir de uma estrutura centralizada ge-

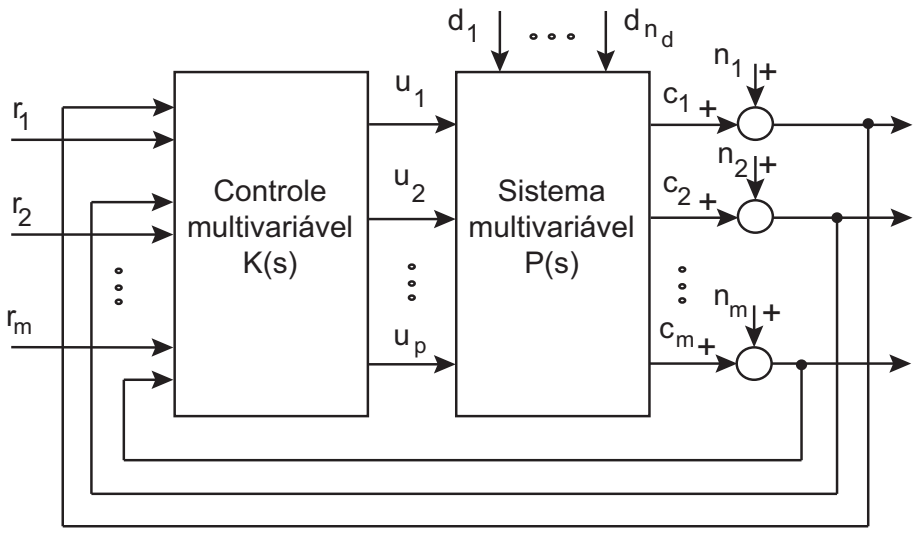


Fig. 1.1: Controle multivariável.

ralmente resulta no aumento de custo e da complexidade do projeto, dificuldade de implementação e sintonia, além de problemas de manutenção, impedindo que essas estratégias sejam adequadas em ambientes industriais. Portanto, surgem restrições quanto a ordem e a estrutura do controlador. O uso de múltiplos controladores, um para cada variável a ser controlada numa estrutura descentralizada, como mostrado na Figura 1.2, é uma das estratégias mais utilizadas em substituição à utilização de um único controlador multivariável, principalmente quando baseado no popular controlador proporcional-integral-derivativo (PID, do inglês *Proportional-Integral-Derivative*) ou no controlador proporcional-integral (PI, do inglês *Proportional-Integral*).

Controle preditivo baseado em modelo (MPC, do inglês *Model Predictive Control*) está se tornando a técnica padrão para resolver problemas de controle multivariável na indústria de processo. Praticamente todos os sistemas MPC operam em um nível mais alto, ou modo de supervisão, com controladores PID no nível inferior. Uma parte substancial da melhoria de desempenho creditada a técnica MPC é devido a melhorias em malhas PID do nível inferior. Lidar com interações no nível MPC, quando as malhas do nível mais baixo são fechadas, tende a ser difícil. Portanto, é de grande interesse investigar maneiras de lidar com a interação no nível de malhas (Åström et al., 2002). Considerando que os esquemas de controle PI/PID são amplamente usados nos níveis inferiores de controles regulatórios, a pesquisa sobre projeto e análise de sistemas de controle PI / PID multivariável tem recebido grande interesse da academia e da indústria.

A predominância do controle PID é provavelmente devida à sua simplicidade, a sua eficácia para a maioria das plantas industriais e à existência de métodos simples de ajuste. Mais de 90% de todas as malhas de controle são PID, com uma ampla gama de aplicações: controle de processo, acionamento de motores, memórias magnéticas e ópticas, automotivas, controle de voo, instrumentação,

etc. (Åström e Hägglund, 2001).

Desde 1942, com o trabalho de John G. Ziegler e Nathaniel B. Nichols, vários trabalhos publicados tem buscado desenvolver procedimentos de sintonia para atender as necessidades específicas de cada aplicação considerando objetivos e complexidade do algoritmo de sintonia completamente diferente (ver as referências em Åström e Hägglund (2001)). Muitas estratégias foram desenvolvidas e várias melhorias têm sido apresentadas, comprovando a eficiência dos controladores PID para controle clássico e avançado (feed-forward, controle de razão, multi-malhas, cascata, etc.). Uma revisão a respeito de controle PID e métodos de sintonia para sistemas SISO são apresentados em Cominos e Munro (2002).

Apesar de o controlador PID ser utilizado e estudado há muito tempo, em muitas situações, as malhas de controle empregadas na indústria nem sempre funcionam com seus melhores desempenhos. Isto se deve ao fato de que a grande maioria das implementações apresenta os seguintes problemas:

- Problemas de processo e variações na dinâmica do mesmo (tempo morto, constante de tempo, etc.).
- Dificuldades de controle (não linearidades, interações, perturbações, ruídos, etc.).
- Estratégias de controle incompatíveis com as necessidades do processo e objetivos de controle.
- Dimensionamento inadequado dos elementos da malha de controle.
- Erros na implementação dos controladores em geral, principalmente quando se utilizam Controladores Lógicos Programáveis-CLP's.
- Problemas na instalação de transmissores, conversores e atuadores, em geral.
- Configurações inadequadas e problemas de calibração de instrumentos em geral.
- Problemas de desgaste de atuadores (histerese, folga, agarramento, etc.).
- Sintonia inadequada das malhas de controle.
- Problemas de manutenção dos elementos da malha de controle.
- Restrições e deficiências operacionais.

Assim, apesar das várias técnicas de sintonia PID disponíveis para as diferentes aplicações e configurações de controladores PID, ainda é interessante pesquisar novos métodos que possam levar a melhores desempenhos e que possam ser aplicados a uma classe mais abrangente de problemas, em especial, síntese robusta de sistemas de controle multivariáveis.

O projeto e a sintonia de controladores PI/PID aplicados a processos multivariáveis não é uma tarefa trivial, uma vez que é comum a presença de fortes interações entre as variáveis de entrada e saída, além de não linearidades e de objetivos de controle conflitantes, constituindo um desafio aos engenheiros de processo e operadores. De acordo com o compromisso entre a complexidade estrutural e o desempenho do sistema, o controle PI/PID aplicado a processos multivariáveis pode ser classificado em dois tipos (Shen et al., 2010): controle multi-malhas (descentralizado), Figura 1.2, e controle desacoplado, Figura 1.3.

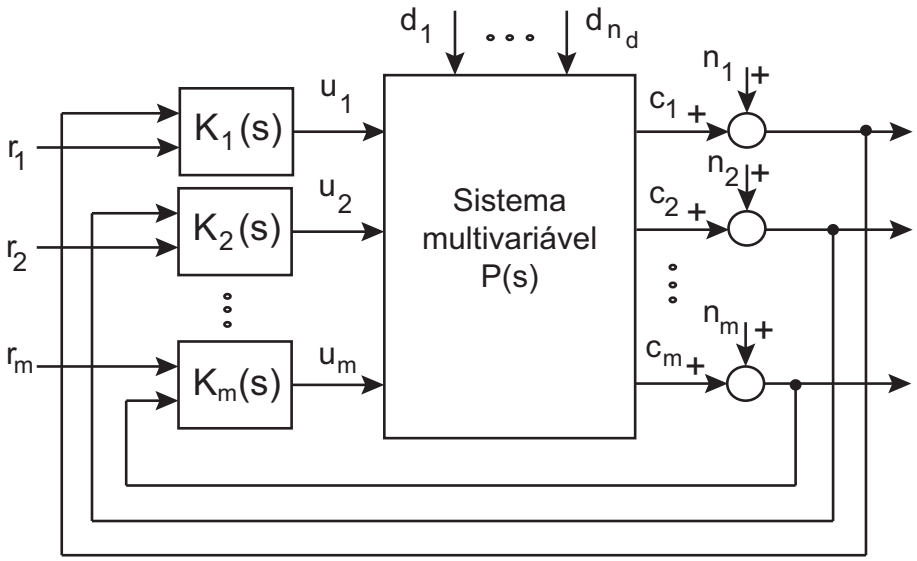


Fig. 1.2: Controle multi-malhas descentralizado.

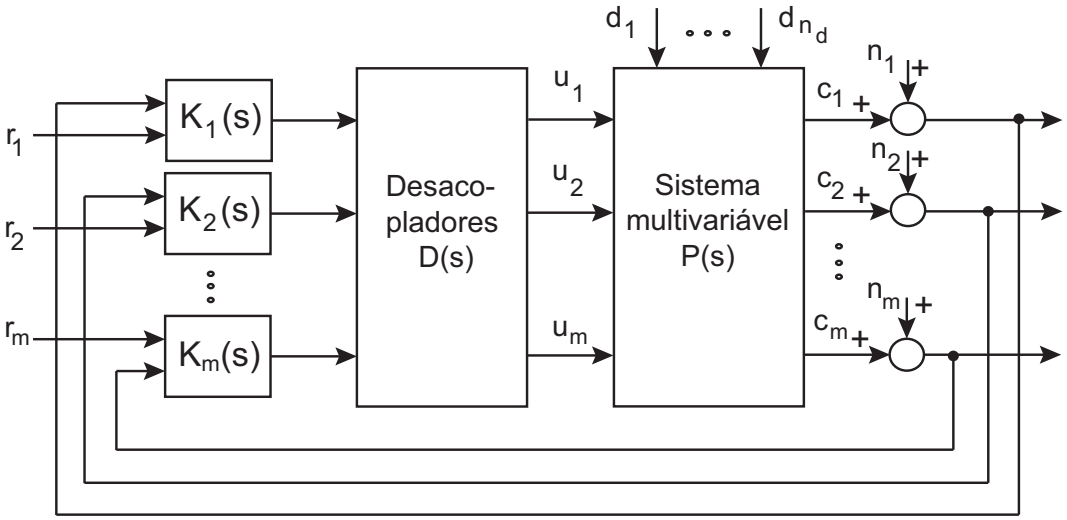


Fig. 1.3: Controle descentralizado com desacopladores.

Devido ao seu desempenho razoável, simplicidade de estrutura e robustez, a estratégia de con-

trole multi-malhas PI/PID é bastante popular para controlar sistemas MIMO com um baixo grau de interação entre os canais de entrada e saída em substituição à utilização de um único controlador multivariável. Em um controle multi-malhas, um processo multivariável com m variáveis de entradas e m variáveis de saída é decomposto em um conjunto de m malhas SISO e múltiplos controladores PI/PID são projetados e implementados para cada malha individual. Um sistema de controle descentralizado PI/PID apresenta diversas vantagens práticas tais como:

- Malha de controle com tolerância a falhas do sistema de controle. A estrutura de controle descentralizada é flexível diante de falha de um sensor ou atuador, uma vez que somente a malha que falhou precisa ser corrigida, possibilitando que o resto do processo permaneça em operação.

- Simplicidade de projeto e sintonia do controlador. Controladores PI/PID descentralizados possui um número reduzido de parâmetros de ajuste, e a decomposição do sistema de controle em várias malhas individuais torna o projeto muito mais fácil em comparação a controladores centralizados.

- A compreensão, implantação e supervisão das várias malhas de controladores independentes são tarefas mais fáceis de realizar na prática. A maioria dos controladores programáveis (CPs) atuais já contêm funções específicas para implementar controladores PI/PID e as estruturas descentralizadas.

Entretanto, quando o controle descentralizado PI/PID é empregado para controlar sistemas multivariáveis com canais altamente acoplados, a tarefa de projeto de controle pode se tornar difícil, sendo inevitável que ocorra uma degradação de desempenho em comparação com os sistemas de controle multivariáveis completos mais complexos (Figura 1.1). A tarefa de desenvolver um procedimento satisfatório de sintonia de controladores PI/PID em arquiteturas de controle multi-malhas, considerando um compromisso entre o desempenho do sistema e a redução do efeito das interações, constitui um problema de grande interesse.

Para processos MIMO, com interações entre malhas severa e/ou que exigem um controle rigoroso, os esquemas de controle PI/PID com desacopladores, Figura 1.3, são muitas vezes preferidos. O desacoplamento é uma ferramenta clássica em controle multivariável cujo principal objetivo é compensar os efeitos das interações entre as malhas. O controle com desacopladores geralmente requer duas etapas: primeiro os efeitos das interações entre as malhas do processo são eliminados ou minimizados a partir de uma rede de desacopladores estáticos ou dinâmicos e, em seguida, o processo é tratado como várias malhas de controle PI/PID simples.

No desacoplamento dinâmico, os elementos do desacoplador são projetados de modo a eliminar as interações entre todas as malhas, para todas as frequências. No desacoplamento estático o objetivo

é eliminar apenas interações em regime permanente. O desacoplador estático é mais simples de projetar e implementar, porém pode não fornecer o desempenho satisfatório em malha fechada. Por outro lado, o desacoplador dinâmico ideal é baseado nas matrizes inversas do sistema e necessita de um modelo do processo perfeito o que o torna difícil de ser implementado na prática.

Apesar de o controle com desacopladores fornecer um melhor desempenho do que esquemas de controle descentralizado PI/PID para processos fortemente acoplados, tal estratégia pode resultar em estruturas de controle complexas sendo sua implementação prática difícil de ser realizada por intermédio de CPs, principalmente quando são necessários desacopladores dinâmicos. Outro problema do sistema de controle com desacopladores é que os operadores não conseguem ajustá-los no campo, resultando em baixo desempenho do sistema de controle. A complexidade desta estratégia de controle está diretamente relacionada com a dimensão do sistema e muito dos resultados na literatura estão restritos principalmente a processos com duas entradas e duas saídas (TITO, do inglês Two-Input Two-Output) (Xiong et al., 2007).

Uma estrutura de controle PI/PID não descentralizada, isto é, na qual todas as entradas são usadas para controlar todas as saídas, em alguns casos pode ser tratada como um caso particular de controladores com desacopladores dinâmicos onde os controladores fora da diagonal principal são projetados para minimizar os efeitos da interação entre malhas, enquanto que os controladores da diagonal são projetados para se alcançar o desempenho desejado do sistema de controle em malha fechada. Um compromisso entre os esquemas de controle multi-malhas e com desacoplamento pode ser estabelecido a partir da adição de apenas alguns controladores PI/PID extras fora da diagonal da matriz do controlador formando uma estrutura de controle esparsa. O controle esparso pode gerar melhor resultado em relação ao controle descentralizado e com uma estrutura menos complexa em relação ao controle com desacopladores, porém acrescenta problemas adicionais como, por exemplo, determinar quais malhas fora da diagonal devem ser controladas e como devem ser projetados os controladores diante de interações. Vários esquemas de controle com desacopladores e esparsos foram sugeridos na literatura (ver Shen et al. (2010) e suas referências).

A desvantagem do uso de uma estrutura de controle limitada, como no controle descentralizado em comparação ao controle multivariável completo, é a maior chance de não se obter o melhor desempenho possível. No entanto, geralmente não é o melhor desempenho possível que é procurado, mas sim um desempenho aceitável que satisfaça os objetivos de controle.

O projetista do sistema de controle geralmente espera que, com base em uma escolha apropriada da combinação dos canais de entrada-saída, não ocorra interações significativas entre os vários canais. O projeto de sistemas de controle para sistema multivariáveis é, deste modo, um procedimento de dois passos. O primeiro passo é a seleção da configuração de controle. No caso de sistema de controle descentralizado PI/PID, consiste na escolha da melhor combinação dos canais de entrada-saída ou

emparelhamento (no inglês, *loop pairing*). O segundo passo é o projeto do controlador que, no caso de sistemas de controle descentralizados baseados em controladores PI/PID, corresponde à seleção da estrutura e à sintonia dos parâmetros do controlador PI/PID de cada malha de controle.

A configuração de controle corresponde à seleção de qual variável manipulada (entrada da planta) será utilizada para atuar sobre qual variável controlada (saída da planta) que resulte em um controle mais eficiente com um baixo grau de interação. Porém, quando interações significativas estão presentes no processo, a seleção da configuração de controle mais efetiva pode não ser óbvia. Geralmente, quanto mais fortes as interações, mais difícil é obter um desempenho de controle satisfatório usando uma estratégia multi-malhas. Se a configuração de controle for mal escolhida, até mesmo o mais avançado e perfeitamente sintonizado controlador descentralizado pode resultar em um desempenho pobre do sistema de controle e reduzir as margens de estabilidade (Seborg et al., 2010).

A complexidade da seleção da estrutura de controle está relacionada diretamente com o número de variáveis do processo uma vez que, para um problema de controle com m variáveis controladas e m variáveis manipuladas, há $m!$ (onde ! denota o operador fatorial) configurações de controle multi-malhas possíveis. Apesar de várias destas configurações de controle possam ser imediatamente rejeitadas como sendo impraticáveis ou inviáveis (p. ex., aqueles que geram instabilidade ou comportamento de fase não-mínima), o número de possibilidades ainda pode ser considerável. Portanto, é de grande importância a quantificação do grau de interação para que os pares de entrada/saída adequados, isto é, que minimizam o impacto das interações, possam ser formados. Para isso, medidas de interação (IM, do inglês *Interaction Measure*) podem ser usadas.

Um grupo de medidas de interação bastante conhecido e comumente empregado é o arranjo de ganhos relativos (RGA, do inglês *Relative Gain Array*), proposto em Bristol (1966). O RGA considera as propriedades do estado estacionário da planta e dá uma sugestão de como resolver o problema de seleção dos pares entrada/saída. O RGA também indica quais pares devem ser evitados devido a possíveis problemas de estabilidade e desempenho. Vários autores, p. ex., Seborg et al. (2010) e Skogestad et al. (1990), demonstraram aplicações práticas do RGA. Ao longo dos anos várias extensões e ferramentas semelhantes ao RGA foram propostas. No RGA dinâmico (DRGA, do inglês *Dynamic Relative Gain Array*), os ganhos de regime estacionário são substituídos por funções racionais e os termos passam a ser dependentes da frequência (Witcher e J.McAvoy, 1977). O RGA foi estendido para análise do processo em qualquer frequência, mas ainda em uma única frequência por vez em Kinnaert (1995). A generalização do RGA para plantas não quadradas e o seu emprego como uma ferramenta de triagem para obter uma sugestão sobre quais entradas ou saídas que devem ser removidas em caso de sinais excessivos é dado em Skogestad e Postlethwaite (1996). O problema de emparelhamento para sistemas maiores, de maneira mais confiável que o RGA convencional, pode ser tratado pelo ganho relativo parcial (PRG, do inglês *Partial Relative Gain*) sugerido por Haggblom

(1997). O ganho relativo descentralizado (dRG, do inglês *Decentralized Relative Gain*) considera os efeitos sobre as interações no controle descentralizado de largura de banda finita (Schmidt e Jacobsen, 2003). No arranjo de ganhos relativos efetivos (ERGA, do inglês *Effective Relative Gain Array*) em Xiong et al. (2005) o ganho em estado estacionário e a largura de banda do processo são utilizado para formar uma medida de interação dinâmica. Em He et al. (2009), é apresentado o arranjo de ganhos normalizados relativos (RNGA, do inglês *Relative Normalized Gain Array*) que considera tanto os ganhos de regimes estacionários, quanto a função de transferência, produzindo uma medida de interação mais precisa do que o RGA convencional (Vu e Lee, 2010b). Algumas outras ferramentas comumente utilizadas principalmente para tratar várias propriedades de estabilidade, são o índice de Niderlinski (Niederlinski, 1971), a medida μ-interação (Grosdidier e Morari, 1987) e a matriz direta de Nyquist (Rosenbrock, 1970). Ferramentas para abordar o desempenho em malha fechada são mais raras. O arranjo de ganhos relativos de desempenho (PRGA, do inglês *Performance Relative Gain Array*) em Hovd e Skogestad (1992) pode ser usado para determinar o ganho de malha necessário nos diferentes subsistemas a fim de alcançar um desempenho de malha fechada especificado. Outros exemplos são dados em Kinnaert (1995), onde um levantamento das medidas de interação para sistemas MIMO pode ser encontrado.

O RGA fornece apenas uma informação limitada sobre quando usar controladores multivariáveis e não dá nenhuma indicação de como escolher estruturas de controladores multivariáveis. Um segundo grupo, no qual se emprega uma abordagem diferente para investigar a interação do canal é a família de métodos baseados nos gramianos (Salgado e Conley, 2004). Neste caso, os gramianos de controlabilidade e observabilidade são utilizados para construir a matriz de participação (PM, do inglês *Participation Matrix*). A combinação dos canais de entrada-saída é baseada nos elementos da PM que refletem a interação entre os vários canais de entrada-saída. O arranjo de índices de interação de Hankel (HIIA, do inglês *Hankel Interaction Index Array*) é baseado em ideia similar (Wittenmark e Salgado, 2002). Estas medidas de interação baseada em gramianos parecem superar a maioria das desvantagens do RGA. Uma propriedade chave deste é que toda a faixa de frequências é levada em conta em uma única medida. Além disso, estas medidas parecem sugerir estruturas adequadas de controle quando uma estrutura descentralizada é desejada, bem como quando se carece de uma estrutura multivariável mais elaborada. Em Birk e Medvedev (2003), é estudado a relação entre o operador de Hankel e os métodos baseados em gramiano e é considerada a aplicação de diferentes normas para o cálculo da PM.

Apesar da simplicidade do sistema de controle descentralizado, sintoniza-los pode não ser uma tarefa trivial. A menos que o processo seja transformado em sistemas desacoplados, aplicar métodos de sintonia de controladores PID SISO para sistemas multi-malhas muitas vezes resulta em instabilidade ou em um desempenho insatisfatório. A principal dificuldade na sintonia de controladores

multi-malhas está em mensurar a contribuição de cada variável manipulada em cada uma das variáveis de saída. A modificação em um parâmetro de um controlador pode melhorar o desempenho de uma variável específica, mas por outro lado, pode piorar sensivelmente o desempenho de outras variáveis (de Arruda et al., 2008). Na indústria esta tarefa é, em muitos casos, feita através de métodos de tentativa e erro, que demandam tempo e muitas vezes são incapazes de atingir os critérios de melhor desempenho da planta (Luyben, 1986). Para garantir estabilidade, muitos controladores SISO multi-malhas industriais são ajustados livremente, o que leva uma operação ineficiente e custos de energia mais elevados (Ho et al., 1997). A situação se agrava na indústria de processos químicos, que são naturalmente multivariáveis e com interações significativas entre as suas variáveis de entrada e saída, levando o engenheiro de processos, responsável por centenas de malhas, a necessitar de uma estratégia de sintonia de fácil implantação, mas necessariamente robusta (Åström e Hägglund, 2004). Com o objetivo de incluir de forma eficiente os efeitos das interações entre malhas, muitos métodos de sintonia de controle multi-malhas têm sido propostos, podendo ser classificados em cinco tipos principais (Dittmar et al., 2011):

1. Métodos de desintonia (Luyben, 1986);
2. Métodos de fechamento sequencial de malhas (Mayne, 1973);
3. Métodos de projeto independente (Grosdidier e Morari, 1986; Skogestad e Morari, 1989);
4. Métodos de auto-sintonia utilizando relé realimentado (Loh et al., 1993; Shen e Yu, 1994; Halevi et al., 1997);
5. Métodos de otimização.

Nos métodos de desintonia, cada controlador do sistema de controle multi-malhas é primeiro projetado considerando o correspondente elemento diagonal da matriz de função de transferência em malha aberta a partir de um procedimento SISO, ignorando as interações entre malhas do processo. Em seguida, os controladores são então desintonizados por meio da redução dos ganhos dos controladores por algum fator *ad hoc* para ter em conta as interações entre malhas até que critérios de estabilidade ou desempenho sejam satisfeitos. Neste caso, a redução das interações no processo leva a um comportamento mais lento das malhas individuais PID. Apesar da simplicidade deste método, o desempenho e a estabilidade das malhas de controle não podem ser claramente definidos pelos procedimentos de desintonia (Huang et al., 2003). O método de desintonia mais popular é o chamado BLT (do inglês *Biggest Log-modulus Tuning*) desenvolvido por Luyben (1986). Em sua versão original, as malhas individuais PI são primeiro ajustadas independentemente pelas regras de Ziegler-Nichols ignorando as interações. Em seguida a desintonia é realizada ajustando um parâmetro F que divide

e multiplica o ganho do controlador e o tempo integral respectivamente de cada malha, até se obter uma margem de segurança de estabilidade em malha fechada especificada, conforme indicado pelo gráfico de Nyquist multivariável do polinômio característico do sistema. Em Monica et al. (1988) o método BLT foi estendido para controladores PID e também para compensar possíveis assimetrias em interações multi-malhas. Neste caso, são utilizados fatores de ponderação individuais para a desintonia de cada malha SISO. Em Lee et al. (1998) o método de tentativa e erro denominado ICC (do inglês *Iterative Continuous Cycling*) (Seborg et al., 2010) foi estendido para o ajuste de controladores multi-malhas PI, de modo que o método de matriz de Nyquist é refinado para determinar o ganho final para sintonia multi-malhas. Em Chien et al. (1999), os controladores PI de cada malha são projetados por método de síntese direta regular e em seguida são desintonizados de acordo com os valores da matriz de ganho relativo.

Nos métodos de fechamento sequencial de malhas, as malhas são fechadas uma após a outra, geralmente começando com a malha mais rápida. A interação dinâmica de cada malha é então considerada no fechamento da próxima malha e assim por diante. O método sequencial é um método simples onde cada controlador pode ser projetado diretamente usando estratégias de projeto SISO. Quando as saídas do sistema podem ser desacopladas no tempo, o método sequencial pode ser efetivamente usado para o projeto de controladores multi-malhas. Uma desvantagem do método sequencial é que a tolerância a falhas não é garantida quando as malhas anteriores falham. Além disso, o resultado global depende fortemente de como este controlador é projetado e de quais iterações podem ser necessárias, uma vez que, fechar as malhas subsequentes pode alterar a resposta das malhas previamente projetadas. No método sequencial pode ser difícil lidar com algumas propriedades, tais como robustez, como discutido em Chiu e Arkun (1992). Em Hovd e Skogestad (1994) é proposto um procedimento que envolve a minimização de um critério de desempenho, em termos do valor singular estruturado, em cada etapa do projeto sequencial. Em Ji et al. (2007) é proposto um método de fechamento sequencial de malhas interativo em que, para cada passo do método, é aplicado o método da continuação (Lee e Edgar, 2005) sistematicamente até que o sistema de controle multi-malhas convirja para uma resposta em malha fechada desejada.

Nos métodos de projeto independente, cada controlador é projetado com base no elemento diagonal correspondente do processo multivariável, enquanto que as interações fora da diagonal devem ser tomadas em conta, considerando algumas restrições no processo. Geralmente, estabilidade e tolerância a falhas são obtidas automaticamente no método de projeto independente. Este método de projeto é eficaz quando as funções de transferência da diagonal determinam o comportamento do sistema. Conforme descrito em Skogestad e Morari (1989), o método é potencialmente conservador uma vez que durante o projeto de um controlador específico as informações sobre outros controladores não são exploradas. As restrições impostas nas malhas individuais são dadas por critérios como a me-

dida μ-interação (Grosdidier e Morari, 1986; Skogestad e Morari, 1989; Hovd e Skogestad, 1993) e as bandas de Gershgorin (Chen e Seborg, 2001; Ho et al., 1997). Em Hovd e Skogestad (1993) é proposto um procedimento de projeto independente considerando o método IMC (do inglês *Internal Model Control*) para cada malha. A medida μ-interação e o valor singular estruturado são utilizados para desenvolver os limites para o projeto das malhas individuais. Em Chen e Seborg (2001) foi utilizado as bandas de Gershgorin para a identificação de pontos críticos. Fórmulas analíticas são desenvolvidas para o ganho final e a frequência final baseada na resposta em frequência do sistema e nas bandas de Gershgorin.

As técnicas de auto-sintonia utilizando o método do relé realimentado (do inglês *auto-tuning relay-feedback*) são baseados em ensaios simples de relé realimentado para identificar o ganho crítico e o período do processo para sistemas SISO (Åström e Hägglund, 1984). Em vez de um sistema à beira da instabilidade, o ponto crítico é identificado a partir de um ciclo limite estável gerado usando relés. A extensão da auto-sintonia utilizando o método do relé realimentado combinada diretamente com a sintonia sequencial, para determinar as configurações do controlador PID descentralizado é apresentado em Loh et al. (1993) e Shen e Yu (1994) onde testes sequenciais com relé realimentado são usados para localizar os pontos críticos de um sistema MIMO. Em Halevi et al. (1997) foram aplicados relés simultaneamente em todas as malhas de controle para essa finalidade. Após as informações de resposta em frequência terem sido obtidas, as regras de sintonia de Ziegler-Nichols ou suas modificações podem ser aplicadas para ajustar os controladores PI/PID. Uma vez que a execução dos experimentos de relé realimentado simultâneo ou sequencial em condições industriais é um procedimento difícil (p. ex. devido a ruídos, atraso de tempo longo, etc.), esta abordagem tem encontrado aplicação limitada.

O problema de sintonia de controladores PI/PID é uma problema de otimização não convexo de difícil solução. Algoritmos de otimização não linear, aplicados como métodos de pesquisa global tem mostrado ser particularmente úteis para resolver este tipo de problema. Este método proporciona ao projetista a liberdade de especificar explicitamente diferentes objetivos de desempenho, tais como especificações sobre a resposta transitória das saídas do processo, rastreamento dos sinais de referência, rejeição a perturbações, atenuação de ruídos de medição, etc. Por outro lado, muitos dos métodos de otimização existentes de projeto de controladores multi-malhas PI/PID são computacionalmente intensivos e/ou exigem a resolução de um problema de otimização em grande escala e, portanto, são menos atraentes para os operadores. Em Bao et al. (1999), o problema de sintonia de controlador robusto multi-malhas PID é formulado no âmbito do controle $\mathcal{H}_\infty$ e os parâmetros do controlador PID são calculados pela resolução de um problema de otimização não linear com restrições de desigualdades matriciais, usando uma abordagem de programação semi-definida sucessiva. Em Vlachos et al. (1999) é apresentado um método de sintonia de controlador PI multi-malhas descentralizado

baseado em algoritmo genético considerando objetivos em termos de resposta transitória do sistema em malha fechada. Em Farag e Werner (2006) propõe-se um procedimento de projeto para controlador PID multivariável baseado em algoritmos genéticos, que permite a otimização dos parâmetros do controlador e estrutura. Em Sumana e Venkateswarlu (2010) é apresentado um método de autosintonia baseado em algoritmo genético para projetar um sistema de controle descentralizado PI. Em de Arruda et al. (2008) é proposto um algoritmo de otimização genético multiobjetivo, modificado por uma técnica de nicho e formação de castas, para resolver o problema de sintonia de múltiplas malhas de controladores PI/PID em processos multivariáveis.

Um esforço considerável tem sido dedicado a melhorar o desempenho de controladores PI/PID multi-malhas, permanecendo um tópico de interesse ao considerar questões práticas de controle. Felizmente, vários pesquisadores têm conseguido elaborar procedimentos de projeto PI/PID MIMO sem fazer suposições restritivas sobre a estrutura do sistema. Entretanto, ainda é interessante pesquisar novos métodos que possam levar a melhores desempenhos e que possam ser aplicados a uma classe mais abrangente de problemas, em especial, sintonia de sistemas de controle robusto multivariáveis PI/PID com diferentes objetivos de controle: boa resposta de rastreamento com desacoplamento do sistema, isto é, cada sinal de referência ter pouca interação com as demais variáveis controladas; rejeição de perturbações e atenuação dos ruídos de medição.

