

USO DE TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO E ANÁLISE TOPOLÓGICA PARA OBTENÇÃO DE MODELOS AFIM POR PARTES

Fabrício Pelloso Piurcosky

Orientador: Prof. Gleison Fransoares Vasconcelos Amaral

Dissertação submetida ao PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA – PPGEL, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.

Agosto de 2013 São João del-Rei – MG – BRASIL Fabrício Pelloso Piurcosky

USO DE TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO E ANÁLISE TOPOLÓGICA PARA OBTENÇÃO DE MODELOS AFIM POR PARTES

Banca Examinadora:

Orientador: Prof. Dr. Gleison Fransoares Vasconcelos Amaral

Universidade Federal de São João del-Rei

Prof. Dr. Leonidas Chaves de Resende Universidade Federal de São João del-Rei

Prof.^a Dr.^a Mara Cristina da Silveira Coelho Universidade Federal de Itajubá

São João del-Rei, 30 de agosto de 2013

AGRADECIMENTOS

- À Deus pela vida e por aceitar minha amizade.
- À Adriana e à Anne Marry amor e paixão para sempre.
- Ao Professor e Amigo Gleison Fransoares Vasconcelos Amaral, não somente por apresentar-me o mundo dos Sistemas Caóticos, mas pelo exemplo de pessoa que é.
- Ao Centro Universitário do Sul de Minas pelo suporte.
- À todo o PPGEL, pelos inúmeros auxílios no decorrer do programa.

RESUMO

Obter modelos afins por partes é importante para a redução da complexidade de sistemas não lineares, pois permite trabalhar com subproblemas locais interpretáveis. Assim, o objetivo é investigar uma forma de determinar a superfície de chaveamento dessas estruturas. Para isso, são utilizados subsistemas afins conseguidos pela linearização em torno dos pontos fixos e uma metodologia baseada em técnicas de otimização e de análise topológica testadas em sistemas *Rössler-like* escolhidos.

ABSTRACT

Obtain picewise affine models is important for reducing the complexity of nonlinear systems, it allows to work with local interpretable subproblems. The objective is to investigate a way to get the switching surface of these structures. It uses related subsystems obtained by linearization around the fixed points and presents a methodology based on optimization techniques and topological analysis which has been tested with in a Rössler-like system chosen.

ÍNDICE

ÍNDICEvi
LISTA DE FIGURASviii
LISTA DE TABELAS ix
LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS x
1 INTRODUÇÃO 1
1.1 Considerações Gerais1
1.2 OBJETIVOS
1.3 Estrutura da Dissertação 2
2 SISTEMAS DINÂMICOS 4
2.1 SISTEMAS LINEARES
2.2 SISTEMAS NÃO LINEARES
2.3 Análise topológica 10
2.4 LINEARIZAÇÃO 13
3 IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS 16
3.1 MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO 18
3.1.1 Algoritmos genéticos 19
3.1.2 MÉTODOS QUASI-NEWTON
4 MODELOS AFIM POR PARTES 24
4.1 Considerações Gerais 24

4.2 Metodologia Proposta	. 26
5 RESULTADOS	. 28
5.1 ESTUDO DO SISTEMA DE RÖSSLER	. 28
5.2 MODELO AFIM POR PARTES DO SISTEMA DE RÖSSLER	. 32
5.3 ESTUDO DO SISTEMA LINZ-SPROTT	. 39
6 CONCLUSÃO	. 55
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	. 57

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Convenção para cruzamento de órbitas periódicas instáveis. Erro!

Indicador não definido.11

Figura 5.3: Mapa do Primeiro Retorno Sistema de Rössler (a;b;c)=(0.398;2;4)... 29 Figura 5.5: Otimização - intervalo de busca em [-3.5 -2.5;-1.45 -0.45;-6.5 -5.5]. 34 Figura 5.6: Atratores Caóticos obtidos para as superfícies s1,s2,s3..... Erro! Indicador não definido.35 Figura 5.8: Atrator Sistema Linz-Sprott original e com Transformação Linear 37 Figura 5.10: Mapa do Primeiro Retorno Linz-Sprott e Transformação Linear 39 Figura 5.12:Otimização - intervalo de busca 42 Figura 5.15: Otimização - intervalo de busca em [-10 10;-10 10;-10 10;-10 10]... 45

Figura 5.18: Otimização - intervalo de busca	47
Figura 5.19: Órbita de período 1 encontrada com uma das superfícies	47
Figura 5.20: Atrator gerado com a superfície s11	48
Figura 5.21: Mapa do Primeiro Retorno para a superfície s11	48

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1: Autovalores do Sistema de Rössler com linearização	29
Tabela 5.2:Número de conexões entre os pares de órbitas periódicas	31
Tabela 5.3: Número de Conexões entre os pares de órbitas para s1	38
Tabela 5.4: Número de conexões entre os pares de órbitas periódicas	43
Tabela 5.5: Número de conexões entre os pares de órbitas periódicas s11	53

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

LK	-	Linking Number				
ARMAX	-	Auto Regressive Moving Average with eXogenous inputs				
NARMAX -		Non-linear Auto Regressive Moving Average with eXogenous				
	-	inputs				
DFP	-	Davidon-Fletcher-Powel				
BFGS	-	Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno				

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Desde o final do século XIX, o trabalho do matemático francês Jules Henri Poincaré (1854-1912), caracterizou o problema dos três corpos. Neste mesmo trabalho foi mostrado que podem ocorrer órbitas complexas, que não se repetem com o passar do tempo (aperiódicas) e que os sistemas apresentam sensibilidade à variação em suas condições iniciais, portanto imprevisíveis (Monteiro, 2006). Os trabalhos de Poincaré foram a base para as futuras pesquisas com sistemas dinâmicos e consequentemente dos sistemas caóticos, que são sistemas não lineares e são observados na natureza (meteorologia, coração, cérebro de organismos), e também em sistemas de criptografia, microprocessadores, redes neurais, otimização do tempo de transporte e controle de posicionamento.

O estudo de sistemas lineares também é importante, pois fenômenos físicos podem ser aproximadamente descritos por equações lineares e as ferramentas para análise e síntese de comportamentos lineares são bem consolidadas. Os trabalhos existentes também ajudam no estudo da teoria de sistemas não lineares, pois permitem obter uma familiaridade com conceitos associados a sistemas dinâmicos e é útil no estudo do comportamento local de sistemas não lineares (Von Zuben, 2010).

Entretanto, a dinâmica de um sistema não linear contém fenômenos dinâmicos significativos que não podem ser representados por modelos lineares. Além disso, os sistemas de equações algébricas não lineares, equações diferenciais não lineares e equações a diferenças não lineares, raramente podem ser expressos algebricamente como solução analítica. Assim, é admitida a possibilidade de realizar a linearização do sistema não linear em torno de um ponto de operação.

É relevante a pesquisa sobre esses sistemas. Uma questão chave para identificação não linear é a escolha da estrutura do modelo de sistema (Roth, 2003).

Em Amaral (2006) foi desenvolvida uma metodologia baseada no conhecimento da estrutura do retrato de fases de sistemas lineares e em análise topológica. Foi investigada a escolha da superfície de chaveamento na construção da dinâmica para o sistema de Rössler.

Paolleti (2010) ressalta que é importante a continuidade de pesquisas para a construção de uma teoria completa para a obtenção de modelos afins por partes. Nesse respeito, a identificação de um sistema geral afim por partes é um desafio (Chengtao, 2007).

1.20BJETIVOS

Este trabalho apresenta um método que utiliza técnicas de otimização como algoritmos genéticos e métodos Quasi-Newton, bem como informações extraídas da Análise topológica para determinar a superfície de chaveamento de sistemas do tipo Rössler (*Rössler-like*).

Demonstrar a validação dos modelos encontrados por meio de análise topológica.

1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

O Capítulo 2 apresenta os conceitos sobre sistemas dinâmicos, evidenciando sua importância de estudo e sua classificação como linear e não linear. Além disso, demonstra como as razões para a continuidade dos estudos deste tipo de sistema e como a análise topológica é importante para caracterizar e obter informações, bem como o papel das técnicas de linearização para facilitar a análise.

No Capítulo 3 são tratados aspectos relacionados à Identificação de sistemas, apresentando a ideia da metodologia descrita adiante. Ainda, neste capítulo é realizada uma revisão sobre técnicas de otimização, sobretudo algoritmos genéticos e métodos Quasi-Newton.

O Capítulo 4 traz uma consideração geral sobre Modelos Afim por Partes, apresentando razões do emprego destes modelos. Apresenta a metodologia criada para obter estes modelos através da utilização de técnicas de otimização e de análise topológica.

Posteriormente, no Capítulo 5, são observados os resultados alcançados com a metodologia proposta. Estes foram testados em dois sistemas: Sistemas de Rössler e um sistema *Rössler-Like*, citado como Sistema Linz-Sprott.

No Capítulo 6 são discutidas as considerações em relação ao que foi conseguido com a pesquisa e consideradas as possibilidades para trabalhos futuros.

2 SISTEMAS DINÂMICOS

Monteiro (2006) define um sistema como um conjunto de objetos agrupados por alguma interação ou interdependência. Devem ter relações de causa e efeito nos fenômenos decorrentes.

É chamado dinâmico quando algumas grandezas que caracterizam seus objetos variam no tempo. Tem por objetivo prever o futuro ou explicar o passado de modo científico. Outra característica deste tipo de sistema é o fato de possuir algum elemento que armazena energia (no caso de sistema físico) (Monteiro, 2006).

Tais sistemas são a descrição matemática da dinâmica de um dado físico, matemático, eletrônico, biológico ou mesmo econômico, sendo possível determinar o valor e a evolução das variáveis em um instante inicial e final. Eles podem ser lineares ou não lineares.

Os sistemas dinâmicos podem ser contínuos ou discretos. Eles são contínuos quando descritos por equações diferenciais e representam a evolução do sistema continuamente no tempo e são discretos quando representam evolução do sistema em instantes discretos, sendo representados por equações a diferenças (Monteiro, 2006).

