CEFET e UFSJ
Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Programa de Mestrado em Engenharia Elétrica
Modelagem e Controle de Sistemas - Sistemas de Controle

Marlon Henrique Teixeira

Controle Robusto $\mathcal{H}_\infty$ com alocação regional de polos de sistemas incertos discretos no tempo com atraso nos estados

Belo Horizonte
2013

Marlon Henrique Teixeira

Controle Robusto $\mathcal{H}_\infty$ com alocação regional de polos de sistemas incertos discretos no tempo com atraso nos estados

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, parceria ampla entre CEFET-MG e UFSJ como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Modelagem e Controle de Sistemas - MCS. Linha de pesquisa: Sistemas de Controle - SC.

Orientador: Prof. Dr. Valter J. S. Leite
Co-orientador: Prof. Dr. Eduardo N. Gonçalves

Belo Horizonte
2013

Marlon Henrique Teixeira
Engenheiro Eletrônico - Universidade de Itaúna - MG

Controle Robusto $\mathcal{H}_\infty$ com alocação regional de polos de sistemas incertos discretos no tempo com atraso nos estados

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, parceria ampla entre CEFET-MG e UFSJ como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Modelagem e Controle de Sistemas - MCS. Linha de pesquisa: Sistemas de Controle - SC.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Reinaldo Martinez Palhares
DELT/UFMG

Prof. Dr. Eduardo Nunes Gonçalves
PPGEL/CEFET-MG

Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite
PPGEL/CEFET-MG

Profa. Dra. Valceres Vieira Rocha e Silva
DEE/UFSJ

Belo Horizonte
2013

Para meus pais, Rafael Teixeira de Brito (em memória) e Letícia das Graças Teixeira

Agradecimentos

Agradeço,

ao Professor Valter J. S. Leite.

à Letícia: minha maravilhosa e amada mãe.

à Brenda (Baixinha): minha adorada filha.

à Isabela (Meu Anjinho): minha amada mulher.

ao André Caldeira: amigo de mestrado.

ao Márcio: responsável pelo LEACOPI.

à Rose: secretária do PPGEL.

ao CEFET-MG.

à FAPEMIG.

à CAPES.

à todos que de alguma forma contribuíram com o meu progresso.

Nem tudo o que se enfrenta pode ser modificado. Mas nada pode ser modificado até que seja enfrentado.

Resumo

Problemas de síntese robusta com alocação regional de polos ($\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilidade) e custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas lineares incertos, invariantes e discretos no tempo, sujeitos a atrasos incertos no vetor de estados, são tratados nesta dissertação. Os sistemas incertos com atraso no vetor de estados são tratados através de seus equivalentes incertos aumentados sem atraso, os quais, por meio de operações que mapeiam os autovalores do sistema aumentado numa região de raio r e centro α dentro do círculo de raio unitário, consideram a $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilidade. Esses sistemas incertos aumentados e com autovalores mapeados, passam por uma transformação de similaridade através de uma matriz de mudança de base, resultando em sistemas incertos equivalentes com múltiplos atrasos nos estados. Tratando as incertezas como politópicas e de acordo com os critérios de estabilidade quadrática, funções de Lyapunov-Krasovskii dependentes de parâmetros são utilizadas para caracterizar a norma $\mathcal{H}_\infty$, resultando em condições na forma de Desigualdades Matriciais Lineares (*do inglês Linear Matrix Inequalities - LMIs*). Tais condições tem como vantagem o fato de serem convexas e de dimensões finitas. Desigualdade de Jensen, Lema de Finsler, transformações de congruência, são ferramentas utilizadas neste trabalho para garantir dimensão finita às condições, desacoplando as matrizes de Lyapunov das matrizes dinâmicas. Garantindo a Schur estabilidade dessas condições, garante-se a $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilidade com estimação do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ do sistema original. A abordagem utilizada nesta dissertação é uma alternativa ao que existe hoje na literatura. Vários exemplos são desenvolvidos para demonstrar a utilização e vantagens do método.

Palavras-chave: Sistemas discretos no tempo com atraso incerto no vetor de estados. Condições dependentes do atraso. Desigualdades matriciais lineares. Domínio politópico. Custo garantido $\mathcal{H}_\infty$. Funções de Lyapunov-Krasovskii. Lema de Finsler. Desigualdade de Jensen. Otimização.

Abstract

Problems of robust synthesis with regional allocation of poles ($\mathcal{D}(\alpha,r)$-stability) and guaranteed cost $\mathcal{H}_\infty$ of uncertain linear systems, and discrete-time invariant, subject to uncertain delays in the vector states, are treated in this dissertation. The uncertain systems with delayed state vector are treated through an uncertain equivalent augmented systems without delay, which, through operations that map the eigenvalues of the augmented system in a region of radius r and center α within the unit radius circle, consider $\mathcal{D}(\alpha,r)$-stability. These uncertain and augmented systems with mapped eigenvalues undergo a similarity transformation through a matrix of change of basis , resulting in uncertain equivalent systems with multiple delays in the states. Treating uncertainties as polytopic and according to the quadratic stability criteria, Lyapunov-Krasovskii functions, dependent of parameters , are used to characterize the $\mathcal{H}_\infty$ Norm resulting in conditions as Linear Matrix Inequalities (LMI). Such conditions have the advantage that they are convex and have finite dimensions. Jensen inequality, Finsler's Lemma , congruency transformations, are tools applied in this work to ensure finite dimensional conditions, decoupling the Lyapunov matrices of dynamic matrices. Ensuring Schur stability of these conditions, guarantees the $\mathcal{D}(\alpha,r)$-stability with estimation of $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed cost of the original system. The approach used in this dissertation is an alternative to what exists today in the literature. Several examples are presented to demonstrate the use and benefits of the method.

Key-words: Uncertain linear systems. Discrete-time systems with time-varying delay in state vector. Delay-dependent conditions. Linear matrix inequalities. Polytopic domains. Guaranteed $\mathcal{H}_\infty$ cost. Lyapunov-Krasovskii Functions. Finsler's Lemma. Optimization.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Acrônimos e Notação

Acrônimos

LMI	Linear Matrix Inequality (desigualdade matricial linear)
LMIs	Linear Matrix Inequalities (desigualdades matriciais lineares)
EQ	Estabilidade Quadrática
L-K	Lyapunov-Krasovskii
SeDuMi	Self-Dual-Minimization

Notação

$\triangleq$	igual por definição
$\exists$	existe
$\in$	pertence a
$\otimes$	Produto de Kronecker
z	operador avanço
γ	custo garantido $\mathcal{H}_\infty$
$\lambda_i(A)$	i-ésimo autovalor da matriz A
$\bar{\sigma}$	valor singular máximo
ω	frequência angular
T_s	período de amostragem
$\mathbf{Co}\{\cdot\}$	casca convexa do argumento que lista os vértices do politopo
$\star$	indica bloco simétrico nas LMIs em relação à diagonal principal
A	notação para matrizes (letras maiúsculas do alfabeto)
A^T	indica a operação de transposição em um vetor ou matriz
$A > 0$	indica que a matriz A é simétrica definida positiva
$A \geq 0$	indica que a matriz A é simétrica semi-definida positiva
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{R}_+$	conjunto dos números reais não negativos
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais (incluindo o zero)
$\mathbb{N}_*$	conjunto dos números naturais (excluindo o zero)
τ	denota o valor do atraso no vetor de estados $\in \mathbb{N}_*$.

$d \in \mathcal{I}[1, \tau]$	denota o atraso no vetor de estados $\in \mathbb{N}_*$.
$v \in \mathcal{I}[1, N]$	denota o v-ésimo vértice do sistema $\in \mathbb{N}_*$.
Υ	indica as matrizes dos sistemas tratados nesse trabalho
Υ_v	indica as matrizes do v-ésimo vértice do sistema em malha aberta
$\mathbf{I}$	matriz identidade de dimensão apropriada
$\mathbf{0}$	matriz de zeros de dimensão apropriada
ℓ_2	espaço das sequências quadraticamente somáveis
N	especialmente utilizada para denotar o número de vértices de um politopo
k	número da amostragem
$\|\cdot\|$	norma euclidiana de um vetor no $\mathbb{R}^n$

Capítulo 1

Introdução Geral

1.1 Introdução

Garantir certos índices de desempenho para sistemas é tão importante quanto a sua estabilidade. Porém se o sistema apresentar características de instabilidade, tais índices de desempenho ficam em segundo plano. Neste caso se faz necessário estabilizar o sistema antes de mais nada. Para tal, o uso de controladores é uma forma eficiente de fazê-lo, sendo a realimentação de estados uma excelente opção para sistemas representados no espaço de estados, pois o projeto do controlador para este caso consiste em encontrar ganhos estáticos apenas.

Uma vez estabilizado o sistema, ou até ao mesmo tempo em que se garante a estabilidade do sistema, critérios de desempenho como coeficiente de amortecimento, overshoot, tempo de resposta e taxa de decaimento, podem também serem assegurados. A relação entre esses critérios e a abordagem utilizada neste trabalho será discutida adiante. Alocação regional de polos e estimação do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, estabilização com taxa de decaimento garantida, são exemplos de técnicas para garantia de desempenho de sistemas que são utilizadas nesta dissertação.

Os sistemas aqui tratados são lineares discretos no tempo e possuem atraso incerto no vetor de estados. Atraso esse gerado pela medição e atuação, atraso de transporte e comunicação, e até atraso introduzido propositadamente na tentativa de melhora de desempenho do sistema [SP05] [Nic01] [HW02]. Além de possuírem atraso incerto no vetor de estados, tais sistemas são discretos no tempo, sendo seus controladores implementados digitalmente, como por exemplo, sistemas de telecomunicações, processos de usinagem, químicos e sistemas robóticos onde todos sofrem a influência do atraso interferindo tanto na sua estabilidade quanto no seu desempenho.

Bernoulli e Euler, no século *XVIII*, foram os pioneiros da teoria de análise de sistemas com atraso, em seguida vieram Voltera [Vol28], [Vol31], na década de 20, Krasovskii [Kra63], na década de 60, que estudou a estabilidade desses sistemas com a abordagem de Lyapunov, idealizando a ponderação entre os valores dos estados nos instantes atual e atrasado através do funcional de Lyapunov. Até hoje o assunto é foco de grande atenção dos pesquisadores, como se pode observar em diversos livros [DV97], [MZJ87], [Mah00], [Nic01].

Existem basicamente dois tipos de condições suficientes para analisar a estabilidade: condições que são dependentes e condições que são independentes do atraso [Che03]. As condições independentes do atraso verificam a estabilidade do sistema para qualquer valor do atraso e po-

dem levar a resultados muito conservadores, enquanto que as condições dependentes do atraso são menos conservadoras, pois o sistema é estável desde que o atraso não ultrapasse um determinado valor, no entanto, em geral levam a resultados conservadores se aplicadas em sistemas cuja estabilidade não depende do atraso.

Funções (funcionais) de Razumikhin e de Lyapunov-Krasovskii (L-K) para o caso discreto (contínuo) no tempo são duas das técnicas mais utilizadas para analisar a estabilidade de sistemas com atraso. Sendo as funções de L-K mais utilizadas a partir da década de 90 [Nic01]. Nesta dissertação são utilizadas funções de L-K dependentes de parâmetros, o que traz como vantagem a obtenção de condições convexas de dimensões finitas descritas em termos de Desigualdades Matriciais Lineares (*do inglês Linear Matrix Inequalities - LMIs*). Formular o problema na forma de LMI é conveniente devido a existência de ferramentas computacionais como os pacotes *LMI Control Toolbox* [GNLC95] e o *SeDuMi* [Stu99], do software $MATLAB^{®}$ para resolvê-las e também porque a resolução de LMIs é feita com algoritmos de tempo polinomial (em função do número de variáveis e de linhas de LMIs).

O motivo de não haverem muitos resultados na literatura sobre sistemas discretos no tempo com atraso no vetor de estados, pode ser devido ao fato de que a estabilidade desses sistemas com atraso conhecido invariante no tempo pode ser investigada através de suas representações na forma de sistemas aumentados livre de atraso [KH98], o que impõe limitações importantes ao estudar a estabilidade de sistemas com incertezas, sistemas de grandes dimensões, sistemas com atraso variante no tempo e para síntese de controladores robustos. Também pelo fato de que grande parte dos resultados encontrados serem para condições independentes do atraso e baseados na estabilidade quadrática [ZY08], a qual emprega funções de L-K cujas matrizes de Lyapunov são independentes da incerteza, podendo levar a resultados conservadores [LP03].

As incertezas são aqui tratadas como politópicas. Em [HZ10], [LLZY10], [LM08], [Ric03] encontram-se resultados para sistemas contínuos e em [LY10], [WL10], [LCC+11], para sistemas discretos, ambos com atraso e incertezas. Completando a classificação dos sistemas estudados nessa dissertação, inclui-se a presença de incertezas em todas as matrizes dinâmicas dos sistemas e no valor do atraso, ou seja, são sistemas lineares incertos discretos no tempo com atraso incerto no vetor de estados. Para que isso seja possível o Lema de Finsler (veja Apêndice A.3) é utilizado para desacoplar as matrizes dinâmicas do sistema das matrizes de Lyapunov, através da introdução de variáveis extras ao problema de otimização [dOS01]. A Desigualdade de Jensen (veja Apêndice A.4) também é utilizada, permitindo uma majoração das funções empregadas menos conservadoras que outras encontradas na literatura [ZY08].

Todos os sistemas estão sujeitos a sofrerem influência de sinais de ruído, de efeito de carga e de variações de energia fornecida, sinais estes denominados entradas exógenas. Ao sintetizar os controladores que estabilizam os sistemas tratados aqui, essas entradas exógenas foram levadas em consideração através da aplicação do critério de desempenho de minimização da norma $\mathcal{H}_\infty$ na obtenção das LMIs. Resultados na literatura sobre este assunto podem ser encontrados em [dOOL+04] para sistemas livres de atraso, em [SPL08] para a síntese de controladores no caso de sistemas incertos do tipo neutro, em [WLXG05], [LTP09] e [HWHS08] são tratadas condições de síntese de controladores robustos que garantem o custo $\mathcal{H}_\infty$ da malha fechada e condições de análise de estabilidade para sistemas discretos com atraso variante nos estados com a utilização

de função de L-K e em [LTP04], [MZRZ07], [ZCC06] e [ZHW06] para sistemas discretos no tempo.

Outra maneira de garantir certos critérios de desempenho à um sistema é através da alocação regional dos polos desse sistema. Fazendo essa alocação dentro de uma sub-região específica no plano complexo, a chamamos de $\mathcal{D}$-estabilidade. Nesta dissertação utiliza-se a nomenclatura de $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilidade devido ao fato de que essa sub-região consiste num círculo de origem $(\alpha,0)$ e raio r dentro do círculo de raio unitário que é a região de estabilidade para sistemas discretos no tempo. Resultados sobre este assunto são encontrados em [CG96] e [Lee95] para sistemas contínuos no tempo, em [WHH06] e [MLP03] para sistemas discretos no tempo, em ambos os casos os sistemas são livres de atraso, em [MC06] para sistemas contínuos no tempo com atraso no vetor de estados, em [Che03], [CC06], [XLZ02], [MC09] para sistemas discretos no tempo com atraso no vetor de estados, em [SL10], [SLMN10], são tratadas condições para $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilidade associadas a uma minimização do critério de custo $\mathcal{H}_\infty$.

Como dito anteriormente, critérios de desempenho são assegurados ao estabilizar os sistemas garantindo-se uma alocação regional de polos. Por exemplo, para a região $\mathcal{D}(0,r)$, pode-se reduzir o tempo de acomodação da resposta na medida em que se diminui o valor de r, $0 \leq r \leq 1$. Entretanto, apenas a redução do raio r pode gerar respostas com transitórios indesejáveis. Isso se deve à distribuição das curvas de amortecimento constante no plano Z: polos localizados no semicírculo esquerdo são, pouco amortecidos. Isso pode levar ao surgimento, por exemplo, de sinais de sobrepassagens excessivos. Assim, para um dado valor de r, é, em geral, de interesse obter uma alocação regional dada por $\mathcal{D}(\alpha,r)$, com $\alpha > 0$. Essa escolha permite limitar as oscilações da resposta do sistema enquanto, ao afastar os polos da região da origem, reduz o tempo de acomodação e a magnitude do sinal de controle. Portanto, um compromisso de projeto deve ser sempre alcançado ao se escolher os parâmetros da região $\mathcal{D}(\alpha,r)$.

1.2 Problema Estudado

Problema 1.1 *Considere a classe de sistemas incertos discretos no tempo com atraso incerto no vetor de estados, representados por*

$$\Upsilon(\beta) : \left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & A(\beta)x_k + A_\theta(\beta)x_{k-d} + B(\beta)u_k + B_e(\beta)w_k \\ z_k & = & C(\beta)x_k + C_\theta(\beta)x_{k-d} + D(\beta)u_k + D_e(\beta)w_k \end{array} \right. \tag{1.1}$$

em que $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^p$ e $w_k \in \mathbb{R}^\ell$ são os vetores dos estados, das entradas de controle e das entradas exógenas, respectivamente, $k \in \mathbb{N}$ é a amostragem, $d \in \mathcal{I}[1,\tau]$ é o atraso incerto, podendo assumir qualquer valor inteiro dentro do intervalo, sendo τ o valor máximo e conhecido desse atraso. As matrizes $A(\beta)$ e $A_\theta(\beta) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(\beta) \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $B_e(\beta) \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$, $C(\beta)$ e $C_\theta(\beta) \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $D(\beta) \in \mathbb{R}^{q\times p}$, $D_e(\beta) \in \mathbb{R}^{q\times \ell}$ representam a dinâmica do sistema (1.1) pertencente a um politopo definido pelo conjunto de todas as matrizes obtidas pela combinação convexa de seus N vértices, dado por

$$\mathcal{A}_{o\ell} = \left\{ \Upsilon(\beta) \in \mathbb{R}^{n+q\times 2n+p+\ell} : \Upsilon(\beta) = \sum_{v=1}^{N} \beta_v \Upsilon_v,\ \beta \in \Omega \right\}, \tag{1.2}$$

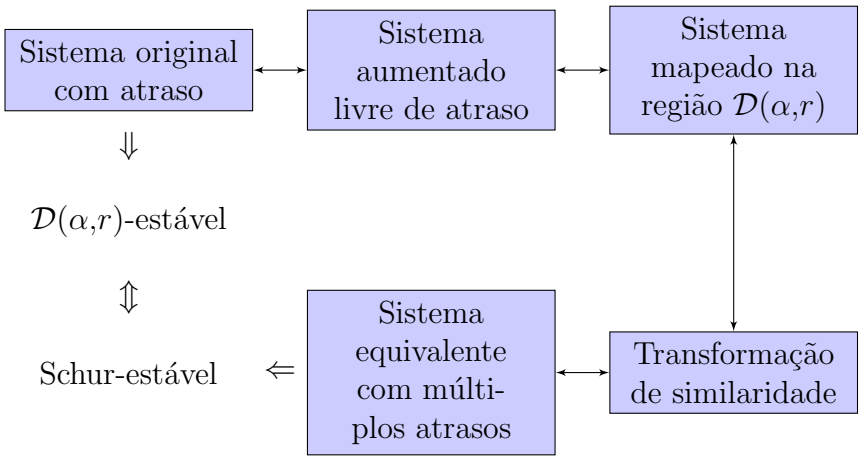

Figura 1.1: Sequência de transformações sofridas pelo sistema

com Ω definido por

$$\Omega = \left\{ \beta : \sum_{v=1}^{N} \beta_v = 1,\ \beta_v \geq 0 \right\}, \tag{1.3}$$

os vértices Υ_v são conhecidos e dados por

$$\Upsilon_v = \left[\begin{array}{cc|c|c} A_v & A_{\theta v} & B_v & B_{ev} \\ \hline C_v & C_{\theta v} & D_v & D_{ev} \end{array} \right],\ v \in \mathcal{I}[1, N]. \tag{1.4}$$

Assumindo a lei de controle

$$u_k = Kx_k + K_\tau x_{k-\tau}, \tag{1.5}$$

deseja-se encontrar uma condição convexa na forma de LMI, utilizando função de Lyapunov-Krasovskii, que permita a obtenção de ganhos robustos de realimentação de estados, K e K_τ de (1.5), as quais estabilizam os sistemas com uma alocação regional de polos especificada e com mínimo valor de custo $\mathcal{H}_\infty$.

Para tal, o sistema passará por algumas transformações (Veja Figura 1.1) como, obtenção de um sistema aumentado livre de atrasos equivalente ao sistema original com atraso, mapeamento dos autovalores do sistema original dentro de uma região especificada, $\mathcal{D}$, e obtenção de um sistema equivalente com múltiplos atrasos nos estados, resultando em condições LMIs. Tais condições LMI são utilizadas na formulação de um problema de otimização, que resolvido determinará os ganhos robustos de realimentação, K e K_τ de (1.5) que estabilizam o sistema com alocação regional de polos e minimizando o custo $\mathcal{H}_\infty$.

1.3 Estrutura da dissertação

O Capítulo 2 apresenta definições e conceitos fundamentais para desenvolvimento e compreensão do trabalho, tais como, controle robusto, sistemas com atraso nos estados, alocação regional de polos, $\mathcal{D}$-estabilidade, norma $\mathcal{H}_\infty$, método direto de Lyapunov, estabilidade quadrática, funções dependentes de parâmetros, estabilidade de sistemas com atraso.

No Capítulo 3 será apresentada a aplicação da norma $\mathcal{H}_\infty$ na síntese de controladores que garantam a $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilidade e custo $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas incertos discretos no tempo com atraso incerto no vetor de estados via sistema aumentado. Condições e exemplos também são apresentados para os seguintes casos particulares: sistema incerto e atraso conhecido, sistema precisamente conhecido e atraso incerto, sistema e atraso precisamente conhecidos.

No Capítulo 4 serão apresentadas condições convexas para estabilização com alocação regional de polos com garantia de custo $\mathcal{H}_\infty$ de acordo com o Problema 1.1 via obtenção de sistema equivalente com múltiplos atrasos do sistema incerto com atraso incerto no vetor de estados. Similarmente ao Capítulo 3 condições e exemplos também são apresentados para os seguintes casos particulares: sistema incerto e atraso conhecido, sistema precisamente conhecido e atraso incerto, sistema e atraso precisamente conhecidos. Neste capítulo o sistema para pelas transformações mostradas na Figura (1.1).

No Capítulo 5 será utilizada a mesma abordagem do Capítulo 4 porém através de uma função de Lyapunov-Krasovskii mais completa, o que leva a resultados menos conservadores.

O Capítulo 6 apresenta as considerações finais, conclusões baseadas na comparação dos resultados dos Capítulos 3, 4 e 5 e propostas de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Preliminares e Definições

Neste capítulo são apresentadas definições sobre controle robusto, sistemas com atraso no vetor de estados, alocação regional de polos, estabilidade segundo Lyapunov-Krasovskii, estabilidade quadrática, funções dependentes de parâmetros, estabilidade de sistemas com atraso no vetor de estados. As quais já existem na literatura e são fundamentais no decorrer desta dissertação.

2.1 Controle Robusto

As perturbações e o ambiente aos quais os sistemas reais estão submetidos, impedem que os mesmos sejam modelados precisamente [DB09, pág.593]. Com isso, os modelos matemáticos dos sistemas apresentam diferentes tipos de incertezas, decorrentes de dinâmica não modeladas, incertezas paramétricas, ruídos, linearização, etc. Portanto é importante levar em consideração tais incertezas na análise de estabilidade e síntese de controladores. Controle robusto é o nome dado a análise e síntese de sistemas com incertezas, cujo objetivo é manter a estabilidade e ou desempenho do sistema apesar dos erros do modelo em relação ao sistema real [DB09], minimizar o efeito sobre certas variáveis do sistemas devido à pertubações externas como ruídos, mudanças de temperatura, pertubações de carga, etc [Tro00].

Uma escolha importante deve ser feita ao trabalhar com sistemas incertos: a forma de tratar as incertezas. Dependendo da escolha do tipo de representação matemática para as mesmas, pode-se, inclusive, inserir mais restrições ao se buscar a solução dos problemas de análise de estabilidade ou síntese de controladores. Nesta dissertação, utiliza-se a caracterização politópica para representar as incertezas.