O funcionamento adequado das malhas de controle é fundamental para garantir a qualidade do produto, minimizar gastos de produção, reduzir paradas para manutenção e aumentar o lucro e competitividade da empresa. O desempenho de sistemas de controle em geral já é estudado há muitos anos. Existem muitos critérios e índices devidamente estabelecidos dentro da teoria de controle convencional (IAE, ITAE, ISE, ITSE, decaimento de um quarto, variabilidade, tempo de acomodação, sobre-sinal máximo, etc.), que permitem definir a eficiência de uma malha de controle. Além dos critérios e índices definidos pela teoria de controle, outros índices também são utilizados para avaliação de desempenho de malhas de controle. Estes índices normalmente permitem monitorar não só o desempenho do controlador em si, mas também o comportamento da malha como um todo (esforço da válvula, variações da dinâmica do processo, etc.).

Uma das formas de caracterizar o desempenho de sistemas de controle em malha fechada é através de normas matriciais de certas matrizes de transferência em malha fechada do sistema. Normas matriciais, como as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$, proporcionam uma medida da influência das entradas exógenas (distúrbios de carga, ruídos, sinais de referência etc.) sobre as saídas controladas do sistema (erros de rastreamento, sinais de controle etc.). Controladores LQG (do inglês, *Linear-Quadratic-Gaussian*), bastante difundidos na década de 60, podem ser vistos como um caso especial do controle ótimo $\mathcal{H}_2$. Devido à característica do projeto LQG de não assegurar margens de estabilidade satisfatórias (Doyle, 1978), além da dificuldade de se conhecer as propriedades estatísticas das perturbações, cres-

ceu o interesse pelo controle ótimo $\mathcal{H}_\infty$ a partir do trabalho de Zames (1981). Em Doyle et al. (1989), soluções para os problemas de controle $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ foram formuladas para sistemas no espaço de estados através de equações de Riccati. Entretanto, formulações em termos de equações de Riccati podem se tornar difíceis de serem aplicadas aos problemas de controle robusto. A teoria de controle robusto foi bastante impulsionada a partir do final dos anos 80 quando os problemas de controle robusto passaram a ser caracterizados por problemas de otimização convexa. Os problemas de otimização convexa possuem a propriedade de que um ótimo local corresponde ao ótimo global. Na teoria de controle robusto, os problemas são formulados como problemas de programação semi-definida (SDP, do inglês *Semi-definite Programming*), uma classe dos problemas de otimização convexa, na qual a função objetivo é linear e as restrições são na forma de desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*) (Vendenbergue e Boyd, 1996).

Por se tratar de controladores por realimentação dinâmica de saída de ordem reduzida com restrições de estrutura, controladores PI/PID multi-malhas não possuem formulações convexas baseadas em LMIs, não sendo possível a obtenção da solução diretamente a partir de um programa para solução de LMIs. Nos casos em que não é possível formular o problema em termos de LMIs ou as formulações de síntese baseadas em LMIs não produzem resultados satisfatórios, é interessante buscar novas estratégias para solucionar o problema.

O termo multiobjetivo é empregado aqui para referir-se aos projetos que devem atender às especificações de desempenho $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ e às restrições de posicionamento regional de pólos. A motivação para o projeto multiobjetivo pode ser colocada da seguinte forma (Scherer et al., 1997):

1. O projeto considerando desempenho $\mathcal{H}_\infty$ é conveniente para garantir estabilidade robusta de sistemas incertos, para rejeição de distúrbios na forma de sinais com energia limitada e para expressar especificações no domínio da frequência tais como faixa de passagem e ganho em baixas frequências.

2. O projeto considerando desempenho $\mathcal{H}_2$ é equivalente ao controle ótimo LQG sendo útil para tratar de rejeição a distúrbios com características estocásticas, como ruídos de medição ou perturbações aleatórias.

3. O posicionamento regional de pólos é útil para garantir determinadas características da resposta transitória, como o tempo de decaimento ou o amortecimento.

As técnicas de projeto $\mathcal{H}_\infty$ são bastante adequadas para tratar de aspectos no domínio da frequência e de questões de robustez, porém proporcionam pouco controle sobre o comportamento transitório e sobre a localização dos pólos em malha fechada (Chilali e Gahinet, 1996). Fica claro, a necessidade de técnicas de controle multiobjetivo que combinem os aspectos vantajosos de cada critério.

Quando se considera restrições na região de alocação de pólos, não existe uma garantia do tipo de resposta transitória que será obtida (os pólos podem estar em qualquer lugar da região restrita), principalmente para sistemas de ordem superior, e não há nenhuma restrição sobre os zeros em malha fechada. A situação se agrava ao lidar com modelos incertos. Cada possibilidade de modelo no domínio de incerteza irá resultar em uma configuração diferente de pólos dentro da região especificada que pode resultar em uma diferente resposta transitória. Uma grande desvantagem está relacionada com problemas de controle multiobjetivo. É difícil alcançar soluções diferentes para estabelecer o melhor compromisso entre os objetivos de controle baseado nas restrições do posicionamento regional de pólos, uma vez que um processo de tentativa e erro com algumas orientações sistemáticas seria necessário para modificar sucessivamente a região de pólos especificada em malha fechada a fim de melhorar a rejeição à perturbação ou a atenuação de ruído de medição (Bachur et al., 2011). Uma abordagem de controle alternativa para o rastreamento dos sinais de referência é a utilização da estratégia de aproximação de modelo de referência. Essa estratégia consiste em reduzir o erro entre o modelo de referência, com as características de resposta transitória desejada, e a matriz de função de transferência em malha fechada relacionando os sinais de referência e as saídas da planta. Modelos de referência em malha fechada têm sido aplicados com sucesso para garantir especificações de rastreamento de resposta em Rodrigues et al. (2009), Araujo et al. (2010), Bachur et al. (2010), Bachur et al. (2011) e Gonçalves et al. (2011). Em Gonçalves et al. (2011) foi verificado que tal estratégia pode também ser utilizada com sucesso em sistemas de controle multivariáveis na presença de interação entre malhas. Por se tratar de uma estratégia mais eficiente do que a síntese de controle com base na restrição regional de pólos, modelo referência será utilizado neste trabalho para garantir especificações de rastreamento de resposta e desacoplamento das malhas de controle. O erro de aproximação entre a matriz de transferência em malha fechada e o modelo de referência será caracterizada em termos da norma $\mathcal{H}_\infty$, tornando possível que esta especificação seja considerada como uma função objetivo adicional ao problema juntamente com atenuação de ruídos de medição e rejeição de perturbações.

Na prática, as incertezas estão sempre presentes na modelagem e controle de sistemas reais (erros de modelagem devido à linearização e aproximação, distúrbios, etc.), gerando baixo desempenho ou mesmo instabilidade nos sistemas de controle. Portanto, faz-se necessário o uso de um controlador robusto em termos de aplicações gerais. Em geral, os requisitos de desempenho e estabilidade são representados no domínio da frequência, não sendo comum encontrar na literatura procedimentos de sintonia robusta de controladores PI/PID multi-malhas no espaço de estados, que permitem tratar sistemas incertos representados por modelos politópicos.

1.2 Objetivos

A contribuição deste trabalho será desenvolver um procedimento de sintonia de controladores robustos PI/PID multi-malhas que busca desacoplar os canais de controle em sistemas multivariáveis assegurando o desempenho da resposta de rastreamento, a rejeição de distúrbios e a atenuação de ruídos de medição. O procedimento de sintonia de controladores robustos PID SISO, apresentado em Gonçalves (2006), será estendido para tratar sistemas multivariáveis incluindo a estratégia de aproximação de modelo $\mathcal{H}_\infty$ para obter o desacoplamento das malhas de controle e atender as especificações de rastreamento da resposta transitória (Gonçalves et al., 2011). O procedimento de sintonia a ser aplicado baseia-se na representação em espaço de estados e emprega modelos politópicos para representar o sistema incerto. Trata-se de um procedimento iterativo em dois passos (Gonçalves, 2006): síntese e análise. Na etapa de síntese, o problema de otimização multiobjetivo considerando o pior caso de infinito sistemas é substituído por um problema de otimização que considera apenas um conjunto finito de pontos do domínio de incerteza, sendo estes inicialmente os vértices do politopo. Na etapa de análise, o controlador obtido na etapa de síntese, é verificado para todo o politopo através de métodos de análise que combinam o algoritmo *branch-and-bound* e formulações de análise LMI. Assim, se determina a necessidade ou não de incluir novos pontos no conjunto finito de pontos considerado na etapa de síntese. Este procedimento transforma o problema de verificar infinitos sistemas do espaço de incerteza em um problema que necessita considerar apenas um número finito de pontos.

A motivação para considerar este procedimento para a sintonia de controladores robustos PI/PID multi-malhas é sua aplicação anterior com êxito em outros problemas de controle tais como síntese de controladores robustos por realimentação de estado (Gonçalves et al., 2005a), síntese de controlador robusto com realimentação de saída estática ou dinâmica (Gonçalves et al., 2005b), síntese de filtros robustos (Gonçalves, Palhares e Takahashi, 2006), sintonia de controladores PID para malhas simples (Gonçalves et al., 2008), redução de modelos (Gonçalves et al., 2009), síntese de controladores por realimentação dinâmica de saída (Bachur et al., 2011). Este procedimento tem proporcionado resultados menos conservadores que as formulações LMI, ou capacidade de obter resultados em casos nos quais formulações LMI não apresentem soluções factíveis. Segundo Gonçalves (2006), o procedimento proposto pode tratar de síntese de controladores dinâmicos com qualquer dimensão e estrutura específica como, por exemplo, controladores descentralizados.

1.3 Estrutura da Dissertação

A dissertação está organizada conforme a descrição a seguir.

No **capitulo 2** é apresentado a definição das normas para sinais e sistemas e os métodos utilizados na sua determinação numérica. Em seguida, é definido uma formulação em espaço de estados para o controlador descentralizado PI e PID com dois graus de liberdade, considerando variações na estrutura quanto a ação de controle aplicada sobre o erro de rastreamento e o sinal de saída. Por fim, o problema de sintonia de controladores robustos PI/PID multi-malhas é formulado em termos de um problema de otimização não convexo multiobjetivo cujas variáveis de otimização são os parâmetros dos controladores PI/PID. Os objetivos de controle são: atender as especificações da resposta de rastreamento, desacoplamento do sistema, rejeição de perturbações e atenuação de ruídos de medição.

No **capitulo 3** o procedimento iterativo de projeto, apresentando em Gonçalves (2006) é estendido para tratar o problema de otimização não convexa multiobjetivo aplicado a sintonia de controladores robustos PI/PID multi-malhas descentralizados.

No **capitulo 4** será demonstrado através de exemplos a eficiência do procedimento proposto de sintonia de controladores robustos PI/PID multi-malhas descentralizados diante de outros métodos já publicados para lidar com mesmo tipo de problema.

Finalmente, o **Capítulo 5** apresenta as conclusões gerais do trabalho até o atual estágio de pesquisa, propostas de desenvolvimento futuro e a relação de artigos aprovados em congresso com co-autoria do mestrando, que auxiliaram na integralização desta dissertação.

Capítulo 2

Formulação do Problema

2.1 Introdução

O procedimento de sintonia de controladores robustos PI/PID multi-malhas descentralizados proposto neste trabalho utiliza normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ como forma de quantificar o grau de influência das perturbações externas sobre as saídas de interesse e aproximação de modelo $\mathcal{H}_\infty$ para obter o desacoplamento das múltiplas malhas de controle e atender as especificações da resposta de rastreamento dos sinais de referência. Assim, neste capítulo é apresentado a definição das normas para sinais e sistemas e os métodos utilizados na sua determinação numérica. Em seguida, é apresentada uma formulação no espaço de estados para o controlador descentralizado PI e PID com dois graus de liberdade considerando variações na estrutura quanto a ação de controle aplicada sobre o erro de rastreamento e o sinal de saída. Por fim, o problema de sintonia de controladores robustos PI/PID multi-malhas descentralizados é formulado em termo de um problema de otimização multiobjetivo não convexo considerando os parâmetros dos controladores PI/PID para cada canal entrada-saída como variáveis de otimização. Os objetivos de controle são: atender às especificações da resposta de rastreamento, desacoplar as múltiplas malhas de controle, rejeitar perturbações e atenuar ruídos de medição sobre os sinais do sistema.

2.2 Normas de Sinais e Sistemas

Uma das formas de calcular a norma de um sinal contínuo no domínio do tempo é pela norma $\mathcal{L}_2$ definida como

$$\|w(t)\|_2 \triangleq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} w(t)^2 dt}. \tag{2.1}$$

Se esta integral é finita, o sinal é dito ser de quadrado integrável, representado por $w(t) \in \mathcal{L}_2$, o

que pode ser interpretado fisicamente como um sinal com energia limitada.

Norma de sistemas é uma extensão da ideia de norma de sinais que é uma medida de energia geralmente definida a partir da resposta em frequência do sistema. Seja um sistema linear invariante no tempo exponencialmente estável descrito pelas equações:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_w w(t), \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{zw} w(t), \quad x(0) = 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

sendo que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representa o vetor de estados, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ o vetor de entradas exógenas e $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ o vetor de saídas controladas e A, B_w, C_z e D_{zw} matrizes constantes com dimensões apropriadas.

A matriz de transferência relacionando o vetor de entradas exógenas w e o vetor de saídas controladas z pode ser representada no domínio da frequência por:

$$T_{wz}(s) = C_z(sI - A)^{-1}B_w + D_z. \tag{2.3}$$

Para sistemas lineares invariantes no tempo, a norma $\mathcal{H}_2$ no tempo continuo é definida como:

$$\|T_{zw}(j\omega)\|_2 \triangleq \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Tr}\left[T_{zw}^*(j\omega)T_{zw}(j\omega)\right] d\omega}, \tag{2.4}$$

sendo $\mathrm{Tr}(\cdot)$ o traço do argumento e $(\cdot)^*$ a transposta conjugada.

A norma $\|T_{zw}\|_2$ pode ser interpretada como a variância do sinal de saída $z(t)$ em regime estacionário para uma entrada $w(t)$ na forma de um processo ruído com média zero e variância unitária, isto é:

$$\|T_{zw}\|_2 = \lim_{T\to\infty} E\left\{\frac{1}{T}\int_0^T z(t)^T z(t) dt\right\}. \tag{2.5}$$

Se a matriz de transferência relacionando o vetor de entradas exógenas w e o vetor de saídas controladas z estável é estritamente própria, a norma $\mathcal{H}_2$ pode ser calculada exatamente através de um número finito de operações em termo dos grammianos de controlabilidade ou observabilidade: $\|T_{wz}\|_2^2 = \mathrm{Tr}(CX_cC^T) = \mathrm{Tr}(B^TX_oB)$, sendo X_c e X_o os grammianos de controlabilidade e observabilidade, respectivamente, que podem ser calculados resolvendo as seguintes equações de Lyapunov:

$$AX_c + X_cA^T + BB^T = 0, \tag{2.6}$$

$$X_oA + A^TX_o + C^TC = 0. \tag{2.7}$$

Os gramianos de controlabilidade e observabilidade X_c e X_o podem ser facilmente calculados por métodos numéricos eficientes. No entanto, para sistemas incertos os gramianos acima são de pouca utilidade pois não podem ser obtidos numericamente.

A norma $\mathcal{H}_\infty$ de uma matriz de transferência de um sistema estável, corresponde ao pico do ganho da resposta em frequência, no caso de sistemas SISO, ou o valor singular máximo no caso de sistemas MIMO, sendo definida como

$$\|T_{zw}\|_\infty \triangleq \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \overline{\sigma}[T_{zw}(j\omega)], \tag{2.8}$$

em que $\overline{\sigma}(\cdot)$ é o valor singular máximo do argumento.

A norma $\mathcal{H}_\infty$ pode também ser vista como o maior ganho em termos de energia que o sistema pode oferecer a um sinal de entrada. Esta interpretação é bastante útil e fornece uma definição alternativa relacionando os sinais de entrada e saída no domínio do tempo. Assim, o ganho $\mathcal{L}_2$ ou ganho RMS de um sistema estável linear invariante no tempo, correspondendo ao maior ganho entre a entrada e saída sobre todos os sinais de entrada limitados $w(t) \in \mathcal{L}_2$, é dado por

$$\|T_{zw}\|_\infty = \max_{w\in\mathcal{L}_2, w\neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}. \tag{2.9}$$

A norma $\mathcal{H}_\infty$ pode ser calculada com precisão adequada por meio de procedimentos iterativos (ver por exemplo Boyd et al. (1989)). A norma $\mathcal{H}_\infty$ pode ser calculada pela busca linear do valor mínimo de γ tal que a matriz Hamiltoniana não possui autovalores sobre o eixo imaginário (Zhou e Doyle, 1998):

$$H = \begin{bmatrix} A + BR^{-1}D^TC & BR^{-1}B^T \\ -C^T(I + DR^{-1}D^T)C & -(A + BR^{-1}D^TC)^T \end{bmatrix}$$

sendo $R \triangleq \gamma^2 - D^TD$.

2.3 Estrutura do Controlador PI/PID

Diferentes modificações aplicadas a estrutura de controle PID padrão foram propostas com o objetivo de melhorar o desempenho do sistema em malha fechada. Uma das mais amplamente aceita é o chamado PID com ponderação de *set-point* ou PID com dois graus de liberdade (2DOF, do inglês *Two-Degree-Of-Freedom*). O grau de liberdade de um sistema de controle é definido como o número de funções de transferência em malha fechada que podem ser ajustadas independentemente. Se o projeto de sistemas de controle é um problema multiobjetivo, então um sistema de controle com dois graus de liberdade naturalmente tem vantagens sobre sistema de controle com um grau de liberdade

(1DOF, do inglês *One-Degree-Of-Freedom*) uma vez que permite que os sinais de referência e as saídas medidas seja processados de forma independente por diferentes blocos do controlador. O bloco de realimentação do controlador pode ser projetado para garantir a estabilidade, a rejeição de perturbações e a atenuação de ruídos.

A Figura 2.1 mostra a estratégia de controle multi-malhas descentralizado com dois graus de liberdade, onde se considera que o modelo do processo multivariável, $P(s)$, é composto por m variáveis de entradas e m variáveis de saída sendo controlado por m controladores independentes.

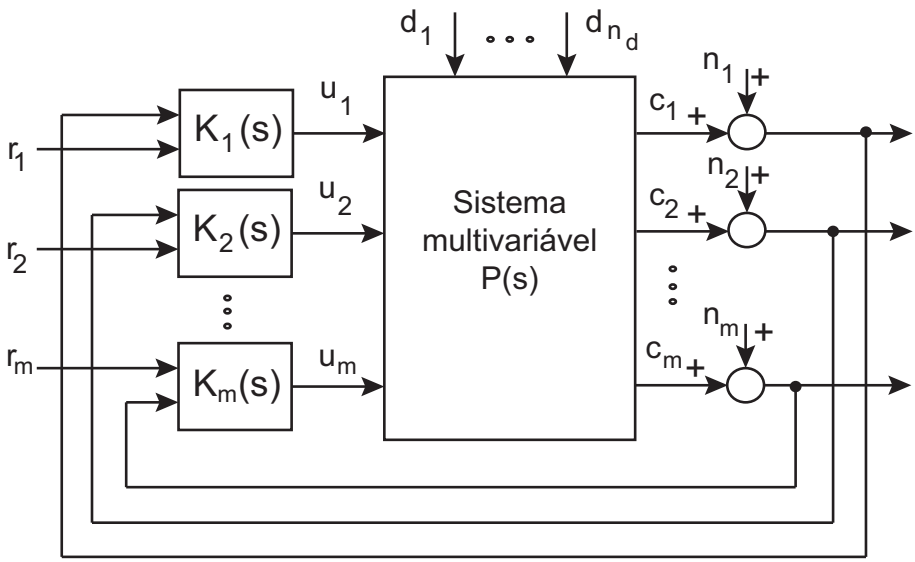


Fig. 2.1: Controle descentralizado.

Na Figura 2.1, c_j representa a saída do processo (variável controlada), u_j a variável manipulada, r_j o sinal de referência ou *set point*, d_j o sinal de perturbação de carga e n_j o sinal de ruído de medição da j-ésima malha de controle para $j = 1, 2, \ldots, m$.

A descrição entrada-saída da matriz de transferência $P(s)$ é dada por:

$$\mathbf{C}(s) = \mathbf{P}(s)\mathbf{U}(s) \tag{2.10}$$

$$\begin{bmatrix} C_1(s) \\ C_2(s) \\ \vdots \\ C_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1,1}(s) & p_{1,2}(s) & \ldots & p_{1,m}(s) \\ p_{2,1}(s) & p_{2,2}(s) & \ldots & p_{2,m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m,1}(s) & p_{m,2}(s) & \ldots & p_{m,m}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

O controlador multi-malhas descentralizado que atua na planta $\mathbf{P}(s)$, de dimensão $m \times m$, possui a matriz de transferência $\mathbf{K}(s)$ composta por m controladores monovariáveis independentes,

$k_j(s) = [k_{1,j}(s)\ k_{2,j}(s)]$ divididos em dois blocos. A ação do bloco $k_{1,j}(s)$ é aplicada sobre o erro de rastreamento e a ação do bloco $k_{2,j}(s)$ é aplicada sobre a saída medida da planta mais o ruído de medição. Considerando que o vetor de entradas é organizado de tal modo que a entrada $U_j(s)$ será utilizada para controlar a saída $C_j(s)$, $j = 1, \ldots, m$, a matriz de transferência do controlador pode ser escrita como:

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}(s)[\mathbf{R}(s)\ \ \mathbf{C}(s) + \mathbf{N}(s)]^T \tag{2.12}$$

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} k_{1,1}(s) & 0 & \ldots & 0 & k_{2,1}(s) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & k_{1,2}(s) & \ldots & 0 & 0 & k_{2,2}(s) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & k_{1,m}(s) & 0 & 0 & \ldots & k_{2,m}(s) \end{array}\right] \begin{bmatrix} R_1(s) \\ R_2(s) \\ \vdots \\ R_m(s) \\ C_1(s) + N_1(s) \\ C_2(s) + N_2(s) \\ \vdots \\ C_m(s) + N_m(s) \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Considerando que cada controlador na Eq. (2.13) é do tipo PID com dois graus de liberdade (PID-2DOF), o controlador $k_j(s)$ da j-essíma malha de controle é representado pelo diagrama de blocos da Figura 2.2, conforme Araki e Taguchi (2003), cuja a lei de controle é dada por:

$$\begin{aligned} U_j(s) &= k_{p,j}\left((1-a_j) + \frac{1}{T_{i,j}s} + (1-b_j)\frac{T_{d,j}s}{\rho T_{d,j}s+1}\right)R_j(s) - \\ & \quad k_{p,j}\left(1 + \frac{1}{T_{i,j}s} + \frac{T_{d,j}s}{\rho T_{d,j}s+1}\right)[C_j(s) + N_j(s)] \end{aligned} \tag{2.14}$$

Os parâmetros $k_{p,j}$, $T_{i,j}$ e $T_{d,j}$ são respectivamente o ganho proporcional, a constante de tempo integral e a constante de tempo derivativa do controlador PID da j-essíma malha de controle. O parâmetro ρ_j é usado para limitar o ganho em alta frequência do termo derivativo, melhorando assim a imunidade ao ruído do controlador (Åström e Hägglund, 1995). Os parâmetros a_j e b_j são parâmetros ajustáveis do controlador PID-2DOF permitindo variações quanto a sua estrutura, a partir do deslocamento de parte dos componentes proporcional e derivativo para a malha de realimentação.

Apesar dos seis parâmetros na Eq. (2.14) serem ajustáveis, podendo ser tratados como variáveis de otimização, é considerado neste trabalho valores fixos para os parâmetros ρ_j, a_j e b_j. Usar um valor fixo de ρ_j tem sido uma prática tradicional, sem influencia drástica nos valores ideais dos demais parâmetros, embora alguns cuidados devam ser tomados para determinados tipos de plantas (Araki e Taguchi, 2003). O parâmetro $1/\rho_j$ varia na faixa de 3 a 10 (Hang et al., 1991) sendo o valor

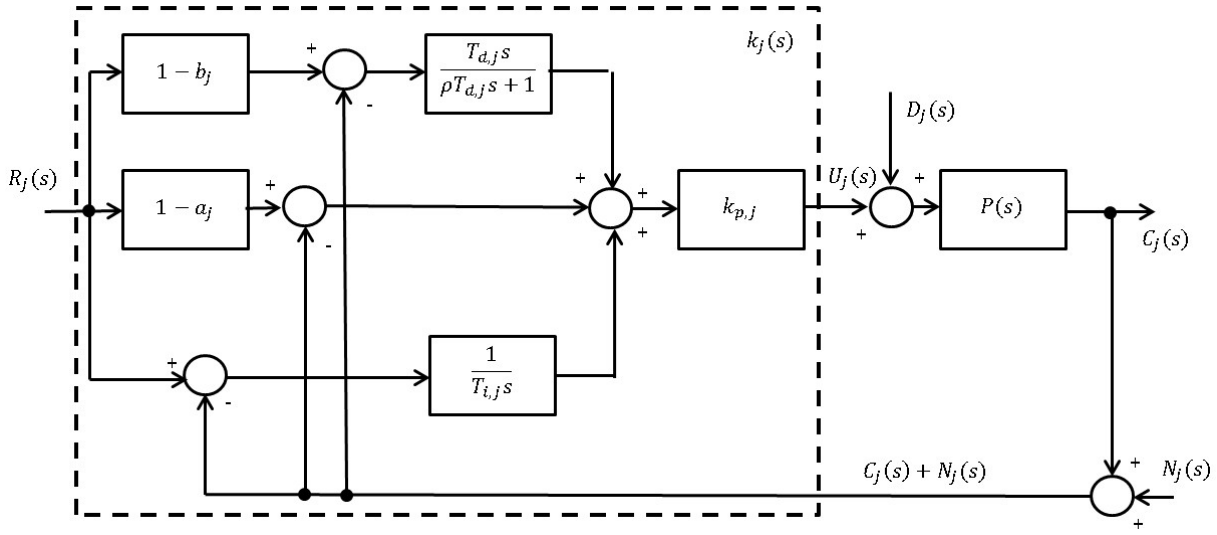


Fig. 2.2: Diagrama do controlador PID-2DOF.

típico $1/\rho_j = 10$. Os valores dos parâmetros a_j e b_j podem assumir quaisquer valores na faixa de $0 \leq a_j \leq 1$ e $0 \leq b_j \leq 1$, sendo casos especiais os valores em que $a_j \in \{0,1\}$ e $b_j \in \{0,1\}$. A estrutura do controlador PID ISA convencional é obtido definindo $a_j = b_j = 0$. Quando $a_j = 0$ e $b_j = 1$, é obtido o controlador PID com termo derivativo precedido (PI-D), onde a ação proporcional e integral é aplicada sobre o erro de rastreamento e a ação derivativa é aplicada sobre a saída medida da planta com ruído de medição. Para $a_j = b_j = 1$ é obtida a configuração de controle I-PD onde a ação integral é aplicada sobre o erro de rastreamento e a ação proporcional e derivativa é aplicada sobre a saída medida da planta com ruído de medição.

O diagrama de blocos da Fig. 2.2 pode ser representado pela realização mostrada na Figura 2.3.

Considerando o vetor de variáveis de entrada como sendo $[r_j(t) \;\; c_j(t) + n_j(t)]^T$ e a saída como sendo $u_j(t)$ e definindo o vetor das variáveis de estados como $[x_{c1}(t) \; x_{c2}(t)]^T$, o controlador $k_j(t)$ da Fig. 2.3 pode ser descrito no espaço de estados como

$$k_j(s) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & \dfrac{1}{T_{i,j}} & -\dfrac{1}{T_{i,j}} \\ 0 & -\dfrac{\mathcal{N}}{T_{d,j}} & (1-b_j)\dfrac{\mathcal{N}^2}{T_{d,j}} & -\dfrac{\mathcal{N}^2}{T_{d,j}} \\ \hline k_{p,j} & k_{p,j} & k_{p,j}[\mathcal{N}(1-b_j)+(1-a_j)] & -k_{p,j}(\mathcal{N}+1) \end{array}\right] \tag{2.15}$$

sendo $\mathcal{N} = 1/\rho$.