2.1 SISTEMAS LINEARES

Atendem ao princípio da sobreposição de efeitos, ou seja, a resposta do sistema frente a uma entrada não é afetada pela presença simultânea de outras entradas. Aguirre (2007) argumenta que um dos exemplos mais usados para este tipo de sistema é a representação no espaço de estados.

Qualquer representação de sistema dinâmico dada por uma ou mais equações diferenciais (ou a diferenças) de qualquer ordem pode ser expressa na forma de um sistema de equações diferenciais (ou a diferenças) de primeira ordem. O

número de equações será igual à soma das ordens das equações originais. A representação por espaço de estados pode ser dada por:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$
 para caso de dinâmica de tempo contínuo

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$
 para caso de dinâmica de tempo discreto

Um sistema é de tempo discreto se o tempo t é um número inteiro. A sua evolução é orientada por uma ou mais equações de diferenças finitas, que é um tipo de equação que relaciona o valor de uma variável $x \in \mathbb{R}$ no instante t a valores de x em outros instantes (x + 1), (x + 3). Um sistema assim é utilizado quando é necessário esperar um intervalo de tempo finito para que o valor de x possa variar (Monteiro, 2006).

O estudo de sistemas lineares criou paradigmas que se enraizaram na tradição histórica, fazendo com que ao longo da história, a análise não linear fosse evitada (Savi, 2006).

O desenvolvimento da mecânica linear em diversas áreas incentivou ainda mais os estudos em torno de modelos lineares e bem comportados. Porém, a estrutura de uma resposta não linear é muito rica, tendo assim uma grande flexibilidade. É importante a continuidade de pesquisas para este tipo de sistema dinâmico.

2.2 SISTEMAS NÃO LINEARES

Todas as pesquisas existentes em sistemas não lineares, atualmente, têm como concentrador os estudos do final do século XIX, conduzidos por Henri Poincaré. O motivador para isso foi o problema da dinâmica do sistema de três corpos. Este então lançou base para continuidade de pesquisas, tal qual a de Lorenz em 1963 que ao estudar problemas meteorológicos deparou-se com o caos.

2 SISTEMAS DINÂMICOS

Desde então, diversos pesquisadores tem analisado diferentes sistemas dinâmicos e conseguido promover contribuições valiosas como: Van der Pol, Duffing, Thompson, Chua, Grebogi (Savi, 2006).

Villate (2007) apresenta como um sistema não linear autônomo, de segunda ordem, definido por duas equações diferenciais, conforme (1) e (2) a seguir:

$$\dot{x} = f(x, y) \tag{1}$$

$$\dot{y} = g(x, y) \tag{2}$$

As funções f e g não são simples combinações lineares das variáveis x e y.

A análise gráfica no espaço de fases fornece informações sobre o comportamento deste sistema. Para isso é importante determinar os seus pontos fixos.

Oliveira (2006) aborda que uma maneira de observar o comportamento dinâmico de um sistema é através do espaço de estados, ou espaço de fases. Trata-se de um espaço N-dimensional, sendo que o número de equações diferenciais de primeira ordem necessárias para descrever esse sistema e o conjunto de curvas obtidas com a evolução do sistema é chamado de retrato de fases. Se o estado permanece inalterado ele é chamado de ponto de equilíbrio (quando x_0 é ponto

de equilíbrio, então $f(x_0(t)) = 0 \forall t \in \Re$).

Espaço de fases é um sistema de coordenadas associado às variáveis independentes que descrevem a dinâmica de um sistema. Por exemplo, o espaço de fases de um pêndulo simples é definido por suas coordenadas de posição e velocidade. O atrator é a representação da dinâmica de um sistema no espaço de fases. Sistemas que apresentam comportamento constante, periódico ou caótico possuem atratores característicos. Um sistema com comportamento estável é

....

 $\langle \alpha \rangle$

representado por um ponto fixo no espaço de fases; enquanto um sistema periódico apresenta uma órbita fechada (ciclo limite).

No caso de sistemas caóticos, as órbitas do atrator nunca repetem o mesmo caminho, mas estão atraídas a uma região limitada do espaço de fases.

É possível caracterizar sistemas não lineares de três maneiras diferentes: métodos geométricos (ex. medida de dimensões), métodos dinâmicos (ex. o expoente de Lyapunov que mede a taxa de divergência média ao longo do tempo das trajetórias vizinhas) e análise topológica (Gilmore, 1998).

Em vista da importância da análise topológica para essa pesquisa, é dada maior atenção para este tipo de caracterização de sistemas dinâmicos.

Savi (2006) destaca que o estudo deste tipo de problema possui duas abordagens: a qualitativa que tem como principal objetivo entender o comportamento global de um sistema e a quantitativa que procura analisar a evolução de um sistema no tempo.

Monteiro (2006) apresenta pelo menos três fortes razões para o estudo destes sistemas que determinam a evolução temporal das suas grandezas características: (1) o sistema não existe fisicamente, (2) explicar o comportamento de um sistema já existente e (3) teste experimental é caro ou perigoso.

Em sistemas dissipativos, há regiões limitadas do espaço de fases, chamadas de atratores. As trajetórias convergem para estas regiões. Assim, um sistema com comportamento caótico possui um atrator estranho no seu espaço de fases, com detalhes em escalas infinitesimalmente pequenas (Monteiro, 2006).

O retrato de fases é um conjunto de curvas obtidas pela evolução do sistema a partir de um conjunto de condições iniciais. Por ser não linear, pode existir mais de um ponto de equilíbrio (Oliveira, 2010).

A estabilidade do ponto de equilíbrio pode ser representada por x*. No sentido de

Lyapunov ele pode ser: estável se, e somente se, dado $\in > 0$, existe $\delta(\in) > 0$ tal

que para $||x(0) - x^*|| < \delta(\in)$, então $||x(t) - x^*|| < \in, \forall t > 0$; assintoticamente estável se, e somente se, existe $\delta > 0$ tal que para $||x(0) - x^*|| < \delta$, então $||x(t) - x^*|| \to 0$, para $t \to \infty$ e instável se a órbita se afasta do ponto de equilíbrio no espaço de fases $\exists \epsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0, ||x(0) - x^*|| < \delta$, então $||x(t) - x^*|| \ge \epsilon$. (Amaral, 2006)

Assim, é possível entender que há estabilidade se, para qualquer condição inicial próxima de um ponto fixo, o sistema permanece próximo ao ponto fixo para qualquer tempo posterior. Para estabilidade assintótica o sistema converge ao ponto fixo quando o tempo tende ao infinito (Amaral, 2006).

Oliveira (2006) apresenta atrator como um conjunto invariante para o qual órbitas próximas convergem depois de um período significativamente longo. Para que ele surja deve ocorrer contração de um elemento de volume, no espaço de fases.

Um conjunto de pontos A pode ser definido como um atrator se ele possuir três características: se é um conjunto invariante (qualquer trajetória $\vec{x}(t)$ que começa em A, permanece em A o tempo todo), se há um hipervolume de B, que contém A, tal que para qualquer condição inicial $\vec{x}(0)$ pertencente a B, então a distância

entre uma trajetória $\vec{x}(t)$ e A tende a zero quando $t \rightarrow \infty$ (ao definir o maior conjunto de condições iniciais com as características ou propriedades acima é identificada a bacia de atração de A) e o fluxo não pode ser decomposto, pois A não pode ser dividido em duas ou mais partes invariantes não triviais (não há um subconjunto de A que possa satisfazer as duas condições anteriormente apresentadas) (Oliveira, 2006).

Atratores estranhos encontrados em sistemas dinâmicos caóticos apresentam auto similaridade de escala (ou caráter fractal), e uma dimensão fractal associada. As suas linhas de fluxo dependem sensivelmente das condições iniciais. A análise de sistemas dinâmicos deve ser iniciada por um atrator de dimensão zero. Este é importante porque toda a análise de estabilidade local é feita em torno dele. Assim, pode-se definir que todo ponto em que a taxa de variação *x* no

tempo é nula é um ponto fixo, ou seja, $\dot{x} = f(x) = 0$ (Amaral, 2006).

Outro aspecto importante é o ciclo limite. Monteiro (2006) o define como uma órbita associada a uma trajetória fechada e isolada (ausência de outras trajetórias fechadas infinitesimalmente próximas), que pode aparecer no retrato de fases de sistemas não lineares.

Uma avaliação para a instabilidade do sistema, que leva ao comportamento exponencial no regime caótico pode ser feita ao utilizar o espectro de parâmetros, ou seja, os expoentes (ou coeficientes) de Lyapunov. Eles fornecem uma medida da sensibilidade do sistema para com as condições iniciais. Para isso se deve considerar a evolução temporal de um sistema dinâmico a partir de duas condições iniciais muito próximas $x_0 \in x_0 + \varepsilon$ (Silva, 2006). A divergência exponencial, após um intervalo de tempo t, leva a uma expressão da forma: $\varepsilon(t) \sim \varepsilon e^{\lambda t}$.

A dependência exponencial pode ser verificada através do expoente λ , que é o chamado expoente de Lyapunov procurado e que fornece informações sobre a divergência das trajetórias.

Uma forma de preservar o comportamento exponencial divergente é reconstruir o atrator no espaço de estados. Este deve apresentar um ou mais expoentes de Lyapunov positivos para assegurar a presença de instabilidades orbitais nas direções associadas. Em decorrência, se um sistema admite uma solução caótica, associada à presença de um atrator estranho, a dependência das condições iniciais implica na existência de pelo menos um expoente de Lyapunov positivo (Silva, 2006).

Uma das dificuldades encontradas no cálculo de expoentes de Lyapunov em séries temporais experimentais é o desconhecimento das matrizes jacobianas associadas à dinâmica do sistema.