Um conjunto $\mathcal{A}_{o\ell} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \mathcal{A}x \leq b\}$ é um poliedro definido pela matriz $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e pelo vetor $b \in \mathbb{R}^m$. Se o poliedro é limitado então $\mathcal{A}_{o\ell}$ é denominado politopo [Gon06]. Um politopo também pode ser definido como uma combinação convexa, de um número finito de elementos, chamados vértices do politopo. O conjunto de vértices $\{\Upsilon_1,...,\Upsilon_N\}$ resulta em um $\mathcal{A}_{o\ell} = \mathbf{Co}(\Upsilon_1,...,\Upsilon_N)$, dado por

$$\mathcal{A}_{o\ell} \ = \ \left\{ \Upsilon(\beta) = \sum_{v=1}^{N} \beta_v \Upsilon_v, \, \beta \in \Omega \right\}, \tag{2.1}$$

em que

$$\Omega = \left\{ \beta : \sum_{v=1}^{N} \beta_v = 1,\ \beta_v \geq 0 \right\}, \tag{2.2}$$

sendo $\mathbf{Co}(\cdot)$ a casca convexa do argumento.

Nesse caso o conjunto $\mathcal{A}_{o\ell}$ é convexo, fechado e as matrizes Υ_v são conhecidas. Assim $\Upsilon(\beta) \in \mathcal{A}_{o\ell}$ pode ser descrito por uma combinação convexa dos vértices Υ_v.

Uma particularidade importante dessa abordagem para descrever incertezas é a convexidade do conjunto. Por essa propriedade do politopo, busca-se um conjunto de restrições LMI que se é satisfeito nos vértices do politopo, então garante-se que estas mesmas restrições estão satisfeitas no interior da região formada por estes vértices. Essa propriedade da convexidade será explorada neste trabalho para obter formulações convexas que solucionam alguns problemas de controle robusto. Uma desvantagem é o problema do crescimento exponencial das condições a serem testadas, por exemplo, ao testar as condições para um sistema com 5 elementos incertos, tem-se que verificar 2^5 vértices, ou seja, têm-se que testar as condições em 32 vértices diferentes.

2.2 Sistemas com Atraso nos Estados

A classe de sistemas considerados neste trabalho é aquela formada por sistemas lineares incertos, invariantes e discretos no tempo com atraso invariante no vetor de estado.

O grau de complexidade ao se estudar sistemas com atraso é muito maior do que ao se estudar sistemas livre de atraso. Para entender o motivo desse aumento do grau de complexidade, considere o sistema descrito por

$$x_{k+1} = A(\beta)x_k + A_\theta(\beta)x_{k-d}, \tag{2.3}$$

em que $d = \tau$ e τ é o valor máximo do atraso. O polinômio característico desse sistema é dado por

$$\delta_d(z,\beta) \triangleq \det(z\mathbf{I} - A(\beta) - A_\theta(\beta)z^{-d}). \tag{2.4}$$

Ao avaliar-se a localização das raízes desse sistema, o mesmo é Schur estável se todas raízes de $\delta_d(z,\beta) = 0$ estão no interior do círculo de raio unitário com centro na origem do plano complexo. Nesse caso, diz-se que as raízes de $\delta_d(z,\beta) = 0$ são estáveis. Devido ao aumento no grau do polinômio característico em relação ao sistema livre de atraso, o grau de complexidade ao se avaliar as raízes de torna bem maior. O polinômio característico do sistema com atraso possui $n(\tau + 1)$ raízes que precisarão ser testadas para todo $\beta \in \Omega$.

Por outro lado, através de um sistema aumentado e livre de atraso, pode-se estudar a estabilidade de sistemas discretos no tempo com atraso no vetor de estados. Por exemplo, considere o sistema

$$x_{k+1} = Ax_k + A_\theta x_{k-1}.$$

A dinâmica desse sistema depende do estado atual e do estado no instante anterior. É possível representar esse sistema em uma forma aumentada livre de atraso dada por

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{A}\bar{x}_k, \tag{2.5}$$

com

$$\bar{x}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \end{bmatrix} \text{ e } \bar{A}(\beta, d = \tau = 1) = \begin{bmatrix} A(\beta) & A_\theta(\beta) \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

Analogamente, se o atraso for igual a dois, tem-se que $x_{k+1} = A(\beta)x_k + A_\theta(\beta)x_{k-2}$ pode ser reescrito como em (2.5) com

$$\bar{x}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ x_{k-2} \end{bmatrix} \text{ e } \bar{A}(\beta, d = \tau = 2) = \begin{bmatrix} A(\beta) & \mathbf{0} & A_\theta(\beta) \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

e assim sucessivamente. Diante disso, podemos observar que quanto maior for o atraso, maior será a dimensão do sistema aumentado obtido. Portanto, a utilização dessa técnica aumenta significativamente a complexidade quando utilizada para sistemas naturalmente de grande dimensões. Além do que, não pode-se aplicar essa técnica para o estudo de sistemas com atraso variante no tempo.

2.3 Alocação regional de polos ou $\mathcal{D}$-estabilidade

Um círculo de raio unitário centrado na origem do plano complexo é a região de estabilidade para sistemas discretos no tempo. Pode-se usar uma sub-região dentro do círculo de raio unitário, chamada de $\mathcal{D}$, para assegurar ao sistema certas características de desempenho. Essa região é mostrada na figura 2.1.

Quando todos os autovalores de um sistema discreto e invariante no tempo estão localizados dentro de uma região $\mathcal{D}$, diz-se que esse sistema é $\mathcal{D}$-estável [PABB00], [GX04], [LP03], [CG96].

Neste trabalho, adota-se um círculo de centro (α,0) e raio r como região $\mathcal{D}$. Considera-se $|\alpha| + r < 1$ para que esta região esteja contida no círculo unitário. Assim um sistema discreto no tempo será considerado $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estável se todos os seus autovalores estiverem dentro da região $\mathcal{D}(\alpha,r)$ (Figura 2.1).

Por exemplo, para fazer a análise de $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilidade do sistema (2.5) considere a seguinte operação

$$\tilde{A} = \frac{(\bar{A} - \alpha\mathbf{I})}{r} \tag{2.8}$$

que mapeia os autovalores da matriz $\bar{A}$ localizados no interior da região $\mathcal{D}(\alpha,r)$, Figura 2.1, no círculo de raio unitário [HB92]. Em seguida substitui-se $\bar{A}$ em (2.5) por $\tilde{A}$ ficando

$$\bar{x}_{k+1} = \tilde{A}\bar{x}_k. \tag{2.9}$$

Com isto a análise de $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilidade de (2.5) pode ser analisada pela Schur estabilidade de (2.9).

Assim sendo, uma especificação de desempenho além da estabilidade é atendida, ao se projetar controladores que $\mathcal{D}$-estabilizam os sistemas lineares invariantes no tempo, precisamente conhecidos ou incertos.

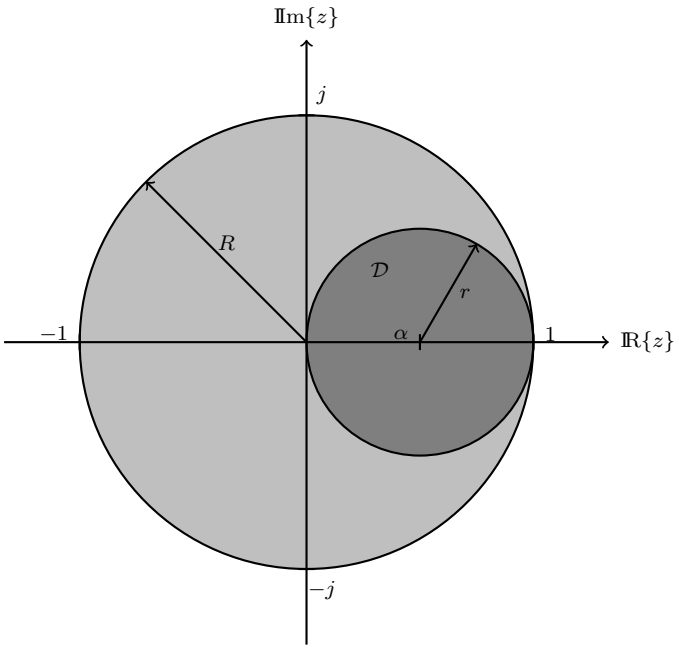

Figura 2.1: Plano complexo e região $\mathcal{D}(\alpha,r)$ para alocação de autovalores de sistemas discretos no tempo.

2.4 Norma $\mathcal{H}_\infty$

Considere a classe de sistemas lineares discretos, invariantes no tempo, livres de atraso e precisamente conhecido, representada por

$$\begin{cases} x_{k+1} &= Ax_k + B_e w_k, \\ z_k &= Cx_k + D_e w_k. \end{cases} \tag{2.10}$$

A matriz de transferência $G_{zw} = C(\mathrm{z}\mathbf{I} - A)^{-1}B + D$, relaciona o vetor de entradas exógenas w e o vetor de saídas controladas z. O custo $\mathcal{H}_\infty$ de uma matriz de transferência de um sistema estável e sem polos sobre o círculo de raio unitário, pode ser definido como o pico do valor singular máximo avaliado sob a frequência $\Omega_k \in [-\pi, \pi]$ e dado por

$$\| G_{zw} \|_\infty \triangleq \sup_{\Omega_k \in [-\pi,\pi]} \overline{\sigma}[G_{zw}(e^{j\Omega_k})], \tag{2.11}$$

sendo $\overline{\sigma}(\cdot)$ o valor singular máximo do argumento.

Interpreta-se a norma $\mathcal{H}_\infty$ através da relação entre os sinais de entrada e saída no domínio do tempo. O ganho ℓ_2 ou ganho RMS de um sistema assintoticamente estável linear invariante no tempo, corresponde ao maior ganho da saída sobre todos os sinais de entrada limitados $w_k \in \ell_2$, dado por

$$\| G_{zw} \|_\infty = \max_{\substack{w_k \in \ell_2 \\ w_k \neq 0}} \frac{\| z_k \|_2}{\| w_k \|_2}, \tag{2.12}$$

supondo condições iniciais nulas.

A norma $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas assintoticamente estáveis, no contexto de ganho ℓ_2, é caracterizada pelo menor valor de γ tal que

$$\|z_k\|_2 \leq \gamma \|w_k\|_2, \quad w_k \in \ell_2. \tag{2.13}$$

Analogamente, estabelece-se a seguinte equivalência:

$$\|G_{zw}\|_\infty < \gamma \Longleftrightarrow z_k^T z_k < \gamma^2 w_k^T w_k, \quad w_k \in \ell_2. \tag{2.14}$$

Métodos de cálculo do limitante denominado Custo Garantido $\mathcal{H}_\infty$, baseado em condições suficientes, formuladas por LMIs, são utilizados. O conceito de estabilidade quadrática [PTP97] foi base para as primeiras formulações por LMIs, porém, resultados conservadores são obtidos ao se usar uma única função de Lyapunov para todo domínio de incerteza. Para reduzir tal conservadorismo vários trabalhos utilizam funções de Lyapunov dependentes de parâmetros e/ou variáveis matriciais extras, como em [dOGB02], [XLZZ04], [TCB05]. Outros métodos baseados na combinação do algoritmo BnB *(do inglês branch-and-bound)* com problemas de otimização formulados como LMIs, possibilitam calcular o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ com uma precisão pré-estabelecida [Gon06] [CLGC12]. Além disso determina o ponto do politopo em que ocorre o pico da norma $\mathcal{H}_\infty$.

2.5 Método direto de Lyapunov

Também conhecido como Segundo Método de Lyapunov, é uma das abordagens mais utilizadas para tratar a estabilidade de sistemas lineares. Esse método, foi criado pelo genial matemático russo Aleksandr Mikhailovich Lyapunov *1857-1918*, cujo pioneirismo de seu trabalho, publicado em *1892* [Lya92], de acordo com [Bha07] *"revolucionou o estudo de estabilidade e continua inspirando novos enfoques para o estudo deste assunto até os dias de hoje"*. Tal método pode ser aplicado nos casos em que o sistema está sujeito a incertezas descritas por um vetor de parâmetro β, devido ao fato da generalidade das condições para verificar a estabilidade assintótica global. Esse resultado é apresentado no teorema:

Teorema 2.1 *Um sistema incerto invariante no tempo é robustamente assintoticamente estável em torno da origem (ponto de equilíbrio do sistema) se existir uma função a valores reais $V(x_k,\beta)$ tal que:*

1. $V(\mathbf{0},\beta) = 0$;
2. $V(x_k,\beta) \to \infty$ *quando* $\|x_k\| \to \infty$;
3. $V(x_k,\beta) > 0, \quad \forall x_k \neq \mathbf{0}, \quad \forall k \geq 0$;
4. $\Delta V(x_k,\beta) < 0 \quad \forall x_k \neq \mathbf{0}, \quad \forall k \geq 0$.

em que $\Delta V(\cdot)$ é a variação de $V(\cdot)$ com relação a k ao longo das trajetórias do sistema (2.3), e pode ser descrita por

$$\Delta V(x_k,\beta) \;=\; V(x_{k+1},\beta) \;-\; V(x_k,\beta). \tag{2.15}$$

Uma função $V(x_k,\beta)$ que satisfaça as condições do Teorema 2.1 é dita uma função de Lyapunov.

2.6 Estabilidade Quadrática

Considere o sistema linear incerto discreto no tempo e livre de atraso

$$x_{k+1} \;=\; A(\beta)x_k. \tag{2.16}$$

Para análise de estabilidade utilizando o Método direto de Lyapunov, suponha que esse sistema pertença a um politopo dado por

$$\mathcal{A}_{o\ell} \;=\; \sum_{v=1}^{N} \beta_v A_v,\; \beta \in \Omega \tag{2.17}$$

com vértices A_v conhecidos e Ω dado em (2.2).

Escolhendo como candidata a função de Lyapunov

$$V(x_k,\beta) = x_k^T P(\beta) x_k \tag{2.18}$$

e

$$P(\beta) = P(\beta)^T \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad : \quad P(\beta) \;=\; P > \mathbf{0},\, \forall\, \beta \in \Omega, \tag{2.19}$$

em que $P(\beta)$ é uma matriz definida positiva para todos os valores admissíveis de β assumindo valores fixos e independentes dos valores de β, se faz necessária e suficiente a existência de (2.18) para a análise de estabilidade de (2.16) quando a matriz dinâmica A é precisamente conhecida. Caso A dependa de β, a função (2.18) passa a ser apenas *suficiente* para estabilidade (robusta) do sistema (2.16). A existência de uma mesma matriz de Lyapunov que satisfaça (2.18)-(2.19) e assegure a estabilidade do sistema para todo o domínio de incertezas, ou seja, independente dos parâmetros incertos β, define o conceito de estabilidade quadrática (EQ) [Bar85]. De acordo com [Lei05], provavelmente esse conceito consiste no resultado mais importante da década de 1980 no contexto de controle robusto.

Utilizando a matriz P definida em (2.19) e a candidata a função de Lyapunov para sistemas lineares discretos livres de atraso (2.16), os três primeiros ítens do Teorema 2.1 são prontamente atendidos. Do quarto item, obtém-se

$$\Delta V(x_k,\beta) \;=\; x_{k+1}^T P x_{k+1} - x_k^T P x_k < \mathbf{0} \tag{2.20}$$

e substituindo (2.16) em (2.20), temos

$$\begin{cases} P > \mathbf{0} \\ A(\beta)^T P A(\beta) - P < \mathbf{0}. \end{cases} \tag{2.21}$$

Aplicando-se o complemento de Schur (veja Apêndice A.2) em (2.21), temos a forma equivalente

$$\begin{bmatrix} P & A(\beta)^T P \\ \star & P \end{bmatrix} > \mathbf{0}. \tag{2.22}$$

Apenas a verificação dos vértices é suficiente para garantir a estabilidade de todos sistemas pertencentes ao politopo, devido a convexidade do mesmo, desde que a mesma matriz P seja

utilizada em todos vértices. Então, pode-se garantir a estabilidade de (2.16) se existir uma P tal que,

$$\begin{bmatrix} P & A_v^T P \\ \star & P \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad \forall,\, v \in \mathcal{I}[1, N] \tag{2.23}$$

seja factível. Aplicando complemento de Schur obtemos a condição equivalente

$$\begin{cases} P > \mathbf{0} \\ A_v^T P A_v - P < \mathbf{0}, \quad \forall,\, v \in \mathcal{I}[1, N]. \end{cases} \tag{2.24}$$

Neste caso, garante-se a estabilidade de todos sistemas pertencentes a (2.16) - (2.17), apenas com a verificação da existência de uma mesma matriz P em cada um de seus vértices.

A escolha de (2.18) como candidata a função de Lyapunov reduz a verificação da estabilidade a um teste de factibilidade numericamente simples, devido a isso ela é amplamente utilizada.

Por outro lado, a garantia da restrição (2.19) da matriz P, pode limitar bastante o conjunto de soluções factíveis, ou seja, pode não existir uma mesma matriz $P > \mathbf{0}$ que satisfaça as demais desigualdades mesmo que (2.16) seja estável.

2.7 Funções dependentes de parâmetros

Apesar da grande utilização das técnicas que abordam a EQ, devido a sua simplicidade numérica, na verificação da estabilidade e síntese de controladores de sistemas incertos, inclusive com parâmetros variantes no tempo e sem restrição do valor da taxa de variação, resultados bastantes conservadores podem ser obtidos principalmente quando aplicados em sistemas invariantes no tempo. Soluções menos conservadoras através da utilização de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros são apresentadas em [FAG96], [GAC96], [Tro99], [MK00].

Considere o sistema definido em (2.16) - (2.17) e a candidata a função de Lyapunov (2.18), com a matriz $P(\beta)$ definida por

$$P(\beta) = \sum_{v=1}^{N} \beta_v P_v,\ \beta \in \Omega,\ P_v > \mathbf{0}. \tag{2.25}$$

Os três primeiros ítens do Teorema 2.1 são prontamente atendidos. Do quarto item, obtém-se:

$$\Delta V(x_k,\beta) \ = \ x_{k+1}^T P(\beta) x_{k+1} - x_k^T P(\beta) x_k < \mathbf{0}. \tag{2.26}$$

Substituindo (2.16) em (2.26), pode-se assegurar a estabilidade do sistema descrito por (2.16) - (2.17) através das seguintes desigualdades matriciais

$$\begin{cases} P(\beta) \ = \ P(\beta) > \mathbf{0} \\ A(\beta)^T P(\beta) A(\beta) - P(\beta) < \mathbf{0}. \end{cases} \tag{2.27}$$

As quais podem ser escritas de forma equivalente através da aplicação do complemento de Schur, como

$$\begin{bmatrix} P(\beta) & A(\beta)^T P(\beta) \\ \star & P(\beta) \end{bmatrix} > \mathbf{0}. \tag{2.28}$$

Observa-se que as condições (2.27) e (2.28), não são convexas em β, devido aos produtos entre $P(\beta)$ e $A(\beta)$, diferentemente de (2.23) e (2.24). Se $P(\beta) = P$, então as condições (2.27) e (2.28) recuperam as condições da EQ de (2.23) e (2.24). Para que seja possível tratar (2.27) - (2.28) como problemas de otimização convexa, se faz necessário, algum tipo de relaxação. Em [OP06], [RP01] e referências internas, encontram-se maiores detalhes sobre o assunto. Por outro lado, através de uma técnica de desacoplamento do produto entre $P(\beta)$ e $A(\beta)$, podemos estudar a estabilidade robusta de forma convexa, sem utilização de relaxação. Tal técnica denomina-se Lema de Finsler (veja Apêndice A.3), que ao ser aplicada insere matrizes de folga dependentes de parâmetro, escolhidas, $F(\beta)$ e $G(\beta)$, resultando em:

$$\begin{bmatrix} A(\beta)^T F(\beta)^T + F(\beta)A(\beta) - P(\beta) & F(\beta) + A(\beta)^T G(\beta)^T \\ \star & P(\beta) - (G(\beta) + G(\beta)^T) \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \tag{2.29}$$

Com a introdução de algum conservadorismo assumem-se $F(\beta) = F$ e $G(\beta) = G$, tornando as matrizes de folga independentes do parâmetro β. Sendo assim, a condição (2.29) pode ser reescrita na forma

$$\begin{bmatrix} A(\beta)^T F^T + FA(\beta) - P(\beta) & F + A(\beta)^T G^T \\ \star & P(\beta) - (G + G^T) \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \tag{2.30}$$

Nesse ponto, é possível perceber que essa condição pode ser testada apenas para os vértices do politopo que define $A(\beta)$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} A_v^T F^T + FA_v - P_v & F + A_v^T G^T \\ \star & P_v - (G + G^T) \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad \forall,\, v \in \mathcal{I}[1, N], \tag{2.31}$$

o que, pela propriedade da convexidade, permite recuperar (2.30) e, portanto, verificar (2.27)-(2.28). A condição apresentada em (2.31) pode ser vista em [PABB00] e [LP03], por exemplo.

O uso de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros em sistemas lineares incertos discretos e invariantes no tempo, pode fornecer resultados significativamente menos conservadores que aqueles que utilizam EQ como base. Ainda assim, (2.31) é suficiente mas não necessária para identificar como estáveis um conjunto de sistemas que são assintoticamente estáveis, mas não são quadraticamente estáveis.