O controlador multivariável por realimentação dinâmica de saída , $K(s)$, definido na Eq. (2.13)

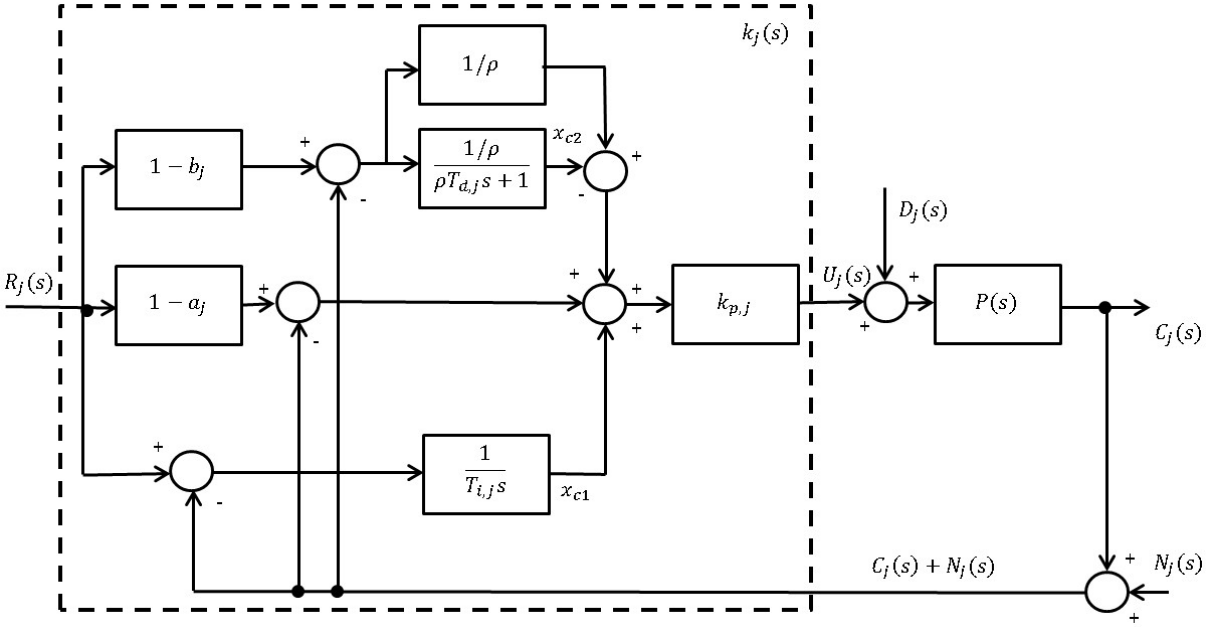


Fig. 2.3: Diagrama modificado do controlador PID.

para o sistema de controle multi-malhas descentralizado PID no espaço de estados é dado a partir da Eq. (2.15) como

$$K(s) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array}\right], \tag{2.16}$$

sendo

$$A_c = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\mathcal{N}_1}{T_{d,1}} \end{bmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\mathcal{N}_2}{T_{d,2}} \end{bmatrix} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\mathcal{N}_m}{T_{d,m}} \end{bmatrix} \end{bmatrix}; \tag{2.17}$$

$$
B_c = \begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} \dfrac{1}{T_{i,1}} \\ (1-b_1)\dfrac{\mathcal{N}_1^2}{T_{d,1}} \end{bmatrix} & 0 & \dots & 0 & \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{T_{i,1}} \\ -\dfrac{\mathcal{N}_1^2}{T_{d,1}} \end{bmatrix} & 0 & \dots & 0 \\
0 & \begin{bmatrix} \dfrac{1}{T_{i,2}} \\ (1-b_2)\dfrac{\mathcal{N}_2^2}{T_{d,2}} \end{bmatrix} & \dots & 0 & 0 & \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{T_{i,2}} \\ -\dfrac{\mathcal{N}_2^2}{T_{d,2}} \end{bmatrix} & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \begin{bmatrix} \dfrac{1}{T_{i,m}} \\ (1-b_m)\dfrac{\mathcal{N}_m^2}{T_{d,m}} \end{bmatrix} & 0 & 0 & \dots & \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{T_{i,m}} \\ -\dfrac{\mathcal{N}_m^2}{T_{d,m}} \end{bmatrix}
\end{bmatrix}; \tag{2.18}
$$

$$
C_c = \begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} k_{p,1} & k_{p,1} \end{bmatrix} & 0 & \dots & 0 \\
0 & \begin{bmatrix} k_{p,2} & k_{p,2} \end{bmatrix} & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \begin{bmatrix} k_{p,m} & k_{p,m} \end{bmatrix}
\end{bmatrix}; \tag{2.19}
$$

$$D_c = \left[\begin{array}{cccc} k_{p,1}[\mathcal{N}_1(1-b_1)+(1-a_1)] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_{p,2}[\mathcal{N}_2(1-b_2)+(1-a_2)] & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{p,m}[\mathcal{N}_m(1-b_m)+(1-a_m)] \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{cccc} -k_{p,1}(\mathcal{N}_1+1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -k_{p,2}(\mathcal{N}_2+1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -k_{p,m}(\mathcal{N}_m+1) \end{array}\right]. \tag{2.20}$$

O controlador, $k_j(s)$, pode assumir a estrutura PI conforme o diagrama apresentado na Fig. 2.4 . Neste caso, a lei de controle do controlador PI é dada por

$$U_j(s) = -k_{p,j}\left(1+\frac{1}{T_{i,j}s}\right)[C_j(s)+N_j(s)] + k_{p,j}\left((1-a_j)+\frac{1}{T_{i,j}s}\right)R_j(s) \tag{2.21}$$

sendo $k_{p,j}, T_{i,j}$ para $j = 1, \dots, m$, o ganho proporcional e o tempo de ação integral respectivamente da j-ésima

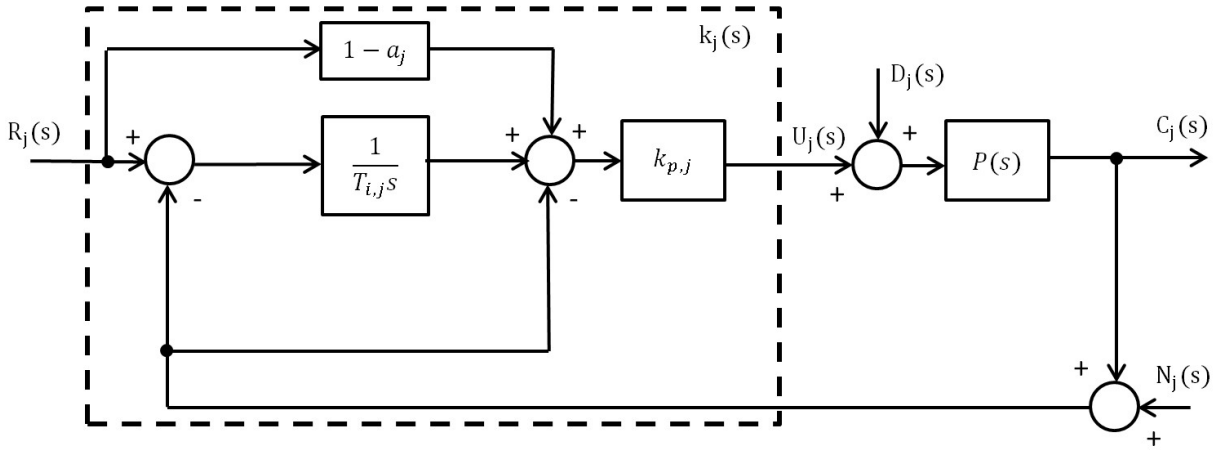


Fig. 2.4: Diagrama do controlador PI.

malha de controle. Se $a_j = 1$ a configuração do controlador é a configuração com dois graus de liberdade I-P, onde a ação integral é aplicada sobre o erro de rastreamento e a ação proporcional é aplicada sobre a saída da planta medida com ruído de medição. Se $a_j = 0$ a configuração do controlador é a configuração com um grau de liberdade PI. O controlador PI, $k_j(s)$, pode ser descrito no espaço de estados como

$$k_j(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & \frac{1}{T_{i,j}} & -\frac{1}{T_{i,j}} \\ \hline k_{p,j} & k_{p,j}(1-a_j) & -k_{p,j} \end{array}\right]. \tag{2.22}$$

Neste caso, o controlador multivariável por realimentação dinâmica de saída, $K(s)$, definido na Eq. (2.13) para o sistema de controle multi-malhas descentralizado PI no espaço de estados é dado a partir da Eq. (2.22) como

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array}\right], \tag{2.23}$$

sendo

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}; \tag{2.24}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_{i,1}} & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{T_{i,1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_{i,2}} & \dots & 0 & 0 & -\frac{1}{T_{i,2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{T_{i,m}} & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{T_{i,m}} \end{bmatrix}; \tag{2.25}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} k_{p,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_{p,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{p,m} \end{bmatrix}; \tag{2.26}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} k_{p,1}(1-a_1) & 0 & \dots & 0 & -k_{p,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_{p,2}(1-a_2) & \dots & 0 & 0 & -k_{p,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{p,m}(1-a_m) & 0 & 0 & \dots & -k_{p,m} \end{bmatrix}. \tag{2.27}$$

2.4 Formulação do Problema

O sistema de controle multi-malhas da Fig. 2.1 pode ser representado pelo diagrama de blocos generalizado apresentado na Figura 2.5 em que $P(s)$ é um sistema linear invariante no tempo, em tempo contínuo, descrito por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t), \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{zu} u(t) + D_{zw} w(t), \\ y(t) &= C_y x(t) + D_{yw} w(t), \end{aligned} \tag{2.28}$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ o vetor de entradas (variáveis manipuladas), $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ o vetor de variáveis exógenas (sinais de referência, $r(t) \in \mathbb{R}^m$, distúrbios, $d(t)$, e ruídos de medição, $n(t) \in \mathbb{R}^m$),

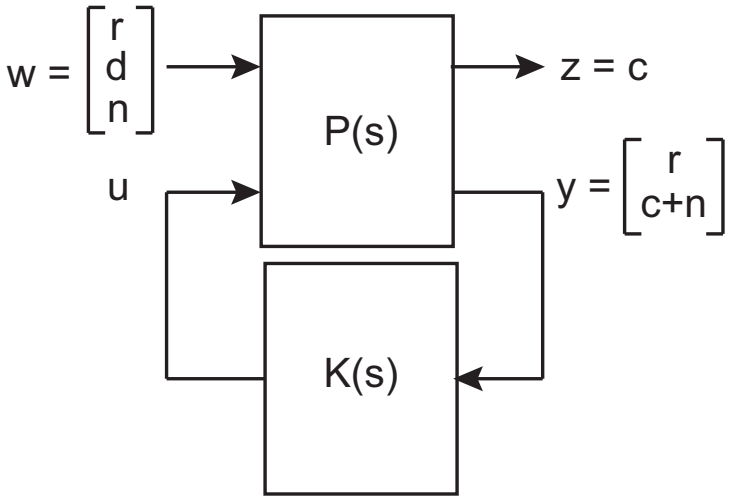


Fig. 2.5: Diagrama de blocos do sistema de controle generalizado.

$z(t) \in \mathbb{R}^m$ o vetor de variáveis controladas (saídas da planta, $c(t) \in \mathbb{R}^m$) e $y(t) \in \mathbb{R}^{2m}$ o vetor de variáveis medidas, i.e., as entradas dos controladores PI/PID multi-malhas descentralizados (sinais de referência e saídas da planta com adição dos ruídos de medição).

Para simplicar a notação, as matrizes do sistema na Eq. (2.28) são agrupadas da forma:

$$\mathcal{S} \triangleq \left[\begin{array}{c|cc} A & B_u & B_w \\ \hline C_z & D_{zu} & D_{zw} \\ C_y & 0 & D_{yw} \end{array}\right], \tag{2.29}$$

que pode conter parâmetros incertos, pertencendo a um conjunto compacto convexo, ou politopo, definido como sendo a combinação convexa de seus vértices:

$$\mathcal{P}(\alpha) \triangleq \left\{ \mathcal{S} : \mathcal{S} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathcal{S}_i; \;\; \alpha \in \Omega \right\}, \tag{2.30}$$

$$\Omega \triangleq \left\{ \alpha \; : \; \alpha_i \geq 0, \; \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1 \right\}, \tag{2.31}$$

sendo $\mathcal{S}_i$, $i = 1, \ldots, N$, os vértices do politopo e $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_N \end{bmatrix}'$ o vetor que parametriza o politopo. A dependência das matrizes do sistema de α será omitida para simplificar a representação.

Considerando o controlador por realimentação dinâmica de saída, $U(s) = K(s)Y(s)$, sendo $K(s)$ definido pela Eq. (2.16) ou (2.23), a matriz de transferência em malha fechada relacionando as variáveis controladas,

$z(t)$, e as variáveis exógenas, $w(t)$,

$$Z(s) = T_{zw}(s)W(s),\ T_{zw}(s) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array}\right], \tag{2.32}$$

pode ser representada como

$$\begin{aligned} A_f &= \begin{bmatrix} A + B_u D_c C_y & B_u C_c \\ B_c C_y & A_c \end{bmatrix}; \\ B_f &= \begin{bmatrix} B_w + B_u D_c D_{yw} \\ B_c D_{yw} \end{bmatrix}; \\ C_f &= \begin{bmatrix} C_z + D_{zu} D_c C_y & D_{zu} C_c \end{bmatrix}; \\ D_f &= \begin{bmatrix} D_{zw} + D_{zu} D_c D_{yw} \end{bmatrix}; \end{aligned} \tag{2.33}$$

podendo ser dividida em três blocos:

$$Z(s) = \begin{bmatrix} T_{cr}(s) & T_{cd}(s) & T_{cn}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(s) \\ D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

sendo $T_{cr}(s)$, $T_{cd}(s)$ e $T_{cn}(s)$ as funções de transferência relacionadas com a resposta de rastreamento, a rejeição de distúrbios de carga e a atenuação de ruído de medição respectivamente.

Na sintonia de controladores PI/PID, o sistema resultante deve apresentar as seguintes características: bom rastreamento de *set-point*, satisfatória rejeição de perturbação de carga, mínima influência do ruído de medição, pequena interação entre as malhas de controle, menor esforço de controle e robustez às incertezas do modelo. Existem diferentes maneiras de fazer cumprir estes requisitos na estratégia de síntese de controlador PI/PID. Por exemplo, a rejeição de perturbação de carga pode ser alcançada minimizando a norma de função de transferência em malha fechada apropriada e requisitos para as respostas no tempo podem ser alcançados por restrições na região de alocação de pólos ou utilizando modelos de referência onde o objetivo é reduzir a diferença entre a matriz de transferência de malha fechada e o modelo de referência. Para um controlador robusto PI/PID, a abordagem de sintonia pode considerar sistemas representados por modelos politópicos ou dependentes de maneira afim de parâmetros.

Considere um modelo de referência bloco diagonal que desacopla o sistema e alcança as especificações da resposta transitória de rastreamento (sobre-sinal, tempo de acomodação, etc.) para cada saída controlada:

$$T_m(s) = \begin{bmatrix} T_{m,1}(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_{m,m}(s) \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

sendo as funções de transferências $T_{m,j}$, $j = 1, \ldots, m$ de qualquer ordem, incluindo qualquer tipo de termos. Seja

$$T_m(s) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A_m & B_m \\ \hline C_m & D_m \end{array}\right], \; T_{cr}(s) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A_{cr} & B_{cr} \\ \hline C_{cr} & D_{cr} \end{array}\right]. \tag{2.36}$$

O erro de aproximação de modelo, $E(s) \triangleq T_m(s) - T_{cr}(s)$, pode ser representado no espaço de estados como

$$E(s) = \left[\begin{array}{cc|c} A_m & 0 & B_m \\ 0 & A_{cr} & B_{cr} \\ \hline C_m & -C_{cr} & D_m - D_{cr} \end{array}\right]. \tag{2.37}$$

O problema de sintonia dos controladores robustos PI/PID multi-malhas descentralizados para aproximação de modelo de referência, desacoplamento das malhas de controle, rejeição de distúrbios e atenuação de ruídos pode ser descrito como sendo: Definido a estrutura do controlador e o modelo de referência, $T_m(s)$, determinar os parâmetros $k_{p,j}$, $T_{i,j}$ e $T_{d,j}$, $j = 1, \ldots, m$, do controlador $K(s)$, descrito pelas equações (2.16) ou (2.23), de modo a minimizar a norma $\mathcal{H}_\infty$ do erro de aproximação do modelo, $E(s)$, a norma $\mathcal{H}_\infty$ da matriz de transferência relacionando as saídas da planta e os distúrbios, $T_{cd}(s)$, e a norma $\mathcal{H}_2$ da matriz de transferência relacionando as saídas da planta e os ruídos de medição, $T_{cn}(s)$, garantindo que o sistema em malha fechada seja robustamente estável:

$$K^*(s) = \arg\min_{K(s)} \begin{bmatrix} \max\limits_{\alpha\in\Omega} \|T_{cd}(s,\alpha,K)\|_\infty \\ \max\limits_{\alpha\in\Omega} \|T_{cn}(s,\alpha,K)\|_2 \\ \max\limits_{\alpha\in\Omega} \|E(s,\alpha,K)\|_\infty \end{bmatrix}, \tag{2.38}$$

$$\text{sujeito a: } K(s) \in \mathcal{F},$$

sendo $\mathcal{F}$ o conjunto de controladores com parâmetros dentro das faixas aceitáveis que garantem a estabilidade robusta do sistema em malha fechada.

Uma estratégia para lidar com o problema de otimização multiobjetivo é transformá-lo em um problema escalar e aplicar técnicas de otimização escalar. Neste trabalho será considerada a seguinte formulação escalar para o problema definido pela Eq. (2.38):

Problema escalar: Definido a estrutura do controlador, o modelo de referência, $T_m(s)$, e os escalares $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_3 \geq 0$, $\epsilon_1 \geq 0$, $\epsilon_2 \geq 0$, $\epsilon_3 \geq 0$ determinar os parâmetros $k_{p,j}$, $T_{i,j}$ e $T_{d,j}$, $j = 1, \ldots, m$, do controlador

$K^*(s)$ tal que

$$K^*(s) = \arg\min_{K(s)} \begin{pmatrix} +\lambda_1 \max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cd}(s,\alpha,K)\|_\infty \\ +\lambda_2 \max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cn}(s,\alpha,K)\|_2 \\ \lambda_3 \max_{\alpha\in\Omega} \|E(s,\alpha,K)\|_\infty \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a:} \quad & \max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cd}(s,\alpha,K)\|_\infty \leq \epsilon_1, \\ & \max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cn}(s,\alpha,K)\|_2 \leq \epsilon_2, \\ & \max_{\alpha\in\Omega} \|E(s,\alpha,K)\|_\infty \leq \epsilon_3, \\ & K(s) \in \mathcal{F}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Este problema auxiliar combina duas técnicas de escalarização para transformar o problema multiobjetivo original em um problema de otimização escalar: o problema ponderado e o problema ϵ-restrito. Para o problema ponderado o objetivo é minimizar a soma ponderada das funções objetivo. No problema ϵ-restrito apenas uma função objetivo é minimizada por vez e as demais funções objetivo são tratadas como restrições. No problema escalar 2.39, uma determinada função objetivo é minimizada a partir de uma soma ponderada ou exclusivamente tratada como uma restrinção.

Diferentes soluções podem ser alcançadas variando os fatores de ponderação λ_i das diferentes funções objetivo e/ou restringindo-as definindo $\epsilon_i < \infty$ para $i \in \{1, 2, 3\}$. P. ex., definindo $\lambda_3 = 0$ e $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \infty$, ϵ_3 pode ser escolhido para garantir certo nível de desacoplamento e de aproximação das respostas transitórias especificadas ao passo que λ_1 e λ_2 podem ser escolhidos para obter um bom compromisso entre rejeição de distúrbios e atenuação de ruídos de medição.

No capitulo 3 é apresentado um procedimento iterativo de sintonia PID aplicado na solução do problema da Eq. (2.39).

Capítulo 3

Procedimento de Sintonia Robusta de Controladores PI/PID Multi-malhas

3.1 Introdução

O desenvolvimento de caracterizações em termos de desigualdades matriciais lineares (LMIs) seria uma das alternativas para tratar o problema de otimização multiobjetivo aplicado à sintonia robusta de controladores PI/PID multi-malhas considerando modelo com incertezas politópicas. Entretanto, o controlador PI/PID multi-malhas é um controlador por realimentação dinâmica de saída com restrição de estrutura para o qual não existe ainda uma formulação LMI que possa ser aplicada para resolver este problema. Isso significa que não existe um algoritmo que garanta a convergência para o ótimo global que resolva essa classe de problemas. Ao se tratar o problema do controle robusto PI/PID descentralizado a partir de um algoritmo de otimização simples não convexo, obtém-se apenas uma solução de sintonia a qual não pode ser considerada ótima uma vez que seria necessário minimizar/restringir o pior caso das funções objetivo em um conjunto Ω de infinito pontos pertencentes ao domínio de incerteza. Neste caso, torna-se necessário buscar novas estratégias para solucionar o problema.

Neste capitulo, o procedimento de sintonia de controladores robustos PID SISO, apresentado em Gonçalves (2006), será estendido para tratar sistemas multivariáveis incluindo uma estratégia de aproximação de modelo $\mathcal{H}_\infty$ para obter o desacoplamento entre as malhas de controle e atender as especificações da resposta transitória de rastreamento (Gonçalves et al., 2011). Trata-se de um procedimento iterativo baseado em duas fases: síntese e análise. No passo de síntese é aplicado um algoritmo de otimização não linear para calcular os parâmetros do controlador PI/PID multi-malhas a partir do problema de otimização escalar da Eq. (2.39) com o conjunto infinito Ω substituído por um conjunto finito de pontos $\tilde{\Omega} \subset \Omega$. Este conjunto finito é inicialmente o conjunto dos vértices do politopo como considerado nas formulações convexas. Considerar apenas os vértices do politopo nem sempre é suficiente para garantir a estabilidade robusta do sistema em malha fechada e a minimização das funções objetivo para todos os $\alpha \in \Omega$. Na etapa de análise o controlador obtido na etapa de síntese

é verificado para todo o politopo através de um procedimento que combina o algoritmo *branch-and-bound* e formulações de análise LMI (Gonçalves et al., 2007), que determina a necessidade ou não de se incluir novos pontos no conjunto finito de pontos considerado na etapa de síntese. Se o procedimento de análise encontra um caso de sistema instável no domínio incerto ou se for verificado que o valor máximo das funções objetivo não ocorre em um ponto pertencente a $\tilde{\Omega}$, então este ponto é incluído em $\tilde{\Omega}$ e é necessário executar os dois passos do procedimento novamente. O procedimento termina quando se verifica que o sistema em malha fechada é robustamente estável e os valores máximos das funções objetivo estão em pontos pertencentes a $\tilde{\Omega}$ ou o valor máximo da função objetivo em $\tilde{\Omega}$ é próximo do valor máximo em Ω de acordo com a precisão especificada.

3.2 Procedimento

Como discutido no Capitulo 2, uma estratégia para lidar com o problema de otimização multiobjetivo definido pela Eq. (2.38) é transformá-lo em um problema escalar e aplicar técnicas de otimização escalar. Neste caso há diferentes possibilidades de formulação para o problema. Para descrever o procedimento, considere, por exemplo, os escalares $\lambda_3 = 0$ e $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \infty$ na Eq. (2.39), assim, o problema escalar pode ser definido como:

Problema escalar: Dado a estrutura do controlador, o modelo de referência, $T_m(s)$, e os escalares $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ e $\epsilon_3 \geq 0$, determinar os parâmetros $k_{p,j}$, $T_{i,j}$ e $T_{d,j}$, $j = 1, \ldots, m$, do controlador $K^*(s)$ tal que

$$\begin{aligned} K^*(s) = \arg\min_{K(s)} & \left(\lambda_1 \max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cd}(s,\alpha,K)\|_\infty + \lambda_2 \max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cn}(s,\alpha,K)\|_2 \right), \\ \text{sujeito a:} \quad & \max_{\alpha\in\Omega} \|E(s)(s,\alpha,K)\|_\infty \leq \epsilon_3 \\ & K(s) \in \mathcal{F} \end{aligned} \tag{3.1}$$

sendo $\mathcal{F}$ o conjunto de controladores com parâmetros dentro das faixas aceitáveis que garantem a estabilidade robusta do sistema em malha fechada.

Neste caso, o que se espera é um comprometimento entre rejeição de perturbação e atenuação de ruído restringindo o erro máximo de aproximação. Ou seja, ϵ_3 pode ser escolhido para garantir certo nível de desacoplamento e proximidade com as respostas transitórias especificadas ao passo que λ_1 e λ_2 podem ser escolhidos para se obter um bom compromisso entre rejeição de distúrbios e atenuação de ruídos de medição.

O procedimento geral de sintonia robusta de controladores PI/PID multi-malhas pode ser descrito como:

Passo 0: Iniciar o conjunto finito de pontos tal que $\widetilde{\Omega} = v(\Omega)$ como considerado nas formulações convexas, sendo $v(\cdot)$ o conjunto de vértices do politopo.

Passo 1 (síntese): Aplicar um algoritmo de otimização não linear para resolver o problema de otimização

auxiliar definido na Eq. (3.1), substituindo o conjunto infinito Ω pelo conjunto finito de pontos $\tilde{\Omega}$ tal que

$$\begin{aligned} K^*(s) = \arg\min_{K(s)} & \left(\lambda_1 \max_{\alpha\in\widetilde{\Omega}} \|T_{cd}(s,\alpha,K)\|_\infty + \lambda_2 \max_{\alpha\in\widetilde{\Omega}} \|T_{cn}(s,\alpha,K)\|_2 \right), \\ \text{sujeito a:} \quad & \max_{\alpha\in\widetilde{\Omega}} \|E(s)(s,\alpha,K)\|_\infty \leq \epsilon_3 \\ & K(s) \in \mathcal{F} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Por se tratar de um problema de otimização não convexo, a solução obtida para o problema da Eq. (3.2), considerando somente um número finito de pontos do politopo, $\widetilde{\Omega}$, não é suficiente para garantir a estabilidade robusta do sistema em malha fechada e a minimização das funções objetivo $\|T_{cd}(s,\alpha)\|_\infty$ e $\|T_{cn}(s,\alpha)\|_2$ e $\|E(s,\alpha)\|_\infty$ para todos os $\alpha \in \Omega$. Para verificar o controlador obtido no passo 1 para todo o politopo, no passo 2 é aplicado um procedimento de análise.

Passo 2 (analise) Determinar $\alpha \in \Omega$ que corresponde ao máximo de cada função objetivo, ou procurar um $\alpha_u \in \Omega$ que corresponda a um sistema instável. Defina os pontos correspondentes ao máximo de cada função objetivo como sendo

$$\begin{aligned} \alpha_\infty &\triangleq \max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cd}(s,\alpha,K^*)\|_\infty, \\ \alpha_2 &\triangleq \max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cn}(s,\alpha,K^*)\|_2, \\ \alpha_m &\triangleq \max_{\alpha\in\Omega} \|E(s,\alpha,K^*)\|_\infty. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Durante o calculo dos pontos de máximo α_∞, α_2 e α_m, é verificado simultaneamente se existe α_u que corresponde a um sistema instável. Caso o sistema em malha fechada não seja robustamente estável, α_u é acrescentado em $\tilde{\Omega}$ e o procedimento retorna ao passo 1. Se o sistema é robustamente estável, porém o valor máximo de qualquer função objetivo ocorrer em um ponto fora do conjunto finito $\widetilde{\Omega}$, ou se a restrição não for atendida em um ponto do politopo Ω, então tais pontos são incluídos no conjunto finito $\widetilde{\Omega}$ e o procedimento retorna novamente ao passo 1. Para evitar iterações desnecessárias na minimização da função objetivo, a inclusão de novos pontos é feita apenas quando a diferença relativa entre o pior caso de norma no politopo e o pior caso no conjunto finito for maior que a tolerância ξ. O processo termina quando todas as restrições forem atendidas por todos os pontos do politopo Ω e não há nenhuma possibilidade de minimizar a função objetivo significativamente com a introdução de novos pontos de Ω no conjunto finito $\widetilde{\Omega}$. O algoritmo geral da etapa de análise é apresentado a seguir:

Determine α_m, α_∞, α_2 ou α_u
Se $\exists\, \alpha_u$
  então
    $\widetilde{\Omega} \leftarrow \widetilde{\Omega} \cup \{\alpha_u\}$
    Ir para o passo 1
Senão

$\Omega_{aux} \leftarrow \widetilde{\Omega}$

Se $\|T_{cd}(s, \alpha_\infty)\|_\infty - \max_{\alpha \in \widetilde{\Omega}} \|T_{cd}(s, \alpha)\|_\infty > \xi$

então

$\widetilde{\Omega} \leftarrow \widetilde{\Omega} \cup \{\alpha_\infty\}$

Se $\|T_{cn}(s, \alpha_2)\|_2 - \max_{\alpha \in \widetilde{\Omega}} \|T_{cn}(s, \alpha)\|_2 > \xi$

então

$\widetilde{\Omega} \leftarrow \widetilde{\Omega} \cup \{\alpha_2\}$

Se $\|E(s, \alpha_m)\|_\infty > \epsilon_3$

então

$\widetilde{\Omega} \leftarrow \widetilde{\Omega} \cup \{\alpha_m\}$

Se $\Omega_{aux} \neq \widetilde{\Omega}$

então

Ir para o passo 1

Senão

Finalizar o procedimento

Algoritmos similares podem ser obtidos para diferentes escolhas de λ_i e ϵ_i, para $i \in \{1, 2, 3\}$ na Eq.(2.39).

Assim, o procedimento proposto utiliza uma abordagem iterativa para tornar o problema de dimensão infinita em um problema de dimensão finita, onde os passos de otimização e validação são repetidos até que todas as restrições sejam atendidas e que as funções objetivo convirjam para um valor com determinada precisão relativa.

3.3 Etapa de Síntese

Como discutido na seção anterior, no passo de síntese, as variáveis de otimização (i.e., os parâmetros dos controladores PI/PID multi-malhas) são calculados a partir da aplicação de um algoritmo de otimização não-linear para resolver o problema multiobjetivo, definido pela Eq. (2.38), formulado em termos de um problema auxiliar, dado pela Eq. (2.39), substituindo o conjunto infinito Ω pelo conjunto finito $\widetilde{\Omega}$.

Apesar de não existir um algoritmo de otimização que garanta a convergência sistemática para a classe de problema não convexo, alguns algoritmos de otimização como os algoritmos genético e o elipsoidal têm mostrado o potencial de funcionar muito bem na prática para o problema em questão. Geralmente os algoritmos genéticos (GA, do inglês *Genetic Algorithms*) são aplicados para calcular os parâmetros do controlador PID em procedimentos de sintonia baseados na otimização numérica devido à possibilidade do problema de otimização ser não convexo e multimodal (vários mínimos locais) e devido ao pequeno número de parâmetros de otimização. Neste trabalho considera-se o algoritmo cone elipsoidal (CEA, do inglês *Cone Ellipsoidal Algorithm*) (Takahashi et al., 2003) para resolver o problema de otimização escalar. A escolha do algoritmo CEA se deve ao fato de que ele tem conseguido soluções semelhantes em relação as algoritmos GA com muito

menos esforço computacional. Quando comparado com o método elipsoidal convencional, o CEA apresenta uma convergência mais rápida e um bom desempenho ao lidar com problemas não convexos difíceis, mantendo a simplicidade do algoritmo (Takahashi et al., 2003). O algoritmo CEA aplicado neste trabalho é descrito na sequência.