O aparecimento do regime caótico é sempre precedido de bifurcações. Um tipo bastante frequente tem um ponto fixo estável que sofre uma bifurcação supercrítica e, em certo valor do parâmetro de controle passa a ter um atrator do tipo ciclo unitário. Continuando a aumentar o parâmetro de controle, uma nova bifurcação ocorre e o ciclo unitário torna-se instável e aparece uma órbita de ciclo duplo. Esse processo pode ser generalizado e pode aparecer uma sequência de n bifurcações. Esse tipo de série de bifurcações é denominado de bifurcação por duplicação de período.

Um diagrama de bifurcação apresenta o resumo das bifurcações que ocorrem em função do parâmetro de controle do sistema. Assim, a sua construção resulta do mapa de Poincaré.

2.3 ANÁLISE TOPOLÓGICA

Ferramentas topológicas caracterizam atratores caóticos e são usadas para validar modelos. Ressalta-se que apresentam robustez a perturbações nos parâmetros de controle e fornecem um modelo global de dinâmica (Amaral, 2006).

Assim, estas são as ferramentas mais adequadas para descrever a estrutura dinâmica global de sistemas não lineares, conforme Gilmore (1998). No entanto, estas estão restritas ao espaço R³.

É preciso determinar uma figura em duas dimensões que apresenta os mecanismos de expansão e contração do atrator, que é o padrão ou *template*. Este é uma superfície ramificada para visualizar fluxos (Amaral, 2006). Gilmore (1998) afirma que é composto por dois elementos que constroem a dinâmica não linear: processos de expansão (obtidos por dobra ou rasgo como em Lorenz e Rössler) e contração (várias trajetórias se juntam na mesma região que é chamada de linha de ramificação).

As informações dispostas no padrão podem ser de três categorias distintas: torção local (torção que um ramo dá em torno de si mesmo), torção entre ramos (torção que um ramo dá em torno de outro ramo) e ordem de inserção na linha de ramificação (ordem em que os ramos são inseridos na linha de ramificação).

Determinada a seção de Poincaré do sistema pode-se obter o mapa de primeiro retorno. A seção de Poincaré consiste na intersecção entre as trajetórias de um sistema e um plano que corta o fluxo de maneira transversal. Dessa forma, é útil no sentido de reduzir a dimensão do problema. As trajetórias devem cruzar o plano que determina a seção sempre no mesmo sentido.

Ao obter a seção de Poincaré, é importante identificar se o conjunto de pontos possui dobra, pois caso positivo, isso garante comportamento monotônico no mapa de primeiro retorno. Ao definir a região para a seção, é possível distinguir a região em torno do qual serão obtidas as órbitas do sistema.

A regra de ordenamento na seção de Poincaré deve seguir três passos, conforme Amaral (2006):

- Por meio do mapa de primeiro retorno, definir o símbolo que irá representar cada ramo, sendo que se a inclinação for positiva o símbolo é par e se a inclinação for negativa, ímpar;
- Determinar a paridade das palavras (soma algébrica dos símbolos), e,
- Ordenamento ascendente deve ser determinado em função da paridade em que se deve comparar o maior conjunto de símbolos comuns de duas palavras. Se a paridade for par, deve ser escolhida a palavra que possui o próximo símbolo menor. Senão, deve ser escolhida a palavra que possui o próximo símbolo maior.

De posse dos pontos que compõem as órbitas, as mesmas podem ser geradas e espera-se que estas estejam fechadas.

Com as informações das órbitas é obtido o *Linking Number* (LK), que informa a maneira como as órbitas estão conectadas, sendo possível calcular o número de

conexão entre os pares de órbitas periódicas instáveis coexistentes. O LK é somente uma das informações necessárias. Com ele é possível observar cruzamentos entre as trajetórias do fluxo. Na figura 2.1 é possível perceber a convenção para o cruzamento de órbitas periódicas instáveis, conforme Amaral (2006).



Figura 2.1: Convenção para cruzamento de órbitas periódicas instáveis.

O procedimento para calcular o número de conexões $L_R(o_1, o_2)$ entre as órbitas (o_1, o_2) está em Le Sceller et. al., (1994). Para o seu cálculo é necessário definir o número $\epsilon(p_i) = \pm 1$ do cruzamento de cada ponto de cruzamento p_i . O número de conexões é definido como

$$L_{\mathcal{H}}(O_1, O_2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p} \epsilon(p_i)$$
⁽³⁾

O mapa de primeiro retorno é um gráfico que relaciona os pontos da seção de Poincaré. Apresenta muitas informações úteis como o número e a característica de cada símbolo que será utilizado para descrever as órbitas instáveis. O conjunto desses símbolos é um alfabeto e a condição para sua extração é que seja uma função injetora, ou seja, cada valor da variável deve ter um único valor associado. A cada região monotônica do mapa é associado um símbolo (que será par caso a região for ascendente ou ímpar, caso ela seja descendente). O ponto limite entre os ramos é o ponto crítico (onde inclinação do mapa muda de sinal ou tem descontinuidade). Juntamente com o atrator há um conjunto de órbitas periódicas instáveis que torna possível a extração de características invariantes do atrator, tal como o número de conexões, que explica como é a conexão entre as órbitas.

Para finalizar a análise, é preciso formar uma matriz M pela relação entre o alfabeto (conjunto de símbolos que descrevem as órbitas instáveis) formado por 1 ou 0, que é a codificação das mesmas. Essa fornece informação da torção entre os ramos. Os números de conexão e os elementos da matriz M estão relacionados pela seguinte relação (Le Sceller et al., 1994):

$$L_k(O_1, O_2) = \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{j=1}^{p_2} M(\delta_i, \sigma_j) + N_l(O_1, O_2)$$
(4)

sendo δ_i os símbolos que compõem a órbita O_1 , σ_j os símbolos que compõem a órbita O_2 e $N_l(O_1, O_2)$ o número de cruzamentos que acontecem na região de interseção na linha de ramificação. Um procedimento para determinar $N_l(O_1, O_2)$ é descrito em Le Sceller et al., (1994).

2.4 LINEARIZAÇÃO

As técnicas de linearização de um sistema não linear acontecem em torno de um ponto de operação. Isso permite que o sistema linear resultante seja analisado com base nas ferramentas de análise.

É uma alternativa para realizar a análise de estabilidade local para sistemas não lineares. Para isso, é necessário linearizar o sistema em torno de seus pontos fixos. Em Amaral (2006) pode ser visto um exemplo dessa técnica com os sistemas de Rössler e de Lorenz.

Como a linearização é uma aproximação em torno de um ponto de operação, ela só pode levar à predição do comportamento do sistema em uma vizinhança deste ponto. Nenhum outro comportamento não local (muito menos o comportamento global do sistema em todo o espaço de operação) pode ser predito pelo modelo

2 SISTEMAS DINÂMICOS

linearizado. Este aspecto é evidenciado quando se comparam os comportamentos dinâmicos de sistemas não lineares e de suas aproximações lineares (Von Zuben, 2010).

Um exemplo de linearização para as funções (1) e (2) citadas anteriormente pode ser vista em Savi (2006).

Ambas são escritas na forma de uma série de Taylor:

$$f(x,y) = f(u,v) + (x-u)\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(u,v)} + (y-v)\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(u,v)} + \cdots$$
(5)

$$g(x,y) = g(u,v) + (x-u)\frac{\partial g}{\partial x}\bigg|_{(u,v)} + (y-v)\frac{\partial g}{\partial y}\bigg|_{(u,v)} + \cdots$$
⁽⁶⁾

Pode-se então substituir as equações (1) e (2) para se ter um sistema linear do tipo:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix}$$
(7)

A linearização somente é válida para uma vizinhança da origem (X = 0, Y = 0), perto do ponto fixo.

A matriz do sistema linear é a chamada matriz Jacobiana. Trata-se de uma matriz constante, obtida a partir das derivadas das funções de estado, substituindo as variáveis pelos valores no ponto fixo. Para cada um destes pontos vai existir uma matriz Jacobiana diferente. Os valores e vetores próprios de cada uma dessas

matrizes permitem estudar a estabilidade do sistema, na vizinhança do ponto fixo, da mesma forma que é feito para os sistemas lineares (Vilate, 2007).

Através da análise dos autovalores da matriz Jacobiana é possível classificar os pontos de equilíbrio em hiperbólico e elíptico. Se os autovalores tem parte real não nula são hiperbólicos e se tem parte real nula são elíptico ou não hiperbólico (Oliveira, 2010).

3 IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

A identificação de sistemas tem por objetivo obter um modelo matemático que consiga explicar a relação de causa e efeito presente nos dados (Aguirre, 2007).

Entre as etapas para trabalhar com um problema de identificação de sistemas estão os testes dinâmicos e coletas de dados. A identificação tem como proposta obter modelos através de dados. Assim, é necessário gerar dados para conseguir realizá-la. Dessa forma, é relevante escolher bem sinais de excitação, execução do teste e o tempo de amostragem.

Outra etapa é a escolha da representação matemática a ser usada. Para sistemas lineares há funções de transferência em tempo contínuo que são usados em problemas de identificação determinística. Também há representação ARMAX (*Auto Regressive Moving Average with eXogenous inputs*) para identificação estocástica.

Uma terceira etapa é a determinação da estrutura do modelo. No caso de modelos lineares a escolha da estrutura fica restrita à escolha de pólos e de zeros e à determinação do atraso puro do tempo. Se for não linear poderá utilizar algoritmos da família de estimadores, tal como modelos NARMAX (*Non-linear Auto Regressive Moving Average with eXogenous inputs*) polinomiais. Estes modelos relacionam a não linearidade existente entre o par entrada-saída passadas para uma saída atual.

A estimação de parâmetros compõe outra etapa que começa com a escolha do algoritmo a ser utilizado. É preciso definir algum critério para minimizar a função custo (mede a distância entre a resposta do sistema e a resposta do modelo). Exemplo disso é o método dos mínimos quadrados.

A última etapa é a validação do modelo, em que é verificado se eles incorporam ou não as características de interesse do sistema original.