2.8 Estabilidade de Sistemas com atraso

Neste trabalho é empregado o método de Lyapunov-Krasovskii (L-K) [Kra63] para estudo da estabilidade. que corresponde à extensão do método direto de Lyapunov para tratar sistemas com atraso no vetor de estado. Baseado na construção de uma função de L-K (funcional no caso contínuo) que leva em conta não só a evolução temporal do sistema em questão, como também seu histórico temporal [Sou08], esse método, proposto por Nikolai Nikolaevich Krasovskii em *1959*, consiste em:

Considere o sistema dado em (2.3) e a candidata a função de L-K

$$V(x_k,\beta) = x_k^T\ P(\beta)\ x_k + \sum_{j=-d}^{0} x_{k+j}^T\ S(\beta)\ x_{k+j}, \tag{2.32}$$

em que $d = \tau$ e τ é o valor máximo do atraso. Pode-se garantir a estabilidade desse sistema se são verificadas (veja [SDM07a]):

$$V(x_k, \beta) > \mathbf{0}, \quad P(\beta) > \mathbf{0} \quad \text{e} \quad S(\beta) > \mathbf{0}, \tag{2.33}$$

$$\Delta V(x_k,\beta) = V(x_{k+1}, \beta) - V(x_k, \beta) < \mathbf{0}. \tag{2.34}$$

Aplicando (2.32) em (2.34), desenvolvendo e fazendo as devidas simplificações, tem-se:

$$\Delta V(x_k,\beta) \;=\; x_{k+1}^T(P(\beta) + S(\beta))x_{k+1} - x_k^T\; P(\beta)\; x_k - x_{k-d}^T\; S(\beta)\; x_{k-d} < \mathbf{0}. \tag{2.35}$$

Substituindo (2.3) em (2.35), resulta em

$$\begin{bmatrix} A(\beta)^T(P(\beta) + S(\beta))A(\beta) - P(\beta) & A(\beta)^T(P(\beta) + S(\beta))A_\theta(\beta) \\ \star & A_\theta(\beta)^T(P(\beta) + S(\beta))A_\theta(\beta) - S(\beta) \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \tag{2.36}$$

Aplicando complemento de Schur, pode-se escrever (2.36) de forma equivalente como

$$\begin{bmatrix} P(\beta) & \mathbf{0} & A(\beta)^T(P(\beta) + S(\beta)) \\ \star & S(\beta) & A_\theta(\beta)^T(P(\beta) + S(\beta)) \\ \star & \star & P(\beta) + S(\beta) \end{bmatrix} > \mathbf{0}. \tag{2.37}$$

Observa-se que as condições (2.36) e (2.37) não são convexas em β, devido o produtos entre $A(\beta)$, $A_\theta(\beta)$, $P(\beta)$ e $S(\beta)$. Se $P(\beta) = P$ e $S(\beta) = S$, $\forall\ \beta \in \Omega$ então as condições (2.36) e (2.37) recuperam a EQ de (2.3), ou seja, todos os sistemas pertencentes ao politopo são ditos quadraticamente estáveis, apenas com a verificação de seus vértices. Porém, conforme dito anteriormente, para que seja possível tratar (2.36) - (2.37) como problemas de otimização convexa, se faz necessário, algum tipo de relaxação. Por outro lado, através da técnica de desacoplamento do produto entre $P(\beta)$ e $A(\beta)$, denominada Lema de Finsler (veja Apêndice A.3), podemos estudar a estabilidade robusta de forma convexa, sem utilização de relaxação. Utilizando relações equivalentes ao do item **i)** do Lema de Finsler, e escolhendo as matrizes de folga temos:

$$\begin{aligned} \varphi \;&=\; \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k \\ x_{k-d} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q} \;=\; \begin{bmatrix} P(\beta) + S(\beta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -P(\beta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -S(\beta) \end{bmatrix}, \\ \mathcal{B} \;&=\; \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_n & A(\beta) & A_\theta(\beta) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X} \;=\; \begin{bmatrix} F(\beta)^T & G(\beta)^T & H(\beta)^T \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Utilizando o item **iv)** do Lema de Finsler e após algumas operações algébricas, obtém-se

$$\begin{bmatrix} P(\beta) + S(\beta) - F(\beta) - F(\beta)^T & F(\beta)A(\beta) - G(\beta)^T & F(\beta)A_\theta(\beta) - H(\beta)^T \\ -G(\beta) + A(\beta)^T F(\beta)^T & -P(\beta) + G(\beta)A(\beta) + A(\beta)^T G(\beta)^T & G(\beta)A_\theta(\beta) + A(\beta)^T H(\beta)^T \\ -H(\beta) + A_\theta(\beta)^T F(\beta)^T & H(\beta)A(\beta) + A_\theta(\beta)^T G(\beta)^T & -S(\beta) + H(\beta)A_\theta(\beta) + A_\theta(\beta)^T H(\beta)^T \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \tag{2.39}$$

Como as matrizes de folga utilizadas nesse trabalho são independente do parâmetro β, ou seja, $F(\beta) = F$, $G(\beta) = G$ e $H(\beta) = H$, a condição (2.39) pode ser reescrita na forma

$$\begin{bmatrix} P(\beta) + S(\beta) - F - F^T & FA(\beta) - G^T & FA_\theta(\beta) - H^T \\ -G + A(\beta)^T F^T & -P(\beta) + GA(\beta) + A(\beta)^T G^T & GA_\theta(\beta) + A(\beta)^T H^T \\ -H + A_\theta(\beta)^T F^T & HA(\beta) + A_\theta(\beta)^T G^T & -S(\beta) + HA_\theta(\beta) + A_\theta(\beta)^T H^T \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (2.40)$$

explorando a convexidade do politopo e impondo uma estrutura para as matrizes dependentes de parâmetro $P(\beta)$ e $S(\beta)$, dadas por:

$$P(\beta) = \sum_{v=1}^{N} \beta_v P_v, \quad S(\beta) = \sum_{v=1}^{N} \beta_v S_v, \;\; \beta \in \Omega. \quad (2.41)$$

Assim sendo, a condição (2.40) pode ser testada apenas para os vértices conforme

$$\begin{bmatrix} P_v + S_v - F - F^T & FA_v - G^T & FA_{\theta v} - H^T \\ -G + A_v^T F^T & -P_v + GA_v + A_v^T G^T & GA_{\theta v} + A_v^T H^T \\ -H + A_{\theta v}^T F^T & HA_v + A_{\theta v}^T G^T & -S_v + HA_{\theta v} + A_{\theta v}^T H^T \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (2.42)$$

Pode-se recuperar (2.40), ao se multiplicar (2.42) por β_v e somar os resultados para cada v, conforme definido em (2.2). Similarmente à sistemas livres de atraso, (2.42) é suficiente mas não necessária para identificar como estáveis um conjunto de sistemas que são assintoticamente estáveis, mas não quadraticamente estáveis. Esses resultados apresentados são desenvolvidos em [LCC+11].

2.9 Conclusões

Neste capítulo foram apresentadas ferramentas convexas para análise de estabilidade de sistemas lineares discretos no tempo com atraso no vetor de estados. Tanto as matrizes do sistema quanto o atraso, são considerados incertos e invariantes no tempo.

Mostrou-se também como pode ser possível fazer alocação regional de polos no caso de sistemas sem atraso nos estados.

Nos próximos capítulos serão investigadas técnicas para a realização da alocação regional de polos aliada à minimização do custo $\mathcal{H}_\infty$ entre uma entrada exógena e uma saída.

Capítulo 3

$\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilização com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas com atraso nos estados

Neste capítulo será apresentada a norma $\mathcal{H}_\infty$ e sua aplicação na avaliação e na síntese de controladores que $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilizam com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ os sistemas discretos no tempo com atraso no vetor de estados via sistema aumentado. A idéia dessa abordagem não é nova, porém o desenvolvimento da formulação apresentada para as condições específicas de sistemas discretos no tempo com atraso no vetor de estados, não foi, no conhecimento deste autor, encontrada na literatura. Assim, a maneira talvez mais intuitiva de se fazer alocação regional de polos para os sistemas estudados nesta dissertação é desenvolvida neste capítulo e servirá de base de recuperação para as condições propostas nos Capítulos 4 e 5. Em seguida, serão recuperados resultados da literatura que permitem a estabilização com minimização do custo $\mathcal{H}_\infty$, sem alocação de polos, via função de L-K. Essa última parte pretende preparar o leitor para a abordagem apresentada nos capítulos subsequentes.

3.1 $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilização com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ via sistema aumentado

Sistemas discretos no tempo com atraso no vetor de estados podem ter sua estabilidade estudada utilizando-se um sistema aumentado e livre de atraso, resultando em um sistema equivalente livre de atraso, como proposto em [dSFX93],[GPS94], [ÅW84] e [KH98]. Esse sistema equivalente contém todos os autovalores do sistema com atraso no vetor de estados. A seguir serão apresentados 4 casos em grau crescente de complexidade para a síntese de controladores que asseguram a $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilidade com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$.

3.1.1 Sistema e atraso precisamente conhecidos

Considere a classe de sistemas precisamente conhecidos discretos no tempo com atraso conhecido no vetor de estados representada por

$$\Upsilon : \left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & Ax_k + A_\theta x_{k-\tau} + Bu_k + B_e w_k \\ z_k & = & Cx_k + C_\theta x_{k-\tau} + Du_k + D_e w_k \end{array} \right. \tag{3.1}$$

em que $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^p$ e $w_k \in \mathbb{R}^\ell$ são os vetores dos estados, das entradas de controle e das entradas exógenas, respectivamente, $k \in \mathbb{N}$ é a amostragem, τ é o valor conhecido do atraso, as matrizes A e $A_\theta \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $B_e \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$, C e $C_\theta \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{q\times p}$, $D_e \in \mathbb{R}^{q\times \ell}$ representam a dinâmica do sistema que está sujeito à seguinte lei de controle

$$u_k = Kx_k + K_\tau x_{k-\tau}, \tag{3.2}$$

com K e $K_\tau \in \mathbb{R}^{p\times n}$.

Esse sistema pode ser representado na forma aumentada livre de atraso

$$\bar{\Upsilon} : \left\{ \begin{array}{rcl} \bar{x}_{k+1} & = & \bar{A}\bar{x}_k + \bar{B}u_k + \bar{B}_e w_k \\ z_k & = & \bar{C}\bar{x}_k + \bar{D}u_k + \bar{D}_e w_k, \end{array} \right. \tag{3.3}$$

sendo

$$\bar{x}_k = \left[\begin{array}{cccc} x_k^T & x_{k-1}^T & \cdots & x_{k-\tau}^T \end{array} \right]^T, \tag{3.4}$$

o vetor de estados aumentado e

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc} A & \mathbf{0}_{n\times(\tau-1)n} & A_\theta \\ & I_{\tau n} & \mathbf{0}_{\tau n\times n} \end{array} \right], \bar{B} = \left[\begin{array}{c} B \\ \mathbf{0}_{\tau n\times p} \end{array} \right], \bar{B}_e = \left[\begin{array}{c} B_e \\ \mathbf{0}_{\tau n\times \ell} \end{array} \right], \tag{3.5}$$

$$\bar{C} = \left[\begin{array}{ccc} C & \mathbf{0}_{n\times(\tau-1)n} & C_\theta \end{array} \right], \bar{D} = D, \bar{D}_e = D_e, \tag{3.6}$$

com $\bar{A} \in \mathbb{R}^{n(\tau+1)\times n(\tau+1)}$, $\bar{B} \in \mathbb{R}^{n(\tau+1)\times p}$, $\bar{B}_e \in \mathbb{R}^{n(\tau+1)\times \ell}$, $\bar{C} \in \mathbb{R}^{q\times n(\tau+1)}$, $\bar{D} \in \mathbb{R}^{q\times p}$, $\bar{D}_e \in \mathbb{R}^{q\times \ell}$.

Neste caso a lei de controle (3.2) é expressa por

$$u_k = \bar{K}(\tau)\bar{x}_k, \tag{3.7}$$

sendo

$$\bar{K}(\tau) = \left[\begin{array}{ccc} K & \mathbf{0}_{n\times(\tau-1)n} & K_\tau \end{array} \right]. \tag{3.8}$$

Substituindo (3.7) em (3.3) resulta no seguinte sistema de malha fechada,

$$\bar{\mathbf{\Upsilon}} : \left\{ \begin{array}{rcl} \bar{x}_{k+1} & = & \bar{\mathbf{A}}\bar{x}_k + \bar{B}_e w_k \\ z_k & = & \bar{\mathbf{C}}\bar{x}_k + \bar{D}_e w_k, \end{array} \right. \tag{3.9}$$

com

$$\bar{\mathbf{A}} = \bar{A} + \bar{B}\bar{K} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{C}} = \bar{C} + \bar{D}\bar{K}. \tag{3.10}$$

Para considerar a alocação de polos na região $\mathcal{D}(\alpha,r)$ aplica-se a operação $\tilde{A} = \dfrac{(\bar{\mathbf{A}} - \alpha\mathbf{I})}{r}$, dada em (2.8), em (3.9), resultando em

$$\tilde{\mathbf{\Upsilon}} : \left\{ \begin{array}{rcl} \bar{x}_{k+1} & = & \tilde{A}\bar{x}_k + \bar{B}_e w_k \\ z_k & = & \bar{\mathbf{C}}\bar{x}_k + \bar{D}_e w_k. \end{array} \right. \tag{3.11}$$

De acordo com os critérios da Estabilidade Quadrática [Bar85] a estabilidade do sistema (3.11) pode ser investigada utilizando a seguinte candidata à função de Lyapunov

$$V(\bar{x}_k) = \bar{x}_k^T P \bar{x}_k, \tag{3.12}$$

com $\bar{x}_k$ dado em (3.4).

Para que (3.12) seja uma função de Lyapunov, é necessário que adicionalmente (3.12) seja definida positiva e satisfaça

$$\Delta V(\bar{x}_k) = V(\bar{x}_{k+1}) - V(\bar{x}_k) < 0 \tag{3.13}$$

$\forall \bar{x}_k^T \neq \mathbf{0}$ que satisfaça (3.11) com $w_k = 0$ e x_k dado em (3.4). Uma condição suficiente para a positividade de (3.12) é obtida impondo-se $P = P^T \in \mathbb{R}^{n\times n} > \mathbf{0}$.

Para a estabilidade, é necessário verificar (3.13) que é calculado conforme:

$$\Delta V(\bar{x}_k) \;=\; \bar{x}_{k+1}^T P x_{k+1} - \bar{x}_k^T P \bar{x}_k. \tag{3.14}$$

Com isso, considerando $\omega = \begin{bmatrix} \bar{x}_{k+1}^T & \bar{x}_k^T \end{bmatrix}^T$ pertencente à trajetória do sistema (3.11), de acordo com (3.14) obtém-se $\Delta V(\bar{x}_k) = \omega^T M \omega < 0$, em que M é dada por

$$M = \begin{bmatrix} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -P \end{bmatrix}. \tag{3.15}$$

Para o cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, considere o sistema (3.11) estável com condições iniciais nulas, $\mu = \gamma^2$, $w_k \in \ell_2$. Considere também a função de custo U associada ao índice de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ γ dada por:

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \left[z_k^T z_k - \mu w_k^T w_k \right]. \tag{3.16}$$

Neste caso, tem-se que $V(\beta,0) = 0$ e $V(\beta,\infty)$ aproxima-se de zero quando w_k tender a zero, na medida em que k aumenta; ou de uma constante $\varphi < \infty$, no caso de w_k tender a $\phi < \infty$. Assim, usando (3.14), U definido em (3.16) pode ser majorado como

$$\begin{array}{rcl} U & \leq & \sum_{k=0}^{\infty} \left[z_k^T z_k - \mu w_k^T w_k + \Delta V(\bar{x}_k) \right] \\ & \leq & \sum_{k=0}^{\infty} \left[z_k^T z_k - \mu w_k^T w_k + \omega^T M \omega \right] \end{array} \tag{3.17}$$

Substituindo (3.11) no lado direito de (3.17) e impondo que essa quantidade seja negativa, pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ w_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{A}^T P \tilde{A} - P + \bar{\mathbf{C}}^T \bar{\mathbf{C}} & \tilde{A}^T P \bar{B}_e + \bar{\mathbf{C}}^T \bar{D}_e \\ \bar{B}_e^T P \tilde{A} + \bar{D}_e^T \bar{\mathbf{C}} & \bar{D}_e^T \bar{D}_e + \bar{B}_e^T P \bar{B}_e - \mu \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ w_k \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \tag{3.18}$$

Esse resultado é uma derivação do *Bounded real lemma* [BGFB94], [ZDG96], que pode ser descrito como: $\tilde{A}$ é assintoticamente estável e $\|G_{zw}\|_\infty < \gamma$ se e somente se existir uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}$, com dimensões apropriadas, tal que

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}^T P \tilde{A} - P + \bar{\mathbf{C}}^T \bar{\mathbf{C}} & \tilde{A}^T P \bar{B}_e + \bar{\mathbf{C}}^T \bar{D}_e \\ \bar{B}_e^T P \tilde{A} + \bar{D}_e^T \bar{\mathbf{C}} & \bar{D}_e^T \bar{D}_e + \bar{B}_e^T P \bar{B}_e - \mu \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \tag{3.19}$$

Aplicando Schur em (3.19) e realizando operações de mudanças de linhas e colunas:

$$\begin{bmatrix} P & \tilde{A}^T P & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{C}}^T \\ \star & P & P\bar{B}_e & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{I} & \bar{D}_e^T \\ \star & \star & \star & \mu \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0}. \tag{3.20}$$

Como $\|G_{zw}\|_\infty = \|G_{zw}^T\|_\infty$, a norma $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas assintoticamente estáveis também pode ser calculada a partir da seguinte condição dual,

$$\begin{bmatrix} \bar{W} & \tilde{A}\bar{W} & \mathbf{0} & \bar{B}_e \\ \star & \bar{W} & \bar{W}^T\bar{\mathbf{C}}^T & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{I} & \bar{D}_e \\ \star & \star & \star & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \tag{3.21}$$

em que $\bar{W} = P$.

Substituindo (3.10) e (2.8) em (3.21)

$$\begin{bmatrix} \bar{W} & \dfrac{(\bar{A}-\alpha\mathbf{I})\bar{W}+\bar{B}\bar{K}\bar{W}}{r} & \mathbf{0} & \bar{B}_e \\ \star & \bar{W} & \bar{W}^T\bar{C}^T+\bar{W}^T\bar{K}^T\bar{D}^T & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{I} & \bar{D}_e \\ \star & \star & \star & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0}. \tag{3.22}$$

Fazendo $\bar{Z} = \bar{K}\bar{W}$, uma condição LMI para a estabilização e para a síntese de ganhos K e K_τ do sistema (3.1), sujeito a lei de controle (3.2), é apresentada no teorema que segue

Teorema 3.1 *Se existirem matrizes* $\bar{Z} \in \mathbb{R}^{p\times n(\tau+1)} = \begin{bmatrix} Z & \mathbf{0}_{n\times(\tau-1)n} & Z_\tau \end{bmatrix}$, $\mathbf{0} < \bar{W} = \bar{W}^T =$ *bloco diagonal*$\begin{bmatrix} W_0 & W & W_\tau \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n(\tau+1)\times n(\tau+1)}$, *e o escalar* $\mu > 0$, *tais que,*

$$\Psi = \begin{bmatrix} \bar{W} & \dfrac{(\bar{A}-\alpha\mathbf{I})\bar{W}+\bar{B}\bar{Z}}{r} & \mathbf{0} & \bar{B}_e \\ \star & \bar{W} & \bar{W}^T\bar{C}^T+\bar{Z}^T\bar{D}^T & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{I} & \bar{D}_e \\ \star & \star & \star & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \tag{3.23}$$

seja verificado, com matrizes $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{B}_e$, $\bar{C}$, $\bar{D}$ *e* $\bar{D}_e$ *calculadas de acordo com (3.5)-(3.6), então o sistema (3.3) sujeito a lei de controle (3.7) é Schur estável, assegurando ao sistema (3.1), sujeito a lei de controle (3.2) a* $\mathcal{D}(\alpha,r)$*-estabilidade com custo garantido* $\mathcal{H}_\infty$ *dado por* $\gamma = \sqrt{\mu}$ *e ganhos de realimentação dos estados*

$$\bar{K} = \bar{Z}\bar{W}^{-1}. \tag{3.24}$$

Prova: Se (3.23) é verificada, então, $V(k) = x_k^T P x_k > 0$, com $P = \bar{W}$. De (3.24) temos que $\bar{Z} = \bar{K}\bar{W}$, que junto com (2.8) permite reescrever (3.23) como em (3.21). Se (3.21) é verificada, essa mesma condição pode ser verificada para o sistema dual, isto é, substituindo-se $\bar{A}$ por $\bar{A}^T$, $\bar{B}$ por $\bar{C}^T$, $\bar{C}$ por $\bar{B}^T$ e $\bar{D}$ por $\bar{D}^T$. Na desigualdade resultante pode-se aplicar o Complemento de Schur e obter uma desigualdade como em (3.19), com $P = \bar{W}$. Portanto, a verificação de (3.23) assegura a verificação de (3.19). De outro lado, a verificação de (3.19) assegura (3.17), dado o desenvolvimento apresentado de (3.13) a (3.18). Portanto, o sistema descrito por (3.11) é Schur-estável com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\sqrt{\mu}$. Além disso, pela transformação (2.8), se (3.11) é Schur-estável, então (3.1), sujeito a lei de controle (3.2), é $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estável com o mesmo custo garantido $\mathcal{H}_\infty$. ∎

A partir do Teorema 3.1, podemos estimar a norma $\mathcal{H}_\infty$ pelo seguinte procedimento convexo de otimização

$$\mathcal{H}_\infty : \left\{ \begin{array}{c} \min \quad \mu \\ \bar{W} = \bar{W}^T > 0, \text{ tal que:} \\ \Psi < \mathbf{0} \ (\Psi \text{ dada em (3.23)}). \end{array} \right. \tag{3.25}$$

Exemplo 3.1 *Considere o problema de $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilização com minimização do custo $\mathcal{H}_\infty$ do sistema (3.1), em que $\tau = 3$ e com matrizes dinâmicas dadas por*

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 1 \\ 0{,}05 & 0{,}8 \end{bmatrix}, \ A_\theta = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}1 \end{bmatrix}, \ B = B_e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}, \tag{3.26}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \ C_\theta = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 0{,}1 \end{bmatrix}, \ D_e = \begin{bmatrix} 0{,}2 \end{bmatrix}. \tag{3.27}$$

Utilizando o problema de otimização (3.25) e escolhendo $\alpha = 0{,}1$ e $r = 0{,}8$, obteve-se os seguintes resultados para a $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilidade do sistema:

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} -0{,}0272 & -1{,}0987 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0921 & -0{,}0540 \end{bmatrix}$$

e custo garantido $\mathcal{H}_\infty = 1{,}7952$.

Na Figura 3.1 são mostrados os autovalores do sistema discreto no tempo com atraso no vetor de estados (3.1) em malha fechada através da lei de controle (3.2). Como era de se esperar, observe que os autovalores estão localizados no interior da região $\mathcal{D}(0{,}1; 0{,}8)$.

Utilizou-se um algoritmo de bissecção junto com (3.25) para determinar o menor valor do raio r para cada posição do centro α, tal que o Teorema 3.1 seja factível. Veja a Figura 3.2 e observe que a faixa de variação do parâmetro α foi $-0{,}2 \leq \alpha \leq 0{,}2$. E que o menor valor de $r = 0{,}5683$ foi obtido para $\alpha = 0$. Também através do algoritmo de bissecção e (3.25), mantendo fixo o parâmetro α e varrendo o intervalo $1-\alpha \geq r \geq 0{,}1$, avaliou-se o valor do custo $\mathcal{H}_\infty$ tal que o Teorema 3.1 seja factível. O valor de α também foi varrido dentro do intervalo $0 \leq \alpha \leq 0{,}5$. A Figura 3.3 mostra as superfícies geradas com tais dados. As condições foram infactiveis fora desses intervalos.

3.1.2 Sistema precisamente conhecido e atraso incerto

Considere a classe de sistemas precisamente conhecidos discretos no tempo com atraso incerto no vetor de estados representada por

$$\Upsilon_d : \left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & Ax_k + A_\theta x_{k-d} + Bu_k + B_e w_k \\ z_k & = & Cx_k + C_\theta x_{k-d} + Du_k + D_e w_k, \end{array} \right. \tag{3.28}$$

em que $d \in \mathcal{I}[1,\tau]$, τ é o valor máximo e conhecido do atraso, $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^p$ e $w_k \in \mathbb{R}^\ell$ são os vetores dos estados, das entradas de controle e das entradas exógenas, respectivamente, $k \in \mathbb{N}$ é a amostragem. As matrizes A e $A_\theta \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $B_e \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$, C e $C_\theta \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{q\times p}$, $D_e \in \mathbb{R}^{q\times \ell}$ representam a dinâmica do sistema que está sujeito à lei de controle (3.2). Esse sistema pode ser representado na forma aumentada livre de atraso

$$\bar{\Upsilon}_d : \left\{ \begin{array}{rcl} \bar{x}_{k+1} & = & \bar{A}_d \bar{x}_k + \bar{B} u_k + \bar{B}_e w_k \\ z_k & = & \bar{C}_d \bar{x}_k + \bar{D} u_k + \bar{D}_e w_k, \end{array} \right. \tag{3.29}$$

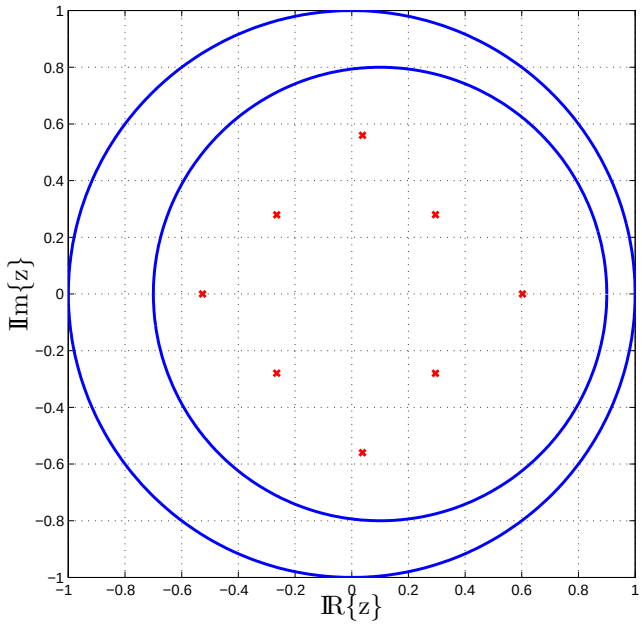

Figura 3.1: Autovalores do sistema (3.1) em malha fechada através da lei de controle (3.7).