Sendo m o número de malhas de controle, o vetor $\chi \in \mathbb{R}^{\eta}$ (com $\eta = 3m$ no caso do controlador PID multi-malhas ou $\eta = 2m$ no caso do controlador PI multi-malhas) corresponde aos parâmetros de otimização, ou seja, $\chi = [k_{p,1}\ T_{i,1}\ T_{d,1}\ \ldots\ k_{p,m}\ T_{i,m}\ T_{d,m}]^T$ no caso dos controladores PID ou $\chi = [k_{p,1}\ T_{i,1}\ \ldots\ k_{p,m}\ T_{i,m}]^T$ no caso dos controladores PI. A função $f(\chi) : \mathbb{R}^{\eta} \to \mathbb{R}$ corresponde a função objetivo escalar a ser minimizada e $g_i(\chi) : \mathbb{R}^{\eta} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, r$ o conjunto de funções de restrição. Considerando o elipsóide na iteração k descrito como $\{\chi \in \mathbb{R}^{\eta} \mid (\chi - \chi_k)^T Q_k^{-1} (\chi - \chi_k) \leq 1\}$, onde χ_k é o centro do elipsóide e $Q_k = Q_k^T \succ 0$ a matriz que determina as direções e dimensões dos eixos do elipsóide. Dado os valores iniciais de χ_0 e Q_0, o algoritmo elipsoidal é descrito pelas seguintes equações recursivas:

$$\begin{aligned} \chi_{k+1} &= \chi_k - \frac{1}{\eta+1} Q_k \tilde{\mathfrak{m}}, \\ Q_{k+1} &= \frac{\eta^2}{\eta^2 - 1} \left(Q_k - \frac{2}{\eta+1} Q_k \tilde{\mathfrak{m}} \tilde{\mathfrak{m}}^T Q_k \right), \end{aligned} \tag{3.4}$$

com

$$\tilde{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}_k / \sqrt{\mathfrak{m}_k^T Q_k \mathfrak{m}_k}.$$

Quando χ_k é uma solução não factível, o vetor $\mathfrak{m}_k$ é o vetor normalizado $\mathfrak{m}_k = \mathfrak{m}/\|\mathfrak{m}\|$ calculado como a soma dos gradientes (ou sub-gradientes) normalizados das funções restrições violadas, $g_i(\chi) > 0$, ou o gradiente (ou sub-gradiente) da função objetivo, $f(\chi)$, quando χ_k é uma solução factível (Gonçalves, 2006), isto é:

$$\mathfrak{m} = \begin{cases} \nabla f(\chi) & \text{se } g_i(\chi) < 0, \ \forall\, i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{s_i(\chi)}{\|s_i(\chi)\|} & \text{se } \exists\, i \mid g_i(\chi) \geq 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

com

$$s_i(\chi) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{se } g_i(\chi) < 0 \\ \nabla g_i(\chi) & \text{se } g_i(\chi) \geq 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

sendo que $\nabla(\cdot)$ significa a função gradiente (ou sub-gradiente) que é calculada numericamente pelo método de diferenças finitas, isto é, sendo e^i a i-ésima coluna da matriz identidade de dimensão η, $I_{\eta\times\eta}$, e δ um escalar tal que $\delta \longrightarrow 0$ (valores típicos estão na faixa de 10^{-8} a 10^{-3}), o cálculo do gradiente $\nabla f(\chi)$ (ou $\nabla g_i(\chi)$) definido como $\nabla f \triangleq [v_1 \ldots v_{\eta}]^T$, pode ser computado como

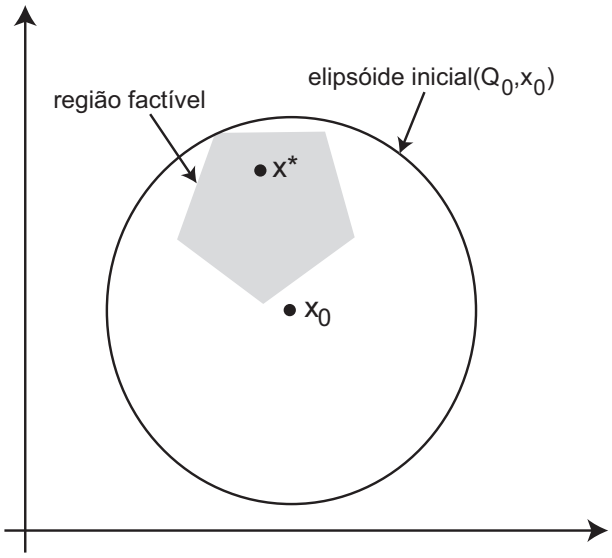
$$v_i = \frac{f(\chi + \delta e^i) - f(\chi)}{\delta}, \quad i = 1, \ldots, \eta. \tag{3.7}$$

A cada iteração, o vetor $\mathfrak{m}$ define um hiperplano de corte que passa no centro do elipsóide. As equações (3.4) calculam o centro e o formato do menor elipsóide que engloba a metade do elipsóide original que contém

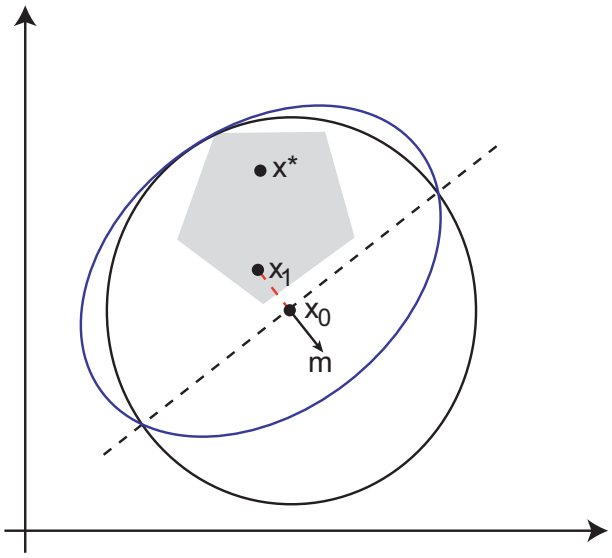
a solução ótima.

O algoritmo de otimização termina quando $(f_{max} - f_{mim})/f_{min} \leq \varepsilon$ sendo f_{max} e f_{min} os valores máximo e mínimo da função objetivo nas ultimas N_ε iterações e ε é a precisão relativa especificada.

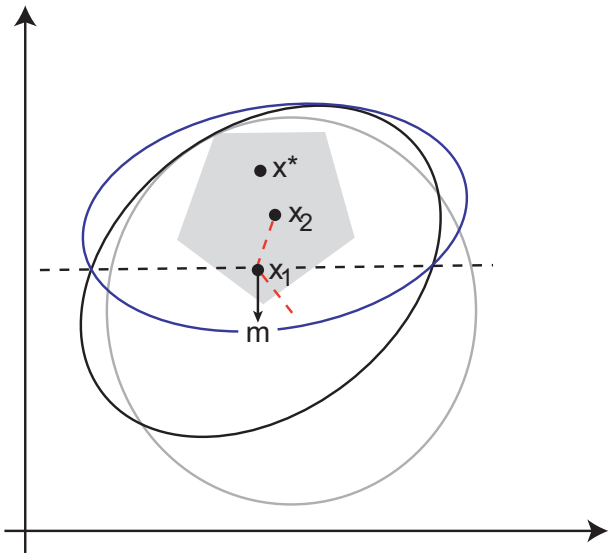
A Figura 3.1 monstra a evolução do algoritmo elipsoidal tradicional partindo de uma elipse inicial que contém a solução ótima restrita (Gonçalves, 2006). Na Figura 3.1.b, como a primeira solução não é factível, a nova elipse é definida com base no gradiente da restrição violada. Na Figura 3.1.c, uma vez que a nova solução é factível, a segunda elipse é definida com base no gradiente da função objetivo. A diferença entre o algoritmo elipsoidal tradicional e o CEA é que no CEA, quando a solução obtida não é factível, a nova elipse é definida com base na soma dos gradientes (ou sub-gradientes) das restrições ativas.



(a) Iteração 0.



(b) Iteração 1.



(c) Iteração 2.

Fig. 3.1: Simulação do algoritmo elipsoidal.

A obtenção da solução ótima do problema de otimização está relacionada com a definição dos parâmetros iniciais χ_0, que representa o centro do elipsóide inicial e Q_0, que define a forma do elipsóide inicial. A premissa para o funcionamento adequado do algoritmo é que a solução ótima esteja dentro do elipsóide inicial e que o problema seja convexo. Uma prática comum é considerar soluções iniciais aleatórias, χ_0, porém neste caso o espaço de busca deve ser aumentado substancialmente a fim de englobar o ótimo global tendo como consequência uma convergência do algoritmo mais lenta aumentando o tempo computacional, ainda sem garantia de solução ideal. Outra forma de se obter χ_0 é utilizar um método de sintonia de controladores PI/PID multi-malhas mais simples, como por exemplo o método de desintonia *Biggest Log-modulus Tuning* desenvolvido por Luyben (1986) e suas variantes, permitindo usar um espaço de busca menor, além de aumentar as chances de se obter uma solução ótima global diante da natureza multimodal do problema. O espaço de busca inicial é definido por uma η-esfera (hiper-esfera de dimensão η) sendo $Q_0 = \varphi^2 I_{\eta\times\eta}$. A escolha do raio da η-esfera, φ, permite variações no tamanho do espaço de busca inicial.

3.4 Etapa de Análise

Na etapa de análise é necessário calcular os valores máximos das funções objetivo $\|T_{cd}(s,\alpha)\|_\infty$, $\|T_{cn}(s,\alpha)\|_2$ e $\|E(s,\alpha)\|_\infty$ e suas coordenadas correspondentes, $\{\alpha_\infty\ \alpha_2\ \alpha_m\} \in \Omega$ ou procurar por um $\alpha_u \in \Omega$ que corresponde a um sistema instável em malha fechada. Isso não é uma tarefa fácil uma vez que o politopo possui um conjunto infinito de pontos.

Em Gonçalves et al. (2007), foi apresentado um procedimento para calcular os custos ε-garantidos $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas lineares invariantes no tempo com domínio politópico de incerteza, considerando uma precisão especificada ξ para todo $\alpha \in \Omega$, a partir de um procedimento baseado na combinação do algoritmo *branch-and-bound* e formulações LMIs. Os custos ε-garantidos $\mathcal{H}_2$, δ_c, e $\mathcal{H}_\infty$, γ_c, de uma função de transferência $T_{zw}(s,\alpha) = C(\alpha)(sI - A(\alpha))^{-1}B(\alpha) + D(\alpha)$ são definidos como os valores que atendem as seguintes desigualdades:

$$\max_{\alpha\in\Omega} \|T_{zw}(s,\alpha)\|_2 \leq \delta_c \leq (1+\xi) \max_{\alpha\in\Omega} \|T_{zw}(s,\alpha)\|_2, \tag{3.8}$$

$$\max_{\alpha\in\Omega} \|T_{zw}(s,\alpha)\|_\infty \leq \gamma_c \leq (1+\xi) \max_{\alpha\in\Omega} \|T_{zw}(s,\alpha)\|_\infty. \tag{3.9}$$

Além do cálculo dos custos com a precisão requerida, no método calcula-se simultaneamente as coordenadas α_2 e α_∞ do ponto de pior caso das normas $\|T_{zw}(s,\alpha)\|_2$ e $\|T_{zw}(s,\alpha)\|_\infty$. Se o sistema não é robustamente estável, o algoritmo encontra um ponto α_u no politopo enquanto procura pelo valor máximo das normas.

A estratégia básica do algoritmo *branch-and-bound* é a partição do domínio de incerteza, Ω, de modo que as funções limite inferior e superior convirjam para o valor máximo das normas. Este algoritmo termina quando a diferença entre as funções limites é inferior à precisão relativa requerida ξ. O algoritmo é implementado considerando como função limite inferior o máximo valor da norma $\mathcal{H}_\infty$ (ou $\mathcal{H}_2$) computado nos vértices e como função limite superior o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ (ou $\mathcal{H}_2$), computado por meio de formulações de análise

LMI, sendo ambas as funções calculadas para o politopo original e suas subdivisões (Gonçalves et al., 2007).

A função limite superior pode ser calculada usando qualquer formulação LMI para cálculo dos custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ (ou $\mathcal{H}_2$).

Neste trabalho, o cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_2$ é baseado nos lemas 1 e 2 apresentados em de Oliveira et al. (2004a) e é definido como: Sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $w(t) \in \mathbb{R}^{p_w}$ e $z(t) \in \mathbb{R}^{m_z}$ tal que $X \in \mathbb{R}^{m_z \times m_z}$, $W_i = W_i^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, para $i = 1, \ldots, N$, o cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_2$ é dado por

$$
\begin{aligned}
&\delta^2_{c.g.} = \min_{X,W_i} \mathrm{Tr}(X) \\
&\text{sujeito a: } W_i \succ 0, \;\; i = 1, \ldots, N \\
&C_i W_i C_i^T - X \preceq 0; \;\; i = 1, \ldots, N \\
&C_i W_i C_j^T + C_j W_i C_i^T + C_i W_j C_i^T - 3X \preceq 0; \;\; i = 1, \ldots, N, \;\; j \neq i, \;\; j = 1, \ldots, N \\
&C_i W_j C_k^T + C_k W_j C_i^T + C_j W_i C_k^T + C_k W_i C_j^T + C_i W_k C_j^T + C_j W_k C_i^T - 6X \preceq 0; \\
&i = 1, \ldots, N-2, \;\; j = i+1, \ldots, N-1, \;\; k = j+1, \ldots, N \\
&A_i W_i + W_i A_i^T \preceq -B_i B_i^T; \; i = 1, \ldots, N \\
&A_i W_j + W_j A_i^T + A_j W_i + W_i A_j^T \preceq -(B_i B_i^T + B_i B_i^T); \\
&i = 1, \ldots, N-1, \;\; j = i+1, \ldots, N
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

O custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ é baseado no lema 1 apresentado em de Oliveira et al. (2004b) sendo que: $P_i = P_i^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i = 1, \ldots, N$, o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ é dado por

$$
\begin{aligned}
&\gamma^2_{c.g.} = \min_{P_i} \mu_c \\
&\text{sujeito a: } P_i \succ 0, \; i = 1, \ldots, N \\
&\begin{bmatrix} A_i^T P_i + P_i A_i & P_i B_i & C_i^T \\ * & -I & D_i^T \\ * & * & -\mu_c I \end{bmatrix} \prec 0, \;\; i = 1, \ldots, N \\
&\begin{bmatrix} A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j & P_i B_j + P_j B_i & C_i^T + C_j^T \\ * & -2I & D_i^T + D_j^T \\ * & * & -2\mu_c I \end{bmatrix} \prec 0 \\
&i = 1, \ldots, N-1 \;, \;\; j = i+1, \ldots, N
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

sendo que o símbolo '*' nas matrizes acima representam termos simétricos em relação à diagonal principal.

Com esta escolha de funções limitantes, o algoritmo *branch-and-bound* irá combinar a redução do conservadorismo das formulações LMI pela partição do domínio de incerteza (função limitante superior) com uma técnica inteligente de grade (função limitante inferior) em que o refinamento da grade ocorre apenas no subpolitopo com maior valor de custo garantido. Uma técnica de partição baseada em malhas simpliciais (Gonçalves, Palhares, Takahashi e Mesquita, 2006) é aplicada para permitir que este procedimento seja aplicado aos modelos politópicos com maior eficiência conforme discutido na próxima seção.

3.4.1 Técnica de Partição do Politopo

A principal dificuldade para implementar a estratégia *branch-and-bound* é adotar uma técnica de divisão de politopo que permite lidar com politopo com qualquer forma em um espaço de qualquer dimensão.

A técnica de partição considerada no algoritmo implementado é baseada em malhas simpliciais que combina triangularização de Delaunay e subdivisão de simplexos orientada pelas arestas (Gonçalves, Palhares, Takahashi e Mesquita, 2006), permitindo que este procedimento seja aplicado à modelos politópicos com maior eficiência. Neste contexto, o termo malhas tem o significado de uma coleção de elementos geométricos simples que se encaixam para formar o politopo que representa o domínio de incerteza.

Trabalhar com malhas simpliciais é extremamente vantajoso uma vez que o domínio de incerteza para um sistema politópico já é naturalmente um simplex, i.e., qualquer politopo com N vértices pode ser tratado como um d-simplex no espaço de dimensão $d = N - 1$, ou seja, triângulos no caso bidimensional, tetraedros no caso tridimensional ou d-simplexos no caso d-dimensional, parametrizados por $\alpha = [\alpha_1, \ ... \ \alpha_d]^T$. Por ser um politopo com o número mínimo de vértices em uma dimensão de espaço específico, o d-simplex tem influência direta sobre o esforço computacional necessário no calculo dos custos garantidos e das normas sobre os vértices do politopo. Outro fato relevante, é que qualquer domínio de incerteza representado por modelos politópicos pode ser decomposto exatamente em um conjunto de simplexos utilizando técnicas de triangulação.

A técnica de subdivisão considerada no algoritmo *branch-and-bound* implementado é realizada em duas etapas. Quando se faz necessário, primeiro o politopo é decomposto em simplexos através da triangulação de Delaunay. A triangularização de Delaunay é adotada para decompor o politopo em um conjunto de simplexos buscando maximizar o ângulo mínimo entre as bordas de todas as possíveis triangulações de um conjunto de pontos, reduzindo a possibilidade de gerar simplexos degenerados. A vantagem da triangulação de Delaunay é que ela permite que o cálculo dos parâmetros de sintonia dos controladores baseados no algoritmo *branch-and-bound* possa ser aplicado a modelo com incertezas politópicas, onde os vértices estão em quaisquer pontos do espaço de parâmetros.

O domínio de incerteza pode não ser um simplex no caso em que se considera o espaço de parâmetros incertos ao invés do espaço de coordenadas do politopo. No espaço de parâmetros incertos, a dimensão é dada pelo número de parâmetros incertos, o que normalmente é menor que o número de vértices do politopo menos um. A implementação do procedimento de sintonia proposto pode tratar os dois espaços a critério do projetista.

Uma vez que o domínio é composto apenas por simplexos, as divisões posteriores são realizadas por uma

divisão de simplex orientada pelas arestas onde as subdivisões são obtidas pela introdução de novos pontos sobre o ponto médio das arestas do simplex original fornecendo as condições para dividi-lo em 2^d simplexos. Com a subdivisão orientada pelas arestas todos os simpliciais alcançados têm o mesmo volume, o que garante que o volume tende a zero com subdivisões sucessivas com uma taxa de $1/2^d$. O número de classes de congruência dos simplexos que resulta de sucessivos refinamentos limita-se a $d!/2$, o qual é o valor ideal para subdivisão (Bey e Aachen, 1998). Esta característica significa que esta técnica de subdivisão evita criar simplexos degenerados, ou seja, simplexos com ângulos muito pequenos entre as bordas, que opera em favor da convergência de algoritmo *branch-and-bound*. A Figura 3.2 (Gonçalves, 2006) mostra a divisão de simplex orientada pelas arestas para o caso de duas e três dimensões respectivamente.

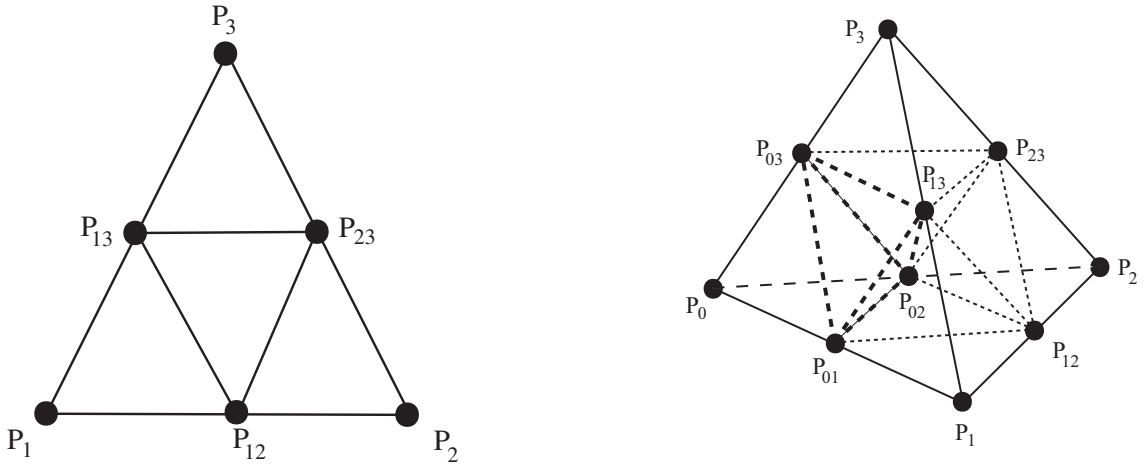


Fig. 3.2: Divisão orientada pelas arestas para o caso de duas e três dimensões.

Ao aplicar a técnica de divisão apresentada para o algoritmo *branch-and-bound* no cálculo do custo $\mathcal{H}_\infty$ (ou $\mathcal{H}_2$), primeiramente são calculadas as normas nos vértices do politopo e o custo garantido para o politopo. O limite inferior assume o maior valor de norma nos vértices e o limite superior assume o valor do custo garantido para o politopo. Em seguida, se o politopo não for um simplex, a divisão é realizada pela triangularização de Delaunay que divide o politopo em simplexos sem acrescentar novos vértices. Deste modo o valor do limite inferior se mantém, mas o valor do limite superior passa a ser o maior valor de custo garantido calculado em cada simplex gerado pela triangularização de Delaunay. Observe que o número de simplexos gerados dependerá, não somente da dimensão do espaço e do número de vértices, como também da distribuição espacial destes vértices. A partir deste ponto a divisão ocorre no simplex com maior custo garantido a partir da técnica de subdivisão de simplexos orientada pelas arestas gerando 2^d simplexos e $\frac{1}{2}d(d+1)$ novos vértices. O valor limite inferior e superior é atualizado como sendo o valor máximo da norma considerando todos os pontos (vértices) já gerados e o limite superior como sendo o valor máximo do custo garantido considerando todos os simplexos gerados pela técnica de subdivisão de simplexos orientada pelas arestas. As divisões prosseguem até que a diferença relativa entre os limites superior e inferior atinja a precisão desejada. A fim de otimizar o algoritmo, caso haja algum simplex tal que o maior valor de norma é superior ao seu custo garantido, este é descartado do espaço de busca.

Para exemplificar a técnica de divisão aplicada no algoritmo *branch-and-bound*, considere as Figs. 3.3-3.8 extraídas de Gonçalves (2006). As Figs. 3.3 a 3.8 apresentam uma simulação do algoritmo *branch-and-bound* para o cálculo do custo $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$ no caso de espaço de dois parâmetros de incerteza α_1 e α_2 variando em faixas. No passo inicial são calculadas as normas nos vértices do politopo e o custo garantido para o politopo (Fig. 3.3). Neste caso o limite inferior é o maior valor de norma nos vértices, ou seja 10, e o limite superior é o custo garantido igual a 100. Na primeira partição (Fig. 3.4), como o retângulo não é um simplex, a divisão é realizada pela triangularização de Delaunay que divide o retângulo em dois triângulos sem acrescentar novos vértices. Deste modo o valor do limite inferior se mantém, mas o valor do limite superior passa a ser o maior valor de custo garantido obtido como sendo 80. A partir deste ponto, as divisões ocorrem nos triângulos com maior custo garantido. A divisão do triângulo pela técnica proposta gera quatro novos triângulos e três novos vértices (Fig. 3.5). Os valores dos limites são atualizados para o novo valor máximo da norma igual a 16 e o novo valor máximo de custo garantido igual a 60. Observe que o triângulo com custo garantido 12 pode ser descartado do espaço de busca já que o maior valor de norma é superior a este valor. As divisões prosseguem até que a diferença relativa entre os limites superior e inferior atinja a precisão desejada (Figs. 3.6 a 3.8).

3.5 Comentários e Conclusão

O custo computacional do algoritmo de sintonia de controladores robustos multi-malhas descentralizados dependente do número de variáveis de otimização (i.e., da ordem do controlador multi-malhas), da dimensão do sistema, da quantidade de parâmetros incertos (ou da quantidade de vértices do modelo politópico) e da necessidade ou não de mais de uma iteração. Quanto ao número de iterações, experimentos tem mostrado que grande parte dos problemas necessita apenas de uma iteração, o que indica que o pior caso se encontra nos vértices do politopo.

O problema de sintonia de controladores robustos multi-malhas descentralizados é um problema não convexo e multimodal. Isto significa que ao aplicar o algoritmo elipsoidal no procedimento de sintonia, não se tem nenhuma garantia de que o valor ótimo obtido corresponde ao ótimo global. O sucesso da busca está relacionada aos parâmetros iniciais de otimização e com o raio inicial da η-esfera. Considerar valores aleatórios para os parâmetros inicias de otimização aliado a um pequeno valor para o raio inicial da η-esfera pode resultar em uma região de busca que não engloba o valor ótimo global. Por outro lado, aumentando substancialmente o raio da η-esfera, pode ocorrer o aumento do custo computacional e da possibilidade de obter uma solução de ótimo local ou uma solução infactível para o problema. Usar um procedimento de sintonia multi-malhas mais simples como forma de obter os parâmetros iniciais do controlador para o algoritmo elipsoidal permite usar um espaço de busca menor e consequentemente obter menor tempo computacional.

Apesar da complexidade na implementação e um custo computacional elevado comparado com outros métodos de sintonia disponíveis na literatura, uma vez implementada e diante dos modernos recursos computacionais, esta metodologia apresenta várias vantagens. A principal vantagem é a capacidade de se obter soluções menos conservadoras para o problema de sintonia de controladores robustos PI/PID multi-malhas descentrali-

zados considerando incertezas politópicas onde, pelo conhecimento do autor, não é possível obter soluções a partir de formulações LMI.

Apesar de tratarmos exclusivamente de controle descentralizado PI/PID neste trabalho, o procedimento aplicado possibilita projetar controladores com qualquer estrutura e dimensão.

No Capítulo 4, será mostrado, através de exemplos, que o procedimento de projeto proposto pode ser aplicado eficientemente para a sintonia robusta de controladores PI/PID multi-malhas, podendo apresentar melhores resultados que outros métodos já publicados para lidar com o mesmo tipo de problema.

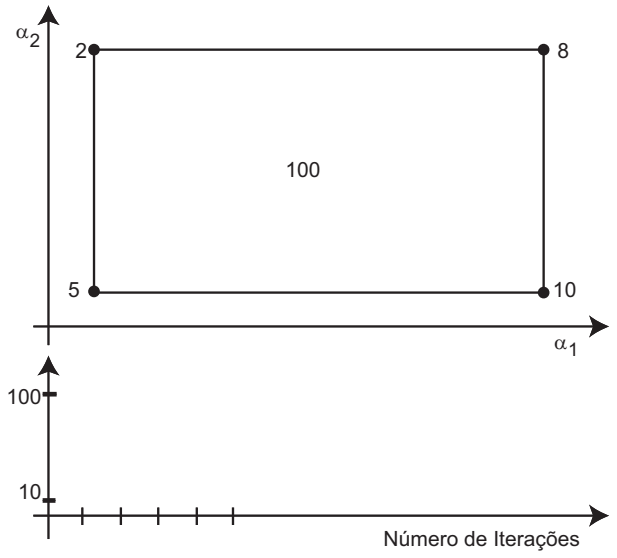


Fig. 3.3: Simulação do algoritmo BnB - iteração 0.

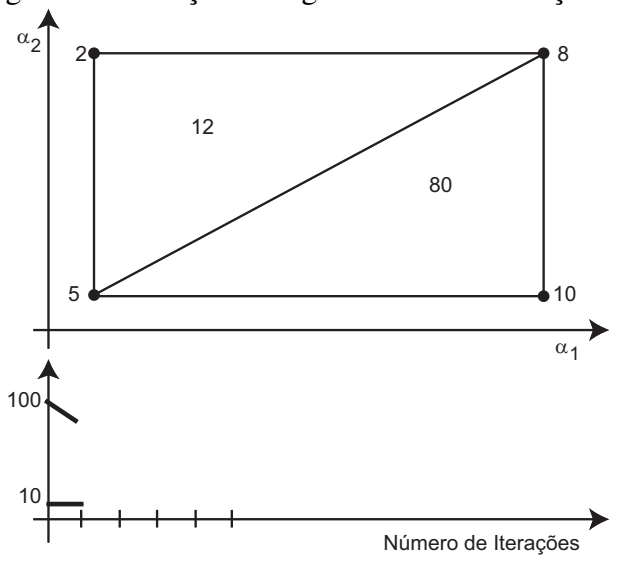


Fig. 3.4: Simulação do algoritmo BnB - iteração 1.

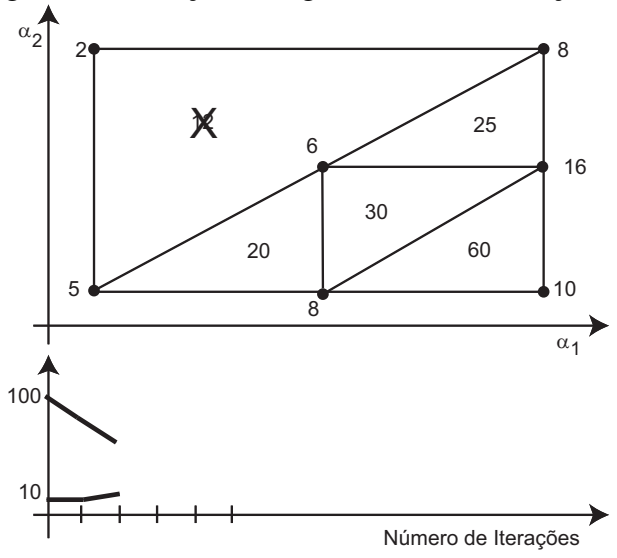


Fig. 3.5: Simulação do algoritmo BnB - iteração 2.

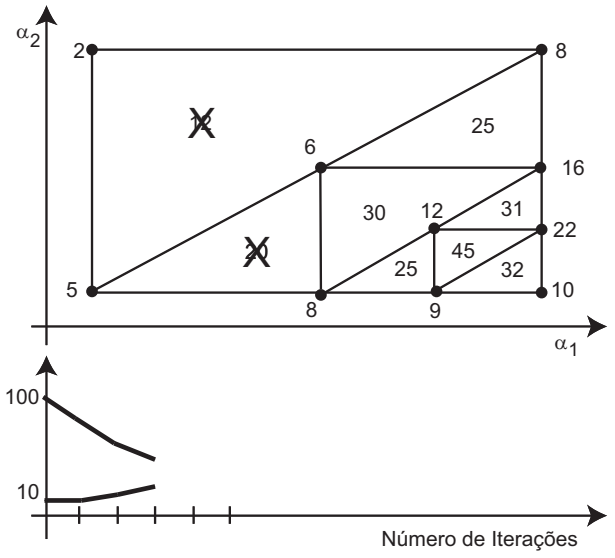


Fig. 3.6: Simulação do algoritmo BnB - iteração 3.

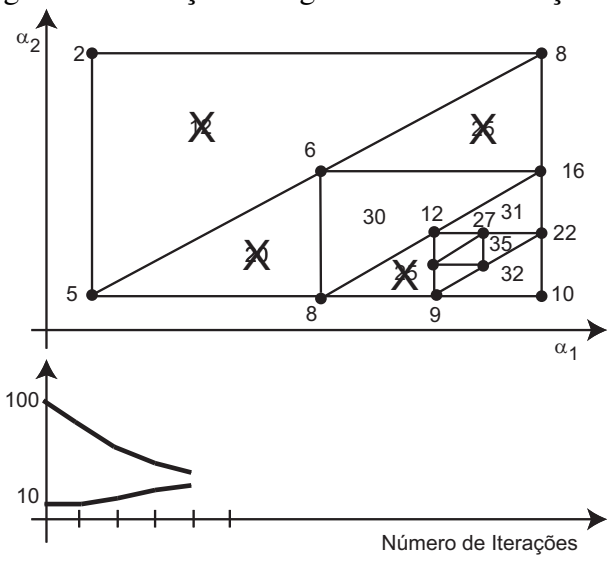


Fig. 3.7: Simulação do algoritmo BnB - iteração 4.

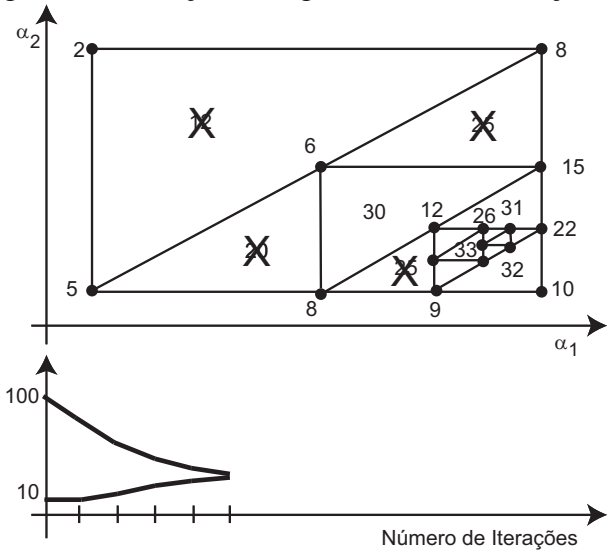


Fig. 3.8: Simulação do algoritmo BnB - iteração 5.

Capítulo 4

Exemplos

4.1 Introdução

Este capítulo tem como objetivo a validação do método proposto para a solução do problema de sintonia de controladores robustos PI/PID multi-malhas descentralizados. Assim, três exemplos ilustrativos extraídos da literatura, relacionados com o problema abordado, são considerados para demonstrar a eficiênca do método proposto em comparação com outros métodos conhecidos.

4.2 Exemplo 1

Considere o problema de controle dos níveis de dois tanques interligados apresentado em Bachur et al. (2010) conforme mostrado na Figura 4.1.