Em problemas com estruturas por partes deve-se dividir o problema em dois:

- Através do conhecimento da partição do espaço de estados é possível aplicar técnicas de estimação de sistemas lineares. Quando a partição do espaço de estados é conhecida, pode-se utilizar técnicas clássicas de estimação de sistemas lineares, no entanto, não é uma situação comum;
- Se não há conhecimento da partição do espaço de estados a estimação torna-se um problema de otimização que não é fácil de resolver para alguns casos.

Roll (2001) agrupa os vários procedimentos para estimação de parâmetros em sistemas afins por partes para casos em que a partição não é conhecida *a priori*:

- Partições e submodelos são estimados simultaneamente: os parâmetros são obtidos pela minimização de uma função custo. A função erro médio quadrático é construída por meio de dados e das equações do modelo. Técnicas de otimização não linear padrão são utilizadas para minimizar a função custo. Este é um método simples, no entanto há o risco do algoritmo ficar estagnado em um mínimo local.
- Partições e submodelos são estimados simultaneamente, porém, apenas uma partição é estimada por vez: diferente do grupo anterior, este apresenta menos problemas em relação a mínimos locais, mas requer atenção em relação ao critério de parada pois pode ocasionar um número incorreto de divisão do espaço. Exemplo deste tipo de estrutura são os hiperplanos conectados em que o algoritmo acrescenta funções de conexão para explicar o resíduo resultante entre a função a ser aproximada e a soma das funções de conexão já acrescentadas.
- Partições e submodelos são estimados iterativamente, sendo que apenas a partição ou o modelo é estimado a cada passo: neste grupo a divisão do espaço é feita por meio de técnicas de agrupamento e os modelos locais são estimados no mesmo instante que as partições do

espaço. Um aspecto complexo deste tipo é que a determinação do número de agrupamentos não é uma tarefa trivial.

 Partições são estimadas utilizando grades regulares: nessa estrutura o problema está no elevado número de regiões necessárias para que haja um ajuste considerável que atenda a um critério de erro mínimo.

Ferramentas topológicas são usadas com sucesso na validação de modelos. Isso acontece porque invariantes topológicos fornecem um modelo global da dinâmica descrevendo os modelos de construção do comportamento global.

Amaral (2006) destaca que os métodos topológicos são os mais indicados para descrever a estrutura dinâmica global de sistemas não lineares. A sua limitação está em ser restrito ao espaço **R**³.

3.1 MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO

Os métodos de otimização caracterizam-se por determinar uma solução aceitável em problemas de gerência, problemas específicos de projeto e sistemas de projeto assistido por computador. Basicamente, fazem a maximização ou minimização de funções. Dessa forma, é obtido como resultado algoritmos que convergem para soluções ótimas de forma eficiente.

A otimização é um conjunto de métodos capazes de determinar as melhores configurações possíveis para construção ou funcionamento de sistemas (Takahashi, 2007).

A formulação característica de um problema de otimização é:

$$x^* = \arg\min_{x} f(x) \tag{8}$$

sujeito a
$$g(x) \leq 0 e h(x) = 0$$
.

O vetor $x \neq 0$ vetor de variáveis de otimização, que representa o conjunto das variáveis que se pretende especificar através do processo de otimização. Ele irá conter as variáveis com os valores que deverão ser escolhidos para alcançar a melhor solução possível.

A função objetivo ou função custo *f(.),* representa o índice de desempenho do sistema. O valor desta função deve ser minimizado ou maximizado (depende do problema) para que seja possível dizer que a otimização aconteceu.

Uma comparação e uma explicação sobre o uso de algoritmos genéticos e métodos Quasi-Newton está em Currano (2010). Ele as apresenta utilizando o *toolbox* do *Matlab* denominado *gatool* para o algoritmo genético e a função *fmincon* para o método Quasi-Newton.

3.1.1 ALGORITMOS GENÉTICOS

Toda tarefa de busca e otimização possui componentes como o espaço de busca que são as possibilidades de solução e a função de custo que é uma forma de avaliar os elementos do espaço de busca.

As técnicas de computação evolucionária operam com uma população de indivíduos em paralelo. Isso permite que a busca seja realizada em diferentes regiões. São aplicadas em controle de sistemas dinâmicos, indução e otimização de Bases de Regras, Novas Topologias Conexionistas (Engenharia de Sistemas Neurais Artificiais e Modelagem de Estruturas Neurais Biológicas), Evolução Interativa de Imagens e Composição Musical (Leite et al., 2006).

Tais técnicas diferem de outros métodos em pelo menos quatro aspectos: (1) trabalham com uma codificação do conjunto de parâmetros; (2) trabalham com uma população de indivíduos; (3) utilizam informações de custo ou recompensa e (4) utilizam regras de transição com probabilidades (Leite et al., 2006).

Essas técnicas também se caracterizam por trabalhar com informação sobre mais de um ponto (chamada informação corrente) e/ou informações obtidas em mais

de um ponto do espaço de soluções (define a transição do estado corrente para o próximo estado da sequência de soluções). Têm como característica a evolução de um conjunto de indivíduos de uma população, seguindo regras estocásticas de busca e combinação, fazendo com que sejam criadas gerações de descendentes com características novas e herdadas (Takahashi, 2007).

Currano (2010) argumenta que essas estruturas genéticas são modelos pseudoevolutivos utilizados para otimização em casos em que o gradiente precisa ser determinado. Porém, apresentam um gasto computacional intensivo. Isso acontece porque a função objetivo e as restrições são calculadas para cada membro da população. Assim, é verdadeiro dizer que a qualidade dos resultados irá depender do tamanho da população e o número de gerações. Dessa forma, para ter sucesso nos resultados é importante ter um número grande de pontos na população e uma quantidade considerável de gerações.

Com essas características a chance de alcançar um bom resultado é muito boa. Na pesquisa de Currano (2010) o algoritmo genético foi inicialmente mais bem sucedido do que função *fmincon*, embora cada geração do algoritmo genético pode consumir muito recurso computacional.

O algoritmo genético – Codificação Binária pode ser encontrado em Tanomaru (1995), como:

- Cada parâmetro é codificado de acordo com uma codificação binária com 16 bits de comprimento, que é uma faixa de variação desse parâmetro. O código de um determinado indivíduo é a concatenação das codificações que correspondem a cada um dos parâmetros.
- A estrutura é iniciada com a geração aleatória de um número qualquer de conjuntos de indivíduos.
- Operações sequenciais de cruzamento, mutação, avaliação, cálculo da função de ajuste (*fitness function*), seleção e elitização, sendo gerada nova população.
- O algoritmo finaliza caso seja atingida uma certa condição de término ou caso exceda o número máximo permitido de iterações.

3 IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

É importante ressaltar como os parâmetros citados acima influenciam no comportamento e nos possíveis resultados desse tipo de técnica. Com uma população pequena, por exemplo, o desempenho pode cair, pois podem compreender uma região muito pequena do espaço de busca do problema em questão. Diante disso, pode-se pensar então em sempre trabalhar com grandes populações, porém, isso pode ter um alto custo computacional.

Outro parâmetro importante é a taxa de cruzamento. Se esta for muito pequena, o algoritmo pode apresentar uma lentidão muito grande. Assim, quanto maior, mais rapidamente novas estruturas são introduzidas na população, entretanto, uma boa população pode ser substituída.

O parâmetro de mutação desempenha um papel importante para que seja possível chegar a qualquer ponto do espaço de busca e, o parâmetro de intervalo de geração controla a porcentagem da população que será substituída na próxima geração. Da mesma forma que a taxa de cruzamento, se esse parâmetro for muito alto, pode extinguir uma boa população inteira.

As operações de cruzamento são feitas ao dividir a população em duas metades. Para cada par é verificado se vai ou não ocorrer um cruzamento de acordo com uma probabilidade de ocorrência de 0,6. Se o cruzamento for acontecer, é determinado para cada bit dos cromossomos, com probabilidade de 0,5 se esse bit será trocado ou não. Se a troca acontecer, os indivíduos ficam cada um com o bit correspondente do outro.

A mutação determina para cada indivíduo se ele vai sofrer ou não mutação, com probabilidade igual a 0,02. Caso ela realmente venha a acontecer, deve ser escolhido com um gene (com igual probabilidade para todos) que será trocado por seu complemento.

No processo de avaliação cada indivíduo é retornado à codificação no formato de um vetor de parâmetros reais e assim ele é avaliado na função objetivo. Essa função objetivo deve ser injetada na função de ajuste, obtendo assim para cada indivíduo um valor de função de ajuste. Este valor é de 1,8 (Takahashi, 2007).

3 IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

Outra operação que acontece nessa estrutura é a seleção. Este processo seleciona N indivíduos dentre os N indivíduos existentes, sendo que cada um pode ser selecionado mais de uma vez. A probabilidade de um indivíduo ser selecionado a cada vez é igual ao valor da fração de sua função de ajuste em relação à soma das funções de ajuste de todos os indivíduos.

Este processo leva a outro, que é a elitização. Ela acontece se o melhor indivíduo não foi selecionado para a nova população. Este melhor indivíduo é introduzido na população com a exclusão de qualquer um dos elementos escolhidos de forma aleatória.

Em Takahashi, Peres & Ferreira (1997) é possível verificar o algoritmo criado em que é utilizado um vetor das avaliações da função objetivo para os N indivíduos da população e calculada a equação da função de ajuste (FT).

3.1.2 MÉTODOS QUASI-NEWTON

Apresentam uma regra recursiva que gera uma matriz correspondente a uma estimativa da inversa da Hessiana da função objetivo (Takahashi, 2007).

Este método necessita que apenas o gradiente da função objetivo esteja disponível em cada iteração. Ao medir as mudanças no gradiente de uma iteração para outra, eles tentam construir um modelo para a função objetivo bom o bastante para produzir convergência. Ele não necessita de segundas derivadas.

Deve-se garantir que a matriz permaneça sempre definida positiva e bem condicionada (autovalores não muito distantes).

Uma das técnicas são os métodos sequenciais, ou seja, um modelo multimodal e que a solução ótima depende do ponto inicial, como por exemplo, os limites inferiores e superiores do espaço de busca.