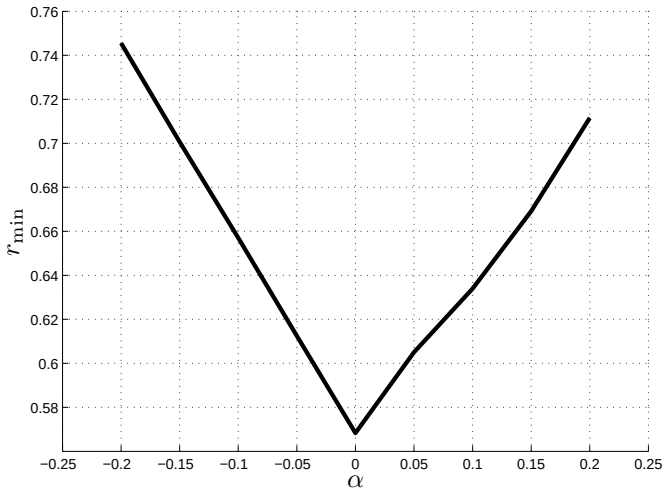

Figura 3.2: Valores mínimos de raio em função do parâmetro α a partir de (3.23).

sendo $\bar{x}_k$ dado em (3.4),

$$\bar{A}_d = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0}_{n\times(d-1)n} & A_\theta & \mathbf{0}_{n\times(\tau-d)n} & \mathbf{0} \\ & & I_{\tau n} & & \mathbf{0}_{\tau n\times n} \end{bmatrix}, \tag{3.30}$$

$$\bar{C}_d = \begin{bmatrix} C & \mathbf{0}_{n\times(d-1)n} & C_\theta & \mathbf{0}_{n\times(\tau-d)n} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{3.31}$$

com $d \in \mathcal{I}[1,\tau]$ e $\bar{B}$, $\bar{B}_e$, $\bar{D}$, $\bar{D}_e$ dados em (3.5)-(3.6). Dessa forma, τ sistemas aumentados livres de atraso são obtidos e, portanto, a análise de (3.28) via (3.29) depende do valor máximo e conhecido do atraso.

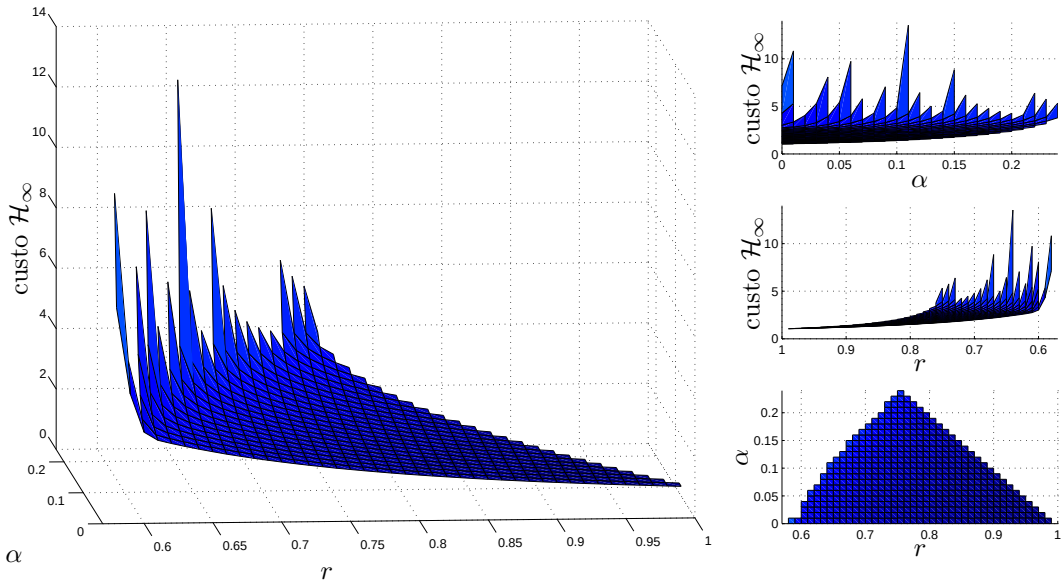

Figura 3.3: Superfície custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ em função de α e r a partir de (3.23).

A lei de controle (3.2) é expressa por (3.7).

Substituindo (3.7) em (3.29) resulta no sistema de malha fechada

$$\bar{\mathbf{\Upsilon}}_d : \left\{ \begin{array}{rcl} \bar{x}_{k+1} & = & \bar{\mathbf{A}}_d \bar{x}_k + \bar{B}_e w_k, \\ z_k & = & \bar{\mathbf{C}}_d \bar{x}_k + \bar{D}_e w_k \end{array} \right. \tag{3.32}$$

com

$$\bar{\mathbf{A}}_d = \bar{A}_d + \bar{B}\bar{K} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{C}}_d = \bar{C}_d + \bar{D}\bar{K}. \tag{3.33}$$

Para considerar a alocação de polos na região $\mathcal{D}(\alpha,r)$ aplica-se a operação $\tilde{A}_d = \dfrac{(\bar{\mathbf{A}}_d - \alpha\mathbf{I})}{r}$, dada em (2.8), em (3.32), resultando em

$$\tilde{\mathbf{\Upsilon}}_d : \left\{ \begin{array}{rcl} \bar{x}_{k+1} & = & \tilde{A}_d \bar{x}_k + \bar{B}_e w_k \\ z_k & = & \bar{\mathbf{C}}_d \bar{x}_k + \bar{D}_e w_k. \end{array} \right. \tag{3.34}$$

Daqui em diante, as mesmas operações aplicadas a classe de sistemas da Seção 3.1.1, a partir de (3.12) até (3.22), são aplicadas à classe de sistemas desta Seção. Sendo que, neste caso, como o atraso dos sistemas é incerto, τ condições LMI para a estabilização e para a síntese de ganhos K e K_τ do sistema (3.28), sujeito a lei de controle (3.2), são apresentadas no teorema que se segue

Teorema 3.2 *Se existirem matrizes* $\bar{Z} \in \mathbb{R}^{p\times n(\tau+1)} = \left[\begin{array}{ccc} Z & \mathbf{0}_{n\times(\tau-1)n} & Z_\tau \end{array}\right]$, $\mathbf{0} < \bar{W} = \bar{W}^T =$ *bloco diagonal*$\left[\begin{array}{ccc} W_0 & W & W_\tau \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{n(\tau+1)\times n(\tau+1)}$, *e o escalar* $\mu > 0$, *tais que,*

$$\Psi_d = \begin{bmatrix} \bar{W} & \dfrac{(\bar{A}_d - \alpha\mathbf{I})\bar{W} + \bar{B}\bar{Z}}{r} & \mathbf{0} & \bar{B}_e \\ \star & \bar{W} & \bar{W}^T\bar{C}_d^T + \bar{Z}^T\bar{D}^T & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{I} & \bar{D}_e \\ \star & \star & \star & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0},\ d \in \mathcal{I}[1,\tau] \tag{3.35}$$

seja verificado, com matrizes $\bar{A}_d$, $\bar{C}_d$, $\bar{B}$, $\bar{B}_e$, $\bar{D}$, $\bar{D}_e$ dadas em (3.30)-(3.31), então o sistema (3.32) sujeito a lei de controle (3.7) é Schur estável, assegurando ao sistema (3.28), sujeito a lei de controle (3.2) a $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilidade com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma = \sqrt{\mu}$ e ganhos robustos de realimentação dos estados

$$\bar{K} = \bar{Z}\bar{W}^{-1}. \tag{3.36}$$

Prova: Os mesmos passos da Prova apresentada para o Teorema 3.1 devem ser utilizados para a Prova do Teorema 3.2, desta vez considerando-se $d \in \mathcal{I}[1,\tau]$. Portanto, pela transformação (2.8), se (3.34) é Schur-estável, então (3.28) é $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estável com o mesmo custo garantido $\mathcal{H}_\infty$. ■

A partir do Teorema 3.2, podemos estimar a norma $\mathcal{H}_\infty$ pelo seguinte procedimento convexo de otimização

$$\mathcal{H}_\infty : \left\{ \begin{array}{c} \min \quad \mu \\ \bar{W} = \bar{W}^T > \mathbf{0}; \text{ tal que:} \\ \Psi_d > \mathbf{0} \ (\Psi_d \text{ dada em (3.35)}). \end{array} \right. \tag{3.37}$$

Exemplo 3.2 *Considere o sistema (3.28) com $\tau = 3$, e as matrizes dinâmicas dadas em (3.26) e (3.27), do Exemplo (3.1). Utilizando o problema de otimização (3.37) e escolhendo $\alpha = 0{,}1$ e $r = 0{,}8$, obteve-se os seguintes resultados para a $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilidade do sistema:*

$$\bar{K} = \left[\begin{array}{cccccccc} -0{,}0146 & -1{,}2097 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0351 & -0{,}0044 \end{array} \right]$$

e custo garantido $\mathcal{H}_\infty = 3{,}0941$.

Na Figura 3.4 são mostrados os autovalores do sistema precisamente conhecido discreto no tempo com atraso incerto no vetor de estados (3.28) em malha fechada através da lei de controle (3.2), para cada valor do atraso $d \in \mathcal{I}[1,3]$. Como era de se esperar, observe que todos autovalores estão localizados no interior da região $\mathcal{D}(0{,}1;0{,}8)$.

Utilizou-se um algoritmo de bissecção junto com (3.37) para determinar o menor valor do raio r para cada posição do centro α, tal que o Teorema 3.2 seja factível. Veja a Figura 3.5 e observe que a faixa de variação do parâmetro α foi $-0{,}2 \leq \alpha \leq 0{,}2$. E que o menor valor de $r = 0{,}6108$ foi obtido para $\alpha = 0$. Também através do algoritmo de bissecção e (3.37), mantendo fixo o parâmetro α e varrendo o intervalo $1-\alpha \geq r \geq 0{,}1$, avaliou-se o valor do custo $\mathcal{H}_\infty$ tal que o Teorema 3.2 seja factível. O valor de α também foi varrido dentro do intervalo $0 \leq \alpha \leq 0{,}5$. A Figura 3.6 mostra as superfícies geradas com tais dados. As condições foram infactiveis fora desses intervalos.

3.1.3 Sistema incerto com atraso conhecido

Considere que o sistema (3.1) seja incerto e invariante no tempo, com atraso conhecido τ, definindo uma classe de sistemas incertos discretos no tempo com atraso conhecido no vetor de estados, representada por

$$\Upsilon(\beta) : \left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & A(\beta)x_k + A_\theta(\beta)x_{k-\tau} + B(\beta)u_k + B(\beta)_e w_k \\ z_k & = & C(\beta)x_k + C_\theta(\beta)x_{k-\tau} + D(\beta)u_k + D(\beta)_e w_k, \end{array} \right. \tag{3.38}$$

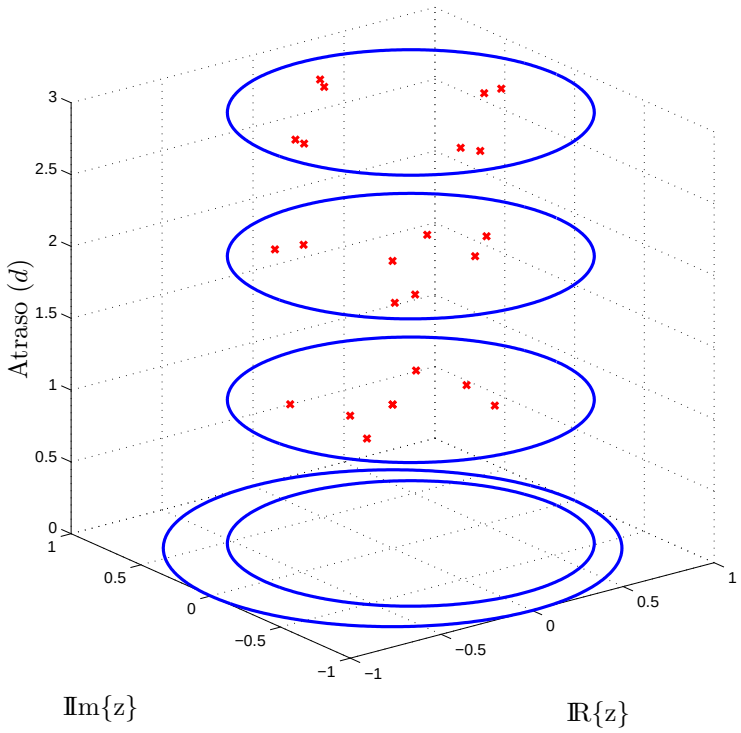

Figura 3.4: Autovalores do sistema (3.28) em malha fechada para cada valor do atraso

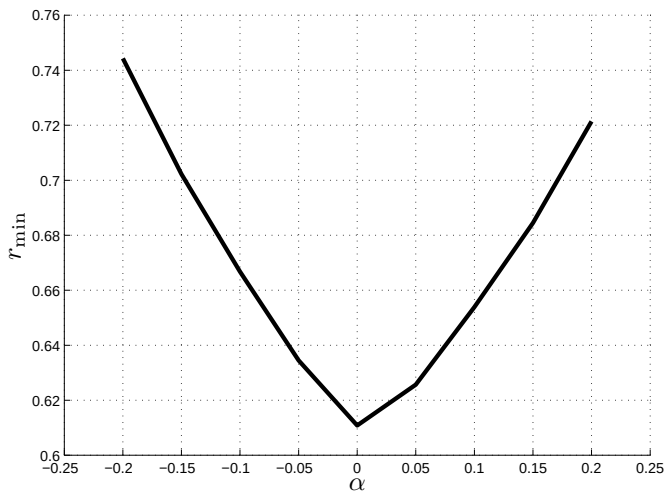

Figura 3.5: Valores mínimos de raio em função do parâmetro α a partir de (3.35).

em que $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^p$ e $w_k \in \mathbb{R}^\ell$ são o vetor dos estados, das entradas de controle e das entradas exógenas, respectivamente, $k \in \mathbb{N}$ é a amostragem, as matrizes $A(\beta)$ e $A_\theta(\beta) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(\beta) \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $B_e(\beta) \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$, $C(\beta)$ e $C_\theta(\beta) \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $D(\beta) \in \mathbb{R}^{q\times p}$, $D_e(\beta) \in \mathbb{R}^{q\times \ell}$, representam a dinâmica do sistema $\Upsilon(\beta)$ pertencente a um politopo definido pelo conjunto de todas as

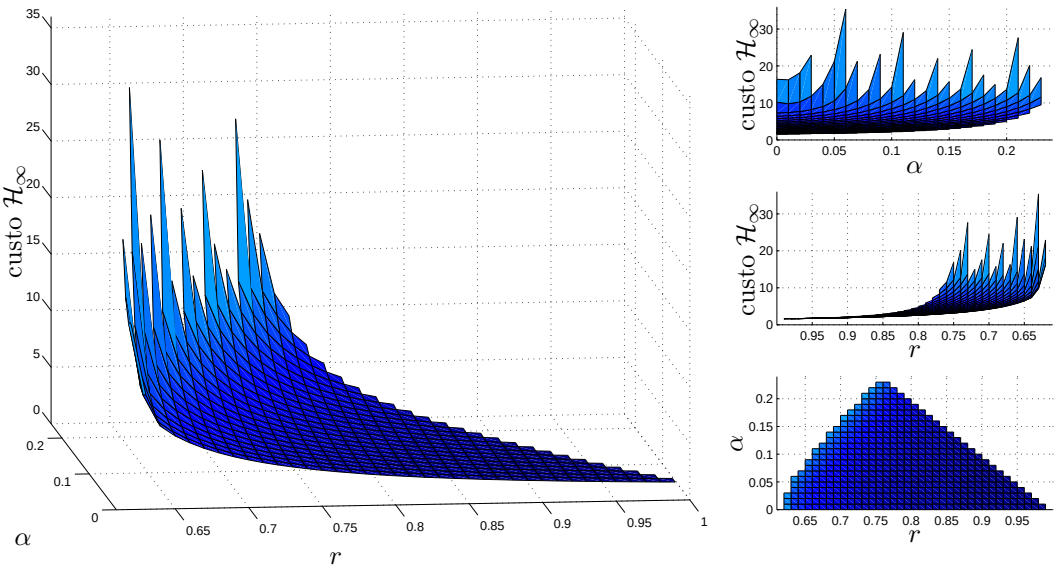

Figura 3.6: Superfície custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ em função de α e r a partir de (3.35).

matrizes obtidas pela combinação convexa de seus N vértices, dado por

$$\mathcal{A}_{o\ell} = \left\{ \Upsilon(\beta) \in \mathbb{R}^{n+q\times 2n+p+\ell} : \Upsilon(\beta) = \sum_{v=1}^{N} \beta_v \Upsilon_v,\ \beta \in \Omega \right\}, \tag{3.39}$$

com Ω definido por

$$\Omega = \left\{ \beta : \sum_{v=1}^{N} \beta_v = 1,\ \beta_v \geq 0 \right\}, \tag{3.40}$$

e os vértices Υ_v são conhecidos e dados por

$$\Upsilon_v = \left[\begin{array}{cc|c|c} A_v & A_{\theta v} & B_v & B_{ev} \\ \hline C_v & C_{\theta v} & D_v & D_{ev} \end{array} \right],\ v \in \mathcal{I}[1,N]. \tag{3.41}$$

Esse sistema sujeito a lei de controle (3.2), pode ser representado na forma aumentada livre de atraso

$$\bar{\Upsilon}_v : \left\{ \begin{array}{rcl} \bar{x}_{k+1} & = & \bar{A}_v \bar{x}_k + \bar{B}_v u_k + \bar{B}_{ev} w_k \\ z_k & = & \bar{C}_v \bar{x}_k + \bar{D}_v u_k + \bar{D}_{ev} w_k \end{array} \right. \tag{3.42}$$

sendo $\bar{x}_k$ dado em (3.4) e

$$\bar{A}_v = \begin{bmatrix} A_v & \mathbf{0}_{n\times(\tau-1)n} & A_{\tau,v} \\ & I_{\tau n} & \mathbf{0}_{\tau n\times n} \end{bmatrix},\ \bar{B}_v = \begin{bmatrix} B_v \\ \mathbf{0}_{\tau n\times p} \end{bmatrix},\ \bar{B}_{ev} = \begin{bmatrix} B_{ev} \\ \mathbf{0}_{\tau n\times \ell} \end{bmatrix}, \tag{3.43}$$

$$\bar{C}_v = \begin{bmatrix} C_v & \mathbf{0}_{n\times(\tau-1)n} & C_{\tau,v} \end{bmatrix},\ \bar{D}_v = D_v,\ \bar{D}_{ev} = D_{ev} \tag{3.44}$$

com $v \in \mathcal{I}[1,N]$, $\bar{A}_v \in \mathbb{R}^{n(\tau+1)\times n(\tau+1)}$, $\bar{B}_v \in \mathbb{R}^{n(\tau+1)\times p}$, $\bar{B}_{ev} \in \mathbb{R}^{n(\tau+1)\times \ell}$, $\bar{C}_v \in \mathbb{R}^{q\times n(\tau+1)}$, $\bar{D}_v \in \mathbb{R}^{q\times p}$, $\bar{D}_{ev} \in \mathbb{R}^{q\times \ell}$.

A lei de controle (3.2) será expressa por (3.7).

Substituindo (3.7) em (3.42) resulta no sistema de malha fechada

$$\bar{\boldsymbol{\Upsilon}}_v : \left\{ \begin{array}{rcl} \bar{x}_{k+1} & = & \bar{\mathbf{A}}_v \bar{x}_k + \bar{B}_{ev} w_k \\ z_k & = & \bar{\mathbf{C}}_v \bar{x}_k + \bar{D}_{ev} w_k, \end{array} \right. \tag{3.45}$$

com

$$\bar{\mathbf{A}}_v = \bar{A}_v + \bar{B}_v \bar{K} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{C}}_v = \bar{C}_v + \bar{D}_v \bar{K}. \tag{3.46}$$

Para considerar a alocação de polos na região $\mathcal{D}(\alpha,r)$ aplica-se a operação $\tilde{A}_v = \dfrac{(\bar{\mathbf{A}}_v - \alpha \mathbf{I})}{r}$, dada em (2.8), em (3.45), resultando em

$$\tilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_v : \left\{ \begin{array}{rcl} \bar{x}_{k+1} & = & \tilde{A}_v \bar{x}_k + \bar{B}_e w_k \\ z_k & = & \bar{\mathbf{C}}_v \bar{x}_k + \bar{D}_e w_k. \end{array} \right. \tag{3.47}$$

Daqui em diante, as mesmas operações aplicadas a classe de sistemas da Seção 3.1.1, a partir de (3.12) até (3.22), são aplicadas à classe de sistemas desta seção. Sendo que, neste caso, como os sistemas são incertos, são obtidos N sistemas aumentados livres de atraso, ou seja, um para cada vértice do politopo de incertezas. Sendo assim, N condições LMI para a estabilização e para a síntese de ganhos K e K_τ do sistema (3.38), sujeito a lei de controle (3.2), são apresentadas no teorema que se segue

Teorema 3.3 *Se existirem matrizes* $\bar{Z} \in \mathbb{R}^{p \times n(\tau+1)} = \left[\begin{array}{ccc} Z & \mathbf{0}_{n\times(\tau-1)n} & Z_\tau \end{array} \right]$, $\mathbf{0} < \bar{W} = \bar{W}^T =$ *bloco diagonal*$\left[\begin{array}{ccc} W_0 & W & W_\tau \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{n(\tau+1)\times n(\tau+1)}$, *e o escalar* $\mu > 0$, *tais que,*

$$\Psi_v = \left[\begin{array}{cccc} \bar{W} & \dfrac{(\bar{A}_v - \alpha \mathbf{I})\bar{W} + \bar{B}_v Z}{r} & \mathbf{0} & \bar{B}_{ev} \\ \star & \bar{W} & \bar{W}^T \bar{C}_v^T + Z^T \bar{D}_v^T & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{I} & \bar{D}_{ev} \\ \star & \star & \star & \mu \mathbf{I} \end{array} \right] > \mathbf{0}, \; v \in \mathcal{I}[1, N] \tag{3.48}$$

seja verificado, com matrizes $\bar{A}_v$, $\bar{C}_v$, $\bar{B}_v$, $\bar{B}_{ev}$, $\bar{D}_v$, $\bar{D}_{ev}$ *dadas em (3.43)-(3.44), então o sistema (3.42) sujeito a lei de controle (3.7) é Schur estável, assegurando ao sistema (3.38), sujeito a lei de controle (3.2) a* $\mathcal{D}(\alpha,r)$*-estabilidade com custo garantido* $\mathcal{H}_\infty$ *dado por* $\gamma = \sqrt{\mu}$ *e ganhos robustos de realimentação dos estados*

$$\bar{K} = \bar{Z}\bar{W}^{-1}. \tag{3.49}$$

Prova: Os mesmos passos da Prova apresentada para o Teorema 3.1 devem ser utilizados para a Prova do Teorema 3.3, desta vez considerando-se todas as matrizes, com exceção da matriz de Finsler, dependentes do parâmetro v, que representa o vértice do politopo de incertezas. Portanto, pela transformação (2.8), se (3.47) é Schur-estável, então (3.38) é $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estável com o mesmo custo garantido $\mathcal{H}_\infty$. ■

A partir do Teorema 3.3, podemos estimar a norma $\mathcal{H}_\infty$ pelo seguinte procedimento convexo de otimização

$$\mathcal{H}_\infty : \left\{ \begin{array}{c} \min \quad \mu \\ \bar{W} = \bar{W}^T > \mathbf{0}; \text{ tal que:} \\ \Psi_v > \mathbf{0} \; (\Psi_v \text{ dada em (3.48)}). \end{array} \right. \tag{3.50}$$

Exemplo 3.3 *Considere o sistema (3.38), com $\tau = 3$ e parâmetros incertos afetando todas as matrizes dinâmicas da seguinte forma*

$$A(\rho) = \begin{bmatrix} 0{,}1+\rho & 1 \\ 0{,}05 & 0{,}8-\rho \end{bmatrix}, \quad A_\theta(\eta) = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}1-\eta \end{bmatrix}, \tag{3.51}$$

$$B(\sigma) = B_e(\sigma) = \begin{bmatrix} 1+\sigma \\ 0{,}6-\sigma \end{bmatrix}, \quad C(\rho) = \begin{bmatrix} 0+\rho & 1 \end{bmatrix}, \quad C_\theta(\eta) = \begin{bmatrix} 0{,}5-\eta & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.52}$$

$$D(\sigma) = \begin{bmatrix} 0{,}1-\sigma \end{bmatrix}, \quad D_e(\sigma) = \begin{bmatrix} 0{,}2-\sigma \end{bmatrix}, \tag{3.53}$$

em que $|\rho| \leq 0{,}1$, $|\eta| \leq 0{,}05$, e $|\sigma| \leq 0{,}1$. Utilizando o problema de otimização (3.50) e escolhendo $\alpha = 0{,}1$ e $r = 0{,}8$, obteve-se os seguintes resultados para a $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilidade do sistema:

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} -0{,}0095 & -0{,}9696 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0957 & -0{,}0664 \end{bmatrix}$$

e custo garantido $\mathcal{H}_\infty = 2{,}9959$.