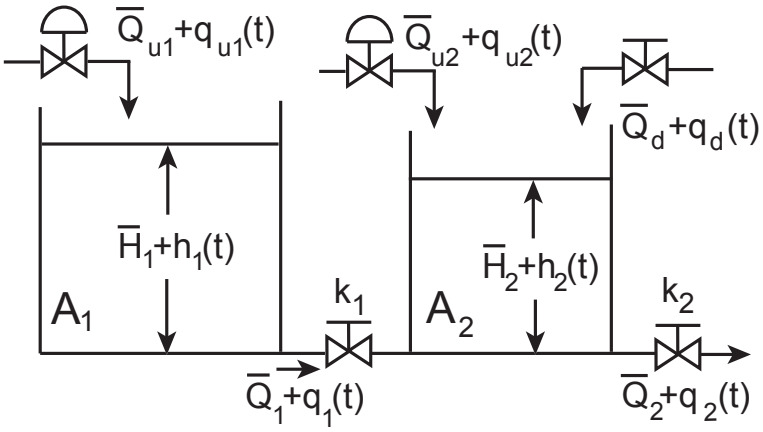


Fig. 4.1: Sistema de dois tanques interligados.

É considerado um modelo linear em torno de um ponto de operação. As variáveis que correspondem aos valores do ponto de operação são: $\bar{H}_1 = 2\text{m}$, $\bar{H}_2 = 1\text{m}$, $\bar{Q}_{u1} = \bar{Q}_1 = 0{,}4\text{m}^3/\text{s}$, $\bar{Q}_{u2} = 0{,}05\text{m}^3/\text{s}$,

$\bar{Q}_d = 0{,}1\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$ e $\bar{Q}_2 = 0{,}25\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$. O vetor de estados é definido como sendo $x(t) \triangleq [h_1(t)\ h_2(t)]^T$; os sinais de controle são as vazões de entrada em cada tanque, $u(t) = [q_{u1}(t)\ q_{u2}(t)]^T$; as entradas exógenas são os sinais de referência, a perturbação causada pela variação na segunda vazão de entrada no tanque 2 e ruídos de medição, $\mathbf{w} = [r_1\ r_2\ q_d\ n_1\ n_2]^T$; as saídas controladas do sistema são os níveis dos dois tanques, $c(t) = [h_1(t)\ h_2(t)]^T$ e as variáveis medidas são os sinais de referência e os sinais de nível medidos mais os ruídos de medição, $\mathbf{y} = [r_1\ r_2\ z_1 + n_1\ z_2 + n_2]^T$. A representação no espaço de estados linear invariante no tempo, em tempo contínuo do sistema pode ser escrita como:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\dfrac{k_1}{A_1} & \dfrac{k_1}{A_1} \\ \dfrac{k_1}{A_2} & -\dfrac{k_1+k_2}{A_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{A_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{u1} \\ q_{u2} \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{A_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ q_d \\ n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}, \\
z &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x, \\
y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} w.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

As áreas transversais dos tanques são $A_1 = 10\mathrm{m}^2$ e $A_2 = 5\mathrm{m}^2$. Os coeficientes k_1 e k_2 (inverso da resistência hidráulica dos dutos) são considerados como parâmetros incertos variando nos intervalos $0{,}15 \leq k_1 \leq 0{,}25$ e $0{,}2 \leq k_2 \leq 0{,}3$. O sistema incerto pode ser representado por um modelo politópico com quatro vértices correspondendo às combinações dos valores limites dos dois parâmetros incertos.

Os objetivos de controle consistem em garantir resposta de rastreamento dos níveis dos tanques 1 e 2 similar à especificada por um modelo de referência, desacoplar as duas malhas de controle, minimizar a influência da perturbação sobre os níveis dos tanques e atenuar os efeitos dos ruídos de medição sobre os sinais do sistema.

Como discutido no Capitulo 1, uma questão fundamental em um projeto de sistema de controle multi-malhas é a escolha da melhor configuração de controle, ou seja, qual sinal de entrada deve ser selecionado para controlar um determinado sinal de saída visando obter o controle mais eficiente com um baixo grau de interação. Por se tratar da técnica mais popular e por ser o mais amplamente usado, o método de arranjo de ganho relativo (RGA) em Bristol (1966), é utilizado aqui para determinar a configuração de controle mais promissora para o sistema. O RGA considera propriedades de estado estacionário da planta sendo que, para um determinado sistema $G(s)$, a matriz RGA, $\wedge$, é definida como sendo $\wedge = G(0) * G(0)^{-T}$, onde o asterisco

denota o produto de Schur (multiplicação matricial elemento por elemento) e $-T$ a transposta inversa. Os resultados mais conhecidos sobre o RGA são: sistemas com elementos negativos ou elevados em seu RGA são difíceis de controlar e as variáveis de entrada e saída devem ser emparelhadas tais que os elementos da diagonal da matriz RGA sejam o mais próximos possível à unidade (Åström et al., 2002). Considerando o sistema nominal de dois tanques interligados dado pela Eq. (4.1), onde os valores dos coeficientes k_1 e k_2 são dados por $k_1 = 0{,}25$ e $k_2 = 0{,}2$, a matriz RGA é dada como

$$\wedge = \begin{bmatrix} 1{,}8 & -0{,}8 \\ -0{,}8 & 1{,}8 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

onde se conclui que, a melhor configuração de controle é aquela em que o nível do taque 1 é controlado pelo vazão de entrada do tanque 1 e o nível do taque 2 é controlado pelo vazão de entrada do tanque 2.

Quanto à estrutura do controlador, é conhecido que o controlador I-P, com a ação proporcional aplicado apenas para a saída medida da planta, é a melhor opção para lidar com o acoplamento das malhas de controle (Åström et al., 2002). Assim, neste exemplo, é considerado o controlador I-P multi-malhas descentralizado dado pela lei de controle no espaço de estados definido pela Eq. (2.23) onde $a_j = 1$, $j = 1, 2$.

Os parâmetros do controlador que atende os objetivos de controle são obtidos a partir do procedimento proposto no Capitulo 3 aplicado para resolver o problema multiobjetivo definido por (2.38), transformado no seguinte problema escalar:

$$\begin{aligned} K^*(s) = \arg\min_{K(s)} & \left(\lambda_1 \max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cd}(s,\alpha,K)\|_\infty + \lambda_2 \max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cn}(s,\alpha,K)\|_2 \right), \\ \text{sujeito a:} \quad & \max_{\alpha\in\Omega} \|E(s)(s,\alpha,K)\|_\infty \leq \epsilon_3 \\ & K(s) \in \mathcal{F} \end{aligned} \tag{4.3}$$

sendo $\mathcal{F}$ o conjunto de controladores com parâmetros dentro das faixas aceitáveis que garantem a estabilidade robusta do sistema em malha fechada.

Para garantir as especificações da resposta transitória de rastreamento dos sinais de referência e o desacoplamento das malhas de controle, no modelo de referência bloco diagonal dado pela Eq. (2.35), as funções de transferência, $T_{m,j}(s)$, $j = 1, 2$, são definidas como sendo de segunda ordem tal que:

$$T_m(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{\omega_{n,1}^2}{s^2 + 2\zeta_1\omega_{n,1}s + \omega_{n,1}^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\omega_{n,2}^2}{s^2 + 2\zeta_2\omega_{n,2}s + \omega_{n,2}^2} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

com $\zeta_1 = \zeta_2 = 2$, $\omega_1 = \omega_2 = 0{,}8$.

Em todos os processos de otimização tratados neste exemplo, para a etapa de síntese do procedimento de sintonia proposto, são definidos os seguintes parâmetros para o algoritmo cone elipsoidal: variáveis de otimização iniciais, $\chi_0 = [3\ 30\ 2{,}7\ 40]^T$, elipsóide inicial, $Q_0 = 10^3 \times \mathbf{I}_4$, critérios de parada, $N_\varepsilon = 1000$ e $\varepsilon = 0{,}01$ e

escalar do método das diferenças finitas, $\delta = 1 \times 10^{-8}$. Os valores previamente estabelecidos para o algoritmo cone elipsoidal foram definidos aleatoriamente sem aplicar qualquer metodo sistematico para determina-los. Com mensionado no Capitulo 3, estes parâmetros são comumente obtidos a partir de um procedimento de tentativa e erro guiado pela experiência do projetista.

O problema escalar (4.3) é particularmente interessante uma vez que permite que ϵ_3 seja definido para garantir um certo nível de desacoplamento e de aproximação com as respostas transitórias especificadas, ao passo que λ_1 e λ_2 podem ser escolhidos para se obter diferentes compromissos entre a rejeição de distúrbios e a atenuação dos ruídos de medição. Com o objetivo de obter um forte desacoplamento para o sistema, o procedimento de sintonia proposto é aplicado para resolver o problema escalar (4.3) com $\lambda_1 = 0{,}1$, $\lambda_2 = 0{,}9$ e $\epsilon_3 = 0{,}05$. Neste caso, os parâmetros do controlador I-P multi-malhas descentralizados são calculados como: $k_{p1} = 18{,}049$, $T_{i1} = 4{,}905$, $k_{p2} = 8{,}698$ e $T_{i2} = 4{,}745$, sendo que para $\max_{\alpha\in\Omega} \|E(s,\alpha,K^*)\|_\infty \leq \epsilon_3 = 0{,}05$, é alcançado $\max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cn}(s,\alpha,K^*)\|_2 \leq 1{,}39$ e $\max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cd}(s,\alpha,K^*)\|_\infty \leq 0{,}111$.

Os parâmetros para o controlador I-P multi-malhas descentralizados foram obtidos após uma única iteração do procedimento de sintonia proposto, o que significa que o pior caso da função objetivo ocorre em um dos vértices do modelo politópico.

O diagrama de Bode para as quatro funções de transferência de malha fechada, que relacionam os sinais de referência e as saídas controladas para os quatro vértices do modelo politópico, são apresentados na Figura 4.2. É observado que as respostas em frequência para as funções de transferência diagonal, $H_1(s)/R_1(s)$ e $H_2(s)/R_2(s)$ para todos os quatro vértices (linhas sólidas), estão muito próximas às do modelo de referência (linha tracejada), o que significa que as respostas transitórias são similares às determinadas pelo modelo de referência. As funções de transferência fora da diagonal apresentam pequenos ganhos, com o pior caso de $-43,3$ dB para $H_1(s)/R_2(s)$ e $-36{,}4$ dB para $H_2(s)/R_1(s)$. Estes pequenos ganhos significam um forte desacoplamento entre as malhas de controle: variação do sinal de referência do nível em um tanque influencia pouco o nível no outro tanque.

Considerando os sinais $r_1(t) = -0{,}1 \times \mathbf{1}(t)$, um degrau unitário de amplitude $-0{,}1$ aplicado em $t = 0$s, $r_2(t) = 0{,}1\times\mathbf{1}(t-100)$, um degrau unitário de amplitude $0{,}1$ aplicado em $t = 100$s, $q_d(t) = 0{,}05\times\mathbf{1}(t-200) - 0{,}05 \times \mathbf{1}(t-225)$, um pulso de amplitude $0{,}05$ e duração 25s aplicado em $t = 200$s e $n_j = 0{,}001\mathrm{randn(t)}$, $j = 1,2$, onde $\mathrm{randn(t)}$ é uma função que gera sinais de valores pseudo-aleatórios com distribuição normal padrão. A resposta do modelo de referência (linha pontilhada) e as respostas transitórias dos níveis dos tanques medidos, $c_j(t) = h_j(t)$, $j = 1,2$, e das variáveis manipuladas, $u_j(t) = q_{uj}(t)$, $j = 1,2$, para os quatro vértices do politopo (linhas solidas) considerando $\lambda_1 = 0{,}1$, $\lambda_2 = 0{,}9$ e $\epsilon_3 = 0{,}05$, são apresentadas respectivamente nas Figs. 4.3 e 4.4.

A rígida restrição imposta a $\max_{\alpha\in\Omega} \|E(s,\alpha,K)\|_\infty$ resulta em um conjunto reduzido de soluções. Assim, por mais que se tente otimizar $\max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cn}(s,\alpha,K)\|_2$ ou $\max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cd}(s,\alpha,K)\|_\infty$, pouco resultado se atinge quanto a atenuação dos ruídos de medição e rejeição de distúrbios. Isto pode ser visto claramente pela curva de Pareto-ótimo (representada por 'o') na Fig. 4.5, onde os valores de $\max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cd}(s,\alpha,K)\|_\infty$, versus $\max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cn}(s,\alpha,K)\|_2$, são representados graficamente considerando os valores normalizados de λ_1 e λ_2 variando na faixa de $0{,}001 \leq \lambda_1 \leq 8{,}334$ e $0{,}050 \leq \lambda_2 \leq 0{,}502$ com $\epsilon_3 = 0{,}05$. Outro fato relevante é

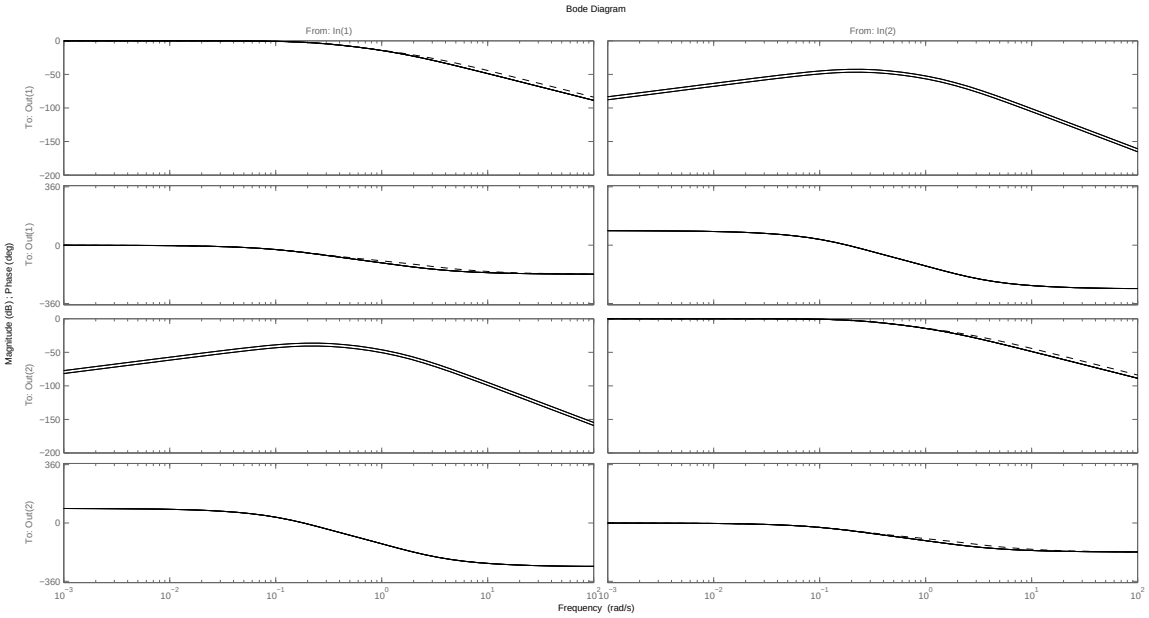


Fig. 4.2: Diagrama de Bode do modelo de referência (linha tracejada) e do sistema de dois tanques interligados (linha solida) para a melhor aproximação do modelo.

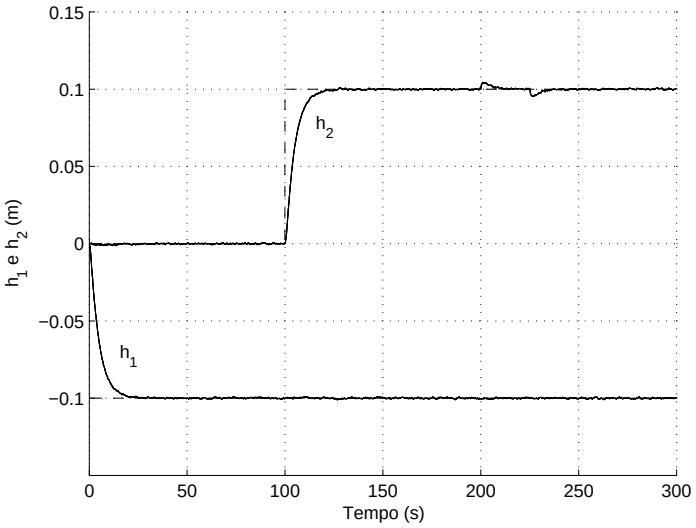


Fig. 4.3: Respostas transitórias dos níveis dos tanques (linha sólida) para os quatro vértices do politopo, modelo de referência (linha pontilhada) e sinais de referência (linha tracejada) para o sistema de dois tanques interligados para $\lambda_1 = 0{,}1$, $\lambda_2 = 0{,}9$ e $\epsilon_3 = 0{,}05$.

que, independente do valor atribuído a λ_1, tem-se uma rejeição de perturbações bastante satisfatória garantida pelo pequeno erro entre a resposta de rastreamento dos sinais de referência e a especificada por um modelo de

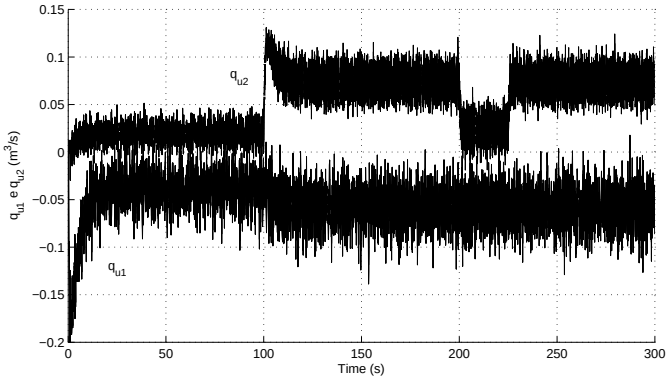


Fig. 4.4: Respostas transitórias das vazões de entrada para os quatro vértices do sistema de dois tanques interligados para $\lambda_1 = 0{,}1$, $\lambda_2 = 0{,}9$ e $\epsilon_3 = 0{,}05$.

referência. Por outro lado, o pequeno valor de ϵ_3 gera valores altos para os ganhos do controlador e consequentemente um valor elevado para $\max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cn}(s,\alpha,K)\|_2$, o que leva a uma baixa atenuação de ruídos e a um maior esforço de controle.

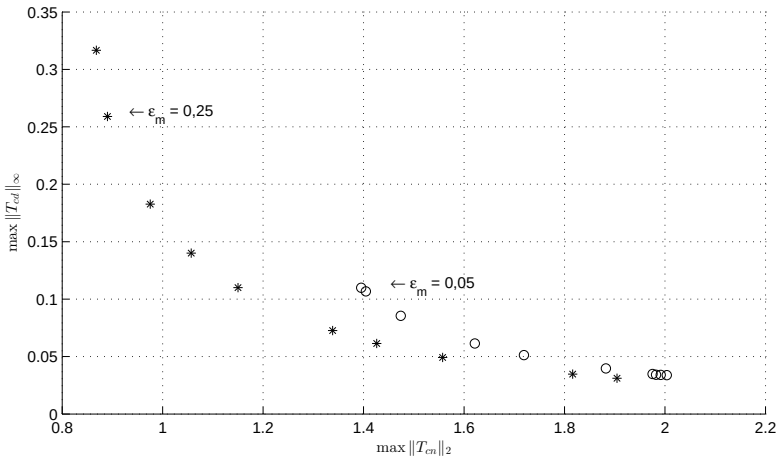


Fig. 4.5: Curva de Pareto considerando as funcões objetivo $\max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cd}\|_\infty$, versus $\max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cn}\|_2$, para as soluções obtidas com $\epsilon_3 = 0{,}05$ (representado por 'o') e $\epsilon_3 = 0{,}25$ (representado por '*').

Para melhorar a atenuação dos ruídos de medição é necessário modificar a restrição sobre o erro de aproximação. Ao relaxar o valor de ϵ_3 na Eq. (4.3), é possível aumentar o conjunto de soluções, e melhor caracterizar o conjunto Pareto-ótimo. Definindo $\epsilon_3 = 0{,}25$ na Eq. (4.3), ao se variar o valor de λ_1 na faixa normalizada de $0 \leq \lambda_1 \leq 2{,}787$ e $0{,}051 \leq \lambda_2 \leq 0{,}512$, um número maior de soluções, que estabelece diferentes compromissos entre a influência da perturbação sobre os níveis dos tanques e atenuação do efeito do ruído de medição sobre os sinais do sistema podem ser obtidos. Os resultados são apresentados na Tabela 4.2 e a curva de Pareto-ótimo (representada por '*') é apresentada na Fig. 4.5.

Tab. 4.1: Valores da função objetivo variando os pesos λ_1 e λ_2 para $\epsilon_3 = 0{,}25$.

λ_1	λ_2	ϵ_3	$\max \|E\|_\infty$	$\max \|T_{cn}\|_2$	$\max \|T_{cd}\|_\infty$
0,000	0,512	0,250	0,246	0,868	0,317
0,310	0,461	0,250	0,244	0,890	0,259
0,620	0,410	0,250	0,246	0,975	0,183
0,929	0,359	0,250	0,249	1,057	0,140
1,239	0,307	0,250	0,245	1,150	0,110
1,548	0,256	0,250	0,247	1,338	0,073
1,858	0,205	0,250	0,249	1,426	0,061
2,167	0,154	0,250	0,248	1,557	0,049
2,477	0,102	0,250	0,228	1,816	0,035
2,787	0,051	0,250	0,233	1,905	0,031

Dentre o conjunto de soluções obtidas de Pareto-ótimo que garante $\max_{\alpha\in\Omega} \|E(s,\alpha,K^*)\|_\infty \leq \epsilon_3 = 0{,}25$, o controlador I-P multi-malhas descentralizado que corresponde a $\max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cd}(s,\alpha,K^*)\|_\infty \leq 0{,}30$ e $\max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cn}(s,\alpha,K^*)\|_2 \leq 0{,}864$ apresenta um bom compromisso quanto a atenuação de ruídos e rejeição de perturbação, sendo seus parâmetros dados por: $k_{p1} = 6{,}150$, $T_{i1} = 5{,}290$, $k_{p2} = 2{,}978$ e $T_{i2} = 5{,}155$ calculados a partir de uma única iteração do procedimento de sintonia proposto.

As respostas transitórias dos níveis dos tanques medidos, $c_i(t) = h_i(t)$, $i = 1, 2$, e das variáveis manipuladas, $u_i(t) = q_{ui}(t)$, $i = 1, 2$, para os quatro vértices considerando esta sintonia, são apresentadas nas Fig. 4.6 e 4.7.

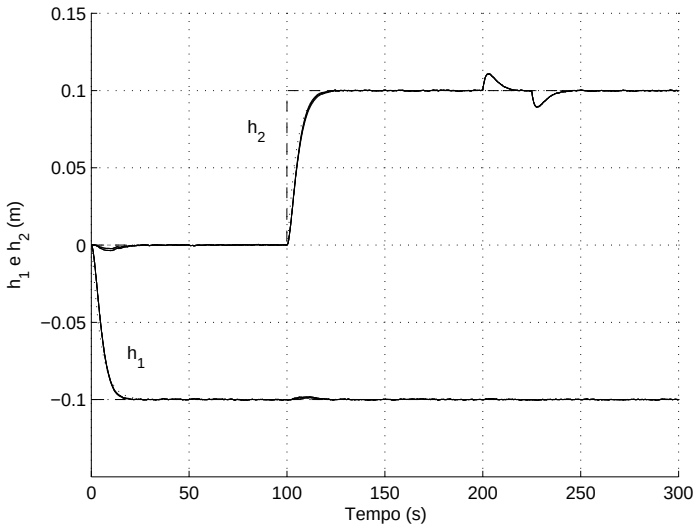


Fig. 4.6: Respostas transitórias dos níveis dos tanques (linha sólida) para os quatro vértices do politopo, modelo de referência (linha pontilhada) e sinais de referência (linha tracejada) para o sistema de dois tanques interligados onde $\epsilon_3 = 0{,}25$.

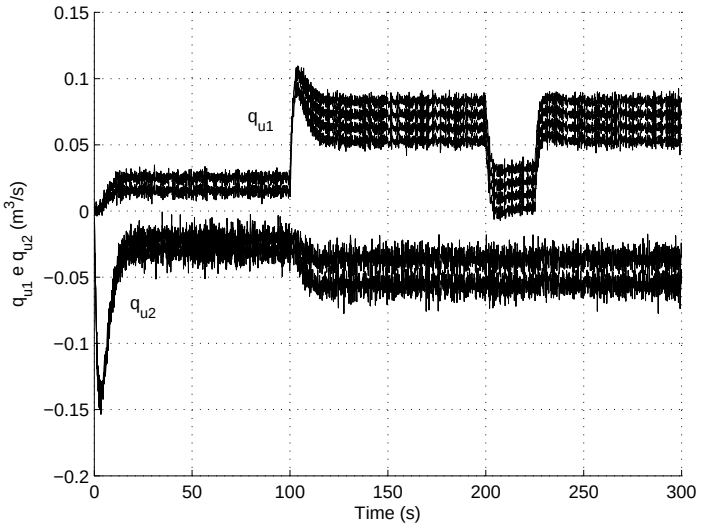


Fig. 4.7: Respostas transitórias das vazões de entrada dos tanques para os quatro vértices do sistema de dois tanques interligados onde $\epsilon_3 = 0{,}25$.

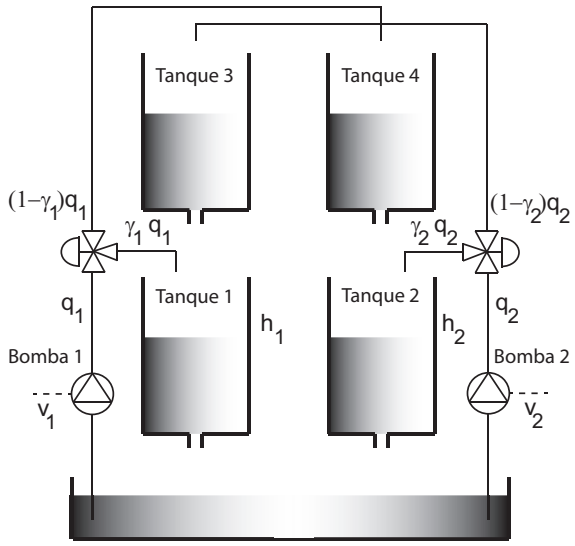
Observa-se que, ao relaxar o valor de ϵ_3, objetivando a melhoria da atenuação dos ruídos de medição, o controlador obtido apresenta ganhos menores, o que resulta em um menor esforço de controle em detrimento dos demais objetivos, mas comparando com os resultados anteriores, a sintonia ainda apresenta bons resultados quanto à capacidade de rejeição de perturbação, desacoplamento das malhas de controle e aproximação da resposta transitória em relação modelo de referência.

4.3 Exemplo 2

Considere o processo de quatro tanques apresentado em Johansson (2000), conforme ilustrado na Figura 4.8.

Este é um processo de laboratório com zero ajustável, onde dependendo das configurações das válvulas de três vias, é possível se ter o sistema operando em um ponto de operação de fase mínima ou de fase não-mínima. O objetivo é estabelecer o controle dos níveis nos dois tanques inferiores (h_1 e h_2) por meio de duas bombas onde a configuração da válvula de três vias estabelece a interação entre as duas malhas de controle. Este processo se torna adequado para ilustrar limitações de desempenho em projetos de controle multivariável e é particularmente interessante na validação do procedimento de sintonia proposto. Controladores PI descentralizados tem se mostrado eficientes quando aplicados ao processo quatro tanques no ponto de operação de fase mínima, porém para o ponto de operação de fase não mínima o alto acoplamento entre as variáveis e a dinâmica lenta do sistema torna o problema de controle muito mais complicado até mesmo para técnicas de controle avançadas.

Considerando desvios em torno de um ponto de operação e que todas as entradas e saídas são sinais de



tensão, o processo de quatro tanques pode ser representado pelo modelo no espaço de estados linearizado (Johansson, 2000):

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & \frac{A_3}{A_1T_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & 0 & \frac{A_4}{A_2T_4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_4} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} \\ 0 & \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3} \\ \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4} & 0 \end{bmatrix} u, \\
z &= \begin{bmatrix} k_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_c & 0 & 0 \end{bmatrix} x, \\
y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_c & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} w,
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

onde as variáveis de estado são os desvios de nível nos quatro tanques, $x_i = h_i - h_i^0$, $i = 1, \ldots, 4$; os sinais de controle são as variações de tensão nas duas bombas, $u_j \triangleq v_j - v_j^0$, $j = 1, 2$; as entradas exógenas são os sinais de referência e ruído de medição, $\mathbf{w} = [r_1\ r_2\ n_1\ n_2]^T$; as variáveis controladas são os sinais de nível medidos nos tanques 1 e 2, $z_j = k_c(h_j - h_j^0)$, $j = 1, 2$, sendo k_c o ganho do sensor; as variáveis medidas são os sinais de referência e os sinais de nível medidos mais os ruídos de medição, $\mathbf{y} = [r_1\ r_2\ z_1 + n_1\ z_2 + n_2]^T$. As constantes de tempo são

$$
T_i \triangleq \frac{A_i}{a_i}\sqrt{\frac{2h_i^0}{g}}, \quad i = 1, \ldots, 4. \tag{4.6}
$$

Os parâmetros do modelo linear do processo possuiem os seguintes valores (Johansson, 2000): seção

Tab. 4.2: Valores dos parâmetros para os dois pontos de operação.

		P_-	P_+
(h_1^0, h_2^0)	[cm]	(12,4; 12,7)	(12,6; 13,0)
(h_3^0, h_4^0)	[cm]	(1,8; 1,4)	(4,8; 4,9)
(v_1^0, v_2^0)	[V]	(3,00; 3,00)	(3,15; 3,15)
(k_1, k_2)	[cm^3/Vs]	(3,33; 3,35)	(3,14; 3,29)
(γ_1, γ_2)		(0,70; 0,60)	(0,43; 0,34)
(T_1, T_2)		(62; 90)	(63; 91)
(T_3, T_4)		(23; 30)	(39; 56)

transversal do tanque $A_1 = A_3 = 28$cm^2, $A_2 = A_4 = 32$cm^2; seção transversal dos orifícios de saída $a_1 = a_3 = 0{,}071$cm^2, $a_2 = a_4 = 0{,}057$cm^2; ganho do sensor $k_c = 0{,}50$V/cm; e aceleração da gravidade $g = 981$cm/s^2. Em (Johansson, 2000), são estabelecidos dois pontos de operação, P_- e P_+, que apresentam características de fase mínima e de fase não-mínima, respectivamente. Os valores dos parâmetros correspondentes aos dois pontos de operação são apresentados na Tabela 4.2. Os fluxos de entrada dos tanques são estabelecidos em função dos coeficientes das bombas, k_1 e k_2, e dos coeficientes das válvulas de três vias, γ_1 e γ_2.

Neste exemplo, é aplicado o procedimento de sintonia descrito no capitulo 3 tanto para o sistema de quatro tanques no ponto de operação de fase mínima, como para o ponto de operação de fase não-mínima, sendo ambos considerados para o caso precisamente conhecido e com incertezas.

No caso do sistema incerto, inicialmente são considerados como parâmetros incertos os coeficientes das válvulas de três vias,γ_1 e γ_2. O modelo politópico é representado por um politopo com três vértices no espaço de parâmetros de incertezas correspondendo às combinações do valores limites dos dois parâmetros incertos, sendo $(\gamma_1; \gamma_2) = \{(0{,}84; 0{,}58); (0{,}84; 0{,}72); (0{,}56; 0{,}72)\}$ para o ponto de operação de fase mínima e $(\gamma_1; \gamma_2) = \{(0{,}344; 0{,}272); (0{,}344; 0{,}408); (0{,}504; 0{,}272)\}$ para o ponto de operação de fase não-mínima, conforme apresentado na Fig. 4.9. Por fim, é estudado o caso em que os parâmetros incertos correspondem ao inverso das constantes de tempo do sistema, $1/T_j, j = 1, \ldots, 4$, admitindo uma variação de $\pm 25\%$. Neste caso, o sistema incerto é representado por um modelo politópico com dezesseis vértices no espaço dos parâmetros incertos.