Os elementos para construção de um algoritmo de direção de busca são:

- um método de cálculo de direções de busca, envolvendo o cálculo de estimativas para o gradiente e para a Hessiana da função objetivo;
- um método de minimização de funções de uma única variável;

 um critério de decisão que permita afirmar que o algoritmo convergiu para uma solução satisfatória.

Currano (2010) utiliza a função *fmincon* do *Matlab* para demonstrar o método em estudo. Através dessa função é possível encontrar o mínimo de uma multivariável não linear sujeita a restrições. Ela é uma técnica que começa mudando cada uma das variáveis para calcular o gradiente, e, depois, se move para uma direção considerada mais interessante. A cada passo, o gradiente é atualizado, no entanto, se a busca encontra o limite do espaço de busca, a minimização é terminada, anão ser que tenha outra condição de parada. Essa característica faz com que ela seja dependente da inicialização.

Estes métodos apresentam duas formas distintas para produzir estimativas recursivas. Um destes métodos é o Davidon-Fletcher-Powel (DFP) e outro é o Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS). Ambos foram agrupados em uma estrutura mais geral, chamada de família de Broyden (Takahashi, 2007).

4 MODELOS AFIM POR PARTES

4.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Modelos com estruturas por partes ou *piecewise models* tem sido utilizados para representar uma série de modelos como redes neurais, estruturas canônicas, hiperplanos conectados e outros (Amaral, 2006).

O emprego de modelos com estruturas por partes é vantajoso por três razões principais, conforme Amaral (2006):

- Permitem reduzir problemas grandes e complexos em subproblemas menores, facilitando a solução.
- Apresentam subproblemas locais interpretáveis permitindo descrições locais e globais do problema.
- É ideal para controle, devido à estrutura ser adequada para implementação digital.

Amaral (2006) afirma que modelo afim por partes apresenta resultados de análise, síntese e possui uma estrutura adequada para simulação. Assim, ao apresentar tarefas típicas de controle, Garcia (2009) define que estes são melhores que outros subsistemas. Chengtao (2007) o exibe como a mais simples extensão de modelos lineares e sendo capaz de descrever qualquer processo dinâmico não linear com precisão. Em contrapartida, não é o melhor para detecção de falhas e estimação.

Modelos afim por partes podem ser referidos como sistemas híbridos, pois possuem uma componente contínua e uma componente lógica que é responsável pelo chaveamento entre regiões diferentes do espaço (Amaral, 2006).

Os sistemas afins por partes são definidos partilhando o espaço de estado e de entrada em regiões poliédricas e associando a cada região uma equação. Estes são representados por equações diferenciais ordinárias, equações diferenciais parciais, equações de diferenças ou autômatos celulares. A sua estrutura possui três elementos, conforme Sontang (1981):

- Divisão do espaço de estados: em que o espaço é dividido em certo número de politopos. A determinação dos politopos ocorre através das desigualdades lineares que definem semiespaços:
 S_i = x ∈ ℝⁿ | c_ix + d ≥ 0. Um politopo pode ser definido como a interseção de um determinado número de semiespaços. Os hiperplanos S_i = x ∈ ℝⁿ | c_ix + d = 0 que definem a partição do espaço são referidos como superfície de chaveamento.
- Modelos afins de cada partição do espaço: onde é preciso definir os subsistemas (estes descreverão o comportamento do sistema em cada região). Dessa maneira, tais subsistemas podem ser definidos com ẋ = A_i(x p_i), sendo que x, p_i ∈ ℜⁿ, A_i ∈ ℜ^{nxn}.
- 3) Lei de Chaveamento entre politopos: uma função é determinada para selecionar o subsistema referente ao politopo. Se considerarmos as funções $f[d_i(x)] = 1$, se $d_i(x) \ge 0$ ou

 $f[d_i(x)] = 0$, se $d_i(x) < 0$ e $d_i(x) = 0$, se $d_i(x) \ge 0$ ou $f[d_i(x)] = 1$,

se $d_i(x) < 0$. Como a função $f[d_i(x)]$ é complementar, a definição de uma lei de chaveamento em politopos separados pelo mesmo hiperplano será facilitada.

De acordo com Amaral (2006), modelos com estruturas por partes fornecem visões dos comportamentos locais e também explicam o comportamento global. Conseguem isso por determinar pontos de operação, e em torno desses pontos encontrados, modela um sistema simples, linear.

Estes sistemas podem ser representados em duas grandes classes: implícitos e explícitos. Os modelos implícitos não produzem uma saída para uma entrada.

4 MODELOS AFIM POR PARTES

Assim, um algoritmo precisa ser executado para que seja possível a solução do modelo (Heemelset al., 2002). Os modelos explícitos são estruturas mais compactas, em que a saída é obtida por simples substituição das entradas.

Estes tipos de modelos podem sintetizar a dobra se as trajetórias da variedade instável forem direcionadas para a região do campo vetorial que é determinada pela variedade estável desse mesmo ponto fixo. Esse redirecionamento é o chaveamento (Amaral, 2006).

Há também o mecanismo de rasgo em que parte da trajetória será direcionada bruscamente para a variedade estável de outro ponto fixo.

4.2 METODOLOGIA PROPOSTA

Criar um método que facilite a seleção das superfícies para a produção de modelos afim por partes é algo interessante e bastante útil, sobretudo quando se fala sobre o Sistema de Rössler.

Em Wang et. al. (1994) pode ser visto o surgimento de um atrator estranho e seu desaparecimento em uma crise limite (chamado na pesquisa de *chaotic blue sky bifurcation*), demonstrando assim a importância deste tipo de sistema. As aplicações deste sistema podem ser vistas em várias áreas de conhecimento.

A proposta da metodologia se inicia com a linearização do sistema em estudo e depois com a otimização de uma função objetivo calculada através do erro da derivada do sistema.

Para auxiliar a busca e otimização foram utilizadas informações obtidas através de análise topológica. Isso é importante, porque em Amaral et al. (2006) é verificado que para o sistema de Rössler não há uma única superfície de chaveamento, pelo menos do ponto de vista qualitativo. Porém, a escolha errada dessa superfície pode conduzir a comportamentos inesperados e/ou não ocorrer equivalência topológica.

Assim, é verificado se é possível encontrar outras superfícies de chaveamento que podem fornecer outras informações. Também, é interessante verificar se há

outros valores dentro de uma faixa ou região que caracterizam-se com comportamentos semelhantes e são topologicamente equivalentes.

Com as informações da análise topológica parte-se de um local de busca que já é um sistema afim por partes.

Outro teste realizado foi aplicar o método de Quasi-Newton aos dados estimados pelo algoritmo genético, mas este não melhorou os resultados já conseguidos. A expectativa era de conseguir melhorar, sobretudo os dados estimados que não reproduziram estruturas esperadas. Os resultados podem ser verificados no Capítulo 5 para o sistema de Rössler. As mesmas técnicas foram reproduzidas para um sistema *Rössler-Like* escolhido, que foi o de Linz-Sprott. A validação dos sistemas foi realizada através de análise topológica.

5 RESULTADOS

5.1 ESTUDO DO SISTEMA DE RÖSSLER

Savi (2006) modela em seu trabalho, entre outros exemplos de sistemas não lineares, o Sistema de Rössler, proposto em 1976 e similar ao de Lorenz. Porém, este apresenta apenas uma espiral, sem propriedades de simetria. Produz comportamento caótico em tempo contínuo, sendo globalmente estável, com toro limitante de ordem 1 (características relacionadas com mecanismo de dobra) (Tsankov e Gilmore, 2004). O sistema pode ser escrito como:

$$\dot{X} = -y - z$$

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{x} + (\mathbf{a}\mathbf{y}) \tag{9}$$

$\dot{Z} = b + z(x - c)$

Para o sistema acima foi utilizado o seguinte conjunto de parâmetros (a;b;c)= (0,398;2;4), respectivamente.

O sistema pode ser resolvido aplicando o método numérico Runge-Kutta de quarta ordem e com o valor de passo integração de 0,1. Podem ser calculados os pontos fixos do sistema, pois estes permitem realizar uma análise local através de linearização e a obtenção da matriz Jacobiana. Para o conjunto de valores das equações em (9), o sistema apresenta os seguintes pontos fixos:

$$p = [0,2100;-0,5277;0,5277]$$
(10)

$$p += [3,7900; -9,5225; 9,5225]$$
(11)

Os autovalores e autovetores das matrizes jacobianas descrevem o comportamento dinâmico do sistema em torno dos pontos fixos. Os valores destes para este sistema são apresentados na Tabela 5.1:

Tabela 5.1: Autovalores do Sistema de Rössler com linearização em torno de seus pontos fixos

$\lambda_{-1} = -3,6547$	$\lambda_{+1} = 0,3412$
$\lambda_{-2} = 0,1314 - j0,9810$	$\lambda_{+2} = -0,0766 - j3,2381$
$\lambda_{-3} = 0,1314 \pm /0,9810$	$\lambda_{+3} = -0,0766 + j3,2381$

A Figura 5.1, gerada com o software *Matlab*, mostra o atrator caótico para os parâmetros a,b,c citados anteriormente.



Figura 5.1: Atrator de Rössler para os parâmetros (a;b;c)=(0,398;2;4)

Conforme descrito anteriormente, a análise topológica do sistema não linear deve começar com o cálculo do mapa de primeiro retorno de uma seção de Poincaré do atrator. Para o sistema de Rössler, Amaral (2006) diz que uma seção que auxilia nesse sentido é um corte feito na direção do ponto fixo imerso no atrator:

$$P \equiv \{(y_n, z_n) \in \mathbb{R}^2 | x_n = x, \dot{x} > 0\}$$
(12)

sendo x a coordenada do ponto fixo. Para auxiliar na escolha da seção de Poincaré, é necessário fazer o gráfico do atrator de Rössler no plano x,y, conforme a Figura 5.2.