Na Figura 3.7 são mostrados os autovalores do sistema incerto discreto no tempo com atraso conhecido no vetor de estados (3.38) em malha fechada através da lei de controle (3.2), para cada vértice do politopo de incertezas. Como era de se esperar, observe que todos os autovalores estão localizados no interior da região $\mathcal{D}(0{,}1; 0{,}8)$. Na Figura 3.8 é apresentada a nuvem de autovalores do sistema em malha fechada.

Utilizou-se um algoritmo de bissecção junto com (3.50) para determinar o menor valor do raio r para cada posição do centro α, tal que o Teorema 3.3 seja factível. Veja a Figura 3.9 e observe que a faixa de variação do parâmetro α foi $-0{,}15 \leq \alpha \leq 0{,}2$. E que o menor valor de $r = 0{,}6494$ foi obtido para $\alpha = 0$. Também através do algoritmo de bissecção e (3.50), mantendo fixo o parâmetro α e varrendo o intervalo $1-\alpha \geq r \geq 0{,}1$, avaliou-se o valor do custo $\mathcal{H}_\infty$ tal que o Teorema 3.3 seja factível. O valor de α também foi varrido dentro do intervalo $0 \leq \alpha \leq 0{,}5$. A Figura 3.10 mostra as superfícies geradas com tais dados. As condições foram infactiveis fora desses intervalos.

3.1.4 Sistema e atraso incertos

Considere que o sistema (3.1) seja incerto e com atraso incerto e invariante no tempo $d \in \mathcal{I}[1,\tau]$, em que τ é o valor máximo e conhecido do atraso, definindo uma classe de sistemas incertos discretos no tempo com atraso incerto no vetor de estados, representada por

$$\Upsilon(\beta) : \begin{cases} x_{k+1} &= A(\beta)x_k + A_\theta(\beta)x_{k-d} + B(\beta)u_k + B(\beta)_e w_k \\ z_k &= C(\beta)x_k + C_\theta(\beta)x_{k-d} + D(\beta)u_k + D(\beta)_e w_k \end{cases} \tag{3.54}$$

em que $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^p$ e $w_k \in \mathbb{R}^\ell$ são o vetor dos estados, das entradas de controle e das entradas exógenas, respectivamente, $k \in \mathbb{N}$ é a amostragem, as matrizes $A(\beta)$ e $A_\theta(\beta) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(\beta) \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $B_e(\beta) \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$, $C(\beta)$ e $C_\theta(\beta) \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $D(\beta) \in \mathbb{R}^{q\times p}$, $D_e(\beta) \in \mathbb{R}^{q\times \ell}$, representam a dinâmica do sistema $\Upsilon(\beta)$ pertencente a um politopo definido pelo conjunto de todas as matrizes obtidas pela combinação convexa de seus N vértices, dado por

$$\mathcal{A}_{o\ell} = \left\{ \Upsilon(\beta) \in \mathbb{R}^{n+q\times 2n+p+\ell} : \Upsilon(\beta) = \sum_{v=1}^{N} \beta_v \Upsilon_v,\ \beta \in \Omega \right\}, \tag{3.55}$$

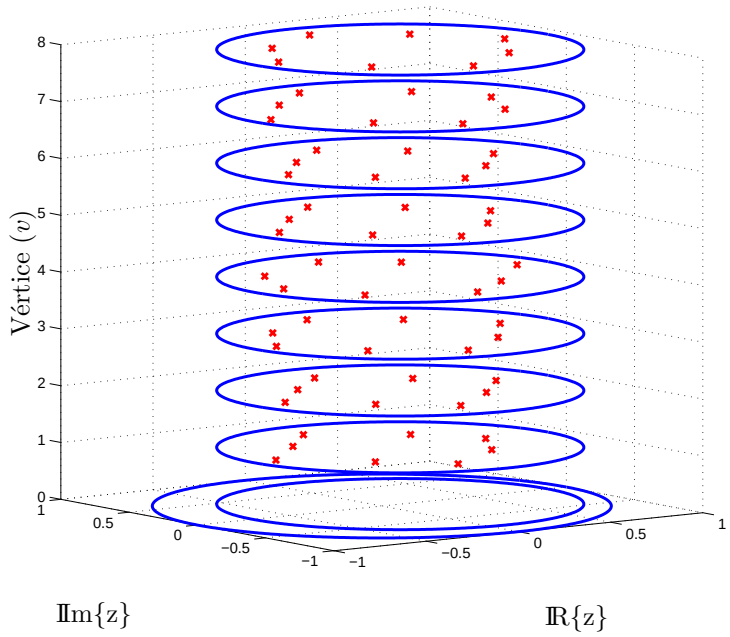

Figura 3.7: Autovalores do sistema (3.38) em cada vértice do politopo de incertezas

.

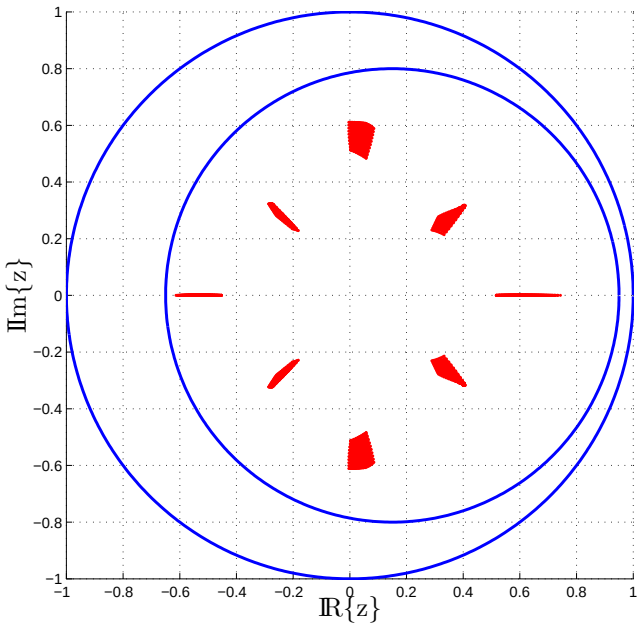

Figura 3.8: Nuvem de autovalores do sistema (3.38) em malha fechada através da lei de controle (3.7), para cada vértice do politopo de incertezas.

com Ω definido por

$$\Omega = \left\{ \beta : \sum_{v=1}^{N} \beta_v = 1,\ \beta_v \geq 0 \right\}, \tag{3.56}$$

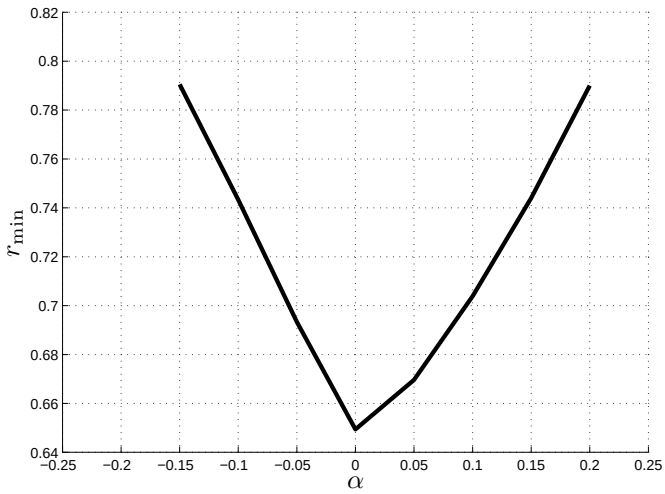

Figura 3.9: Valores mínimos de raio em função do parâmetro α a partir de (3.48).

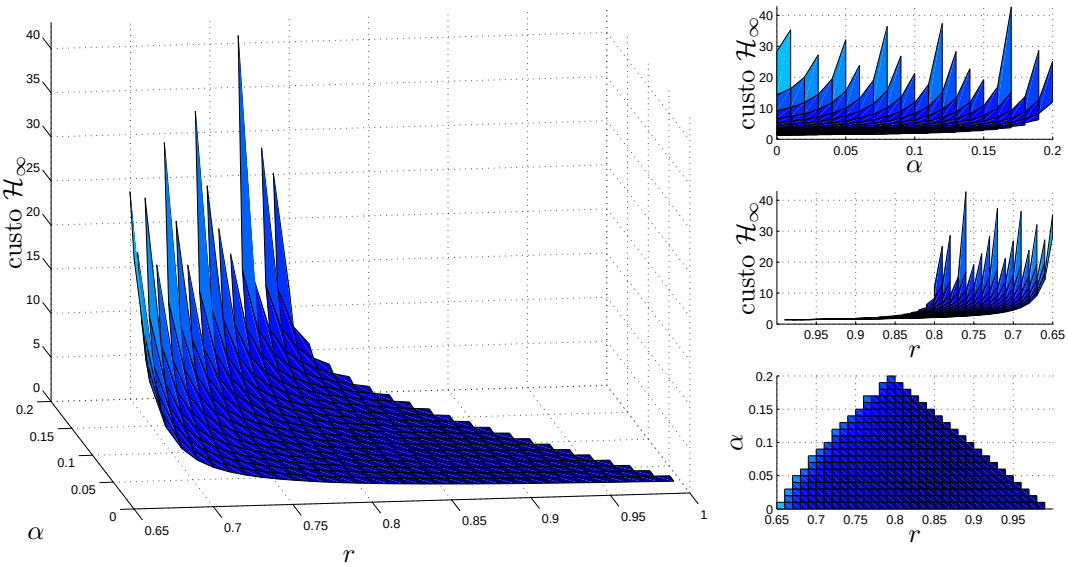

Figura 3.10: Superfície custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ em função de α e r a partir de (3.48).

e os vértices Υ_v conhecidos e dados por

$$\Upsilon_v = \left[\begin{array}{cc|c|c} A_v & A_{\theta v} & B_v & B_{ev} \\ \hline C_v & C_{\theta v} & D_v & D_{ev} \end{array}\right], \; v \in \mathcal{I}[1,N]. \tag{3.57}$$

Esse sistema pode ser representado na forma aumentada livre de atraso

$$\bar{\Upsilon}_{v,d} : \left\{ \begin{array}{rcl} \bar{x}_{k+1} & = & \bar{A}_{v,d}\bar{x}_k + \bar{B}_v u_k + \bar{B}_{ev} w_k \\ z_k & = & \bar{C}_{v,d}\bar{x}_k + \bar{D}_v u_k + \bar{D}_{ev} w_k, \end{array} \right. \tag{3.58}$$

sendo $\bar{x}_k$ dado em (3.4) e

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{v,d} &= \begin{bmatrix} A_v & \mathbf{0}_{n\times(d-1)n} & A_{\tau,v} & \mathbf{0}_{n\times(\tau-d-1)n} & \mathbf{0} \\ & & I_{\tau n} & & \mathbf{0}_{\tau n\times n} \end{bmatrix}, \\
\bar{C}_{v,d} &= \begin{bmatrix} C_v & \mathbf{0}_{n\times(d-1)n} & C_{\tau,v} & \mathbf{0}_{n\times(\tau-d-1)n} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \text{ para} d \in \mathcal{I}[1,\tau-1], \\
\bar{A}_{v,d} &= \begin{bmatrix} A_v & \mathbf{0}_{n\times(d-1)n} & A_{\tau,v} \\ & I_{\tau n} & \mathbf{0}_{\tau n\times n} \end{bmatrix}, \\
\bar{C}_{v,d} &= \begin{bmatrix} C_v & \mathbf{0}_{n\times(d-1)n} & C_{\tau,v} \end{bmatrix}, \text{ para } d=\tau, \text{ e}
\end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\bar{B}_v = \begin{bmatrix} B_v \\ \mathbf{0}_{\tau n\times p} \end{bmatrix}, \bar{B}_{ev} = \begin{bmatrix} B_{ev} \\ \mathbf{0}_{\tau n\times \ell} \end{bmatrix}, \bar{D}_v = D_v, \bar{D}_{ev} = D_{ev} \tag{3.60}$$

com $\bar{A}_{v,d} \in \mathbb{R}^{n(\tau+1)\times n(\tau+1)}$, $\bar{B}_v \in \mathbb{R}^{n(\tau+1)\times p}$, $\bar{B}_{ev} \in \mathbb{R}^{n(\tau+1)\times \ell}$, $\bar{C}_v \in \mathbb{R}^{q\times n(\tau+1)}$, $\bar{D}_v \in \mathbb{R}^{q\times p}$, $\bar{D}_{ev} \in \mathbb{R}^{q\times \ell}$.

Assumindo a lei de controle (3.2) expressa por (3.7).

Substituindo (3.7) em (3.58) resulta no seguinte sistema de malha fechada

$$\bar{\boldsymbol{\Upsilon}}_{v,d} : \begin{cases} \bar{x}_{k+1} &= \bar{\mathbf{A}}_{v,d}\bar{x}_k + \bar{B}_{ev}w_k \\ z_k &= \bar{\mathbf{C}}_{v,d}\bar{x}_k + \bar{D}_{ev}w_k \end{cases} \tag{3.61}$$

com

$$\bar{\mathbf{A}}_{v,d} = \bar{A}_{v,d} + \bar{B}_v\bar{K} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{C}}_{v,d} = \bar{C}_{v,d} + \bar{D}_v\bar{K} \tag{3.62}$$

Para considerar a alocação de polos na região $\mathcal{D}(\alpha,r)$ aplica-se a operação $\tilde{A}_{v,d} = \dfrac{(\bar{\mathbf{A}}_{v,d} - \alpha\mathbf{I})}{r}$, dada em (2.8), em (3.61), resultando em

$$\tilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_{v,d} : \begin{cases} \bar{x}_{k+1} &= \tilde{A}_{v,d}\bar{x}_k + \bar{B}_{ev}w_k \\ z_k &= \bar{\mathbf{C}}_{v,d}\bar{x}_k + \bar{D}_{ev}w_k \end{cases} \tag{3.63}$$

Daqui em diante, as mesmas operações aplicadas a classe de sistemas da Seção 3.1.1, a partir de (3.12) até (3.22), são aplicadas à classe de sistemas desta seção. Sendo que, neste caso, como os sistemas e seu atraso são incertos, são necessários τN sistemas aumentados livres de atraso, ou seja, um para cada combinação entre o atraso e o vértice do politopo de incertezas. Sendo assim, τN condições LMI para a estabilização e para a síntese de ganhos K e K_τ do sistema (3.54), sujeito a lei de controle (3.2), é apresentada no teorema que segue

Teorema 3.4 *Se existirem matrizes* $\bar{Z} \in \mathbb{R}^{p\times n(\tau+1)} = \begin{bmatrix} Z & \mathbf{0}_{n\times(\tau-1)n} & Z_\tau \end{bmatrix}$, $\mathbf{0} < \bar{W} = \bar{W}^T =$ *bloco diagonal*$\begin{bmatrix} W_0 & W & W_\tau \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n(\tau+1)\times n(\tau+1)}$, *e o escalar* $\mu > 0$, *tais que,*

$$\Psi_{v,d} = \begin{bmatrix} \bar{W} & \dfrac{(\bar{A}_{v,d} - \alpha\mathbf{I})\bar{W} + \bar{B}_v Z}{r} & \mathbf{0} & \bar{B}_{ev} \\ \star & \bar{W} & \bar{W}^T\bar{C}_{v,d}^T + Z^T\bar{D}_v^T & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{I} & \bar{D}_{ev} \\ \star & \star & \star & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \tag{3.64}$$

seja verificado, com matrizes $\bar{A}_{v,d}$, $\bar{C}_{v,d}$, $\bar{B}_v$, $\bar{B}_{ev}$, $\bar{D}_v$, $\bar{D}_{ev}$ *dadas em (3.59)-(3.60), então o sistema (3.58) sujeito a lei de controle (3.7) é Schur estável, assegurando ao sistema (3.54), sujeito a lei de controle (3.2) a* $\mathcal{D}(\alpha,r)$*-estabilidade com custo garantido* $\mathcal{H}_\infty$ *dado por* $\gamma = \sqrt{\mu}$ *e ganhos robustos de realimentação dos estados*

$$\bar{K} = \bar{Z}\bar{W}^{-1}. \tag{3.65}$$

Prova: Os mesmos passos da Prova apresentada para o Teorema 3.1 devem ser utilizados para a Prova do Teorema 3.4, desta vez considerando-se todas as matrizes, com exceção da matriz de Finsler, dependentes do parâmetro v, que representa o vértice do politopo de incertezas e considerando-se $d \in \mathcal{I}[1,\tau]$. Portanto, pela transformação (2.8), se (3.63) é Schur-estável, então (3.54) é $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estável com o mesmo custo garantido $\mathcal{H}_\infty$. ■

A partir do Teorema 3.4, podemos estimar a norma $\mathcal{H}_\infty$ pelo seguinte procedimento convexo de otimização

$$\mathcal{H}_\infty : \begin{cases} \min \quad \mu \\ \bar{W} = \bar{W}^T > \mathbf{0}; \text{ tal que:} \\ \Psi_{v,d} > \mathbf{0} \ (\Psi_{v,d} \text{ dada em (3.64)}). \end{cases} \tag{3.66}$$

Exemplo 3.4 *Considere o sistema (3.54), com matrizes incertas dadas em (3.51)-(3.53) do Exemplo (3.3) e $\tau = 3$. Utilizando o problema de otimização (3.66) e escolhendo $\alpha = 0{,}1$ e $r = 0{,}8$, obteve-se os seguintes resultados para a $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilidade do sistema:*

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} -0{,}0254 & -1{,}1065 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0382 & -0{,}0110 \end{bmatrix}$$

e custo garantido $\mathcal{H}_\infty = 7{,}3967$.

Na Figura 3.11 são mostradas as nuvens de autovalores do sistema incerto discreto no tempo com atraso incerto no vetor de estados (3.54) em malha fechada através da lei de controle (3.2), para cada valor de atraso. Como era de se esperar, observe que todos os autovalores estão localizados no interior da região $\mathcal{D}(0{,}1; 0{,}8)$.

Utilizou-se um algoritmo de bissecção junto com (3.66) para determinar o menor valor do raio r para cada posição do centro α, tal que o Teorema 3.4 seja factível. Veja a Figura 3.12 e observe que a faixa de variação do parâmetro α foi $-0{,}16 \leq \alpha \leq 0{,}18$. E que o menor valor de $r = 0{,}7303$ foi obtido para $\alpha = 0$. Também através do algoritmo de bissecção e (3.66), mantendo fixo o parâmetro α e varrendo o intervalo $1-\alpha \geq r \geq 0{,}1$, avaliou-se o valor do custo $\mathcal{H}_\infty$ tal que o Teorema 3.4 seja factível. O valor de α também foi varrido dentro do intervalo $0 \leq \alpha \leq 0{,}5$. A Figura 3.13 mostra as superfícies geradas com tais dados. As condições foram infactiveis fora desses intervalos.

3.2 Estabilização com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ via função de Lyapunov-Krasovskii

Nesta seção são adaptadas condições da literatura para o cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ e para síntese de ganhos robustos de realimentação de estados de sistemas incertos discretos no tempo com atraso conhecido no vetor de estados, via função de Lyapunov-Krasovskii, assegurando um nível pré-determinado de atenuação $\mathcal{H}_\infty$. Essas condições levam em conta termos que dependem do estado atual e do estado atrasado. Assume-se que as incertezas pertencem a um politopo convexo conhecido e podem afetar todas as matrizes do sistema.

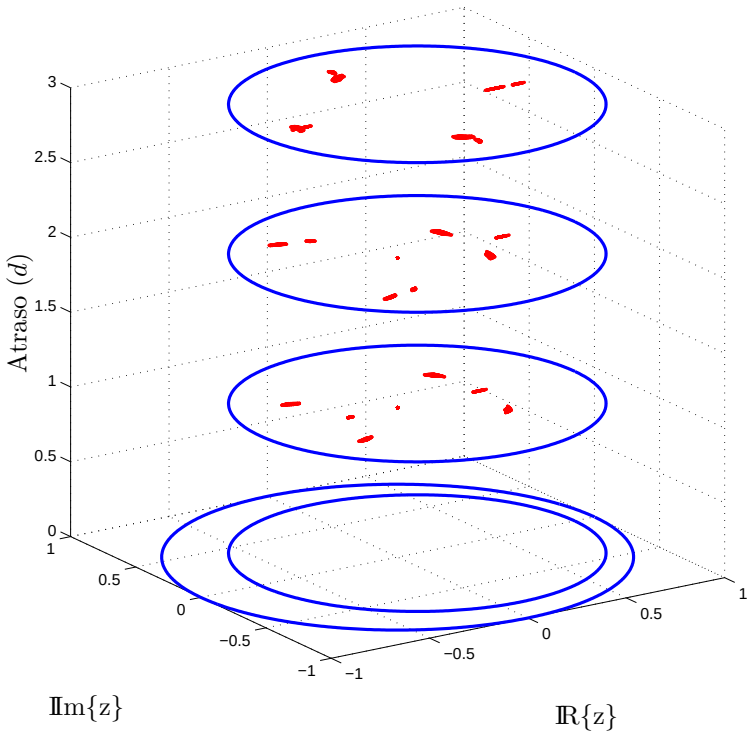

Figura 3.11: Nuvens de autovalores do sistema (3.54) em malha fechada através da lei de controle (3.7), para cada valor do atraso.

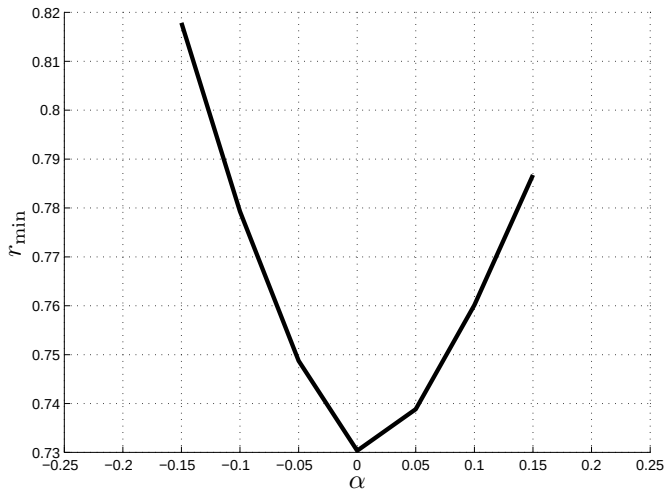

Figura 3.12: Valores mínimos de raio em função do parâmetro α a partir de (3.64).