A matriz RGA para o sistema no ponto de operação de fase mínima é dada como

$$\wedge = \begin{bmatrix} 1{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 1{,}4 \end{bmatrix}, \tag{4.7}$$

sendo a melhor configuração de controle a que corresponde a bomba 1 atuando no nível do tanque 1 e a bomba 2 atuando no nível do tanque 2.

No caso do sistema operando no ponto de fase não mínima, a matriz RGA é definida como

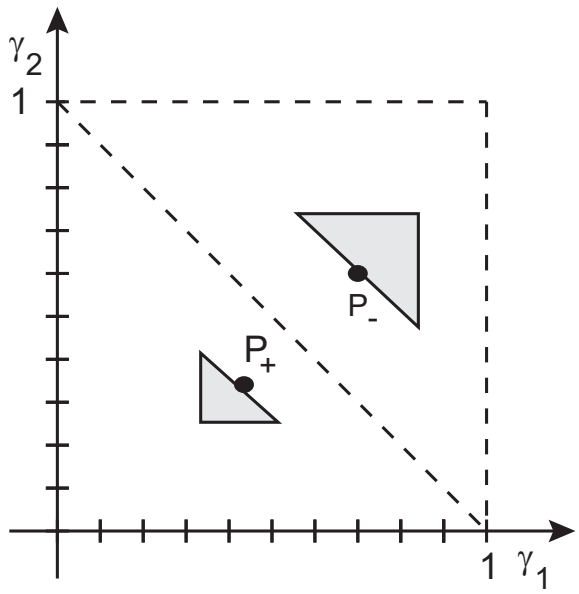


Fig. 4.8: Espaço de parâmetros incertos γ_1 e γ_2 do processo quatro tanques.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -0{,}635 & 1{,}635 \\ 1{,}635 & -0{,}635 \end{bmatrix}, \tag{4.8}$$

sendo o processo de quatro tanques melhor controlado invertendo os sinais de controle, ou seja, a bomba 2 atuando no nível do tanque 1 e a bomba 1 atuando no nível do tanque 2.

Para lidar com o desacoplamento, é adotada neste exemplo a estrutura do controle I-P descentralizado dado pela lei de controle no espaço de estados definido pela Eq. (2.23) onde $a_j = 1$, $j = 1, 2$.

Para o procedimento de sintonia, são definidos os seguintes parâmetros para o algoritmo cone elipsoidal: variáveis de otimização iniciais, $\chi_0 = [3\ 30\ 2{,}7\ 40]^T$, elipsóide inicial, $Q_0 = 10^3 \times I_4$, critérios de parada, $N_\varepsilon = 1000$ e $\varepsilon = 0{,}01$ e escalar do método das diferenças finitas, $\delta = 1 \times 10^{-8}$. As variáveis de otimização iniciais foram obtidos da literatura e os demais parâmetros definidos aleatoriamente.

Caso 1: Sistema de fase mínima precisamente conhecido

Para fins de comparação com os resultados em Johansson (2000) e Åström et al. (2002), considere o sistema de fase mínima precisamente conhecido sem ruído de medição. Os objetivos de controle consistem em obter o melhor desacoplamento para as duas malhas de controle do sistema garantindo uma resposta de rastreamento satisfatória para os níveis dos tanques 1 e 2 (h_1 e h_2) similar à especificada pelo modelo de referência. Neste caso, o problema multiobjetivo (2.38) é resolvido a partir do seguinte problema escalar mono objetivo:

$$K^*(s) = \arg\min_{K(s)} \left(\max_{\alpha\in\Omega} \|E(s)(s,\alpha,K)\|_\infty \right), \qquad \text{sujeito a:} \quad K(s) \in \mathcal{F} \tag{4.9}$$

sendo $\mathcal{F}$ o conjunto de controladores com parâmetros dentro das faixas aceitáveis que garantem a estabilidade robusta do sistema em malha fechada.

Para garantir as especificações da resposta transitória de rastreamento dos sinais de referência e o desacoplamento das malhas de controle são consideradas as funções de transferência, $T_{m,j}(s)$, $j = 1, 2$, do modelo de referência definido na Eq. (2.35) como sendo ambos de segunda ordem, tal que:

$$T_m(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{\omega_{n,1}^2}{s^2 + 2\zeta_1\omega_{n,1}s + \omega_{n,1}^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\omega_{n,2}^2}{s^2 + 2\zeta_2\omega_{n,2}s + \omega_{n,2}^2} \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

Um notável desacoplamento das malhas de controle do sistema e uma resposta de rastreamento satisfatória similar à especificada pelo modelo de referência, é atingido a partir de uma resposta transitória mais lenta atribuída ao nível do tanque 2. Sendo assim, definindo $\omega_{n1} = 0{,}799$, $\zeta_1 = 0{,}95$, $\omega_{n2} = 0{,}449$, $\zeta_2 = 8$ e aplicando o procedimento de sintonia proposto para resolver o problema escalar mono objetivo (4.9), são obtidos os seguintes parâmetros para o controlador I-P descentralizado: $k_{p1} = 36{,}007$, $T_{i1} = 2{,}353$, $k_{p2} = 260{,}775$ e $T_{i2} = 35{,}551$. Este controlador resulta em $\max_{\alpha\in\Omega} \|E(s,\alpha,K^*)\|_\infty \leq 0{,}0016$.

As respostas transitórias dos níveis dos tanques medidos, $c_j(t) = k_c h_i(t)$, $j = 1, 2$ para mudanças em degrau nos sinais de referência, $r_1(t) = \mathbf{1}(t)$ e $r_2(t) = \mathbf{1}(t - 50)$, são apresentadas na Fig. 4.9.

Com esta sintonia para o controlador descentralizado I-P, as mudanças em degrau em um sinal de referência não afetam a saída do outro processo. O problema com este projeto é a resposta lenta de $h_2(t)$.

Um melhor compromisso entre desacoplamento e tempo de assentamento pode ser atingido alterando-se o valor de $\zeta_2 = 8$ para $\zeta_2 = 0{,}9$ na Eq. (4.10). Neste caso, os parâmetros do controlador I-P descentralizado são calculados como $k_{p1} = 36{,}121$, $T_{i1} = 2{,}354$, $k_{p2} = 25{,}367$ e $T_{i2} = 3{,}954$, resultando em $\max_{\alpha\in\Omega} \|E(s,\alpha,K^*)\|_\infty \leq 0{,}0128$.

As respostas transitórias dos níveis dos tanques medidos, $c_j(t) = k_c h_i(t)$, $j = 1, 2$ para a sintonia com melhor tempo de assentamento são apresentadas na Fig. 4.10.

Ao comparar os resultados em Johansson (2000) e Åström et al. (2002) com as respostas transitórias obtidas, nota-se tempo de assentamento similar e muito melhor desacoplamento.

Para o procedimento proposto, o compromisso entre o desacoplamento das malhas de controle e uma rápida resposta de rastreamento foi obtido alterando-se os parâmetros do modelo de referência. Isto quer dizer que o custo associado a um bom desacoplamento está associado a uma resposta transitória mais lenta para o sistema. Enquanto as características da resposta transitória do sistema (sobresinal, tempo de assentamento, etc.) podem ser estabelecidas a partir dos parâmetros do modelo de referência, o desacoplamento das malhas de controle dependerá da capacidade de se aproximar o modelo desejado, através da estrutura do controlador considerada.

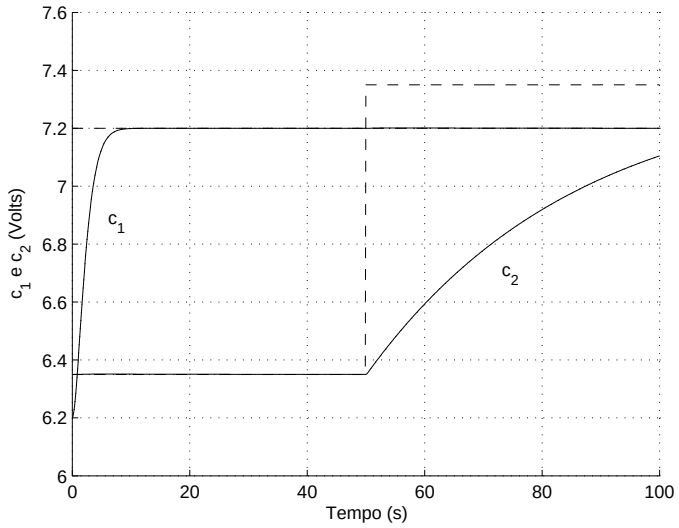


Fig. 4.9: Respostas transitórias das saídas controladas (linha sólida), modelo de referência (linha pontilhada) e sinais de referência (linha tracejada) para o sistema de fase mínima precisamente conhecido com melhor desacoplamento.

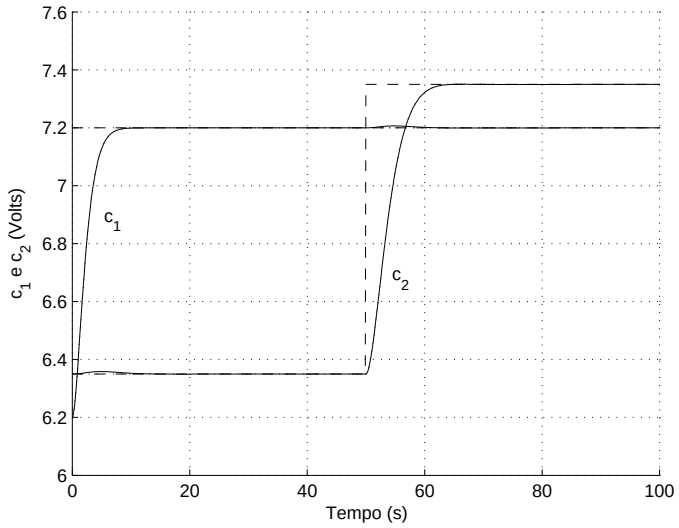


Fig. 4.10: Respostas transitórias das saídas controladas (linha sólida), modelo de referência (linha pontilhada) e sinais de referência (linha tracejada) para o sistema de fase mínima precisamente conhecido com melhor tempo de assentamento.

Caso 2: Sistema de fase não-mínima precisamente conhecido

Neste segundo caso, é considerado o sistema precisamente conhecido atuando no ponto de operação onde o processo apresenta características de fase não-mínima sem a presença de ruídos de medição. Devido às limitações causadas pela presença de zero no semi-plano direito, o sistema se torna mais difícil de ser controlado em comparação ao sistema no ponto de operação onde o processo apresenta características de fase mínima (Johansson, 2002). Como discutido anteriormente, para este ponto de operação o sistema de quatro tanques é melhor controlado adotando uma configuração de controle onde a bomba 2 é usada para controlar o nível do tanque 1 e a bomba 1 para controlar o nível do tanque 2.

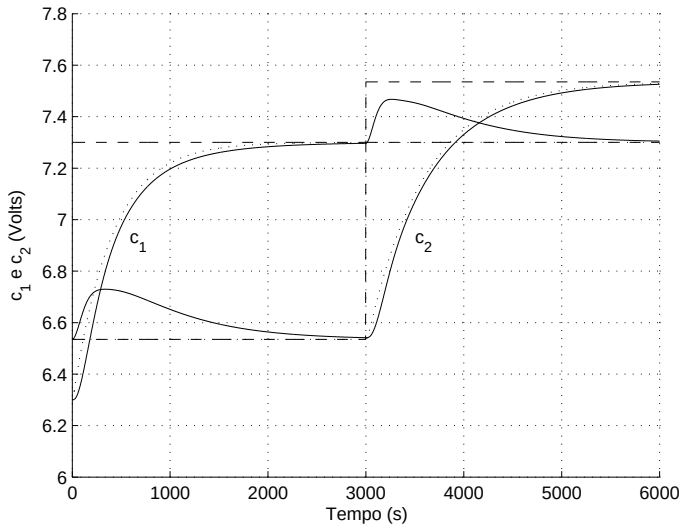


Fig. 4.11: Respostas transitórias das saídas controladas (linha sólida), modelo de referência (linha pontilhada) e sinais de referência (linha tracejada) para o sistema de fase não-mínima precisamente conhecido.

Para se atingir um desacoplamento aceitável das malhas de controle e obter uma resposta de rastreamento satisfatória para os níveis dos tanques 1 e 2 similar à especificada, é necessário escolher um modelo de referência que irá resultar em respostas transitórias mais lentas para o sistema. Assim, definindo $\omega_{n1} = 0{,}02$, $\zeta_1 = 4$, $\omega_{n2} = 0{,}01$ e $\zeta_2 = 3$ na Eq. (4.10) e aplicando o procedimento proposto para resolver o problema escalar mono objetivo 4.9, são obtidos os seguintes parâmetros para o controlador I-P: $k_{p1} = 0{,}303$, $T_{i1} = 150{,}325$, $k_{p2} = 0{,}540$ e $T_{i2} = 304{,}239$, resultando em $\max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cn}(s, \alpha, K^*)\|_2 \leq 0{,}308$.

As respostas transitórias dos níveis dos tanques medidos, $c_j(t) = k_c h_i(t)$, $j = 1, 2$ para o sistema de fase não-mínima precisamente conhecido considerando mudanças em degrau nos sinais de referência, $r_1(t) = \mathbf{1}(t)$ e $r_2(t) = \mathbf{1}(t - 3000)$, são apresentadas na Figs. 4.11.

O grande erro de aproximação do modelo indica um desacoplamento ruim do sistema e em respostas transitórias que não correspondem exatamente a resposta do modelo de referência, como mostrado na Fig. 4.11. O

desacoplamento é pior do que no caso do ponto de operação de fase mínima, mas quando comparado com a sintonia do controlador PI multi-malhas, para o ponto de operação de fase não-minima apresentado em Johansson (2000), é alcançado um melhor desacoplamento das malhas de controle.

Caso 3: Sistema de fase mínima com incertezas no coeficientes das válvulas de três vias

Neste caso, é tratado o sistema de quatro tanques no ponto de operação de fase mínima, sujeito a ruídos de medição e considerando as configurações para os coeficientes de válvula de três vias γ_1 e γ_2 como parâmetros incertos. O sistema incerto é representado por um modelo politópico com três vértices no espaço de parâmetros incertos formados pelos seguintes valores: $(\gamma_1; \gamma_2) = \{(0{,}84; 0{,}58); (0{,}84; 0{,}72); (0{,}56; 0{,}72)\}$.

Os objetivos de controle continuam sendo o desacoplamento das duas malhas de controle do sistema com respostas de rastreamento satisfatórias para os níveis dos tanques 1 e 2, h_1 e h_2, similar às especificadas pelo modelo de referência. Porém, neste caso, considera-se também uma boa atenuação dos efeitos dos ruídos de medição sobre os sinais do sistema com o esforço de controle mantido dentro dos limites aceitáveis.

Por uma questão de comparação, inicialmente os parâmetros do controlador I-P foram obtidos resolvendo o problema mono objetivo (4.9) conforme aplicado ao caso do ponto de operação de fase mínima precisamente conhecido tratado anteriormente. Considerando os parâmetros do modelo de referência (4.10) como sendo $\omega_{n1} = 0{,}799$, $\zeta_1 = 0{,}95$, $\omega_{n2} = 0{,}449$ e $\zeta_2 = 0{,}9$, e aplicando o procedimento de sintonia proposto, os seguintes parâmetros foram obtidos para o controlador I-P descentralizado: $k_{p1} = 38{,}606$, $T_{i1} = 2{,}4$, $k_{p2} = 24{,}007$ e $T_{i2} = 4{,}072$ alcançando $\max_{\alpha\in\Omega} \|E(s, \alpha, K^*)\|_\infty \leq 0{,}057$.

O diagrama de Bode para as quatro funções de transferência de malha fechada que relacionam os sinais de referência e as saídas controladas para os três vértices do modelo politópico são apresentados na Fig. 4.12. As respostas em frequência para as funções de transferência fora da diagonal apresentam pequenos ganhos, com o pior caso de $-41{,}6$ dB para $H_1(s)/R_2(s)$ e $-33{,}7$ dB para $H_2(s)/R_1(s)$ indicando um bom desacoplamento das malhas de controle. A aproximidade da resposta em frequência das funções de transferência da diagonal, $H_1(s)/R_1(s)$ e $H_2(s)/R_2(s)$ para os três vértices (linhas sólidas), estão muito próximas às do modelo de referência (linha tracejada) indicando que a sintonia garante uma boa resposta de rastreamento para todos os valores de $\alpha \in \Omega$.

As respostas transitórias dos níveis dos tanques medidos e as tensões nas bombas para os três vértices do politopo são apresentadas nas Figs. 4.13 e 4.14 respectivamente. A simulação considera as mesmas mudanças em degrau nos sinais de referência conforme aplicado no primeiro caso onde, $r_1(t) = \mathbf{1}(t)$ e $r_2(t) = \mathbf{1}(t-50)$. Os sinais de ruído de medição são definidos como $n_j = 0{,}01\mathrm{randn(t)}$, $j = 1, 2$.

Com esse pequeno valor para $\max \|E\|_\infty$, a resposta para os três vértices do politopo são semelhantes às saídas do modelo de referência, porém o alto ganho do controlador aliado aos ruídos de medição nos sinais do sistema resulta em um grande esforço de controle fazendo com que v_1 exceda o limite máximo de 10V.

Para melhor tratar o caso do sistema incerto com ruído de medição (e esforço de controle limitado), os parâmetros do controlador robustos I-P descentralizado podem ser obtidos resolvendo o seguinte problema escalar mono objetivo:

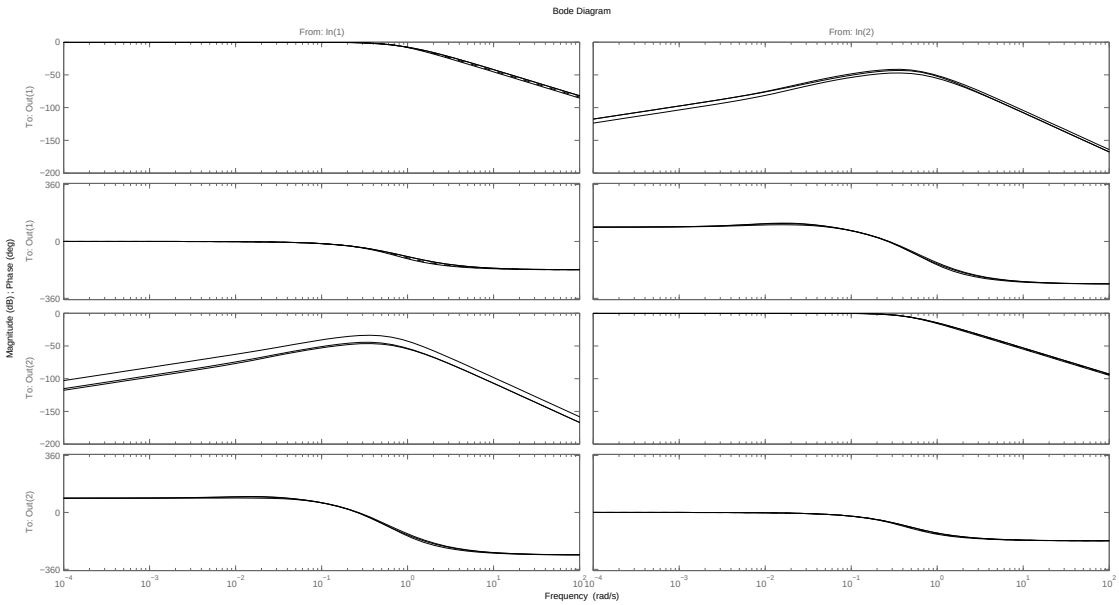


Fig. 4.12: Diagrama de Bode do modelo de referência (linha tracejada) e do sistema de quatro tanques no ponto de operação de fase mínima com incertezas no coeficientes da válvula de três vias (linha solida) para a melhor aproximação do modelo.

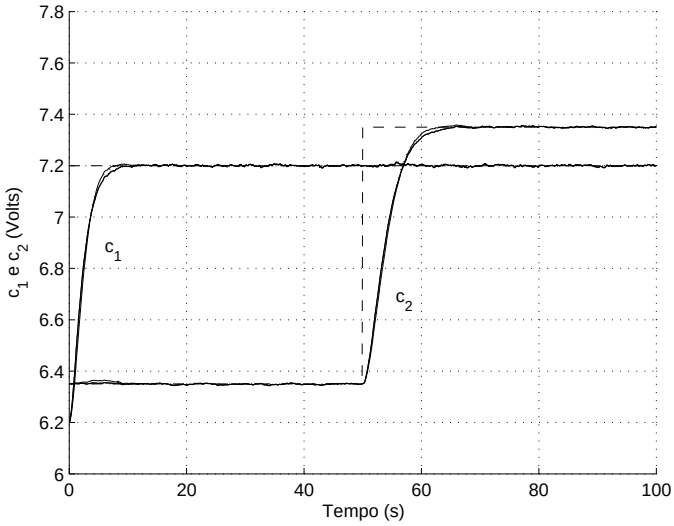


Fig. 4.13: Respostas transitórias das saídas controladas (linhas sólidas)para os três vértices do politopo, modelo de referência (linha pontilhada) e sinais de referência (linha tracejada) com melhor aproximação do modelo para o sistema de quatro tanques no ponto de operação de fase mínima com incertezas nos coeficientes da válvula de 3 vias.

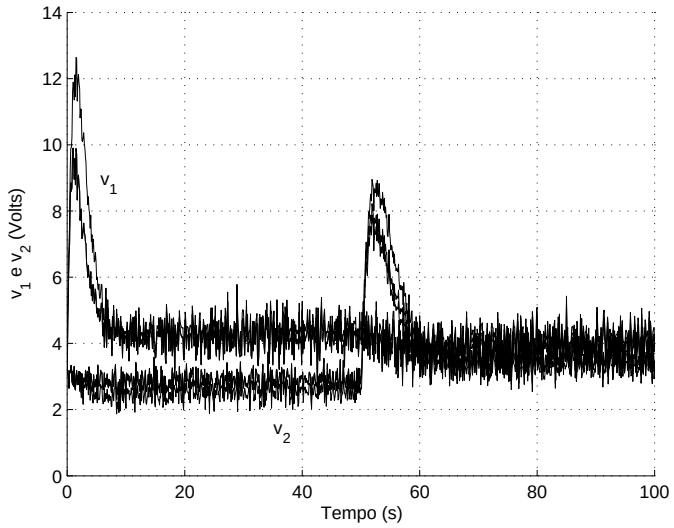


Fig. 4.14: Respostas transitórias das variáveis manipuladas para os três vértices do politopo com melhor aproximação do modelo para o sistema de quatro tanques no ponto de operação de fase mínima com incertezas nos coeficientes da válvula de 3 vias.

$$
\begin{aligned}
K^*(s) &= \arg\min_{K(s)} \left(\max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cn}(s,\alpha,K)\|_2 \right), \\
\text{sujeito a:} \quad & \max_{\alpha\in\Omega} \|E(s)(s,\alpha,K)\|_\infty \leq \epsilon_3 \\
& K(s) \in \mathcal{F}
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

sendo $\mathcal{F}$ o conjunto de controladores com parâmetros dentro das faixas aceitáveis que garantem a estabilidade robusta do sistema em malha fechada.

Diferentes compromissos entre o desempenho da resposta de rastreamento (e desacoplamento) e atenuação de ruído de medição (e esforço de controle) são obtidos alterando o valor da restrição ϵ_3 no problema (4.11). A Tabela 4.3 apresenta os valores de $\max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cn}(s,\alpha,K)\|_2$ para $0{,}1 \leq \epsilon_3 \leq 0{,}9$ e a curva de Pareto-ótimo é apresentada na Fig. 4.15. Valores mais baixos de $\max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cn}(s,\alpha,K)\|_2$ correspondem a pouco efeito do ruído de medição sobre os sinais do sistema e, indiretamente, a um menor esforço de controle.

O controlador I-P multi-malhas descentralizado que garante $\max_{\alpha\in\Omega} \|E(s,\alpha,K^*)\|_\infty \leq \epsilon_3 = 0{,}5$, alcançando $\max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cn}(s,\alpha,K^*)\|_2 \leq 0{,}924$, possui os seguintes parâmetros: $k_{p1} = 15{,}981$, $T_{i1} = 2{,}932$, $k_{p2} = 9{,}725$ e $T_{i2} = 4{,}202$.

As respostas transitórias dos níveis dos tanques medidos, $c_j(t) = k_c h_i(t)$, $j = 1, 2$, e as tensões nas bombas v_j, $j = 1, 2$ para os três vértices do politopo com $\epsilon_3 = 0{,}5$, são apresentados nas Figs. 4.16 e 4.17.

Permitindo um valor superior para o erro de aproximação, as respostas transitórias não são exatamente iguais as saídas do modelo de referência, mas ainda são satisfatórias considerando o desacoplamento, o sobre-sinal e o tempo de assentamento. Por outro lado, é atingida uma atenuação de ruídos de medição melhor e um

Tab. 4.3: Valores da função objetivo variando a restrição ϵ_3.

ϵ_3	$\max \|E\|_\infty$	$\max \|T_{cn}\|_2$
0,1	0,0987	1,2333
0,2	0,1986	1,1366
0,3	0,2934	1,0484
0,4	0,3930	0,9880
0,5	0,4937	0,9258
0,6	0,5863	0,8707
0,7	0,6912	0,8120
0,8	0,7995	0,7551
0,9	0,8794	0,6845

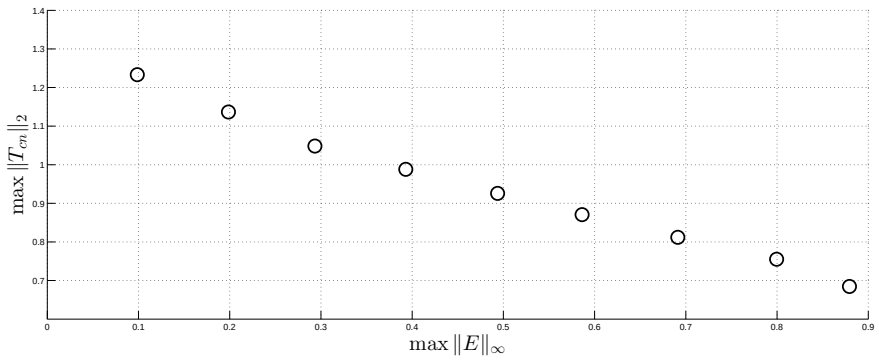


Fig. 4.15: Curva de Pareto considerando as funcões objetivo $\max_{\alpha\in\Omega} \|E\|_\infty$ versus $\max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cn}\|_2$ para as soluções obtidas com $0,1 \leq \epsilon_3 \leq 0,9$ na Eq. (4.11).

menor esforço de controle pode ser observado na Fig. 4.17. Pode-se verificar que as tensões de bomba não excedem o limite de 10V.

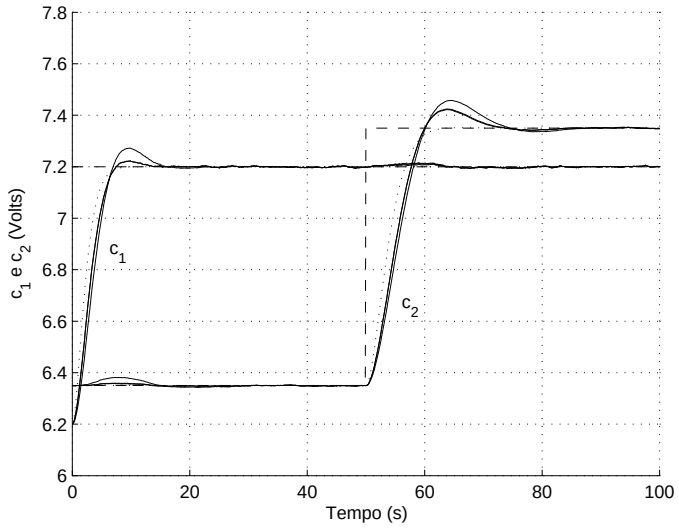


Fig. 4.16: Respostas transitórias das saídas controladas (linhas sólidas)para os três vértices do politopo, modelo de referência (linha pontilhada) e sinais de referência (linha tracejada) com melhor atenuação de ruídos de medição (e esforço de controle) para o sistema de quatro tanques no ponto de operação de fase mínima com incertezas nos coeficientes da válvula de 3 vias.

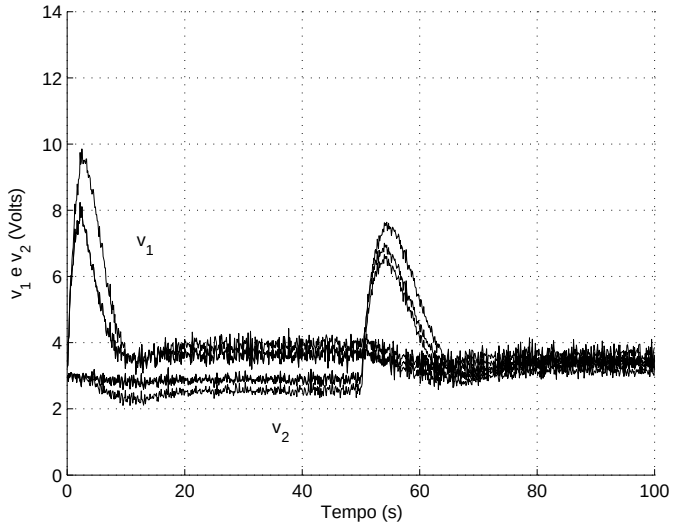


Fig. 4.17: Respostas transitórias das tensões das bombas para os três vértices do politopo com melhor atenuação de ruídos de medição (e esforço de controle) para o sistema de quatro tanques no ponto de operação de fase mínima com incertezas nos coeficientes das válvulas de 3 vias.

Caso 4: Sistema de fase não-mínima com incertezas no coeficientes das válvulas de três vias

Considere o sistema incerto de quatro tanques no ponto de operação de fase não-mínima com ruídos de medição, onde os parâmetros incertos correspondem aos coeficientes da válvula de três vias γ_1 e γ_2 no politopo definido por três vértices: $\{(0{,}344; 0{,}272); (0{,}344; 0{,}408); (0{,}504; 0{,}272)\}$.

Como discutido anteriormente, o sistema no ponto de operação de fase não-mínima é mais difícil de controlar em relação ao ponto de operação de fase mínima devido à limitações causadas pela presença de zero no semi-plano direito. Assim faz-se necessário escolher um modelo de referência que resulte em respostas transitórias mais lentas para o sistema e adotar uma configuração de controle em que a bomba 2 é usada para controlar o nível do tanque 1 e a bomba 1 é usada para controlar o nível do tanque 2.