Figura 5.2: Atrator de Rössler no plano x,y para os parâmetros (a;b;c)=(0,398;2;4)

O mapa do primeiro retorno é construído por meio da variável y_m , conforme a Figura 5.3. Por meio do mapa determina-se a codificação simbólica, sendo possível gerar as órbitas de acordo com as informações obtidas por ele, como por exemplo, o ponto crítico.



Figura 5.3: Mapa de Primeiro Retorno do Sistema de Rössler para os parâmetros (a;b;c)=(0,398;2;4)

As órbitas encontradas para o sistema são: 1, 10, 1011, 10111, 10110, 101110, 101111. Em Amaral (2006) é exposto o número de conexões entre os pares de órbitas periódicas instáveis, pode ser vista na Tabela 5.2:

Órbitas 1 10 1011 10111 10 -1 -_ -1011 -2 -3 --10111 -2 -4 -8 -10110 -2 -8 -10 -4

Tabela 5.2: Número de conexões entre os pares de órbitas periódicas instáveis para o Atrator de Rössler

Em Amaral (2006) pode ser verificada a matriz que descreve o sistema. Neste caso a matriz M seria:

$$M = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \tag{13}$$

5.2 MODELO AFIM POR PARTES DO SISTEMA DE RÖSSLER

Em Amaral et al. (2006) foram selecionadas quatro superfícies de acordo com as regiões de transição e obedecendo dois critérios: a informação da dinâmica local e a topologia global.

Das quatro superfícies encontradas, duas foram topologicamente equivalentes, pois apresentam o mesmo padrão do modelo do sistema de Rössler. As outras duas, apresentam mapas de primeiro retorno semelhantes às demais, porém topologicamente diferem, pois apresentam dois tipos de dobras, apresentando em razão disso, uma torção global. Conclui-se, portanto, que mesmo encontrando modelos que diferem bastante entre si, deve-se atentar ao fato de que são outras regiões do espaço de parâmetros do sistema.

Para modelar o sistema, foi considerada a superfície abaixo que se trata de uma função quadrática:

$$U = d(x) = x - C_1 y - C_2 y^2 - C_3$$
(14)

Para modelar o sistema, é necessário verificar que a função d(x) determina a distância de um ponto qualquer do espaço de estados até a superfície de chaveamento. Assim, pode-se definir as funções g1[d(x)] e g2[d(x)]:

$$g1(U) = \frac{1}{1 + e^{-5000U}} \tag{15}$$

$$g2(U) = 1 - g1(U)$$
(10)

(10)

Abaixo são descritas as equações obtidas com as Jacobianas avaliadas em torno dos pontos fixos (dx0, dy0, dz0, dx1, dy1, dz1):

$$f(1) = g1(-(y - dy0) - (z - dz0)) + g2(-(y - dy1) - (z - dz1))$$
(17)

$$f(2) = g1((x - dx0) + a(y - dy0)) + g2((x - dx1) + a(y - dy1))$$
⁽¹⁸

$$f(3) = g1(dz0(x - dx0) + (dx0 - c)(z - dz0))$$
⁽¹⁹

$$+g2(dz1(x-dx1)+(dx1-c)(z-dz1))$$

À seguir, foram utilizados métodos de otimização, como algoritmos genéticos e métodos Quasi-Newton. Em uma primeira tentativa, buscas foram feitas com a estrutura do algoritmo genético, testado através de uma implementação no software *Matlab* e validado pela *toolbox* com a função *gatool*. Foi considerado como parâmetro para o intervalo inicial do espaço de busca [-10 10] para cada parâmetro da superfície em (14).

Para definir a função objetivo da estrutura de otimização foi utilizada a modelagem anterior, linearizando em torno da equação 9 e calculando o erro da derivada. Assim a função objetivo é:

$$e = \frac{1}{2n} \sum \left(\dot{Z}_i - \hat{Z}_i \right)^2 \tag{20}$$

Em e temos \dot{z} como uma das equações do sistema de Rössler e \dot{z} representa o z estimado. Com isso é definido o cálculo de uma função objetivo.

As simulações aconteceram para populações iniciadas com 100 e 500 indivíduos. Para cada um dos casos foram consideradas 500 iterações e gerados 20 valores diferentes para cada tamanho de população inicial, totalizando assim 40 valores estimados.

· · —

110

110

1---

)

A Figura 5.4 apresenta os valores obtidos com a otimização. É percebido através das curvas obtidas para os parâmetros $C_1, C_2 \in C_3$ da função quadrática que há uma grande disparidade, ou seja, há uma grande variação dos valores. Ao analisar os resultados, foi verificado que nenhum deles reproduziu um sistema equivalente ao sistema de Rössler, embora tenham sido encontradas estruturas caóticas. Dessa forma, é notado que ao utilizar um intervalo inicial do espaço de busca qualquer ou aleatório, a expectativa de que a técnica de otimização pudesse encontrar valores e assim uma nova superfície de chaveamento não foi possível. Houve um grande esforço computacional e também de busca, mas não houve resultados equivalentes ao sistema original.



Quantidade de Gerações de Dados

Figura 5.4: Otimização com intervalo de busca em [-10 10;-10 10;-10 10]

Com esses dados estimados foi realizada uma busca utilizando-os como entrada para aplicação do método de Quasi-Newton. Este foi implementado com a função do *Matlab* denominada *fmincon*. No entanto, este também não melhorou significativamente os resultados.

Por não conseguir gerar sistemas equivalentes com a técnica acima, foi verificada a possibilidade de aplicar uma mais rica em informações. Assim, foi pesquisado em Amaral et al. (2006), a superfície $s1 = 3y + 0.95y^2 + 6 - x = 0$. Esta, já é uma função quadrática testada e que se mostrou ser equivalente ao sistema de Rössler. Esta equivalência foi verificada através de análise topológica.

Assim, em uma segunda etapa de uso das técnicas de otimização, foram estimados dados com intervalos dentro de uma região com os valores [-3.5 -2.5;-1.45 -0.45;-6.5 -5.5]. Para determinar estes intervalos utilizou-se a superfície s1 de Amaral et al (2006) e tomou-se \pm 0,5 em torno de cada um dos parâmetros da superfície.

Dessa maneira, é possível estabelecer uma tentativa de encontrar outra superfície ou mesmo verificar se há uma região de valores que podem caracterizar um comportamento (a depender do conjunto de valores estimados). Assim, os testes foram realizados exatamente como os anteriores, em termos de tamanho de população, iterações e simulações.

A Figura 5.5 apresenta os valores obtidos pela otimização direcionada com os parâmetros conseguidos em Amaral et al.(2006). É percebida uma aproximação entre os parâmetros estimados, permitindo concluir que os valores dos parâmetros da superfície de chaveamento em Amaral et al. (2006) podem ser utilizados para direcionar a busca do algoritmo genético melhorando significativamente os resultados. Além disso, demonstra que há uma faixa de valores que determinam a propriedade de caos, não ficando assim restrito tão somente a outra superfície de chaveamento, mas que há uma região de valores que possuem tais características.



Figura 5.5: Otimização com intervalo de busca em [-3.5 -2.5;-1.45 -0.45;-6.5 -5.5]

Ao realizar a análise topológica de todos os parâmetros estimados (40 valores), foi possível encontrar pelo menos seis superfícies de chaveamento equivalentes ao sistema de Rössler. Foi aplicado ainda, o método de Quasi-Newton, com a função *fmincon* do *Matlab* para restringir o espaço de busca. Foi utilizado como parâmetro inicial, os valores estimados pelo algoritmo genético, porém não foram obtidos resultados de melhoria expressivos. Em alguns casos até mesmo foi verificado uma piora nos resultados obtidos anteriormente. A simulação ocorreu em uma rotina implementada em Fortran e as superfícies que geraram um atrator caótico equivalente ao sistema de Rössler foram:

$$s_1 = x - 3,1055y - 0,96459y^2 - 5,9426;$$
(21)

$$s_2 = x - 2,7478y - 0,96142y^2 - 5,6035;$$
⁽²²⁾

$$s_2 = x - 2,7061y - 0,90366y^2 - 5,5600;$$
⁽²³⁾

$$s_4 = x - 3,109y - 0,88918y^2 - 6,3998;$$
⁽²⁴⁾

$$s_{\rm s} = x - 2,5637y - 0,96031y^2 - 6,0036; \tag{20}$$

$$s_6 = x - 2,8142y - 0,87782y^2 - 5,5577;$$
⁽²⁶⁾

Ao considerar tais superfícies, foram gerados os atratores caóticos para cada uma delas, conforme Figura 5.6, em que se podem ver os atratores para as superfícies s_1, s_2, s_3 .

(05)



Figura 5.6: Atratores Caóticos obtidos para as superfícies s1, s2, s3

Os atratores no plano x,y servem para auxiliar na definição da seção de Poincaré. Ao gerar o mapa do primeiro retorno de acordo com as informações obtidas, é possível verificar a semelhança entre o mapa obtido e o mapa de primeiro retorno para o atrator de Rössler.

Este é capaz de fornecer informações importantes como a quantidade de ramos do atrator e se o mesmo tem as características do sistema original de Rössler, como por exemplo o mecanismo de dobra.

A Figura 5.7 apresenta os mapas gerados para as superfícies s_1, s_2, s_3 .



Figura 5.7: Mapas do Primeiro Retorno para as superfícies s1, 52, 53

Com os mapas gerados, é possível obter as órbitas que compõem o atrator e o número de conexões entre os pares de órbitas, conforme Tabela 5.3:

Órbitas	1	10	101111
10	-1	-	-5
101111	-3	-5	-
101110	-3	-5	-15

Tabela 5.3: Número de Conexões entre os pares de órbitas para s_1

Tais informações são utilizadas para determinar a relação entre o LK e os elementos da matriz M, que é a mesma reproduzida pelo sistema original de Rössler:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$
(27)

Assim, fica demonstrado que os modelos s_1, s_2, s_3 são topologicamente equivalentes ao sistema de Rössler, porque apresentam o mesmo padrão do sistema de Rössler, verificado pela matriz M do *template*.