3.2.1 Descrição dos sistemas discretos com atraso nos estados

Considere a seguinte classe de sistemas lineares discretos, invariantes no tempo, com atraso conhecido invariante no tempo no vetor de estados definido por

$$\Upsilon(\beta) : \left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & A(\beta)x_k + A_\theta(\beta)x_{k-\tau} + B(\beta)u_k + B_e(\beta)w_k, \\ z_k & = & C(\beta)x_k + C_\theta(\beta)x_{k-\tau} + D(\beta)u_k + D_e(\beta)w_k, \end{array} \right. \tag{3.67}$$

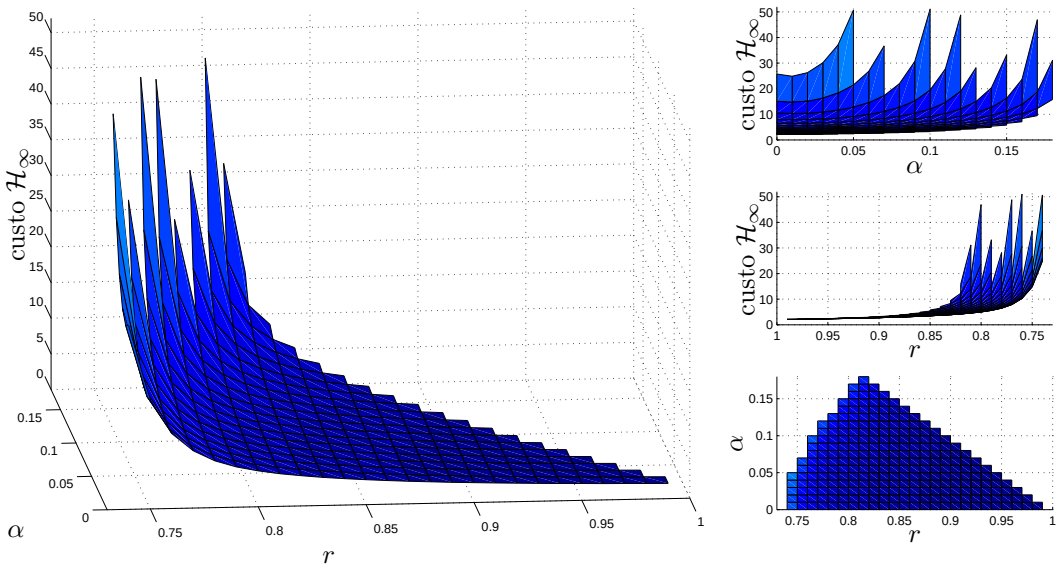

Figura 3.13: Superfície custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ em função de α e r a partir de (3.64).

em que τ é o valor conhecido do atraso, k é a amostragem e as matrizes $A(\beta)$, $A_\theta(\beta)$, $B(\beta)$, $B_e(\beta)$, $C(\beta)$, $C_\theta(\beta)$, $D(\beta)$ e $D_e(\beta)$ são matrizes incertas, invariantes no tempo, adequadamente definidas em termos de $x_k = x(k) \in \mathbb{R}^n$, o qual é o vetor de estados no instante k, $u_k = u(k) \in \mathbb{R}^p$, que representa os p sinais de controle, $w_k = w(k) \in \mathbb{R}^\ell$, que contém ℓ entradas exógenas, e $z_k = z(k) \in \mathbb{R}^q$, o vetor de q sinais de saída de ponderação. Essas matrizes podem ser descritas por um politopo com vértices conhecidos dado por

$$\mathcal{A}_{o\ell} = \Big\{\Upsilon(\beta) \in \mathbb{R}^{n+q\times 2n+p+\ell} : \Upsilon(\beta) = \sum_{v=1}^{N} \beta_v \Upsilon_v,\ \beta \in \Omega\Big\}, \tag{3.68}$$

em que

$$\Omega = \left\{\beta : \sum_{v=1}^{N} \beta_v = 1,\ \beta_v \geq 0,\ \ v \in \mathcal{I}[1,N]\right\} \tag{3.69}$$

e

$$\Upsilon_v = \left[\begin{array}{cc|c|c} A_v & A_{\theta v} & B_v & B_{ev} \\ \hline C_v & C_{\theta v} & D_v & D_{ev} \end{array}\right],\ \ v \in \mathcal{I}[1,N]. \tag{3.70}$$

A lei de controle considerada é:

$$u_k = Kx_k + K_\tau x_{k-\tau}, \tag{3.71}$$

com $[K|K_\tau] \in \mathbb{R}^{p\times 2n}$. Usando (3.71) em (3.67), o sistema incerto em malha fechada resultante é dado por

$$\boldsymbol{\Upsilon}(\beta) : \left\{\begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & \mathbf{A}(\beta)x_k + \mathbf{A}_\theta(\beta)x_{k-\tau} + B_e(\beta)w_k, \\ z_k & = & \mathbf{C}(\beta)x_k + \mathbf{C}_\theta(\beta)x_{k-\tau} + D_e(\beta)w_k, \end{array}\right. \tag{3.72}$$

com $\boldsymbol{\Upsilon}(\beta) \in$ (3.68),

$$\boldsymbol{\Upsilon}_v = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}_v & \mathbf{A}_{\theta v} & B_{ev} \\ \hline \mathbf{C}_v & \mathbf{C}_{\theta v} & D_{ev} \end{array}\right],\ \ v \in \mathcal{I}[1,N], \tag{3.73}$$

com matrizes $\mathbf{A}_v$, $\mathbf{A}_{\theta v}$, $\mathbf{C}_v$ e $\mathbf{C}_{\theta,v}$ definidas por

$$\mathbf{A}_v = A_v + B_v K, \quad \mathbf{A}_{\theta v} = A_{\theta v} + B_v K_\tau, \tag{3.74}$$

$$\mathbf{C}_v = C_v + D_v K, \quad \mathbf{C}_{\theta v} = C_{\theta v} + D_v K_\tau. \tag{3.75}$$

Neste trabalho, por simplicidade, tanto o sistema (3.67) quanto o sistema (3.72) são considerados com condições iniciais nulas, isto é,

$$x_k = \mathbf{0}, \quad \forall k \in \mathcal{I}[-\tau, 0]. \tag{3.76}$$

Note que diferentemente dos casos anteriores, não é definido um sistema aumentado.

3.2.2 Cômputo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$

Nesta parte do texto pretende-se utilizar a descrição dada na Seção 3.2.1 para obter uma solução para o problema descrito abaixo. Diferentemente da abordagem usada na Seção 3.1, não será construído um sistema aumentado.

Problema 3.1 *Considere o problema de estimação do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, denotado por γ, para o sistema (3.72), sendo $\gamma > 0$, para todo $\beta \in \Omega$ e para todo $w_k \in \ell_2$ exista um $z_k \in \ell_2$, tal que, $\|z_k\|_2 < \gamma \|w_k\|_2$ seja verificado, utilizando a seguinte candidata à função de Lyapunov-Krasovskii já conhecida na literatura [SDM07b]*

$$V(\beta,k) = x_k^T \; P(\beta) \; x_k + \sum_{j=1}^{\tau} x_{k-j}^T \; S(\beta) \; x_{k-j}, \tag{3.77}$$

em que as matrizes $P(\beta)$ e $S(\beta)$ são dadas por

$$P(\beta) = \sum_{v=1}^{N} \beta_v P_v, \; S(\beta) = \sum_{v=1}^{N} \beta_v S_v, \tag{3.78}$$

com $\beta \in \Omega$.

Essa candidata a função de L-K é bastante simples em vista de funções mais completas encontradas na literatura, levando a resultados mais conservadores. A opção pelo seu uso deve-se ao objetivo de, inicialmente, manter as formulações desenvolvidas da maneira mais simples possível. Uma vez que $V(\beta,k)$ é radialmente ilimitada em relação a x, para que ela seja uma função de L-K, é necessário que adicionalmente (3.77) seja definida positiva e satisfaça

$$\Delta V(\beta,k) = V(\beta,k+1) - V(\beta,k) < 0 \tag{3.79}$$

$\forall \; \begin{bmatrix} x_k^T & x_{k-\tau}^T \end{bmatrix}^T \neq \mathbf{0}$ e $\forall \; \beta \in \Omega$. Uma condição suficiente para a positividade de (3.77) é obtida impondo-se $P_v > \mathbf{0}$ e $S_v > \mathbf{0}$, para $v \in \mathcal{I}[1,N]$.

A positividade de (3.77) é claramente assegurada assumindo-se $P_v = P_v^T > \mathbf{0}$, $S_v = S_v^T > \mathbf{0}$, $v \in \mathcal{I}[1,N]$ e a estrutura apresentada em (3.78). Para a estabilidade, é necessário verificar (3.79) que é calculado conforme:

$$\Delta V(\beta,k) \; = \; x_{k+1}^T (P(\beta) + S(\beta)) x_{k+1} - x_k^T \; P(\beta) \; x_k - x_{k-\tau}^T \; S(\beta) \; x_{k-\tau}. \tag{3.80}$$

Com isso, para ω pertencente à trajetória do sistema (3.72), através de (3.80) obtém-se $\Delta V(\beta,k) = \omega^T M(\beta)\omega < 0$, em que $M(\beta) = \sum_{v=1}^{N} \beta_v M_v$, $\beta \in \Omega$, $\omega = \begin{bmatrix} x_{k+1}^T & x_k^T & x_{k-\tau}^T \end{bmatrix}^T$ e M_v é dada por

$$M_v = \begin{bmatrix} P_v + S_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -P_v & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -S_v \end{bmatrix}, \; v \in \mathcal{I}[1, N]. \tag{3.81}$$

Para o cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ segue-se o mesmo raciocínio apresentado no Capítulo 3, Seção 3.1.1. Considere o sistema (3.72) robustamente estável com condições iniciais nulas, $\mu = \gamma^2$, $w_k \in \ell_2$. Considere também a função de custo U associada ao índice de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ γ dada por:

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \left[z_k^T z_k - \mu w_k^T w_k \right]. \tag{3.82}$$

Neste caso, tem-se que $V(\beta,0) = 0$ e $V(\beta,\infty)$ aproxima-se de zero quando w_k tender a zero, na medida em que k aumenta; ou de uma constante $\varphi < \infty$, no caso de w_k tender a $\phi < \infty$.

Assim, usando (3.80), U definido em (3.82) pode ser majorado como

$$\begin{aligned} U &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left[z_k^T z_k - \mu w_k^T w_k + \Delta V(\beta,k) \right] \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left[z_k^T z_k - \mu w_k^T w_k + \omega^T M(\beta)\omega \right] \end{aligned}$$

e pode ser reescrito como

$$U \leq \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\omega}^T \tilde{M}(\beta)\tilde{\omega}, \tag{3.83}$$

em que

$$\tilde{M}(\beta) = \sum_{v=1}^{N} \beta_v \tilde{M}_v, \tag{3.84}$$

$$\tilde{M}_v = \left[\begin{array}{c|c} M_v & \mathbf{0} \\ \hline \star & \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \star & -\mu \mathbf{I}_\ell \end{bmatrix} \end{array} \right] \tag{3.85}$$

e

$$\tilde{\omega} = \left[\begin{array}{c|cc} \omega^T & z_k^T & w_k^T \end{array} \right]^T. \tag{3.86}$$

Assim, uma condição para assegurar a estabilidade robusta de (3.72) com custo $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ é

$$\tilde{\omega}^T \tilde{M}(\beta)\tilde{\omega} < 0 \text{ sujeito a (3.72)}, \tag{3.87}$$

com $\tilde{M}(\beta)$ e $\tilde{\omega}$ definidos respectivamente em (3.84) e (3.86).

A restrição (3.87), junto com (3.72), de acordo com o Apêndice A.3 (Lema de Finsler) é equivalente a

$$\tilde{M}(\beta) + \mathcal{X}(\beta)\mathcal{B}(\beta) + \mathcal{B}(\beta)^T \mathcal{X}(\beta)^T < \mathbf{0}, \tag{3.88}$$

com

$$\mathcal{B}(\beta) = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_n & A(\beta) & A_\theta(\beta) & \mathbf{0} & B_e(\beta) \\ \mathbf{0} & C(\beta) & C_\theta(\beta) & -\mathbf{I}_p & D_e(\beta) \end{bmatrix}, \tag{3.89}$$

Escolhendo

$$\mathcal{X}(\beta) = \mathcal{X} = \begin{bmatrix} F_1^T & F_2^T & F_3^T & F_4^T & F_5^T \\ G_1^T & G_2^T & G_3^T & G_4^T & G_5^T \end{bmatrix}^T,$$

e trocando as matrizes dependentes de β em (3.89) pelas respectivas v-ésimas matrizes vértices, (3.88) pode ser reescrito como

$$\tilde{M}_v + \mathcal{X}\mathcal{B}_v + \mathcal{B}_v^T\mathcal{X}^T < \mathbf{0},$$

resultando na seguinte condição de análise

$$\Gamma_v = \begin{bmatrix} P_v + S_v & F_1A_v + G_1C_v - F_2^T & F_1A_{\theta v} + G_1C_{\theta v} - F_3^T & -G_1 - F_4^T & F_1B_{ev} + G_1D_{ev} - F_5^T \\ -F_1 - F_1^T & & & & \\ \star & \begin{matrix} F_2A_v + A_v^TF_2^T + G_2C_v \\ +C_v^TG_2^T - P_v \end{matrix} & \begin{matrix} F_2A_{dv} + G_2C_{dv} + A_v^TF_3^T \\ +C_v^TG_3^T \end{matrix} & -G_2 + A_v^TF_4^T + C_v^TG_4^T & \begin{matrix} F_2B_{ev} + G_2D_{ev} \\ +A_v^TF_5^T + C_v^TG_5^T \end{matrix} \\ \star & \star & \begin{matrix} F_3A_{\theta v} + A_{\theta v}^TF_3^T + G_3C_{\theta v} \\ +C_{\theta v}^TG_3^T - S_v \end{matrix} & -G_3 + A_{\theta v}^TF_4^T + C_{\theta v}^TG_4^T & \begin{matrix} F_3B_{ev} + G_3D_{ev} \\ +A_{\theta v}^TF_5^T + C_{\theta v}^TG_5^T \end{matrix} \\ \star & \star & \star & \mathbf{I}_p - G_4 - G_4^T & \begin{matrix} -G_5^T + F_4B_{ev} + G_4D_{ev} \\ -\mu\mathbf{I}_v + F_5B_{ev} + B_{ev}^TF_5^T \end{matrix} \\ \star & \star & \star & \star & \begin{matrix} +G_5D_{ev} + D_{ev}^TG_5^T \end{matrix} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{3.90}$$

Multiplicando cada desigualdade $\tilde{M}_v + \mathcal{X}\mathcal{B}_v + \mathcal{B}_v^T\mathcal{X}^T < \mathbf{0}$ por β_v e somando em $v \in \mathcal{I}[1, N]$, recupera-se (3.88) que é equivalente a (3.87).

3.2.3 Síntese Robusta

Teorema 3.5 *Considere que o sistema incerto em malha fechada dado por (3.72)-(3.75), seja robustamente estável, para todo $w_k \in \ell_2$ e $z_k \in \ell_2$ satisfazendo $\|z_k\|_2 < \gamma\|w_k\|_2$, para um escalar*

$0 < \theta \leq 1$ *e um valor dado* $\mu > 0$ *tais que*

$$\Xi_v = \begin{bmatrix} \tilde{P}_v + \tilde{S}_v - F - F^T & A_vF + B_vW & A_{\theta v}F + B_vW_\tau & \mathbf{0} & FB_{ev} \\ \star & -\tilde{P}_v & \mathbf{0} & F^TC_v^T + W^TD_v^T & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\tilde{S}_v & F^TC_{dv}^T + W_d^TD_v^T & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -\theta\mathbf{I}_p & D_{ev} \\ \star & \star & \star & \star & -\mu\mathbf{I}_\ell \end{bmatrix} < \mathbf{0},\ v \in \mathcal{I}[1,N], \quad (3.91)$$

seja verificado, então o sistema incerto (3.67)-(3.70) sujeito à lei de controle (3.71), com

$$K = WF^{-1} \quad e \quad K_\tau = W_\tau F^{-1}, \quad (3.92)$$

é robustamente estável, com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ *dado por* $\gamma = \sqrt{\mu}$. *Além disso, (3.77)-(3.78) é uma função de Lyapunov-Krasovskii que garante a estabilidade do sistema de malha fechada resultante, (3.72)-(3.75).*

Para demonstrar a suficiência da condição de síntese (3.91) observa-se, inicialmente, que se essa é verificada, então é assegurada a regularidade de F, uma vez que, do bloco (1,1) de (3.91), tem-se $F + F^T > \tilde{P}_v + \tilde{S}_v > \mathbf{0}$. Além disso, existe um escalar real $\kappa \in]0,2[$ tal que, para $\theta \in]0,1]$, $\kappa(\kappa-2) = -\theta$. Assim, substituindo o bloco (4,4) de (3.91) por $\kappa(\kappa-2)\mathbf{I}_p$, pré e pós-multiplicando a desigualdade à esquerda por T e à direita por T^T, em que

$$T = \text{bloco-diag}\{\mathbf{I}_3 \otimes F^{-T}, G, \mathbf{I}_{p+\ell},$$

com $G \in \mathbb{R}^{q\times q}$, substituido WF^{-1} por K, $W_\tau F^{-1}$ por K_τ, usando (3.74)-(3.75), obtém-se

$$\hat{\Xi}_v = \begin{bmatrix} F^{-T}\tilde{P}_vF^{-1} + F^{-T}\tilde{S}_vF^{-1} - F - F^T & F^{-T}(A_v + B_vK) & F^{-T}(A_{\theta v} + B_vK_\tau) & \mathbf{0} & FB_{ev} \\ \star & -F^{-T}\tilde{P}_vF^{-1} & \mathbf{0} & (C_{\theta v}^T + K_\tau^TD_v^T)G^T & \mathbf{0} \\ \star & \star & -F^{-T}\tilde{S}_vF^{-1} & (C_{\theta v}^T + K_\tau^TD_v^T)G^T & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & G\left(\kappa^2 - 2\kappa\right)G^T & GD_{ev} \\ \star & \star & \star & \star & -\mu I_\ell \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (3.93)$$

Note que, de acordo com [LTP09], [Cal11], assumindo $G = -\frac{1}{\kappa}\mathbf{I}_q$:

$$\begin{aligned} G^{-1}(\mathbf{I}_q + G + G^T)G^{-T} &= G^{-1}(\mathbf{I}_q - \frac{1}{\kappa}\mathbf{I}_q - \frac{1}{\kappa}\mathbf{I}_q)G^{-T} \\ &= G^{-1}(\mathbf{I}_q - \frac{2}{\kappa}\mathbf{I}_q)G^{-T} \\ &= G^{-1}(-\frac{1}{\kappa}\mathbf{I}_q)(\kappa^2 - 2\kappa)(-\frac{1}{\kappa}\mathbf{I}_q)G^{-T} \\ &= G^{-1}G(\kappa^2 - 2\kappa)G^T G^{-T} \\ &= (\kappa^2 - 2\kappa)\mathbf{I}_q \\ &= \kappa(\kappa - 2)\mathbf{I}_q \end{aligned} \tag{3.94}$$

Como existe um escalar real $0 < \kappa < 2$, tal que, para $0 < \theta \leq 1$, $\kappa(\kappa - 2) = -\theta$, então o bloco $(\tau + 3,\tau + 3)$ de (4.36) pode ser escrito como

$$G^{-1}(\mathbf{I}_q + G + G^T)G^{-T} = -\theta\mathbf{I}_q, \tag{3.95}$$

o que assegura a verificação de (3.90), com $P_v = F^{-T}\tilde{P}_v F^{-1}$, $S_v = F^{-T}\tilde{S}_v F^{-1}$, $v \in \mathcal{I}[1, N]$, $F_1 = F^{-1}$, $G_4 = -G$ e matrizes F_2, F_3, F_4, F_5, G_1, G_2, G_3 e G_5 nulas. Ao fazer essas escolhas em relação as variáveis de folga o conjunto de soluções se restringe, sendo introduzido conservadorismo na abordagem.

3.3 Conclusões

Neste capítulo foram propostas condições para $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilidade com estimação do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas discretos com atraso no vetor de estados, podendo tanto os sistemas quanto seus atrasos, serem precisamente conhecidos ou incertos. A abordagem empregada utiliza funções de L-K independentes de parâmetros, o que leva a resultados mais conservadores, do que através de funções de L-K dependentes de parâmetros.

Foi utilizado o Complemento de Schur na obtenção de condições convexas, as quais satisfeitas garantem a Schur estabilidade de sistemas aumentados livres de atraso que consequentemente garantem $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilidade com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dos sistemas originais com atraso.

A busca de valores de raio mínimo (r) para a região $\mathcal{D}(\alpha,r)$, em função de valores fixos de centro (α), foi realizada para cada tipo de sistema apresentado. Na Figura 3.14 podemos observar os resultados e concluir que à medida que a complexidade dos sistemas aumentam, no sentido, precisamente conhecidos ou incertos, com atraso conhecido ou incerto, a faixa de variação dos valores de centro (α) e seus respectivos valores mínimos de raio (r), dinimuem.

Outra avaliação realizada para cada sistema, foi relativa a variação do custo $\mathcal{H}_\infty$ em função da variação da região $\mathcal{D}(\alpha,r)$. Na Figura 3.15 é mostrado a variação do custo $\mathcal{H}_\infty$ de cada tipo de sistema, fixando-se o centro em $\alpha = 0{,}1$ e diminuindo o raio r a partir de $1 - \alpha = 0{,}9$, até o menor valor factível. Observe que o custo aumenta à medida que o raio diminui e à medida que a complexidade do sistema aumenta.

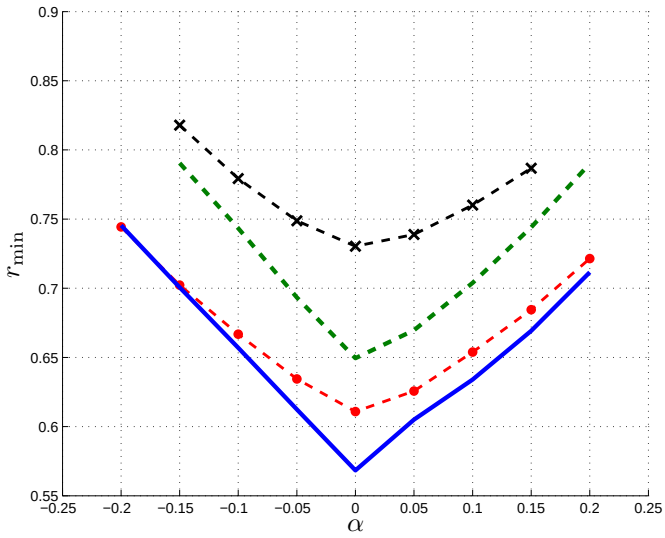

Figura 3.14: Comportamento dos raios mínimos em relação aos valores de α: (–) obtida a partir de (3.23), (-•-) obtida a partir de (3.35), (- -) obtida a partir de (3.48), (-x-) obtida a partir de (3.64).

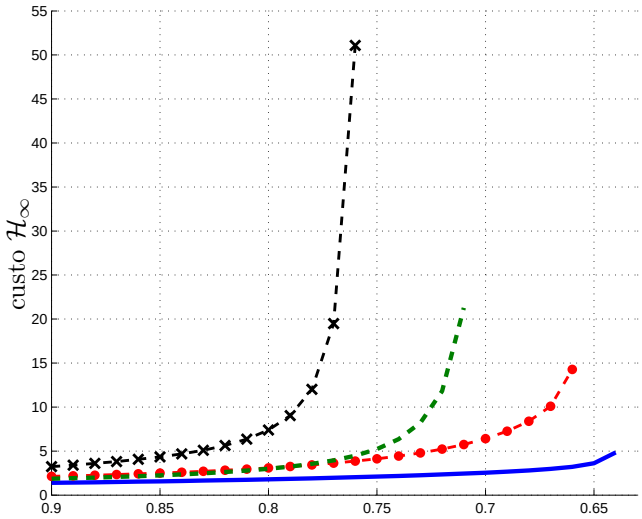

Figura 3.15: Comportamento do custo $\mathcal{H}_\infty$ em função do raio e α fixo em 0,1: (–) obtida a partir de (3.25), (-•-) obtida a partir de (3.37), (- -) obtida a partir de (3.50), (-x-) obtida a partir de (3.66).

Capítulo 4

$\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilização com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ via função de LK

O Problema 1.1 exposto na Seção 1.3 é retomado neste capítulo. A abordagem aqui consiste na obtenção de um sistema com múltiplos atrasos nos estados equivalente a (1.1) e na obtenção das condições convexas para estabilização com alocação regional de polos [Sil11] e sua extensão para o controle com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$. Neste capítulo, ao contrário do Capítulo 3, inicia-se com a apresentação do caso mais geral (sistemas e atraso incertos) e depois a especialização desse resultado para casos simplificados.