Os objetivos de controle são os mesmos tratados no caso do sistema quatro tanques incerto de fase mínima, porém, devido a resposta lenta do sistema no ponto de operação de fase não-mínima, não é necessário otimizar o esforço de controle e a resposta ao ruído de medição. Assim, considerando os parâmetros do modelo de referência dado pela Eq. (4.10) como sendo $\omega_{n1} = 0{,}02$, $\zeta_1 = 4$, $\omega_{n2} = 0{,}01$ e $\zeta_2 = 3$ e aplicando o procedimento proposto para resolver o problema escalar mono objetivo (4.9), foram obtidos os seguintes parâmetros para o controlador I-P: $k_{p1} = 0{,}426$, $T_{i1} = 198{,}708$, $k_{p2} = 0{,}446$ e $T_{i2} = 237{,}678$, resultando em $\max_{\alpha\in\Omega} \|E(s, \alpha, K^*)\|_\infty \leq 0{,}375$.

As respostas transitórias dos níveis dos tanques medidos, $c_j(t) = k_c h_i(t)$, $j = 1, 2$ para os três vértices do politopo e as tensões nas bombas v_j, $j = 1, 2$ são apresentados nas Figs 4.18 e 4.19 para os três vértices do politopo.

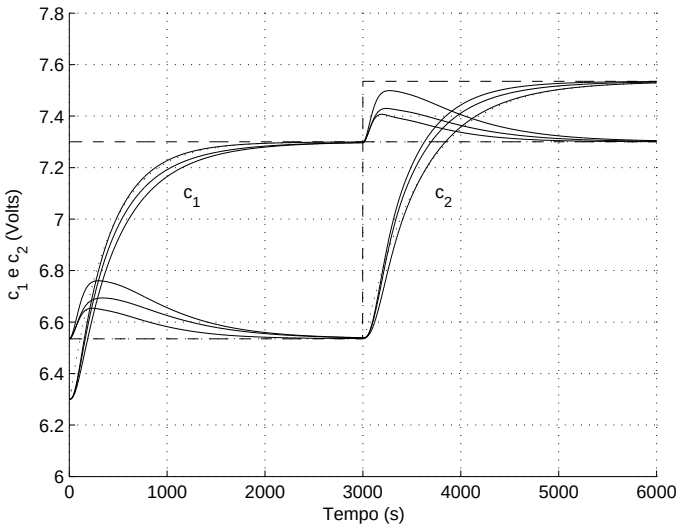


Fig. 4.18: Respostas transitórias das saídas controladas (linhas sólidas)para os três vértices do politopo, modelo de referência (linha pontilhada) e sinais de referência (linha tracejada) para o sistema de quatro tanques no ponto de operação de fase não-mínima com incertezas nos coeficientes das válvulas de três vias.

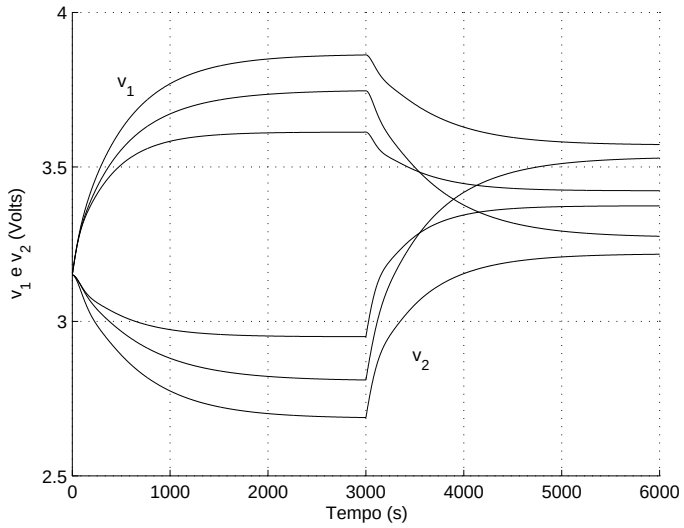


Fig. 4.19: Respostas transitórias das variáveis manipuladas para os três vértices do politopo considerando o sistema de quatro tanques no ponto de operação de fase não-mínima, com incertezas nos coeficientes das válvulas de três vias.

Para o ponto de operação de fase não-mínima não é alcançado o perfeito desacoplamento entre as duas malhas de controle, mas a interação é visivelmente menor do que os resultados apresentados em (Johansson, 2000).

Caso 5: Sistema de fase mínima com incertezas nas constantes de tempo

Considere o sistema de quatro tanques no ponto de operação de fase mínima, sendo considerados como parâmetros incertos os inversos das constantes de tempo, $1/T_j$, $j = 1, \ldots, 4$, admitindo uma variação de $\pm 25\%$. Neste caso, o sistema incerto pode ser representado por um modelo politópico com dezesseis vértices no espaço dos parâmetros incertos.

Definindo os parâmetros do modelo de referência na Eq. (4.10) como sendo $\omega_{n1} = 0{,}8$, $\zeta_1 = 0{,}95$, $\omega_{n2} = 0{,}45$, e $\zeta_2 = 0{,}9$ e aplicando o procedimento proposto ao problema escalar (4.9) para obter um bom desacoplamento das duas malhas de controle do sistema com uma resposta de rastreamento satisfatória para os níveis dos tanques, os seguintes parâmetros foram obtidos para o controlador I-P descentralizado: $k_{p1} = 36{,}138$, $T_{i1} = 2{,}352$,$k_{p2} = 25{,}386$ e $T_{i2} = 3{,}943$ sendo alcançado $\max_{\alpha\in\Omega} \|E(s, \alpha, K^*)\|_\infty \leq 0{,}017$.

As respostas transitórias dos níveis dos tanques medidos e as tensões nas bombas para os 16 vértices do politopo considerando a melhor aproximação do modelo, são apresentadas na Figs. 4.20 e 4.21.

Assim como no caso do sistema com incertezas nos coeficientes das válvulas de três vias, um melhor compromisso entre o desempenho de rastreamento de resposta (e desacoplamento) e atenuação de ruído de medição (e esforço de controle) pode ser obtido aplicando o procedimento de sintonia ao problema escalar (4.11). O controlador I-P descentralizado que garante $\max_{\alpha\in\Omega} \|E(s, \alpha, K^*)\|_\infty \leq \epsilon_3 = 0{,}5$, alcançando $\max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cn}(s, \alpha, K^*)\|_2 \leq 0{,}832$, possui os seguintes parâmetros: $k_{p1} = 13{,}668$, $T_{i1} = 3{,}127$,

$k_{p2} = 10{,}497$ e $T_{i2} = 5{,}438$. A respostas transitórias para esta sintonia são dadas nas Figs. 4.22 e 4.23

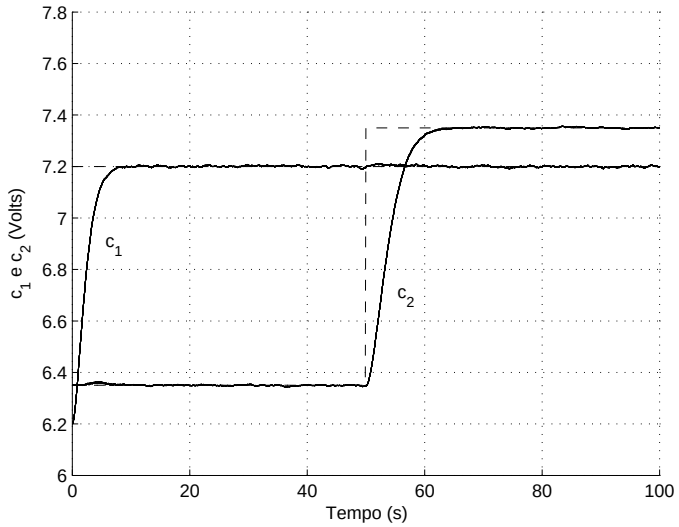


Fig. 4.20: Respostas transitórias das saídas controladas (linhas sólidas)para os 16 vértices do politopo, modelo de referência (linha pontilhada) e sinais de referência (linha tracejada) com melhor aproximação do modelo para o sistema de quatro tanques no ponto de operação de fase mínima com incertezas nas constantes de tempo do sistema.

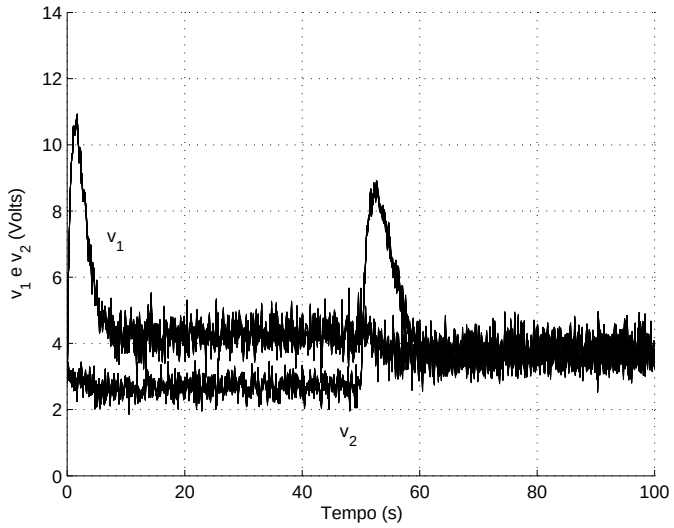


Fig. 4.21: Respostas transitórias das variáveis manipuladas para os 16 vértices do politopo com melhor aproximação do modelo para o sistema de quatro tanques no ponto de operação de fase mínima com incertezas nas constantes de tempo do sistema.

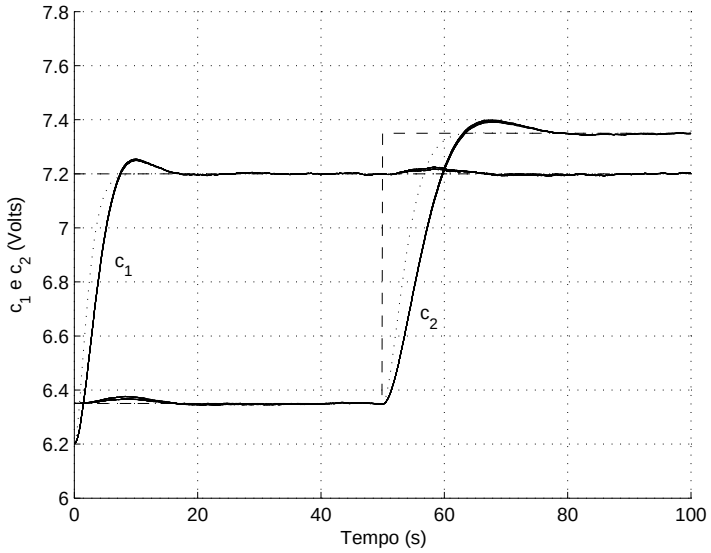


Fig. 4.22: Respostas transitórias das saídas controladas (linhas sólidas)para os 16 vértices do politopo, modelo de referência (linha pontilhada) e sinais de referência (linha tracejada) com melhor atenuação de ruídos de medição (e esforço de controle) para o sistema de quatro tanques no ponto de operação de fase mínima com incertezas nas constantes de tempo do sistema.

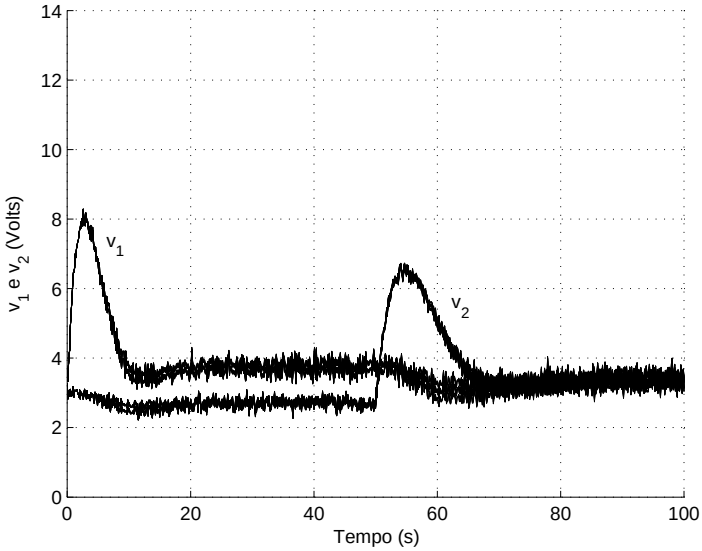


Fig. 4.23: Respostas transitórias das variáveis manipuladas para os 16 vértices do politopo com melhor atenuação de ruídos de medição (e esforço de controle) para o sistema de quatro tanques, no ponto de operação de fase mínima, com incertezas nas constantes de tempo do sistema.

Caso 6: Sistema de fase não-mínima com incertezas nas constantes de tempo

Considere o sistema incerto de quatro tanques no ponto de operação de fase não-mínima onde os parâmetros incertos correspondem ao inverso das constantes de tempo, $1/T_j$, $j = 1, \ldots, 4$, admitindo uma variação de $\pm 25\%$.

As funções de transferência, $T_{m,j}(s)$ para $j = 1, 2$, do modelo de referência bloco diagonal dado pela Eq. (2.35) são consideradas como sendo de segunda ordem, incluindo uma aproximação de Padé de primeira ordem do atraso de tempo para melhor considerar as limitações do sistema

$$T_m(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{\omega_{n,1}^2(-\tau_1 s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(s^2 + 2\zeta_1\omega_{n,1}s + \omega_{n,1}^2)} & 0 \\ 0 & \dfrac{\omega_{n,2}^2(-\tau_2 s + 1)}{(\tau_2 s + 1)(s^2 + 2\zeta_2\omega_{n,2}s + \omega_{n,2}^2)} \end{bmatrix}, \tag{4.12}$$

sendo $\tau_i = 50$, $i = 1, 2$, $\omega_{n,1} = 0{,}02$, $\zeta_1 = 4$, $\omega_{n,2} = 0{,}01$, e $\zeta_2 = 3$.

Resolvendo o problema mono objetivo (4.9), o valor mínimo de $\max_{\alpha\in\Omega} \|E(s, \alpha, K^*)\|_\infty \leq 0{,}360$ é atingido para $k_{p1} = 0{,}294$, $T_{i1} = 154{,}817$, $k_{p2} = 0{,}544$ e $T_{i2} = 313{,}712$.

As respostas transitórias dos níveis dos tanques medidos, $c_j(t) = k_c h_i(t)$, $j = 1, 2$ e as tensões nas bombas v_j, $j = 1, 2$ para os 16 vértices do politopo são apresentados nas Figs. 4.24 e 4.25.

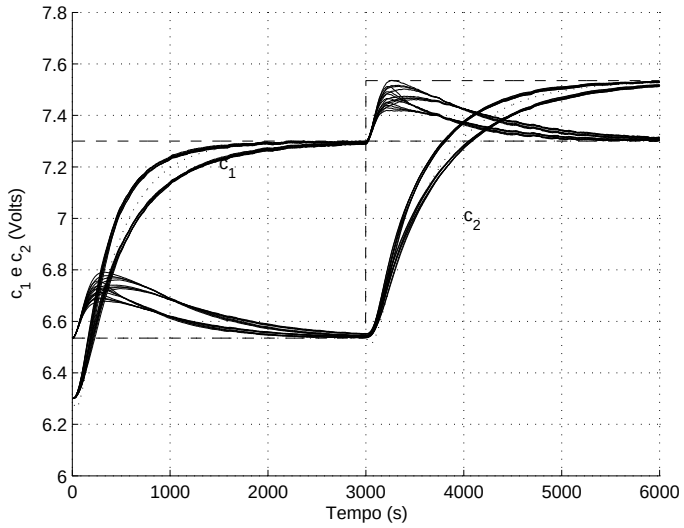


Fig. 4.24: Respostas transitórias das saídas controladas (linhas sólidas)para os 16 vértices do politopo, modelo de referência (linha pontilhada) e sinais de referência (linha tracejada) do sistema de quatro tanques no ponto de operação de fase não-mínima com incertezas nas constantes de tempo.

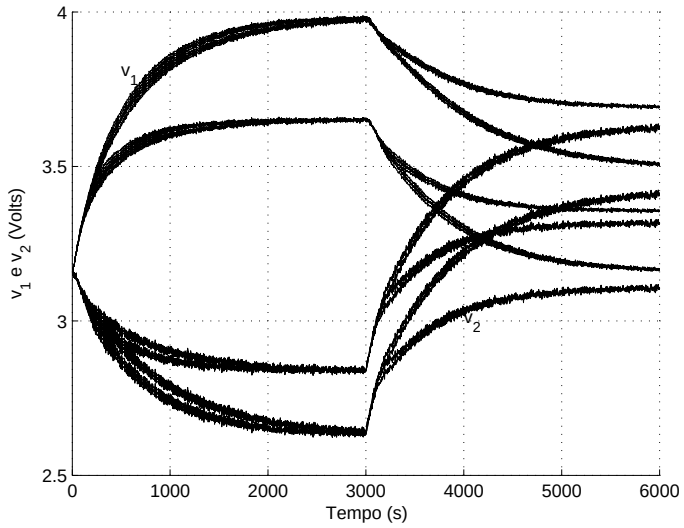


Fig. 4.25: Respostas transitórias das variáveis manipuladas para os 16 vértices do politopo do sistema de quatro tanques, no ponto de operação de fase não-mínima, com incertezas nas constantes de tempo.

4.4 Exemplo 3

Considere o processo multivariável apresentado na Figura 4.26. Trata-se de planta piloto de uma coluna de destilação contínua usada na separação da mistura de metanol e água apresentado em Wood e Berry (1973). O objetivo de controle é manter a composição de metanol em uma dada referência na presença de variações da

alimentação de entrada. Este processo tem sido amplamente utilizado como referência para sintonia de controladores PID multi-malhas para demonstrar sua capacidade em lidar com o acoplamento inerente ao processo (Loh e Vasnani, 1994; Wang et al., 1998; Åström et al., 2002; Zhanga et al., 2002; Huang et al., 2003; Leea e Edgarb, 2006; Campestrini et al., 2009; Shen et al., 2010; Vu e Lee, 2010b; Vu e Lee, 2010a; Kumar et al., 2012).

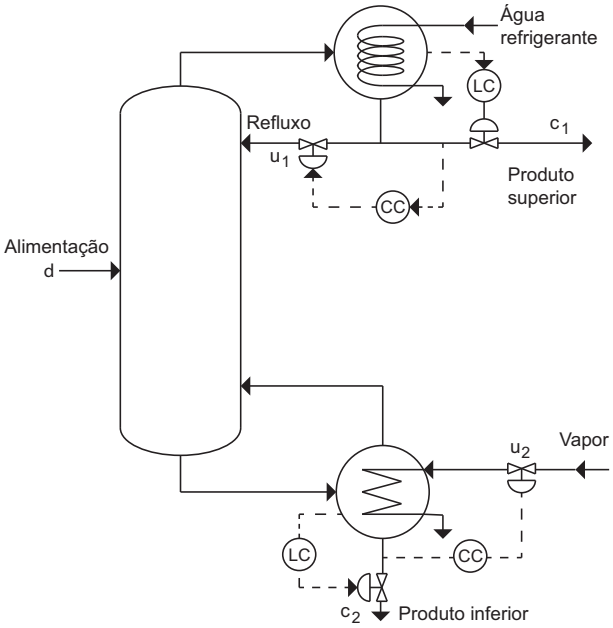


Fig. 4.26: Diagrama esquemático do sistema de controle da coluna de destilação Wood e Berry.

Em (Wood e Berry, 1973), é apresentado um modelo dinâmico simplificado deste processo, considerando um ponto de operação:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{12,8e^{-1s}}{16,7\gamma_1 s+1} & \dfrac{-18,9e^{-3s}}{21,0s+1} \\ \dfrac{6,6e^{-7s}}{10,9s+1} & \dfrac{-19,4e^{-3s}}{14,4\gamma_2 s+1} \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

$$G_d(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{3,8e^{-8s}}{14,9s+1} \\ \dfrac{4,9e^{-3s}}{13,2s+1} \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

Os parâmetros γ_1 e γ_2 são incluídos neste trabalho como sendo parâmetros incertos variando nos intervalos $0{,}9 \leq \gamma_1 \leq 1{,}1$ e $0{,}9 \leq \gamma_2 \leq 1{,}1$ representando uma variação de $\pm 10\%$ nas constantes de tempo das funções de transferência da diagonal principal do sistema.

Para aplicar o procedimento de sintonia proposto, o modelo dinâmico do sistema foi convertido em uma realização balanceada em espaço de estado de 24ª ordem considerando aproximações de Padé de 3ª ordem para os atrasos em tempo contínuo:

$$\left[\begin{array}{cc} G(s) & G_d(s) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B}_u\ \mathbf{B}_d \\ \hline \mathbf{C}_z & \mathbf{0}_{2\times 3} \end{array}\right] \tag{4.15}$$

Os sinais de controle são a vazão de refluxo e a vazão de vapor expressas em lb/min, $\mathbf{u} = [u_1\ u_2]^T$, considerando o minuto como unidade de tempo padrão. As entradas exógenas são os sinais de referência, a perturbação (vazão de alimentação expressa em lb/min) e ruídos de medição, $\mathbf{w} = [r_1\ r_2\ d\ n_1\ n_2]^T$. As variáveis controladas são as composições dos produtos de topo e de fundo expressos em função da porcentagem mássica de metanol, $\mathbf{z} = [c_1\ c_2]^T$. As variáveis medidas são os sinais de referência e as composições dos produtos de topo e de fundo mais os ruídos de medição, $\mathbf{y} = [r_1\ r_2\ c_1 + n_1\ c_2 + n_2]^T$. As outras matrizes do modelo dinâmico são definidas como $\mathbf{B}_w = [\mathbf{0}_{n\times 2}\ \mathbf{B}_d\ \mathbf{0}_{n\times 2}]^T$, $\mathbf{D}_{zu} = \mathbf{0}_{2\times 2}$, $\mathbf{D}_{zw} = \mathbf{0}_{2\times 5}$,

$$\mathbf{C}_y = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2\times n} \\ \mathbf{C}_z \end{bmatrix},\ \mathbf{D}_{yw} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_{2\times 3} \\ \mathbf{0}_{2\times 3} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}.$$

A matriz RGA para o processo é calculada como sendo

$$\wedge = \begin{bmatrix} 2{,}0094 & -1{,}0094 \\ -1{,}0094 & 2{,}0094 \end{bmatrix}, \tag{4.16}$$

indicando que a melhor configuração de controle é aquela em que a vazão de refluxo, $u_1(t)$, é usada para controlar a composição do produto do topo, $c_1(t)$, e a vazão de vapor, $u_2(t)$, é usada para controlar a composição do produto do fundo, $c_2(t)$.

O procedimento de sintonia proposto é aplicado considerando os seguintes parâmetros aleatórios para o algoritmo cone elipsoidal: variáveis de otimização iniciais, $\chi_0 = [0,1\ 10\ 25\ 0{,}1\ 10\ 25]^T$, elipsóide inicial, $Q_0 = 10^4 \times I_6$, os critérios de parada, $N_\varepsilon = 2000$ e $\varepsilon = 0{,}01$ e o escalar do método das diferenças finitas, $\delta = 1 \times 10^{-4}$.

Para alcançar o desacoplamento do sistema, é considerado o controlador I-PD descentralizado dado pela lei de controle no espaço de estados definido pela Eq. (2.16) com $\mathcal{N}_j = 10$ e $a_j = b_j = 1$, $j = 1, 2$, onde as ações proporcional e derivativa são aplicadas apenas para a saída medida da planta.

Como foi mencionado anteriormente, há vários resultados de sintonia de controladores PI/PID na literatura aplicada a este problema de controle. A sintonia PID que resulta em respostas transitórias mais rápidas a mudanças em degrau nos sinais de referência, apresenta fortes interações entre as malhas de controle. Um melhor desacoplamento é alcançado com respostas transitórias mais lentas.

Uma compensação razoável entre uma rápida resposta de rastreamento e um bom desacoplamento entre as malhas podem ser obtidos aplicando o procedimento de sintonia proposto ao seguinte problema escalar:

$$\begin{aligned} K^*(s) &= \arg\min_{K(s)} \left(\max_{\alpha\in\Omega} \|E(s)(s,\alpha,K)\|_\infty \right), \\ \text{sujeito a:} \quad & K(s) \in \mathcal{F} \end{aligned} \tag{4.17}$$

sendo $\mathcal{F}$ o conjunto de controladores com parâmetros dentro das faixas aceitáveis que garantem a estabilidade robusta do sistema em malha fechada.

Para garantir as especificações da resposta transitória de rastreamento dos sinais de referência e o desacoplamento das malhas de controle, as funções de transferência, $T_{m,j}(s)$, $j = 1, 2$, do modelo de referência da Eq. (2.35) são definidas como sendo de segunda ordem mais atraso de tempo dado por:

$$T_m(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{\omega_{n,1}^2 e^{-1s}}{s^2 + 2\zeta_1\omega_{n,1}s + \omega_{n,1}^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\omega_{n,1}^2 e^{-3s}}{s^2 + 2\zeta_2\omega_{n,2}s + \omega_{n,2}^2} \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

considerando aproximações de Padé de 3ª ordem para os atrasos em tempo contínuo e os seguintes parâmetros para o modelo de referência: $\zeta_1 = \zeta_2 = 0{,}8$ e $\omega_{n,1} = 0{,}2$, $\omega_{n,2} = 0{,}3$. Aplicando o procedimento proposto foram obtidos os parâmetros $k_{p,1} = 0{,}445$, $T_{i,1} = 6{,}520$, $T_{d,1} = 3{,}327$, $k_{p,2} = -0{,}175$, $T_{i,2} = 4{,}813$ e $T_{d2} = 1{,}824$ para o controlador I-PD descentralizado. Este controlador resulta em $\max_{\alpha\in\Omega} \|E(s, \alpha, K^*)\|_\infty \leq 0{,}386$, $\max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cd}(s, \alpha, K^*)\|_\infty \leq 3{,}814$, $\max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cn}(s, \alpha, K^*)\|_2 \leq 6{,}127$. As Figs. 4.27 e 4.28 apresentam as respostas transitórias das saídas e entradas do sistema em malha fechada para os 4 vértices do domínio de incerteza, sendo $r_1(t) = \mathbf{1}(t - 100)$, $r_2(t) = \mathbf{1}(t - 200)$, $d(t) = \mathbf{1}(t - 25) - \mathbf{1}(t - 50)$ e $n_1(t) = n_2(t) = 0{,}001\mathrm{randn(t)}$. É obtido um controlador PID multi-malhas cuja resposta transitória do sistema em malha fechada se aproxima do comportamento do modelo de referência desejado mesmo na presença de incerteza.

Os resultados obtidos são comparados com o controlador PID apresentado em Vu e Lee (2010a) mais filtro sobre a derivada com parâmetro $\rho = 0{,}1$. Os resultados do controlador robusto descentralizado apresentam melhor rejeição a perturbação e melhor desacoplamento do que o controlador apresentado em Vu e Lee (2010a), com tempo de assentamento semelhante para o rastreamento da resposta de referência e um menor esforço de controle. Os sinais de controle do controlador PID apresentados em Vu e Lee (2010a) não são apresentados na Fig. 4.28 devido ao seu limite amplo de variação: $u_1(t) \in [-0{,}1407; 7{,}2669]$ e $u_2(t) \in [-1{,}1572; 0{,}3146]$.

Para melhor atender os objetivos de controle, o problema multiobjetivo (2.38) pode ser resolvido a partir do seguinte problema escalar multiobjetivo:

$$\begin{aligned} K^*(s) = \arg\min_{K(s)} \Big(\ \lambda_1 \max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cd}(s, \alpha, K)\|_\infty + \lambda_2 \max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cn}(s, \alpha, K)\|_2 \ \Big), \\ \text{sujeito a:} \quad \max_{\alpha\in\Omega} \|E(s)(s, \alpha, K)\|_\infty \leq \epsilon_3 \\ K(s) \in \mathcal{F} \end{aligned} \tag{4.19}$$

sendo $\mathcal{F}$ o conjunto de controladores com parâmetros dentro das faixas aceitáveis que garantem a estabilidade robusta do sistema em malha fechada.

Definindo $\lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}5$ e $\epsilon_3 = 0{,}75$ na Eq. (4.19) e considerando as variáveis de otimização iniciais, χ_0, como sendo os parâmetros do controlador anterior (erro de aproximação mínimo) e uma pequena elipse inicial, $Q_0 = I_6$, ao aplicar o procedimento de sintonia proposto são obtidos os seguintes parâmetros para o controlador

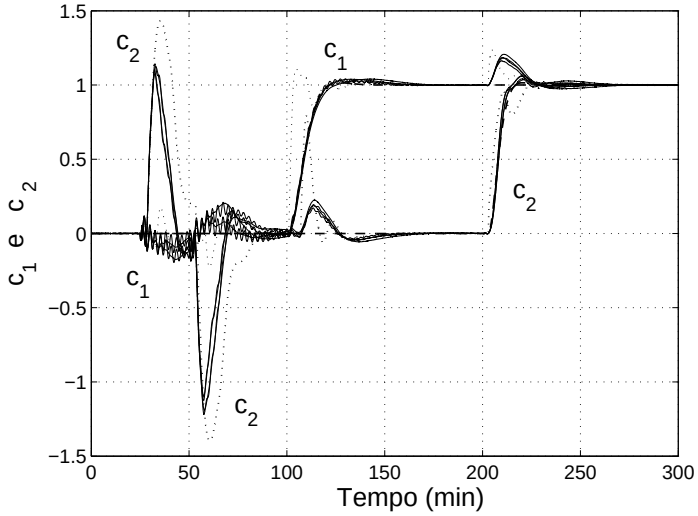


Fig. 4.27: Respostas transitórias das composições dos produtos de topo e de fundo para os 4 vértices do domínio de incerteza considerando mudanças em degrau nos sinais de referência para a sintonia com uma resposta de rastreamento mais rápida, linhas solidas, e (Vu e Lee, 2010a), linha pontilhada.

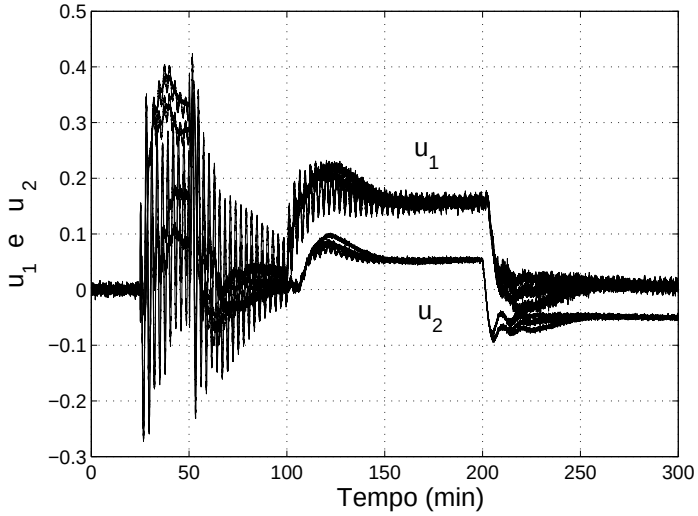


Fig. 4.28: Respostas transitórias da vazão mássica de refluxo e a vazão mássica de vapor para os 4 vértices do domínio de incerteza considerando mudanças em degrau nos sinais de referência para a sintonia com uma resposta de rastreamento mais rápida.