5.3 ESTUDO DO SISTEMA LINZ-SPROTT

Após uma pesquisa para encontrar um sistema com não linearidade de valor absoluto, Linz e Sprott (2000) descobriram o sistema:

$$\ddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} - |x| + 1 = 0$$
⁽²⁸⁾

Acontece caos para a = 0,6 e b = 1. Caos também ocorre se os sinais dos dois últimos termos são invertidos, com um atrator que é uma imagem invertida do original sobre x = 0.

Podemos reescrever o sistema em (28) como:

$$\dot{x} = y$$

 $\dot{y} = z$ (29)

 $\dot{z} = |x| - y - 0.6z - 1$

O atrator gerado pelo sistema, resolvido pelo método de Runge-Kutta é demonstrado na Figura 5.8.



Figura 5.8: Atrator Sistema Linz-Sprott original (à esquerda) e com Transformação Linear (à direita)

A matriz Jacobiana do sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \pm 1 & -1 & -0,6 \end{pmatrix}$$
(30)

Os pontos fixos do sistema são:

$$p- = [-1;0;0] \tag{31}$$

$$p + = [1;0;0]$$
 (32)

Deve-se verificar qual dos dois pontos fixos se encontra dentro do atrator. No caso, o p-. Assim, a nova Matriz Jacobiana é:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -0,6 \end{pmatrix}$$
(33)

Ao gerar o atrator no plano x,y pode-se perceber características que dificultam a definição do local correto para a Seção de Poincaré, conforme a figura 5.9 (à esquerda):



Figura 5.9: Sistema Linz-Sprott Original e com transformação linear gerado no plano x,y

O mapa do primeiro retorno do atrator original do sistema Linz-Sprott pode ser visto na figura 5.10 (à esquerda):



Figura 5.10: Mapa de Primeiro Retorno Linz-Sprott e com transformação linear

Assim, foi necessário realizar uma transformação linear em que a matriz de transformação é dada pelos autovetores associados ao ponto fixo que fica imerso ao atrator. Com essa transformação, a espiral crescente fica no plano x,y e a dobra em z, facilitando a visualização das regiões de transição, como mostrado na figura 5.11. Dessa maneira, podem-se escolher pontos na primeira e segunda região de transição, sendo possível calcular o plano que divide o espaço em duas regiões. O atrator transformado, bem como no plano x,y e seu mapa do primeiro retorno podem ser observados nas Figuras 5.8, 5.9 e 5.10.



Figura 5.11: Regiões de transição que auxiliam na escolha dos pontos para os parâmetros do plano. Fonte: Amaral (2006)

Para encontrar os parâmetros do plano que divide o espaço, foram considerados os seguintes pontos p1=[-1,207 -2,159 0,05201]; p2=[-1,187 -1,743 0,051] e p3=[0,06213 1,706 0,6743]. Com isso, foram realizadas as seguintes operações para encontrar os dois vetores a seguir:

$$\overrightarrow{p1p2} = p2 - p1 \tag{34}$$

$$\overline{n1n3} = n3 - n1$$
 (35)

Com os valores de (34) e (35) é possível calcular um vetor normal, conforme abaixo:

$$N = \overline{p1p2}(2:3) \times \overline{p1p3}(2:3)$$
(36)

Assim, é factível encontrar três parâmetros (a;b;c) da equação geral do plano:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Esses parâmetros (a;b;c) correspondem às coordenadas do vetor N. Resta apenas o cálculo de *d*. Para isso, foi realizada a operação:

$$d = -p1 x N \tag{37}$$

A equação do plano, portanto foi dada como:

+0,5750 - 0,6764z

$$0,2628x - 0,0137y - 0,4507z + 0,3110 = 0$$
⁽³⁸⁾

Dessa maneira, com os pontos gerados do sistema, representados por g, tem-se:

$$f = [g((g,1),1)][0,2628;-0,0137;-0,4507;0,3110]$$
(39)

Ao encontrar f, é preciso verificar os dados de uma região e de outra, procurando quando f > 0 e f < 0. As equações do sistema transformado são:

$$\hat{x} = 0,4260x + 0,9685y - 1,670 + 0,7173z + 1,060 * |0,5128x + 0,1124y + 0,57 \begin{cases} 40 \\ -0,6764z | \end{cases}$$

$$\hat{y} = 0,7878x + 1,835y - 0,9211 - 0,3956z - 0,5848 * |0,5128x + 0,1124y + 0,5 \end{cases}$$

$$= 0,6764z | \hat{z} = 0,3624x + 0.07941y - 0,4029 + 0,3575z + 0,7067 * |0,5128x + 0,1124y \end{cases}$$

$$(42)$$

O número de conexões entre os pares de órbitas periódicas instáveis pode ser visto na Tabela 5.4:

Tabela 5.4: Número de conexões entre os pares de órbitas periódicas instáveis para o Atrator de Rössler

Órbitas	1	10	1011	10111

(07)

)

10	1	-	-	-
1011	2	3	-	-
10111	2	4	8	-
101111	3	5	10	12

A matriz M que descreve o sistema é:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 (43)

Como foi feito para o sistema de Rössler, foram aplicadas as mesmas técnicas para encontrar outra superfície de chaveamento e verificar se há outros valores dentro de uma faixa ou região que caracterizam-se com comportamentos semelhantes e são topologicamente equivalentes.

Buscando dar uma melhor direção para as buscas foi utilizado o método dos mínimos quadrados que é uma técnica de otimização matemática que procura encontrar o melhor ajuste para um conjunto de dados tentando minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre o valor estimado e os dados observados.

Para isso foram utilizadas das equações em (40), (41) e (42) e foram estimados os valores para serem otimizados por um algoritmo genético, por meio do cálculo o erro da derivada.

Assim, a função objetivo é:

$$f = \frac{1}{2n} \sum \left[\left(\dot{x}_i - \dot{x}_i \right)^2 + \left(\dot{y}_i - \dot{y}_i \right)^2 + \left(\dot{z}_i - \dot{z}_i \right)^2 \right]$$
(43)

Em uma primeira tentativa com a estrutura de algoritmos genéticos, foi iniciada a busca com 300 indivíduos e 500 iterações. O espaço de busca utilizado foi de ±

0,5 em torno de cada um dos parâmetros da superfície. Foram estimados 17 superfícies nos intervalos [-0,3777 0,6223;-0,5313 0,4687;2,6556 3,6556;-0,5304 0,4696]. A Figura 5.12 ilustra os valores para cada um dos 4 parâmetros.



Figura 5.12: Otimização com intervalo de busca em [-0,3777 0,6223;-0,5313 0,4687;2,6556 3,6556;-0,5304 0,4696]

Com os dados gerados foram testadas todas as superfícies, porém nenhuma delas conseguiu gerar um modelo equivalente. Abaixo seguem algumas das superfícies encontradas:

$$s_{*} = 0.2568x + 0.01364v - 0.33234z + 0.32496 \tag{44}$$

$$s_{\rm s} = 0,2706x + 0,068127y - 0,36547z + 0,66374 \tag{40}$$

$$s_c = 0.30552x - 0.06863y - 0.37649z + 0.72256 \tag{46}$$

É importante notar que foi possível obter outros modelos. A seguir temos os 3 atratores gerados para as superfícies $S_{4,1}S_{5,1}S_{6}$ na Figura 5.13.

(15)



Figura 5.13: Modelos gerados com parâmetros das superfícies s4, s5, s6

Para verificar se os modelos eram equivalentes, foram gerados os mapas de primeiro retorno. Conforme podem ser observados na Figura 5.14, os mesmos diferem do modelo original e do modelo transformado do Sistema Linz-Sprott, pois apresentam características distintas, com 3 ramos.

Foram diversas superfícies entregues pela otimização que geraram este tipo de estrutura.



Figura 5.14: Mapas do Primeiro Retorno para 54, 55, 56

Diante de tais resultados ainda foi feita uma tentativa de gerar populações com espaço de busca entre [-10 10]. Os dados para a otimização foram os mesmos do processo anterior. Algumas das superfícies que geraram modelos:

$$s_7 = 4_1 1366x - 0.93248y - 5.1742z + 9.8578$$
⁽⁴⁷⁾

$$s_8 = 3,959x - 0,94469y - 5,1028z + 9,5471$$
⁽⁴⁸⁾

$$s_{\rm s} = 3,2714x - 0,71824y - 4,038z + 7,7545 \tag{49}$$

A Figura 5.15 mostra os parâmetros estimados como resultado das simulações realizadas, em que é percebida uma uniformidade maior em relação aos valores estimados, porém sem o resultado de equivalência topológica.



Quantidade de Gerações de Dados



A Figura 5.16 mostra os atratores obtidos para os valores estimados:





Figura 5.16: Atratores encontrados para as superfícies \$7, \$8,\$9

No entanto, ao gerar os mapas de primeiro retorno para iniciar a análise topológica, foram encontradas as mesmas estruturas anteriores, não equivalentes ao Sistema em que foi aplicada a transformação. A Figura 5.17 demonstra as estruturas dos atratores da Figura 5.16.





Figura 5.17: Mapas do Primeiro Retorno para 57.58.59

Diante do insucesso em conseguir os modelos, foi aumentado os valores para restringir o espaço de busca para ± 1 em torno da superfície anteriormente testada.

Foram realizadas novas simulações e estimados mais 15 valores para verificar se era possível conseguir as estruturas topológicas desejadas. A Figura 5.18 apresenta os valores estimados para os parâmetros da superfície de chaveamento.



Figura 5.18: Otimização com intervalo de busca em [-0.7372 1.2628;-1.0137 0.9863;-1.4507 0.5493;-0.6890 1.311]

Foram encontradas várias estruturas como, por exemplo, órbitas de período 1, como a mostrada na Figura 5.19.



Figura 5.19: Órbita de período 1 encontrada com uma das superfícies

Outras superfícies testadas também não tiveram sucesso, porém foram realizados alguns ajustes em determinados parâmetros e começou-se a observar uma modificação nos mapas de primeiro retorno, bem como na estrutura do atrator.