4.1 Sistema e atraso incertos

Considere a classe de sistemas incertos discretos no tempo com atraso incerto no vetor de estados (1.1) do Problema 1.1 da Seção 1.3, por comodidade, representada novamente aqui por

$$\Upsilon(\beta) : \left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & A(\beta)x_k + A_\theta(\beta)x_{k-d} + B(\beta)u_k + B_e(\beta)w_k \\ z_k & = & C(\beta)x_k + C_\theta(\beta)x_{k-d} + D(\beta)u_k + D_e(\beta)w_k \end{array} \right. \tag{4.1}$$

em que $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^p$ e $w_k \in \mathbb{R}^\ell$ são os vetores dos estados, das entradas de controle e das entradas exógenas, respectivamente, $k \in \mathbb{N}$ é a amostragem, $d \in \mathcal{I}[1,\tau]$ é o atraso incerto que pode assumir qualquer valor inteiro dentro do intervalo, sendo τ o valor máximo e conhecido desse atraso. As matrizes $A(\beta)$ e $A_\theta(\beta) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(\beta) \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $B_e(\beta) \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$, $C(\beta)$ e $C_\theta(\beta) \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $D(\beta) \in \mathbb{R}^{q\times p}$, $D_e(\beta) \in \mathbb{R}^{q\times \ell}$ representam a dinâmica do sistema (4.1) pertencente a um politopo definido pelo conjunto de todas as matrizes obtidas pela combinação convexa de seus N vértices, dado por

$$\mathcal{A}_{o\ell} = \left\{ \Upsilon(\beta) \in \mathbb{R}^{n+q\times 2n+p+\ell} : \Upsilon(\beta) = \sum_{v=1}^{N} \beta_v \Upsilon_v,\ \beta \in \Omega \right\}. \tag{4.2}$$

com Ω definido por

$$\Omega = \left\{ \beta : \sum_{v=1}^{N} \beta_v = 1,\ \beta_v \geq 0 \right\}, \tag{4.3}$$

Os vértices Υ_v são conhecidos e dados por

$$\Upsilon_v = \left[\begin{array}{cc|c|c} A_v & A_{\theta v} & B_v & B_{ev} \\ \hline C_v & C_{\theta v} & D_v & D_{ev} \end{array}\right], \; v \in \mathcal{I}[1, N]. \tag{4.4}$$

Esses sistemas podem ser representados na forma aumentada livres de atraso

$$\bar{\Upsilon}_{v,d} : \left\{ \begin{array}{rcl} \bar{x}_{k+1} & = & \bar{A}_{v,d}\bar{x}_k + \bar{B}_v u_k + \bar{B}_{ev} w_k \\ \bar{z}_k & = & C_{v,d}\bar{x}_k + \bar{D}_v u_k + \bar{D}_{ev} w_k, \end{array} \right. \tag{4.5}$$

sendo

$$\bar{x}_k = \left[\begin{array}{cccc} x_k^T & x_{k-1}^T & \cdots & x_{k-\tau}^T \end{array}\right]^T, \tag{4.6}$$

$$\begin{array}{c} \bar{A}_{v,d} = \left[\begin{array}{ccccc} A_v & \mathbf{0}_{n\times(d-1)n} & A_{\theta,v} & \mathbf{0}_{n\times(\tau-d-1)n} & \mathbf{0} \\ & & I_{\tau n} & & \mathbf{0}_{\tau n\times n} \end{array}\right], \\ \bar{C}_{v,d} = \left[\begin{array}{ccccc} C_v & \mathbf{0}_{n\times(d-1)n} & C_{\theta,v} & \mathbf{0}_{n\times(\tau-d-1)n} & \mathbf{0} \end{array}\right], \text{ para} d \in \mathcal{I}[1, \tau-1], \\ \bar{A}_{v,d} = \left[\begin{array}{ccc} A_v & \mathbf{0}_{n\times(d-1)n} & A_{\theta,v} \\ & I_{\tau n} & \mathbf{0}_{\tau n\times n} \end{array}\right], \\ \bar{C}_{v,d} = \left[\begin{array}{ccc} C_v & \mathbf{0}_{n\times(d-1)n} & C_{\theta,v} \end{array}\right], \text{ para } d = \tau, \end{array} \tag{4.7}$$

$$\bar{B}_v = \left[\begin{array}{c} B_v \\ \mathbf{0}_{\tau n\times p} \end{array}\right], \bar{B}_{ev} = \left[\begin{array}{c} B_{ev} \\ \mathbf{0}_{\tau n\times \ell} \end{array}\right], \bar{D}_v = D_v, \bar{D}_{ev} = D_{ev}, \tag{4.8}$$

com $\bar{A}_{v,d} \in \mathbb{R}^{n(\tau+1)\times n(\tau+1)}$, $\bar{B}_v \in \mathbb{R}^{n(\tau+1)\times p}$, $\bar{B}_{ev} \in \mathbb{R}^{n(\tau+1)\times \ell}$, $\bar{C}_v \in \mathbb{R}^{q\times n(\tau+1)}$, $\bar{D}_v \in \mathbb{R}^{q\times p}$ e $\bar{D}_{ev} \in \mathbb{R}^{q\times \ell}$.

Assume-se a lei de controle

$$u_k = Kx_k + K_\tau x_{k-\tau}, \tag{4.9}$$

com K e $K_\tau \in \mathbb{R}^{p\times n}$, expressa em sua forma aumentada por

$$u_k = \bar{K}(\tau)\bar{x}_k, \tag{4.10}$$

em que

$$\bar{K}(\tau) = \left[\begin{array}{ccc} K & \mathbf{0}_{n\times(\tau-1)n} & K_\tau \end{array}\right]. \tag{4.11}$$

K e K_τ são os mesmos para todos os valores de $d \in \mathcal{I}[1,\tau]$.

Substituindo (4.10) em (4.5) resulta no sistema em malha fechada

$$\bar{\mathbf{\Upsilon}}_{v,d} : \left\{ \begin{array}{rcl} \bar{x}_{k+1} & = & \bar{\mathbf{A}}_{v,d}\bar{x}_k + \bar{B}_{ev} w_k \\ z_k & = & \bar{\mathbf{C}}_{v,d}\bar{x}_k + \bar{D}_{ev} w_k, \end{array} \right. \tag{4.12}$$

com

$$\bar{\mathbf{A}}_{v,d} = \bar{A}_{v,d} + \bar{B}_v\bar{K} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{C}}_{v,d} = \bar{C}_{v,d} + \bar{D}_v\bar{K}. \tag{4.13}$$

Para considerar a alocação de polos na região $\mathcal{D}(\alpha,r)$ aplica-se a operação $\tilde{A}_{v,d} = \dfrac{(\bar{\mathbf{A}}_{v,d} - \alpha\mathbf{I})}{r}$, dada em (2.8), em (4.12), resultando em

$$\tilde{\mathbf{\Upsilon}}_{v,d} : \left\{ \begin{array}{rcl} \bar{x}_{k+1} & = & \tilde{A}_{v,d}\bar{x}_k + \bar{B}_{ev} w_k \\ z_k & = & \bar{\mathbf{C}}_{v,d}\bar{x}_k + \bar{D}_{ev} w_k. \end{array} \right. \tag{4.14}$$

Assim, qualquer sistema $\tilde{\mathbf{\Upsilon}}(\beta)_d$ pode ser obtido pela combinação convexa dos vértices $\tilde{\mathbf{\Upsilon}}_{v,d}$.

4.1.1 Transformação de similaridade

A seguir, o sistema (4.14) passa por uma transformação de similaridade para que se possa obter um sistema equivalente com múltiplos atrasos nos estados, através de uma operação de mudança de base [Sil11]. Diferentemente de [Sil11], a transformação aqui é aplicada levando em conta também o controle do custo $\mathcal{H}_\infty$, tal que,

$$\check{\Upsilon}_{v,d} : \begin{cases} \check{x}_{k+1} = \underbrace{\mathbf{Q}(\alpha,r,\tau)\tilde{A}_{v,d}\mathbf{Q}(\alpha,r,\tau)^{-1}}_{\check{\mathbf{A}}_{v,d}(\alpha,r,\tau)}\check{x}_k + \underbrace{\mathbf{Q}(\alpha,r,\tau)\bar{B}_{ev}}_{\check{B}_{ev}(\alpha,r,\tau)} w_k \\ \check{z}_k = \underbrace{\bar{\mathbf{C}}_{v,d}\mathbf{Q}(\alpha,r,\tau)^{-1}}_{\check{\mathbf{C}}_{v,d}(\alpha,r,\tau)}\check{x}_k + \check{D}_{ev}w_k, \end{cases} \tag{4.15}$$

$d \in \mathcal{I}[1,\tau]$, $v \in \mathcal{I}[1,N]$ e

$$\check{x}_k = \mathbf{Q}(\alpha,r,\tau)\bar{x}_k = \begin{bmatrix} \check{x}_k^T & \check{x}_{k-1}^T & \cdots & \check{x}_{k-d}^T \end{bmatrix}^T, \tag{4.16}$$

torne $\check{A}_{v,d}$, $\check{B}_v$, $\check{B}_{ev}$ e $\check{C}_{v,d}$ com as seguintes estruturas (note que essas matrizes são funções de (α,r,τ), porém por simplicidade essas dependências serão omitidas sempre que o contexto deixar claro):

$$\check{A}_{v,d} = \begin{bmatrix} \check{A}_{0,v,d} & \check{A}_{1,v,d} & \dots & \check{A}_{\tau-1,v,d} & \check{A}_{\tau,v,d} \\ & \mathbf{I}_{\tau n} & & & \mathbf{0}_{\tau n\times n} \end{bmatrix}, \check{B}_v = \begin{bmatrix} \frac{1}{r}B_v \\ \mathbf{0}_{\tau n\times p} \end{bmatrix}, \check{D}_v = D_v, \tag{4.17}$$

$$\check{B}_{ev} = \begin{bmatrix} B_{ev} \\ \mathbf{0}_{\tau n\times \ell} \end{bmatrix}, \check{C}_{v,d} = \begin{bmatrix} \check{C}_{0,v,d} & \check{C}_{1,v,d} & \dots & \check{C}_{\tau-1,v,d} & \check{C}_{\tau,v,d} \end{bmatrix} \text{ e } \check{D}_{ev} = D_{ev}. \tag{4.18}$$

De acordo com as estruturas (4.17)-(4.18) é possível representar o sistema livre de atraso (4.15)-(4.18) pelo sistema com múltiplos atrasos nos estados

$$\begin{cases} \check{x}_{k+1} = \sum_{m=0}^{\tau} \check{A}_{m,v,d}\check{x}_{k-m} + \check{B}_v u_k + \check{B}_{ev}w_k \\ \check{z}_k = \sum_{m=0}^{\tau} \check{C}_{m,v,d}\check{x}_{k-m} + \check{D}_v u_k + \check{D}_{ev}w_k. \end{cases} \tag{4.19}$$

Suponha a seguinte lei de controle

$$u_k = \sum_{m=0}^{\tau} \check{K}_m \check{x}_{k-m}, \tag{4.20}$$

em que $\check{K}_m$, $m \in \mathcal{I}[0,\tau]$ são obtidos da transformação de similaridade, ou seja,

$$\check{K}(\alpha,r,\tau) = \bar{K}(\tau)\mathbf{Q}(\alpha,r,\tau)^{-1} = \begin{bmatrix} \check{K}_0 & \mathbf{0}_{n\times(\tau-1)n} & \check{K}_\tau. \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

Utilizando (4.20) em (4.19) temos o sistema discreto no tempo com múltiplos atrasos nos estados em malha fechada

$$\check{\boldsymbol{\Upsilon}}_{v,d} : \begin{cases} \check{x}_{k+1} = \sum_{m=0}^{\tau} \check{\mathbf{A}}_{m,v,d}\check{x}_{k-m} + \check{B}_{ev}w_k \\ \check{z}_k = \sum_{m=0}^{\tau} \check{\mathbf{C}}_{m,v,d}\check{x}_{k-m} + \check{D}_{ev}w_k, \end{cases} \tag{4.22}$$

sendo

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{A}}_{m,v,d} &= \check{A}_{m,v,d} + \check{B}_v\check{K}_m \\ \check{\mathbf{C}}_{m,v,d} &= \check{C}_{m,v,d} + \check{D}_v\check{K}_m, \end{aligned} \tag{4.23}$$

com $m \in \mathcal{I}[0,\tau]$.

De [Sil11], a matriz $\mathbf{Q}$ para mudança de base será dada por

$$\mathbf{Q}(\alpha;r;\tau) = \begin{bmatrix} q_{1,1}\mathbf{I} & q_{1,2}\alpha\mathbf{I} & q_{1,3}\alpha^2\mathbf{I} & q_{1,4}\alpha^3\mathbf{I} & \dots & q_{1,(\tau+1)}\alpha^\tau\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & q_{2,2}r\mathbf{I} & q_{2,3}r\alpha\mathbf{I} & q_{2,4}r\alpha^2\mathbf{I} & \dots & q_{2,(\tau+1)}r\alpha^{\tau-1}\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & q_{3,3}r^2\mathbf{I} & q_{3,4}r^2\alpha\mathbf{I} & \dots & q_{3,(\tau+1)}r^2\alpha^{\tau-2}\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & q_{4,4}r^3\mathbf{I} & \dots & q_{4,(\tau+1)}r^3\alpha^{\tau-3}\mathbf{I} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & q_{(\tau+1),(\tau+1)}r^\tau\mathbf{I} \end{bmatrix}, \tag{4.24}$$

em que

$$q_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i+j}, & \text{para } i=j \text{ ou } i \text{ qualquer e } j=\tau+1 \\ q_{i+1,j+1} - q_{i+1,j}, & \text{para } i \in \mathcal{I}[\tau-1,1] \text{ e } j \in \mathcal{I}[i+1,2]. \end{cases} \tag{4.25}$$

Em [Sil11] definem-se as regras de formação para as matrizes $\check{A}_{m,v,d}$ e $\check{K}_m$, utilizando para tal uma matriz de coeficientes $a_{i,j}$. Nessa dissertação, diferentemente de [Sil11], como é tratado o custo $\mathcal{H}_\infty$, é necessário apresentar a regra de formação para a matriz $\check{C}_{m,v,d}$. Como a mesma matriz de coeficientes $a_{i,j}$, apresentada em [Sil11], não se aplica a regra de formação de $\check{C}_{m,v,d}$, uma nova matriz de coeficientes, em função da matriz $q_{i,j}$, dada em (4.25), é apresentada neste trabalho. Essa nova matriz de coeficientes atende a regra de formação de todas as matrizes. Diante disso, baseado em [Sil11], e adaptado para esta dissertação, definem-se as seguintes regras de formação:

Fato 1 *Se o sistema discreto no tempo com múltiplos atrasos nos estados (4.22) é Schur-estável com*

$$\check{A}_{m,v,d} = \begin{cases} \dfrac{A_v - (\tau+1)\alpha\mathbf{I}}{r}, \text{ para } m=0 \\ \dfrac{b_{2,m+2}A_v\alpha^m - b_{1,m+2}\alpha^{m+1}\mathbf{I}}{r^{m+1}}, \text{ para } m \in \mathcal{I}[1,d-1] \\ \dfrac{b_{2,m+2}A_v\alpha^m - b_{1,m+2}\alpha^{m+1}\mathbf{I} + A_{\theta v}}{r^{m+1}}, \text{ para } m=d \\ \dfrac{b_{2,m+2}A_v\alpha^m - b_{1,m+2}\alpha^{m+1}\mathbf{I} + b_{d+2,m+2}A_{\theta v}\alpha^{m-d}}{r^{m+1}}, \text{ para } m>d \\ \dfrac{A_v\alpha^\tau + A_{\theta v}\alpha^{\tau-d} - \alpha^{\tau+1}\mathbf{I}}{r^{\tau+1}}, \text{ para } m=\tau, \end{cases} \tag{4.26}$$

$$\check{K}_m = \begin{cases} K, \text{ para } m=0 \\ \dfrac{b_{2,m+2}K\alpha^m}{r^m}, \text{ para } m \in \mathcal{I}[1,\tau-1] \\ \dfrac{K\alpha^\tau + K_\tau}{r^\tau}, \text{ para } m=\tau, \end{cases} \tag{4.27}$$

$$\check{C}_{m,v,d} = \begin{cases} C_v, \text{ para } m=0 \\ \dfrac{b_{2,m+2}C_v\alpha^m}{r^m}, \text{ para } m \in \mathcal{I}[1,d-1] \\ \dfrac{b_{2,m+2}C_v\alpha^m + C_{\theta v}}{r^m}, \text{ para } m=d \\ \dfrac{b_{2,m+2}C_v\alpha^m + b_{d+2,m+2}C_{\theta v}\alpha^{m-d}}{r^m}, \text{ para } m>d \\ \dfrac{C_v\alpha^\tau + C_{\theta v}\alpha^{\tau-d}}{r^\tau}, \text{ para } m=\tau, \end{cases} \tag{4.28}$$

$\check{B}_v$, $\check{B}_{ev}$, $\check{D}_v$, $\check{D}_{ev}$, dadas em (4.17)-(4.18) e a matriz dos coeficientes $b_{i,j}$ dada por

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ , para } i = j \text{ ou } j = \tau + 2 \\ b_{i+1,j+1} + b_{i+1,j} \text{ , para } i < j < \tau + 2, \end{cases} \tag{4.29}$$

então o sistema discreto no tempo com atraso nos estados (4.1) é $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estável.

4.1.2 Alocação regional de polos com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$

Adiante será apresentada a condição para $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilidade com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ do sistema (4.1) através de seu equivalente com múltiplos atrasos nos estados (4.19).

De acordo com os critérios da Estabilidade Quadrática [Bar85] a norma $\mathcal{H}_\infty$ pode ser caracterizada pela seguinte candidata à função de Lyapunov-Krasovskii

$$V(\check{x}_k) = \check{x}_k^T P_{v,d} \check{x}_k + \sum_{h=1}^{\tau} \sum_{i=0}^{h} \check{x}_{k-i}^T S_{h,v,d} \check{x}_{k-i}, \tag{4.30}$$

com $\check{x}_k$ dado em (4.16).

Similarmente aos desenvolvimentos realizados em (3.13)-(3.17), uma condição para assegurar a estabilidade robusta de (4.22) com custo $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma = \sqrt{\mu}$ é

$$\check{x}_{k+1}^T \left(P_{v,d} + \sum_{c=1}^{\tau} S_{c,v,d} \right) \check{x}_{k+1} - \check{x}_k^T P_{v,d} \check{x}_k - \sum_{c=1}^{\tau} \check{x}_{k-c}^T S_{c,v,d} \check{x}_{k-c} - z_k^T z_k + \mu w_k^T w_k < 0. \tag{4.31}$$

Aplicando o ítem 1 do Lema de Finsler (Apêndice A.3) em (4.31) com a escolha

$$\omega = \begin{bmatrix} \check{x}_{k+1}^T & \check{x}_k^T & \check{x}_{k-1}^T & \cdots & \check{x}_{k-3}^T & z_k^T & w_k^T \end{bmatrix}^T, \tag{4.32}$$

temos

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} P_{v,d} + \sum_{c=1}^{\tau} S_{c,v,d} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -P_{v,d} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -S_{1,v,d} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -S_{\tau,v,d} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mu \mathbf{I}_l \end{bmatrix} \tag{4.33}$$

e

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_n & \check{\mathbf{A}}_{0,v,d} & \check{\mathbf{A}}_{1,v,d} & \cdots & \check{\mathbf{A}}_{\tau,v,d} & \mathbf{0} & \check{B}_{ev} \\ \mathbf{0} & \check{\mathbf{C}}_{0,v,d} & \check{\mathbf{C}}_{1,v,d} & \cdots & \check{\mathbf{C}}_{\tau,v,d} & -\mathbf{I}_q & \check{D}_{ev} \end{bmatrix}. \tag{4.34}$$

Aplicando o ítem 2 do Lema de Finsler (Apêndice A.3) utilizando (4.32)-(4.34) com a escolha

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} F_0^T & F_1^T & F_2^T & F_3^T & F_4^T & \cdots & F_{\tau+3}^T \\ G_0^T & G_1^T & G_2^T & G_3^T & G_4^T & \cdots & G_{\tau+3}^T \end{bmatrix}^T, \tag{4.35}$$

sendo F_i e G_i com $i \in \mathcal{I}[0, \tau + 3]$ de dimensões adequadas. Fazendo $\mathcal{X} = \mathbf{0}$, exceto para $F_0 = F$, $G_{\tau+2} = -G$. Pré e pós multiplicando por H e H^T, respectivamente, em que $H =$

bloco-diag$\{\mathbf{I}_{\tau+2} \otimes F^{-1}, G^{-1}_{q\times q}, \mathbf{I}_\ell\}$ resulta na condição $\check{\Psi}_{v,d} < 0$, com $\check{\Psi}_{v,d}$ dada por

$$\check{\Psi}_{v,d} = \left[\begin{array}{cccccccc} F^{-1}(P_{v,d} + \sum_{c=1}^{\tau} S_{c,v,d})F^{-T} - F^{-1} - F^{-T} & \check{\mathbf{A}}_{0,v,d}F^{-T} & \check{\mathbf{A}}_{1,v,d}F^{-T} & \cdots & \check{\mathbf{A}}_{\tau,v,d}F^{-T} & \mathbf{0} & \check{B}_{ev} \\ \star & -F^{-1}P_{v,d}F^{-T} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & -F^{-1}\check{\mathbf{C}}^T_{0,v,d} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -F^{-1}S_{1,v,d}F^{-T} & \cdots & \mathbf{0} & -F^{-1}\check{\mathbf{C}}^T_{1,v,d} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & -F^{-1}S_{\tau,v,d}F^{-T} & -F^{-1}\check{\mathbf{C}}^T_{\tau,v,d} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & \star & G^{-1}(\mathbf{I}_q + G + G^T)G^{-T} & -\check{D}_{ev} \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & -\mu\mathbf{I}_\ell \end{array}\right]. \quad (4.36)$$

Note que, de acordo com (3.94)-(3.95) o bloco $(\tau+3,\tau+3)$ de (4.36) pode ser escrito como $-\theta\mathbf{I}_q$.