I-PD descentralizado: $k_{p,1} = 0{,}141$, $T_{i,1} = 6{,}484$, $T_{d,1} = 2{,}598$, $k_{p,2} = -0{,}184$, $T_{i,2} = 7{,}080$, e $T_{d,2} = 1{,}427$. Esses parâmetros do controlador garantem $\max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cn}(s,\alpha,K^*)\|_2 \leq 1{,}416$, $\max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cd}(s,\alpha,K^*)\|_\infty \leq 1{,}765$ e $\max_{\alpha\in\Omega} \|E(s,\alpha,K^*)\|_\infty \leq 0{,}742$, apresentando melhor atenuação de ruído e rejeição perturbação do que o controlador anterior. As Figs. 4.29 e 4.30 apresentam as respostas transitórias das saídas e entradas do sistema em malha fechada para os 4 vértices do domínio de incerteza considerando as mesmas entradas

do caso anterior. Pode-se verificar, comparando as Figs. 4.28 e 4.30, que este controlador PID multi-malhas apresenta melhor esforço de controle e atenuação de ruído com uma semelhante rejeição de perturbação e razoável rastreamento da resposta de referência e desacoplamento.

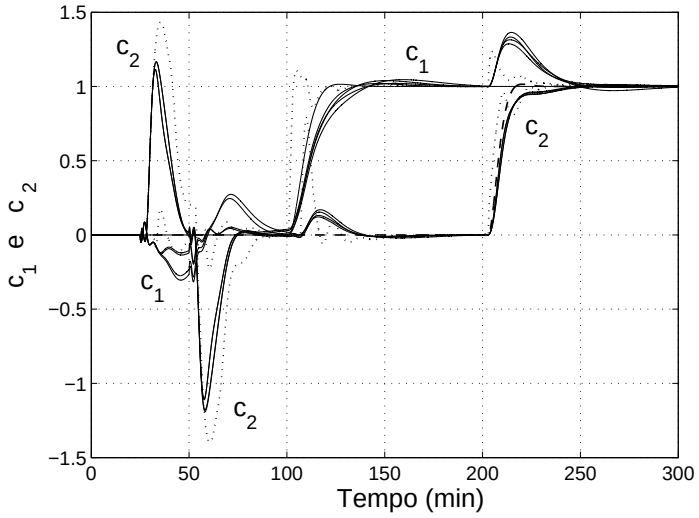


Fig. 4.29: Respostas transitórias das composições dos produtos de topo e de fundo para os 4 vértices do domínio de incerteza considerando mudanças em degrau nos sinais de referência para a sintonia proposta com $\lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}5$ e $\epsilon_3 = 0{,}75$, linhas solidas e (Vu e Lee, 2010a), linha pontilhada.

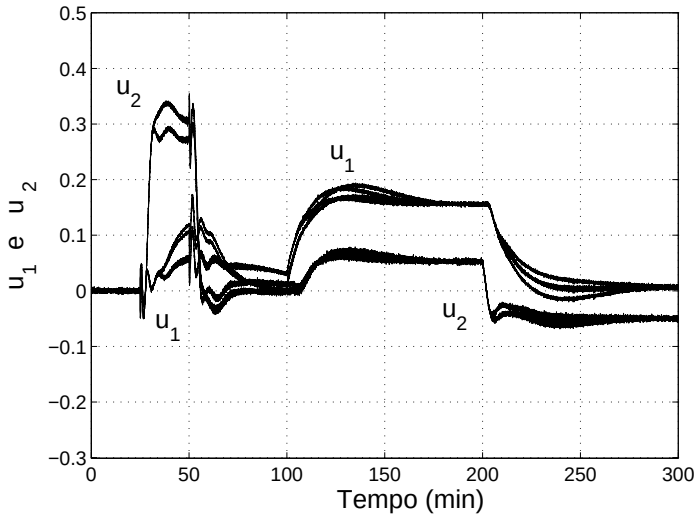


Fig. 4.30: Respostas transitórias da vazão mássica de refluxo e a vazão mássica de vapor para os 4 vértices do domínio de incerteza considerando mudanças em degrau nos sinais de referência para a sintonia proposta com $\lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}5$ e $\epsilon_3 = 0{,}75$.

Outra vantagem do procedimento proposto é a possibilidade de se atingir diferentes compromissos, não

só mudando os pesos das funções objetivo e restrições, mas também escolhendo modelos de referência diferentes. Considere um modelo de referência mais lento com os parâmetros: $\zeta_1 = 0{,}075$, $\zeta_2 = 0{,}15$ e $\omega_{n,1} = \omega_{n,2} = 2$. Aplicando o procedimento proposto para minimizar apenas o erro de aproximação, foram obtidos os seguintes parâmetros do controlador: $k_{p,1} = 0{,}951$, $T_{i,1} = 44{,}252$, $T_{d,1} = 1{,}217$, $k_{p,2} = -0{,}176$, $T_{i,2} = 19{,}058$, $T_{d,2} = 1{,}270$. Esses parâmetros do controlador garantem $\max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cn}(s,\alpha,K^*)\|_2 \leq 6,718$, $\max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cd}(s,\alpha,K^*)\|_\infty \leq 2{,}940$ e $\max_{\alpha\in\Omega} \|E(s,\alpha,K^*)\|_\infty \leq 0{,}128$. As respostas transitórias para este controlador são apresentadas nas Figs. 4.31 e 4.32. É possível observar que é atingido um melhor desacoplamento ao escolher uma resposta transitória mais lenta (a escala de tempo é três vezes maior do que aquela usada nos resultados anteriores).

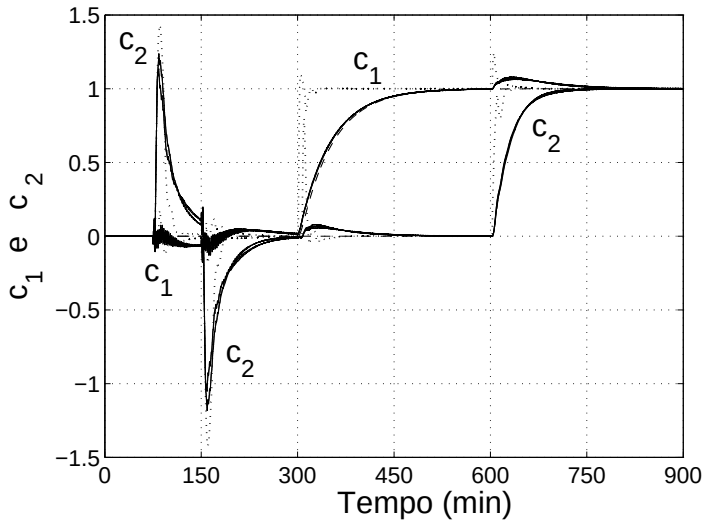


Fig. 4.31: Respostas transitórias das composições dos produtos de topo e de fundo para os 4 vértices do domínio de incerteza considerando mudanças em degrau nos sinais de referência para o modelo de referência mais lento, linhas solidas e (Vu e Lee, 2010a), linha pontilhada.

A escolha do modelo de referência final é baseada numa estratégia de tentativa e erro, mas orientada pelas especificações de controle e resultados (respostas transitórias e em frequência) com prévios modelos de referência.

Devido a característica não convexa do problema, a escolha de parâmetros de otimização inicial χ_0 e a elipse inicial, Q_0, podem afetar os resultados. É também necessário empregar uma estratégia de tentativa e erro para conseguir os melhores resultados.

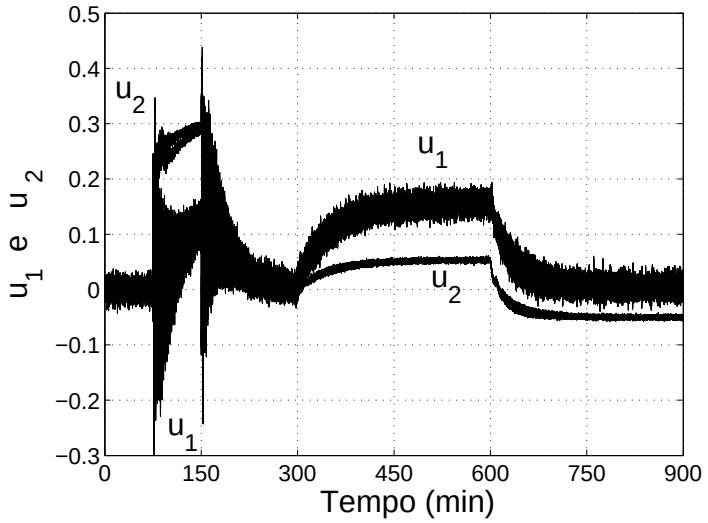


Fig. 4.32: Respostas transitórias da vazão mássica de refluxo e a vazão mássica de vapor para os 4 vértices do domínio de incerteza considerando mudanças em degrau nos sinais de referência para o modelo de referência mais lento.

Capítulo 5

Conclusões Finais

5.1 Sumário das Contribuições da Dissertação de Mestrado

Foi proposto neste trabalho um novo procedimento de sintonia de controladores robustos PI/PID multi-malhas visando desacoplar os canais de controle em sistemas multivariáveis assegurando o desempenho da resposta de rastreamento, a rejeição de distúrbios e a atenuação de ruídos de medição.

O problema de controle foi formulado como um problema de otimização não convexa multiobjetivo diretamente no espaço de parâmetros do controlador. Tanto o sistema quanto o controlador são representados no espaço de estados e emprega-se modelos politópicos para representar o sistema incerto. Os objetivos de controle são atingidos combinando a aproximação do modelo de referência e a minimização das normas das matrizes de transferência que relacionam os distúrbios e ruídos de medição com as saídas controladas, sendo possível alcançar um compromisso razoável entre os objetivos conflitantes de controle. Neste caso, a solução do problema de otimização multiobjetivo requer a minimização do pior caso em um conjunto infinito de pontos do domínio de incerteza.

O procedimento proposto de sintonia robusta de controladores PI/PID multi-malhas é uma extensão do trabalho em Gonçalves (2006) com objetivo de tratar sistemas multivariáveis aliado a estratégia de aproximação de modelo $\mathcal{H}_\infty$. O uso de aproximação de modelo de referência como um dos objetivos do problema de controle mostrou garantir um bom desacoplamento das múltiplas malhas de controle e atender às especificações da resposta de rastreamento dos sinais de referência em substituição ao método de alocação de pólos. O procedimento empregado permite garantir a estabilidade robusta do sistema e minimizar o valor máximo de funções não convexas para todos os infinitos pontos do domínio de incerteza politópico considerando um número finito reduzido de pontos pertencentes ao politopo.

O procedimento de sintonia de controladores robustos multi-malhas descentralizados é complexo de ser implementado e apresenta um custo computacional elevado comparado com outros métodos de sintonia disponíveis na literatura. O custo computacional dependente do número de variáveis de otimização, da dimensão do sistema, da quantidade de parâmetros incertos (ou da quantidade de vértices do modelo politópico) e da

necessidade ou não de mais de uma iteração do procedimento de sintonia. Quanto ao número de iterações, experimentos tem mostrado que grande parte dos problemas necessita apenas de uma iteração, o que indica que o pior caso se encontra nos vértices do politopo.

Por se tratar de um problema não convexo e multimodal, o procedimento de sintonia proposto não garante que o valor ótimo obtido corresponde ao ótimo global. O sucesso do algoritmo elipsoidal aplicado na etapa de síntese está relacionado principalmente aos parâmetros iniciais de otimização, χ_0, e com o raio inicial da η-esfera, Q_0. Não existe nenhum método que forneça χ_0 e Q_0. Os valores de χ_0 e Q_0 devem ser obtidos a partir de tentativa e erro, ou seja, a cada execução do algoritmo de otimização deve-se variar os valores de χ_0 e Q_0 até se chegar aos melhores resultados. Apesar de parecer uma tarefa árdua, experimentos tem mostrado que considerar valores aleatórios para χ_0 e um valor "razoável"para Q_0 é possível se chegar a bons resultados com pouco esforço. Ao considerar valores aleatórios para os parâmetros inicias de otimização, χ_0, aliado a um pequeno valor para o raio inicial da η-esfera, Q_0, pode se ter uma região de busca que não engloba o valor ótimo. Por outro lado, aumentando substancialmente o raio da η-esfera, significa o aumento do custo computacional e a possibilidade do algoritmo não convergir para uma solução factível. Uma prática comum consiste em usar um procedimento de sintonia multi-malhas mais simples como forma de obter os parâmetros iniciais de otimização, permitindo assim o uso de um espaço de busca menor aumentando as chances de se chegar ao valor de ótimo com um menor tempo computacional.

O desacoplamento do sistema é atingido indiretamente minimizando/restringindo o erro de aproximação do modelo de referência aliado a diferentes variações do modelo de referência. O modelo de referência deve ser escolhido de tal forma que as especificações de desempenho da resposta de rastreamento sejam atendidas. Se o modelo de referência adotado resultar em um erro de aproximação elevado e, consequentemente, em um desacoplamento não aceitável entre as malhas de controle, então um novo modelo de referência deve ser escolhido de forma a atender um bom compromisso entre o desacoplamento e as características da resposta de rastreamento.

Uma vez implementada e diante dos modernos recursos computacionais, está metodologia apresenta várias vantagens. O procedimento proposto possui a capacidade de se obter soluções menos conservadoras para o problema de sintonia de controladores robustos PI/PID multi-malhas descentralizados. A formulação do problema permite definir múltiplos objetivos de controle onde os diferentes compromissos são atingidos, não só mudando os pesos das funções objetivo e restrições, mas também escolhendo modelos de referência diferentes. O problema de otimização multiobjetivo aplicado à sintonia de controladores robustos PI/PID multi-malhas é tratado considerando modelo com incertezas politópicas onde o sistema e o controlador são representados em espaço de estados, diferentemente da maioria dos trabalhos apresentados na literatura. Tem se mostrado eficiente e abrangente ao tratar sistemas multivariáveis de difícil controle a partir de um estrutura de controle PI/PID multi-malhas decentralizado, como por exemplo, sistemas com vários atrasos de tempo e sistema de fase não-mínima.

5.2 Perspectivas Futuras

O procedimento proposto de sintonia de controladores robustos PI/PID poderá ser estendido em pesquisas futuras considerando estruturas adicionais de controle, como desacopladores e pré-filtros para auxiliar o desacoplamento das malhas de controle no caso de sistemas multivariáveis com maior interação entre malhas. Os controladores PI/PID podem ser sintonizados de forma independente para garantir a rejeição de distúrbio, a atenuação de ruídos e a robustez do sistema. Por outro lado, as estruturas adicionais de controle podem ser projetadas para garantir o desempenho da resposta transitória de rastreamento e o desacoplamento do sistema. Normalmente o projeto de desacopladores é realizado de forma independente do projeto dos controladores PID, sendo também interessante investigar o projeto simultâneo dos controladores PID e estruturas adicionais de desacoplamento.

5.3 Trabalhos com Co-Autoria Aceitos em Eventos Científicos

1. Gonçalves, B. M. ; Gonçalves, E. N. ; Palhares, R. M. ; Takahashi, R. H. C. (2012). Síntese de Controladores Robustos PI Multi-malhas Descentralizado. In:XIX Congresso Brasileiro de Automática, 2012, Campina Grande,PB. Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática: 4618-4623.

2. Gonçalves, B. M. ; Gonçalves, E. N. ; Palhares, R. M. ; Takahashi, R. H. C. (2012).Robust decoupling PI controllers for multi-loop control, In: IEEE 51st Annual Conference on Decision and Control - CDC 2012,2012 , Maui, Hawaii, USA. IEEE 51st Annual Conference on Decision and Control, 2012.

Referências Bibliográficas

Araki, M. e Taguchi, H. (2003). Two-degree-of-freedom PID controllers, *International Journal of Control Automation and Systems* **1**: 401–411.

Araujo, M. R., Gonçalves, E. N., Leite, V. J. S. e Palhares, R. M. (2010). Síntese de controladores robustos por realimentação dinâmica de saída considerando modelo de referência baseada em formulações LMI, *Anais do XVIII Congresso Brasileiro de Automática*, SBA, Bonito, MS, pp. 4056–4061.

Åström, K. e Hägglund, T. (1984). Automatic tuning of simple regulators with specifications on phase and amplitude margins, *Automatica* **20**(5): 645–651.

Åström, K. e Hägglund, T. (1995). *PID controllers: theory, design and tuning*, ISA: The Instrumentation, Systems, and Automation Society, USA.

Åström, K. e Hägglund, T. (2001). The future of PID control, *Control Engineering Practice* **9**(11): 1163–1175.

Åström, K. e Hägglund, T. (2004). Revisiting the Ziegler-Nichols step response method for PID control, *Journal of Process Control* **14**: 635–650.

Åström, K., Johansson, K. e Wang, Q.-G. (2002). Design of decoupled PI controllers for two-by-two systems, *IEE Proceedings on Control Theory and Applications* **149**(1): 74–81.

Bachur, W. E. G., Gonçalves, E. N., de S. Leite, V. J. e Palhares, R. M. (2011). Multiobjective robust discrete dynamic output-feeback control synthesis based on closed-loop reference model, *Proceedings of the 2011 IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design part of 2011 IEEE Multi-Conference on Systems and Control*, IEEE, Denver, CO, USA, pp. 632–637.

Bachur, W. E. G., Gonçalves, E. N., Palhares, R. M. e Takahashi, R. H. C. (2010). Multiobjective robust dynamic output-feeback control synthesis based on reference model, *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE, Atlanta, GA, USA, pp. 2330–2335.

Bao, J., Forbes, J. F. e McLellan, P. J. (1999). Robust multiloop PID controller design: A successive semidefinite programming approach, *Industrial & Engineering Chemistry Research* **38**(9): 3407–3419.

Bey, J. e Aachen, R. (1998). Simplicial grid refinement: On freudenthal's algorithm and the optimal number of congruence classes, *Numer. Math* **85**(1): 1–29.

Birk, W. e Medvedev, A. (2003). A note on gramian-based interaction measures, *Proceedings of the European Control Conference*, University of Cambridge, UK.

Boyd, S., Balakrishnan, K. e Kabamba, P. (1989). A bisection method for computing the $\mathcal{H}_\infty$ norm of a transfer matrix and related problems, *Mathematics of Control, Signals, and Systems* **2**(3): 207–219.

Bristol, E. H. (1966). On a new measure of inter-action for multivariable process control, *IEEE Transactions on Automatic Control* **11**(1): 133–134.

Campestrini, L., Filho, L. C. S. e Bazanella, A. S. (2009). Tuning of multivariable decentralized controllers through the ultimate-point method, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **17**(6): 1270–1281.

Chen, D. e Seborg, D. (2001). Multiloop PI/PID controller design based on Gershgorin bands, *American Control Conference, 2001. Proceedings of the 2001*, Vol. 5, pp. 4122 –4127 vol.5.

Chien, I.-L., Huang, H.-P. e Yang, J.-C. (1999). A simple multiloop tuning method for PID controllers with no proportional kick, *Industrial & Engineering Chemistry Research* **38**(4): 1456–1468.

Chilali, M. e Gahinet, P. (1996). $\mathcal{H}_\infty$ design with pole placement constraints: An LMI approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* **41**(3): 358–367.

Chiu, M.-S. e Arkun, Y. (1992). A methodology for sequential design of robust decentralized control systems, *Automatica* **28**(5): 997 – 1001.

Cominos, P. e Munro, N. (2002). PID controllers: recent tuning methods and design to specification, *IEE Proceedings - Control Theory & Applications* **149**(1): 46–53.

de Arruda, L. V. R., Swiech, M. C. S., Neves-Jr, F. e Delgado, M. R. (2008). Um método evolucionário para sintonia de controladores PI/PID em processos multivariáveis, *Revista Controle & Automação* **19**(1): 1–17.

de Oliveira, P. J., Oliveira, R. C. L. F., Leite, V. J. S., Montagner, V. F. e Peres, P. L. D. (2004a). $\mathcal{H}_2$ guaranteed cost computation by means of parameter dependent Lyapunov functions, *Intern. J. Syst. Sci.* **35**(5): 305–315.

de Oliveira, P., Oliveira, R., Leite, V., Montagner, V. e Peres, P. (2004b). $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed cost computation by means of parameter-dependent Lyapunov functions, *Automatica* **40**(6): 1053 – 1061.

Dittmar, R., Gill, S., Singh, H. e Darby, M. (2011). Robust optimization-based multi-loop PID controller tuning: A new tool and its industrial application, *Control Engineering Practice* . Article in Press.

Doyle, J. C. (1978). Guaranteed margins for LQG regulators, *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC-23**(4): 756–757.

Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, P. P. e Francis, B. A. (1989). State-space solutions to standard $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control problems, *IEEE Transactions in Automatic Control* **34**(8): 831–847.

Farag, A. e Werner, H. (2006). Structure selection and tuning of multi-variable PID controllers for an industrial benchmark problem, *IEE Proceedings - Control Theory and Applications* **153**(3): 262–267.

Gonçalves, E. N. (2006). *Análise e Síntese de Controladores e Filtros Robustos para Sistemas com Domínios Politópicos de Incerteza*, PhD thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brazil.

Gonçalves, E. N., Palhares, R. M., Takahashi, R. H. C. e Chasin, A. N. V. (2009). Robust model reduction of uncertain systems maintaining uncertainty structure, *International Journal of Control* **82**(11): 2158–2168.

Gonçalves, E. N., Bachur, W. E. G., Palhares, R. M. e Takahashi, R. H. C. (2011). Robust $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$/reference model dynamic output-feedback control synthesis, *International Journal of Control* **84**(12): 2067–2080.

Gonçalves, E. N., Palhares, R. M. e Takahashi, R. H. C. (2005a). Improved optimisation approach to robust $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control problem for linear systems, *IEE Proceedings - Control Theory & Applications* **152**(2): 171–176.

Gonçalves, E. N., Palhares, R. M. e Takahashi, R. H. C. (2005b). Robust $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ dynamic output feedback control synthesis for systems with polytopic uncertainty, *Preprints of the 16th IFAC World Congress*, IFAC, Prague, Czech Republic.

Gonçalves, E. N., Palhares, R. M. e Takahashi, R. H. C. (2006). $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ filter design for systems with polytope-bounded uncertainty, *IEEE Transactions on Signal Processing* **54**(9): 3620–3626.

Gonçalves, E. N., Palhares, R. M. e Takahashi, R. H. C. (2008). A novel approach for $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ robust PID synthesis for uncertain systems, *Journal of Process Control* **18**(1): 19–26.

Gonçalves, E. N., Palhares, R. M., Takahashi, R. H. C. e Mesquita, R. C. (2006). Algorithm 860: SimpleS - an extension of Freudenthal's simplex subdivision, *ACM Transactions on Mathematical Software* **32**(4): 609–621.

Gonçalves, E. N., Palhares, R. M., Takahashi, R. H. C. e Mesquita, R. C. (2007). $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_2$ ε-guaranteed cost computation of uncertain linear systems, *IET Control Theory and Applications* **1**(1): 201–209.

Goodwin, G., Graebe, S. e Salgado, M. (2001). *Control system design*, Prentice Hall New Jersey.

Grosdidier, P. e Morari, M. (1986). Interaction measures for systems under decentralized control, *Automatica* **22**(3): 309 – 319.

Grosdidier, P. e Morari, M. (1987). The μ-interaction measure, *Industrial & Engineering Chemistry Research* **26**(6): 1193–1202.

Haggblom, K. (1997). Control structure analysis by partial relative gains, *Decision and Control, 1997., Proceedings of the 36th IEEE Conference on*, Vol. 3, IEEE, pp. 2623–2624.

Halevi, Y., Palmor, Z. J. e Efrati, T. (1997). Automatic tuning of decentralized PID controllers for MIMO processes, *Journal of Process Control* **7**(2): 119–128.

Hang, C. C., Åström, K. J. e Ho, W. K. (1991). Refinements of the Ziegler-Nichols tuning formula, *IEE Proceedings D Control Theory & Applications* **138**(2): 111–118.

He, M.-J., Cai, W.-J., Ni, W. e Xie, L.-H. (2009). RNGA based control system configuration for multivariable processes, *Journal of Process Control* **19**(6): 1036–1042.

Ho, W., Lee, T. e Gan, O. (1997). Tuning of multiloop proportional-integral-derivative controllers based on gain and phase margin specifications, *Industrial & engineering chemistry research* **36**(6): 2231–2238.

Hovd, M. e Skogestad, S. (1992). Simple frequency-dependent tools for control system analysis, structure selection and design, *Automatica* **28**(5): 989 – 996.

Hovd, M. e Skogestad, S. (1993). Improved independent design of robust decentralized controllers, *Journal of Process Control* **3**(1): 43–51.

Hovd, M. e Skogestad, S. (1994). Sequential design of decentralized controllers, *Automatica* **30**(10): 1601–1607.

Huang, H.-P., Jeng, J.-C., Chiang, C.-H. e Pan, W. (2003). A direct method for multi-loop PI/PID controller design, *Journal of Process Control* **13**(8): 769 – 786.

Ji, B., Lee, E., Han, Y. e Lee, J. (2007). Computation of multiloop controllers having desired closed-loop responses, *Korean Journal of Chemical Engineering* **24**(4): 562–566.

Johansson, K. H. (2000). The quadruple-tank process: A multivariable laboratory process with an adjustable zero, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **8**(3): 456–465.

Johansson, K. H. (2002). Interaction bounds in multivariable control systems, *Automatica* **38**(6): 1045–1051.

Kinnaert, M. (1995). Interaction measures and pairing of controlled and manipulated variables for multiple-input multiple-output systems: A survey, *Journal A* **36**(4): 15–23.

Kumar, V. V., Rao, V. S. R. e Chidambaram, M. (2012). Centralized PI controllers for interacting multivariable processes by synthesis method, *ISA Transactions* . Article in Press.

Lee, J., Cho, W. e Edgar, T. (1998). Multiloop PI controller tuning for interacting multivariable processes, *Computers & chemical engineering* **22**(11): 1711–1723.

Lee, J. e Edgar, T. F. (2005). Continuation method for the modified ziegler-nichols tuning of multiloop control systems, *Industrial & Engineering Chemistry Research* **44**(19): 7428–7434.

Leea, J. e Edgarb, T. F. (2006). Multiloop PI/PID control system improvement via adjusting the dominant pole or the peak amplitude ratio, *Chemical Engineering Science* **61**(5): 1658–1666.

Loh, A., Hang, C., Quek, C. e Vasnani, V. (1993). Autotuning of multiloop proportional-integral controllers using relay feedback, *Industrial & engineering chemistry research* **32**(6): 1102–1107.

Loh, A. e Vasnani, V. (1994). Describing function matrix for multivariable systems and its use in multiloop PI design, *Journal of Process Control* **4**(3): 115–120.

Luyben, W. L. (1986). Simple method for tuning SISO controllers in multivariable systems, *Industrial & Engineering Chemistry Process Design and Development* **25**(3): 654–660.

Mayne, D. Q. (1973). The design of linear multivariable systems, *Automatica* **9**(2): 201 – 207.

Monica, T. J., Yu, C.-C., e Luyben, W. L. (1988). Improved multiloop single-input/single-output (SISO) controllers for multivariable processes, *Industrial & Engineering Chemistry Research* **17**(6): 969–973.

Niederlinski, A. (1971). A heuristic approach to the design of linear multivariable interacting control systems, *Automatica* **7**(6): 691–701.

Rodrigues, L. A., Gonçalves, E. N., Leite, V. J. S. e Palhares, R. M. (2009). Robust reference model control with LMI formulation, *International Conference on Identification, Control and Applications*, IASTED, Honolulu, Hawaii, USA.

Rosenbrock, H. (1970). *State-space and multivariable theory*, Studies in Dynamical Systems Series, Wiley Interscience Division.

Salgado, M. E. e Conley, A. (2004). MIMO interaction measure and controller structure selection, *International Journal of Control* **77**(4): 367–383.

Scherer, C., Gahinet, P. e Chilali, M. (1997). Multiobjective output-feedback control via LMI optimization, *IEEE Transactions on Automatic Control* **42**(7): 896–911.

Schmidt, H. e Jacobsen, E. W. (2003). Selecting control configurations for performance with independent design, *Computers & Chemical Engineering* **27**(1): 101 – 109.

Seborg, D., Mellichamp, D., Edgar, T. e Francis J. Doyle, I. (2010). *Process Dynamics and Control*, John Wiley & Sons.

Shen, S. e Yu, C. (1994). Use of relay-feedback test for automatic tuning of multivariable systems, *AIChE Journal* **40**(4): 627–646.

Shen, Y., Cai, W.-J. e Li, S. (2010). Multivariable process control: Decentralized, decoupling, or sparse?, *Industrial & Engineering Chemistry Research* **49**(2): 761–771.

Skogestad, S., Lundström, P. e Jacobsen, E. W. (1990). Selecting the best distillation control configuration, *AIChE Journal* **36**(5): 753–764.

Skogestad, S. e Morari, M. (1989). Robust performance of decentralized control systems by independent designs, *Automatica* **25**(1): 119 – 125.

Skogestad, S. e Postlethwaite, I. (1996). *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*, John Wiley & Sons, West Sussex, England.

Sumana, C. e Venkateswarlu, C. (2010). Genetically tuned decentralized proportional-integral controllers for composition control of reactive distillation, *Industrial and Engineering Chemistry Research* **49**(3): 1297–1311.

Takahashi, R. H. C., Saldanha, R. R., Dias-Filho, W. e Ramírez, J. A. (2003). A new constrained ellipsoidal algorithm for nonlinear optimization with equality constraints, *IEEE Transactions on Magnetics* **39**(3): 1289–1292.

Vendenbergue, L. e Boyd, S. (1996). Semidefinite programming, *SIAM Review* **38**(1): 49–95.

Vlachos, C., Williams, D. e Gomm, J. B. (1999). Genetic approach to decentralised PI controller tuning for multivariable processes, *IEE Proceedings - Control Theory and Applications* **146**(1): 58–64.

Vu, T. e Lee, M. (2010a). Multi-loop PI controller design based on the direct synthesis for interacting multi-time delay processe, *ISA Transactions* **49**(1): 79–86.

Vu, T. N. L. e Lee, M. (2010b). Independent design of multi-loop PI/PID controllers for interacting multivariable processes, *Journal of Process Control* **20**(8): 922–933.

Wang, Q.-G., Lee, T.-H. e Zhang, Y. (1998). Multiloop version of the modified ziegler-nichols method for two input two output processes, *Industrial and Engineering Chemistry Research* **37**: 4725–4733.

Witcher, M. F. e J.McAvoy, T. (1977). Interacting control systems: steady state and dynamic measurement of interaction, *ISA Transactions* **16**(3): 35–41.

Wittenmark, B. e Salgado, M. E. (2002). Hankel-norm based interaction measure for input-output pairing, *Proceedings of the 2002 IFAC World Congress*, IFAC, Barcelona, Spain.

Wood, R. K. e Berry, M. W. (1973). Terminal composition control of a binary distillation column, *Chemical Engineering Science* **28**(9): 1707–1212.

Xiong, Q., Cai, W. e He, M. (2007). Equivalent transfer function method for PI/PID controller design of mimo processes, *Journal of Process Control* **17**(8): 665 – 673.

Xiong, Q., Cai, W.-J. e He, M.-J. (2005). A practical loop pairing criterion for multivariable processes, *Journal of Process Control* **15**(7): 741 – 747.

Zames, G. (1981). Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses, *IEEE Transaction on Automatic Control* **AC-26**(2): 301–320.

Zhanga, Y., Wangb, Q.-G. e Åström, K. (2002). Dominant pole placement for multi-loop control systems, *Automatica* **38**(7): 1213–1220.

Zhou, K. e Doyle, J. C. (1998). *Essentials of Robust Control*, Prentice-Hall. Inc., New Jersey.