Este sempre apresentava uma formação em comum (pontas ou quinas), entretanto, quando ajustados os parâmetros C2 e C4, que representam o coeficiente de y e da constante da equação, a superfície encontrada pelo algoritmo genético como:

$$s_{10} = 0,56213x + 0,12804y - 0,53121z + 1,2362$$
⁽⁵⁰⁾

Quando ajustada em y e na constante tem-se:

$$s_{11} = 0,56213x + 0,07104y - 0,53121z + 0,323$$
 (51)

1-4



A Figura 5.20 apresenta o atrator em 3D e no plano x,y para a superfície s_{11} :

Figura 5.20: Atrator gerado com a superfície s_{11} e o mesmo atrator no plano x,y

Ao analisar a estrutura do atrator é nítida a diferença em relação aos encontrados anteriormente. Em vários outros testes foi observado que assim como no sistema de Rössler, pode-se concluir que há uma região ou faixa de valores para os parâmetros que é possível encontrar os modelos que se deseja.

O mapa de primeiro retorno para o atrator da Figura 5.20 pode ser visualizado abaixo e, assim, verificada a semelhança do mesmo com o atrator que sofreu a transformação linear. Isso pode ser observado na Figura 5.21 comparada com a Figura 5.10.



Figura 5.21: Mapa do Primeiro Retorno para a superfície s_{11}

Dessa forma, a análise topológica pode responder se o modelo é topologicamente equivalente ao sistema Linz-Sprott. As órbitas encontradas para o sistema foram: 1, 10, 1011, 101110, 101111. O número de conexões entre os pares de órbitas periódicas instáveis testadas pode ser visto na Tabela 5.5:

Tabela 5.5: Número de conexões entre os pares de órbitas periódicas instáveis para a superfície s11

Órbitas	1	10	101110
10	1	-	-
1011	2	3	-
101110	-	5	-

A matriz M que descreve o sistema é a mesma verificada anteriormente, comprovando assim a equivalência topológica, pois possui os mesmos valores para a geração do *template*.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(52)

5 RESULTADOS

6 CONCLUSÃO

As pesquisas em sistemas não lineares e modelos com estruturas por partes ganham cada vez mais importância. No caso dos sistemas não lineares há várias aplicabilidades em sistemas elétricos de potência, inteligência artificial e até mesmo em processadores, para citar alguns. No caso de modelos com estruturas por partes, conforme visto, se dá pelo fato de conseguirem dividir grandes problemas em problemas menores de mais fácil solução e até mesmo apresentar relação direta com sistemas físicos. Isso, inclusive, pode permitir a utilização de técnicas para converter um modelo em outro. Porém, ainda é necessário estabelecer maneiras de obter estes sistemas de forma mais rápida e fácil.

Neste trabalho foi apresentada uma metodologia baseada no uso de técnicas de otimização, mais especificamente o uso do algoritmo genético, que se mostrou importante desde que a região do espaço de busca esteja limitada de acordo com informações obtidas de uma análise topológica anterior.

Foi verificado através de um grande número de simulações que os métodos Quasi-Newton não trouxeram nenhuma melhora significativa para os resultados obtidos pelo algoritmo genético. Foi visto situações em que a estrutura do algoritmo genético entregava uma superfície caótica (porém, não equivalente ao modelo requerido) e quando estes dados eram entrada ou semente para o método Quase-Newton, essa superfície deixava de demonstrar caos.

O trabalho ainda mostra que é possível reduzir a complexidade de sistemas não lineares com a intenção de obter mais informações sobre o atrator de Rössler. Algo relevante e que deve ser destacado é que foi encontrada uma faixa de valores em uma região do atrator que apresentam o mesmo comportamento e possuem as mesmas características do sistema original de Rössler. O mesmo foi visto em sistemas Rössler-like, como o sistema Linz-Sprott.

Neste caso específico do Linz-Sprott é possível perceber que nem sempre é tarefa simples encontrar modelos afins, mesmo quando se parte de um modelo afim. Isso pode ser justificado pelo fato de que nos modelos afins parte-se de um local estabelecido e para um sistema original pode existir ainda diversas regiões que podem tornar-se modelos afins. Como visto, para este sistema, mesmo utilizando técnicas de otimização, mínimos quadrados e linearização foi através de uma percepção de ajuste que foi encontrado o modelo afim por partes.

Tais resultados foram interessantes, porque era esperado apenas outras superfícies de chaveamento isoladas. Isso, então abre a possibilidade de a partir deste estudo, viabilizar a aplicação das técnicas descritas para obter outros modelos afim por partes de outros sistemas não lineares.

A validação dos sistemas através de análise topológica é fator fundamental para a certeza de que o modelo afim por partes é de fato equivalente topologicamente ao sistema original.

Com respeito a trabalhos futuros poderão ser abordados questões relativas a:

- Aplicar técnicas de otimização já direcionadas pela análise topológica para populações maiores e mais gerações.
- Utilizar hardware superior, o que poderá colaborar em obter os dados estimados mais rapidamente e assim agilizar os testes das superfícies encontradas.
- Conseguir relacionar e identificar os parâmetros das equações que de fato, alteram o comportamento da estrutura estudada.
- Verificar de acordo com as faixas de valores encontradas neste estudo, os possíveis limites das regiões e assim, observar como eles influenciam os modelos.
- Aplicar outras técnicas de otimização após a utilização do genético, com exceção dos métodos de Quasi-Newton, para tentar melhorar a busca, sem necessidade de ajustes dos parâmetros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aguirre, Luis Antonio (2007). *Introdução à identificação de sistemas: técnicas lineares e não lineares aplicadas a sistemas reais.* Terceira Edição. Belo Horizonte: Editora UFMG

Amaral, G. (2006). Sistema de dinâmica não linear por meio de modelos afins por partes: Um método baseado em topologia. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais.

Amaral, G., Letellier, C. and Aguirre, L. (2006). *Piecewise affine models of chaotic attractors: The rossler and lorenz systems.* Chaos, 16(1):1-13.

Chengtao, W. e. a. (2007). *Identification of dynamics systems using piecewise-affine basis function models.* Automatica, 43(10):1824-1831.

Currano, L. (2010). Latching microelectronechanical shock sensor systems: Design, modeling, and experiments. University of Maryland.

Garcia, M. (2009). *Uma contribuição ao controle de sistemas comutados.* Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina.

Gilmore, R. (1998). *Topological analysis of chaotic dynamical systems*. Reviews of Modern Physics, 70(4).

Heemels, W. P. M. W., Çamlibel, M.K., e Shumacher, J.M.H. (2002). *On the dynamic analysis of piecewise-linear networks.* IEEE Transactions on Circuits and Systems.

Leite, P, Carneiro, A. e de Carvalho, A. C. P. F. (2006) *Aplicação de Algoritmos genéticos na Determinação da Operação Ótima de Sistemas Hidrotérmicos de Potência*. Journal Controle & Automação, Brazilian Society of Automation, Vol. 17, No. 1.

Le Sceller, L., Letellier, C., e Gouesbet, G. (1994) *Algebraic evalution of linking numbers of instable periodic orbits in chaotic attractors.* Phys. Rev. E, 49(5):4693-4695

Lorenz, E. (1963). *Deterministic nonperiodicow*. Journal of Atmospheric Sciences.

Monteiro, L. (2006). *Sistemas Dinâmicos.* Ed. Livrariada Física. Segunda edição: São Paulo.

Oliveira, E. (2006). Análise da dinâmica de um pêndulo elástico com excitação vertical no suporte. Dissertação de Mestrado. Universidade EstadualPaulista.

Paoletti, S. e. a. (2010). On the input-output representation of piecewise affine state space models. IEEE Transactions on Automatic Control.

Roll, J. (2001). Robust Verification and Identification of Piecewise Affine Systems.

Tese de Doutorado, Department of Electrical Engineering, Linköping University,

SE-581 83 Linköping, Sweden

Roth, B. (2003). *Determinação de pontos fixos e órbitas periódicas em sistemas caóticos.* Dissertação de Mestrado, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos

Savi, M. (2006). *Dinâmica Não Linear e Caos.* Ed. E-pappers. Primeira edição: Rio de Janeiro

Silva, R. L. (2006). Oscilações Espontâneas de Corrente Elétrica e Rotas para o

Caos em GaAs Semi Isolante. Tese de Doutorado. Universidade Federal de

Minas Gerais.

Sontang, E. (1981). *Nonlinear regulation: The piecewise linear approach.* IEEE transactions on Automatic Control.

Sprott.J.C. and Linz, S. J. (2000). Algebraically Simple Chaotic Flows. International

Journal of Chaos Theory and Applications. Volume 5, Nº 2.

Takahashi, R. H. C., Peres, P. L. D.& Ferreira, P. A. V. (1997). *Multiobjective* H_2/H_1 guaranteed cost PID design, IEEE Control Systems Magazine 17(5)

Takahashi, R. H. C. (2007). *Otimização Vetorial.* Volumes 1,2 e 3. Universidade Federal de Minas Gerais.

Tanomaru, J. (1995). *Motivação, fundamentos e aplicações de Algoritmos genéticos.* Anais do II Congresso Brasileiro de Redes Neurais.

Tsankov, T.D. and Gilmore, R. (2004). *Topological aspects of the structure of chaotic attractors in R3*, Phys. Rev. *E* 69

Villate, J. (2007). *Introdução aos Sistemas Dinâmicos - Uma abordagem prática com Máxima*. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Primeira edição: Porto

Von Zuben, F. J. (2010). *Caracterização de Sistemas Lineares e Técnicas de Linearização*. DCC. Universidade Estadual de Campinas

Wang, H.O; Abed, E.H.; Hamdan, A.M.A. (1994).*Bifurcations, Chaos, and Crises in Voltage Collapse of a Model Power System*. IEEE Transactions on Circuits and Systems. Vol. 41. N^o 3