Fazendo $F^{-1}P_{v,d}F^{-T} = \tilde{P}_{v,d}$, $F^{-1}S_{c,v,d}F^{-T} = \tilde{S}_{c,v,d}$, para $c =\in \mathcal{I}[1,\tau]$, podemos reescrever $\tilde{\Psi}_{v,d}$, dada em (4.36), como

$$\tilde{\Psi}_{v,d} = \left[\begin{array}{cccccccc} \tilde{P}_{v,d} + \sum_{c=1}^{\tau} \tilde{S}_{c,v,d} - F^{-1} - F^{-T} & \check{\mathbf{A}}_{0,v,d}F^{-T} & \check{\mathbf{A}}_{1,v,d}F^{-T} & \cdots & \check{\mathbf{A}}_{\tau,v,d}F^{-T} & \mathbf{0} & \check{B}_{ev} \\ \star & -\tilde{P}_{v,d} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & -F^{-1}\check{\mathbf{C}}^T_{0,v,d} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\tilde{S}_{1,v,d} & \cdots & \mathbf{0} & -F^{-1}\check{\mathbf{C}}^T_{1,v,d} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \star & \star & \star & \star & -\tilde{S}_{\tau,v,d} & -F^{-1}\check{\mathbf{C}}^T_{\tau,v,d} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & \star & -\theta\mathbf{I}_q & -\check{D}_{ev} \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & -\mu\mathbf{I}_\ell \end{array}\right]. \quad (4.37)$$

Fazendo $F^{-1} = \tilde{F}$, usando (4.23), (4.27), definindo $\check{B}_v$ e $\check{D}_v$ como em (4.17), $K\tilde{F}^T = Z$ e $K_\tau\tilde{F}^T = Z_\tau$, τN condições LMI para a estabilização e para a síntese de ganhos K e K_τ do sistema (4.1), sujeito a lei de controle (4.9), são apresentadas no teorema que segue

Teorema 4.1 *Se existirem as matrizes* $\tilde{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $Z_\tau \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $\mathbf{0} < \tilde{P}_{v,d} = \tilde{P}^T_{v,d} \in$

$\mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < \tilde{S}_{c,v,d} = \tilde{S}_{c,v,d}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *e os escalares* $0 < \theta \leq 1$ *e* $\mu > 0$, *tais que,*

$$\Theta_{v,d} = \left[\begin{array}{cccc} \tilde{P}_{v,d} + \sum_{c=1}^{\tau} \tilde{S}_{c,v,d} - \tilde{F}^{-1} - \tilde{F}^T & \check{A}_{0,v,d}\tilde{F}^T + (\frac{B_v}{r})Z & \check{A}_{1,v,d}\tilde{F}^T + b_{2,3}(\frac{B_v}{r})(\frac{\alpha^1 Z}{r^1}) & \cdots \\ \star & -\tilde{P}_{v,d} & \mathbf{0} & \cdots \\ \star & \star & -\tilde{S}_{1,v,d} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc} \check{A}_{\tau,v,d}\tilde{F}^T + b_{2,\tau+2}(\frac{B_v}{r})(\frac{\alpha^\tau Z + Z_\tau}{r^\tau}) & \mathbf{0} & \check{B}_{ev} \\ \mathbf{0} & -\tilde{F}\check{C}_{0,v,d}^T - Z^T D_v^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\tilde{F}\check{C}_{1,v,d}^T - b_{2,3}(\frac{\alpha^1 Z^T}{r^1})D_v^T & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\tilde{S}_{\tau,v,d} & -\tilde{F}\check{C}_{\tau,v,d}^T - b_{2,\tau+2}(\frac{\alpha^\tau Z^T + Z_\tau^T}{r^\tau})D_v^T & \mathbf{0} \\ \star & -\theta\mathbf{I}_q & -\check{D}_{ev} \\ \star & \star & -\mu\mathbf{I}_\ell \end{array}\right] < 0 \quad (4.38)$$

seja verificado, com d *e* $c \in \mathcal{I}[1,\tau]$, $v \in \mathcal{I}[1,N]$, *as matrizes* $\check{A}_{m,v,d}$, $\check{C}_{m,v,d}$, $m \in \mathcal{I}[0,\tau]$ *calculadas de acordo com Fato 1 , então o sistema (4.19) sujeito a lei de controle (4.20) é Schur-estável, o que implica no sistema (4.1), sujeito a lei de controle (4.9)* $\mathcal{D}(\alpha,r)$*-estável com custo garantido* $\mathcal{H}_\infty$ *dado por* $\gamma = \sqrt{\mu}$ *e ganhos robustos de realimentação dos estados:*

$$K = Z\tilde{F}^{-T} \quad e \quad K_\tau = Z_\tau \tilde{F}^{-T}. \quad (4.39)$$

Prova: Se (4.38) é verificada com $\tilde{P}_{v,d}$ e $\tilde{S}_{c,v,d} > 0$, d e $c \in \mathcal{I}[1,\tau]$, $v \in \mathcal{I}[1,N]$, então $\tilde{F}$ é não singular. De (4.39) $Z = K\tilde{F}^T$, $Z_\tau = K_\tau \tilde{F}^T$, usando-se (4.27), (4.23) e $\tilde{F} = F^{-1}$, recupera-se (4.37). Definindo-se $\tilde{P}_{v,d} = F^{-1}P_{v,d}F^{-T}$, $\tilde{S}_{c,v,d} = F^{-1}S_{c,v,d}F^{-T}$, $c \in \mathcal{I}[1,\tau]$, $-\theta\mathbf{I}_q = G^{-1}(\mathbf{I}_q + G + G^T)G^{-T}$ conforme (3.94)-(3.95), obtém-se (4.36). Aplicando-se a transformação de congruência $\coprod \check{\Psi}_{v,d} \coprod^T$, com $\check{\Psi}_{v,d}$ dada em (4.36) e $\coprod$ = bloco-diag$\{\mathbf{I}_{\tau+2} \otimes F, G_{q\times q}, \mathbf{I}_\ell\}$ e de acordo com o desenvolvimento (4.32)-(4.35), a verificação de (4.36) assegura a verificação de (4.31). Portanto, o sistema descrito por (4.22) é Schur-estável com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\sqrt{\mu}$. Além disso, pelas transformações (4.15)-(4.21) e (2.8), se (4.22) é Schur-estável, então (4.1), sujeito a lei de controle (4.9) é $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estável com o mesmo custo garantido $\mathcal{H}_\infty$. ■

A partir do Teorema 4.1, podemos estimar a norma $\mathcal{H}_\infty$ pelo seguinte procedimento convexo de otimização

$$\mathcal{H}_\infty : \left\{ \begin{array}{c} \min \quad \mu \\ \tilde{P}_{v,d} = \tilde{P}_{v,d}^T > \mathbf{0},\ \tilde{S}_{c,v,d} = \tilde{S}_{c,v,d}^T > \mathbf{0},\ 0 < \theta \leq 1, \text{ tal que:} \\ \Theta_{v,d} < \mathbf{0}\ (\Theta_{v,d} \text{ dada em } (4.38)). \end{array} \right. \quad (4.40)$$

Exemplo 4.1 *Considere o sistema (4.1) com* $d \in \mathcal{I}[1,\tau]$, $\tau = 3$ *e parâmetros incertos afetando todas as matrizes dinâmicas da seguinte forma*

$$A(\rho) = \begin{bmatrix} 0{,}1 + \rho & 1 \\ 0{,}05 & 0{,}8 - \rho \end{bmatrix}, \quad A_\theta(\eta) = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}1 - \eta \end{bmatrix}, \quad (4.41)$$

$$B(\sigma) = B_e(\sigma) = \begin{bmatrix} 1+\sigma \\ 0{,}6-\sigma \end{bmatrix}, \;\; C(\rho) = \begin{bmatrix} 0+\rho & 1 \end{bmatrix}, \;\; C_\theta(\eta) = \begin{bmatrix} 0{,}5-\eta & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.42}$$

$$D(\sigma) = \begin{bmatrix} 0{,}1-\sigma \end{bmatrix}, \;\; D_e(\sigma) = \begin{bmatrix} 0{,}2-\sigma \end{bmatrix}, \tag{4.43}$$

em que $|\rho| \leq 0{,}1$, $|\eta| \leq 0{,}05$, *e* $|\sigma| \leq 0{,}1$. *Utilizando o problema de otimização (4.40) e escolhendo* $\alpha = 0{,}1$ *e* $r = 0{,}8$, *obteve-se os seguintes resultados para a* $\mathcal{D}(\alpha,r)$*-estabilidade do sistema:*

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 0{,}1712 & -0{,}8489 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0242 & -0{,}0441 \end{bmatrix}$$

e custo garantido $\mathcal{H}_\infty = 4{,}4727$.

Na Figura 4.1 são mostrados as nuvens de autovalores do sistema incerto discreto no tempo com atraso incerto no vetor de estados (4.1) em malha fechada através da lei de controle (4.9). Como era de se esperar, observe que todos os autovalores estão localizada no interior da região $\mathcal{D}(0{,}1; 0{,}8)$.

Utilizou-se um algoritmo de bissecção junto com (4.40) para determinar o menor valor do raio r *para cada posição do centro* α, *tal que o Teorema 4.1 seja factível. Veja a Figura 4.2 e observe que a faixa de variação do parâmetro* α *foi* $-0{,}1 \leq \alpha \leq 0{,}1$. *E que o menor valor de* $r = 0{,}6819$ *foi obtido para* $\alpha = 0{,}05$. *Também através do algoritmo de bissecção e (4.40), mantendo fixo o parâmetro* α *e varrendo o intervalo* $1-\alpha \geq r \geq 0{,}1$, *avaliou-se o valor do custo* $\mathcal{H}_\infty$ *tal que o Teorema 4.1 seja factível. O valor de* α *também foi varrido dentro do intervalo* $0 \leq \alpha \leq 0{,}5$. *A Figura 4.3 mostra as superfícies geradas com tais dados. As condições foram infactiveis fora desses intervalos.*

4.2 Sistema incerto e atraso conhecido

Considere o caso particular do sistema (4.1) em que o atraso seja conhecido e invariante no tempo, ou seja, $d = \tau$, definindo o sistema incerto discreto no tempo com atraso conhecido no vetor de estados

$$\Upsilon(\beta) : \begin{cases} x_{k+1} &= A(\beta)x_k + A_\theta(\beta)x_{k-\tau} + B(\beta)u_k + B_e(\beta)w_k \\ z_k &= C(\beta)x_k + C_\theta(\beta)x_{k-\tau} + D(\beta)u_k + D_e(\beta)w_k \end{cases} \tag{4.44}$$

em que $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^p$ e $w_k \in \mathbb{R}^\ell$ são os vetores dos estados, das entradas de controle e das entradas exógenas, respectivamente, $k \in \mathbb{N}$ é a amostragem, τ é o atraso conhecido. As matrizes $A(\beta)$ e $A_\theta(\beta) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(\beta) \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $B_e(\beta) \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$, $C(\beta)$ e $C_\theta(\beta) \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $D(\beta) \in \mathbb{R}^{q\times p}$, $D_e(\beta) \in \mathbb{R}^{q\times \ell}$ representam a dinâmica do sistema (4.44) pertencente ao politopo $\mathcal{A}_{o\ell}$ de todas as matrizes obtidas pela combinação convexa de seus N vértices, dado em (4.2), definido pelo conjunto Ω, dado em (4.3). Os vértices são conhecidos e dados por Υ_v em (4.4).

Esses sistemas podem ser representados na forma aumentada livre de atraso por

$$\bar{\Upsilon}_v : \begin{cases} \bar{x}_{k+1} &= \bar{A}_v\bar{x}_k + \bar{B}_v u_k + \bar{B}_{ev} w_k \\ \bar{z}_k &= C_v\bar{x}_k + \bar{D}_v u_k + \bar{D}_{ev} w_k, \end{cases} \tag{4.45}$$

sendo

$$\bar{x}_k = \begin{bmatrix} x_k^T & x_{k-1}^T & \cdots & x_{k-\tau}^T \end{bmatrix}^T, \tag{4.46}$$

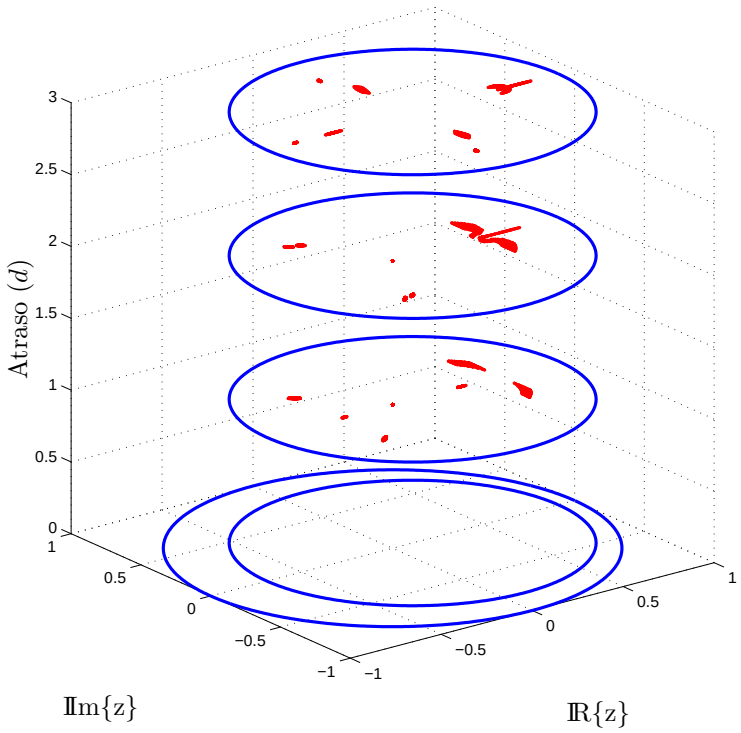

Figura 4.1: Nuvens de autovalores do sistema (4.1) em malha fechada através da lei de controle (4.9), para cada valor do atraso.

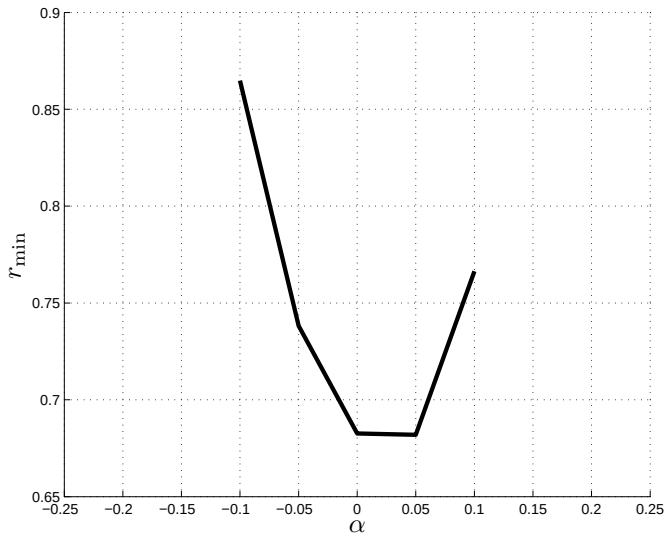

Figura 4.2: Valores mínimos de raio em função do parâmetro α a partir de (4.38).

$$\bar{A}_v = \begin{bmatrix} A_v & \mathbf{0}_{n\times(\tau-1)n} & A_{\theta,v} \\ & I_{\tau n} & \mathbf{0}_{\tau n\times n} \end{bmatrix}, \bar{B}_v = \begin{bmatrix} B_v \\ \mathbf{0}_{\tau n\times p} \end{bmatrix}, \bar{B}_{ev} = \begin{bmatrix} B_{ev} \\ \mathbf{0}_{\tau n\times \ell} \end{bmatrix}, \tag{4.47}$$

$$\bar{C}_v = \begin{bmatrix} C_v & \mathbf{0}_{n\times(\tau-1)n} & C_{\theta,v} \end{bmatrix}, \bar{D}_v = D_v, \bar{D}_{ev} = D_{ev}, \tag{4.48}$$

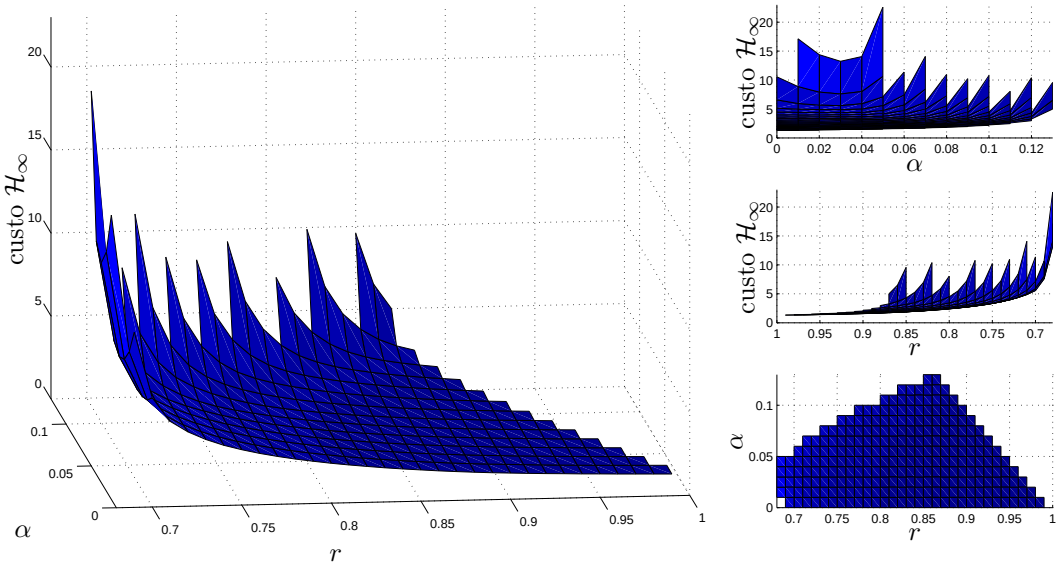

Figura 4.3: Superfície custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ em função de α e r a partir de (4.40).

com $v \in \mathcal{I}[1,N]$, $\bar{A}_v \in \mathbb{R}^{n(\tau+1)\times n(\tau+1)}$, $\bar{B}_v \in \mathbb{R}^{n(\tau+1)\times p}$, $\bar{B}_{ev} \in \mathbb{R}^{n(\tau+1)\times \ell}$, $\bar{C}_v \in \mathbb{R}^{q\times n(\tau+1)}$, $\bar{D}_v \in \mathbb{R}^{q\times p}$, $\bar{D}_{ev} \in \mathbb{R}^{q\times \ell}$.

Assume-se a lei de controle (4.9), expressa em sua forma aumentada por (4.10).

Substituindo (4.10) em (4.45) resulta no seguinte sistema de malha fechada

$$\bar{\mathbf{\Upsilon}}_v : \left\{ \begin{array}{rcl} \bar{x}_{k+1} & = & \bar{\mathbf{A}}_v \bar{x}_k + \bar{B}_{ev} w_k \\ z_k & = & \bar{\mathbf{C}}_v \bar{x}_k + \bar{D}_{ev} w_k, \end{array} \right. \tag{4.49}$$

com

$$\bar{\mathbf{A}}_v = \bar{A}_v + \bar{B}_v \bar{K} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{C}}_v = \bar{C}_v + \bar{D}_v \bar{K}. \tag{4.50}$$

Para considerar a alocação de polos na região $\mathcal{D}(\alpha,r)$ aplica-se a operação $\tilde{A}_v = \dfrac{(\bar{\mathbf{A}}_v - \alpha \mathbf{I})}{r}$, dada em (2.8), em (4.49), resultando em

$$\tilde{\mathbf{\Upsilon}}_v : \left\{ \begin{array}{rcl} \bar{x}_{k+1} & = & \tilde{A}_v \bar{x}_k + \bar{B}_{ev} w_k \\ z_k & = & \bar{\mathbf{C}}_v \bar{x}_k + \bar{D}_{ev} w_k. \end{array} \right. \tag{4.51}$$

Assim, qualquer sistema $\tilde{\mathbf{\Upsilon}}(\beta)$ pode ser obtido pela combinação convexa dos vértices $\tilde{\mathbf{\Upsilon}}_v$.

Passando pelas mesmas transformações (4.15)-(4.18), resulta no sistema equivalente com múltiplos atrasos nos estados

$$\left\{ \begin{array}{l} \check{x}_{k+1} = \sum_{m=0}^{\tau} \check{A}_{m,v} \check{x}_{k-m} + \check{B}_v u_k + \check{B}_{ev} w_k \\ \check{z}_k = \sum_{m=0}^{\tau} \check{C}_{m,v} \check{x}_{k-m} + \check{D}_v u_k + \check{D}_{ev} w_k. \end{array} \right. \tag{4.52}$$

Supondo a lei de controle (4.20) e utilizando-a em (4.52) temos o sistema discreto no tempo com múltiplos atrasos no vetor de estados em malha fechada

$$\check{\mathbf{\Upsilon}}_v : \left\{ \begin{array}{l} \check{x}_{k+1} = \sum_{m=0}^{\tau} \check{\mathbf{A}}_{m,v} \check{x}_{k-m} + \check{B}_{ev} w_k \\ \check{z}_k = \sum_{m=0}^{\tau} \check{\mathbf{C}}_{m,v} \check{x}_{k-m} + \check{D}_{ev} w_k, \end{array} \right. \tag{4.53}$$

sendo

$$\begin{aligned}\check{\mathbf{A}}_{m,v} &= \check{A}_{m,v} + \check{B}_v \check{K}_m \\ \check{\mathbf{C}}_{m,v} &= \check{C}_{m,v} + \check{D}_v \check{K}_m,\end{aligned} \tag{4.54}$$

com $m \in \mathcal{I}[0,\tau]$. Assim sendo, as regras de formação para $\check{A}_{m,v}$, $\check{K}_m$ e $\check{C}_{m,v}$, são definidas pela seguinte simplificação do Fato 1:

$$\check{A}_{m,v} = \begin{cases} \dfrac{A_v - (\tau+1)\alpha\mathbf{I}}{r} \text{ , para } m = 0 \\ \dfrac{b_{2,(m+2)}A_v\alpha^m\mathbf{I} - b_{1,(m+2)}\alpha^{m+1}\mathbf{I}}{r^{m+1}} \text{ , para } m \in \mathcal{I}[1,\tau-1] \\ \dfrac{A_v\alpha^\tau + A_{\theta v} - \alpha^{\tau+1}\mathbf{I}}{r^{\tau+1}} \text{ , para } m = \tau, \end{cases} \tag{4.55}$$

$$\check{K}_m = \begin{cases} K \text{ , para } m = 0 \\ \dfrac{b_{2,(m+2)}K\alpha^m}{r^m} \text{ , para } m \in \mathcal{I}[1,\tau-1] \\ \dfrac{K\alpha^\tau + K_\tau}{r^\tau} \text{ , para } m = \tau, \end{cases} \tag{4.56}$$

$$\check{C}_{m,v} = \begin{cases} C_v \text{ , para } m = 0 \\ \dfrac{b_{2,(m+2)}C_v\alpha^m}{r^m} \text{ , para } m \in \mathcal{I}[1,\tau-1] \\ \dfrac{C_v\alpha^\tau + C_{\theta v}}{r^\tau} \text{ , para } m = \tau. \end{cases} \tag{4.57}$$

$\check{B}_v$, $\check{B}_{ev}$, $\check{D}_v$, $\check{D}_{ev}$ são dadas em (4.17)-(4.18).

Seguindo as mesmas operações da Seção 4.1.2 para $d = \tau$, N condições LMI para a estabilização e para a síntese de ganhos K e K_τ do sistema (4.44), sujeito a lei de controle (4.9), são apresentadas no corolário que segue

Corolário 4.1 *Se existirem as matrizes $\tilde{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $Z_\tau \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $\mathbf{0} < \tilde{P}_v = \tilde{P}_v^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < \tilde{S}_{c,v} = \tilde{S}_{c,v}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e os escalares $0 < \theta \leq 1$ e $\mu > 0$, tais que,*

$$\Theta_v = \left[\begin{array}{cccccc} \tilde{P}_v + \sum_{c=1}^{\tau}\tilde{S}_{c,v} - \tilde{F}^{-1} - \tilde{F}^T & \check{A}_{0,v}\tilde{F}^T + (\frac{B_v}{r})Z & \check{A}_{1,v}\tilde{F}^T + b_{2,3}(\frac{B_v}{r})(\frac{\alpha^1 Z}{r^1}) & \cdots & \check{A}_{\tau,v}\tilde{F}^T + b_{2,\tau+2}(\frac{B_v}{r})(\frac{\alpha^\tau Z + Z_\tau}{r^\tau}) & \mathbf{0} & \check{B}_{ev} \\ \star & -\tilde{P}_v & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & -\tilde{F}\check{C}_{0,v}^T - Z^T D_v^T & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\tilde{S}_{1,v} & \cdots & \mathbf{0} & -\tilde{F}\check{C}_{1,v}^T - b_{2,3}(\frac{\alpha^1 Z^T}{r^1})D_v^T & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \star & \star & \star & \star & -\tilde{S}_{\tau,v} & -\tilde{F}\check{C}_{\tau,v}^T - b_{2,\tau+2}(\frac{\alpha^\tau Z^T + Z_\tau^T}{r^\tau})D_v^T & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & \star & -\theta\mathbf{I}_q & -\check{D}_{ev} \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & -\mu\mathbf{I}_\ell \end{array}\right] < 0 \tag{4.58}$$

seja verificado, com $v \in \mathcal{I}[1,N]$, $c \in \mathcal{I}[1,\tau]$, as matrizes $\check{A}_{m,v}$, $\check{C}_{m,v}$, $m \in \mathcal{I}[0,\tau]$ calculadas de acordo com (4.55) e (4.57), então o sistema (4.52) sujeito a lei de controle (4.20) é Schur-estável, o que implica no sistema (4.44), sujeito a lei de controle (4.9) $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estável com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma = \sqrt{\mu}$ e ganhos robustos de realimentação dos estados:

$$K = Z\tilde{F}^{-T} \quad e \quad K_\tau = Z_\tau \tilde{F}^{-T} \tag{4.59}$$

Prova: Os mesmos passos da Prova do Teorema 4.1 se aplicam para o Corolário 4.1, desta vez fixando-se $d = \tau$. Portanto, pelas transformações (4.15)-(4.21) e (2.8), se (4.53) é Schur-estável, então (4.44), sujeito a lei de controle (4.9) é $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estável com o mesmo custo garantido $\mathcal{H}_\infty$.■

A partir do Corolário 4.1, podemos estimar a norma $\mathcal{H}_\infty$ pelo seguinte procedimento convexo de otimização

$$\mathcal{H}_\infty : \left\{ \begin{array}{c} \min \quad \mu \\ \tilde{P}_v = \tilde{P}_v^T > \mathbf{0},\ \tilde{S}_{c,v} = \tilde{S}_{c,v}^T > \mathbf{0},\ 0 < \theta \leq 1, \text{ tal que:} \\ \Theta_v < \mathbf{0}\ (\Theta_v \text{ dada em (4.58)}). \end{array} \right. \tag{4.60}$$

Exemplo 4.2 *Considere o sistema (4.44) com $\tau = 3$, e matrizes dinâmicas incertas dadas em (4.41)-(4.43). Utilizando o problema de otimização (4.60) e escolhendo $\alpha = 0{,}1$ e $r = 0{,}8$, obteve-se os seguintes resultados para a $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilidade do sistema:*

$$\bar{K} = \left[\begin{array}{cccccccc} 0{,}2985 & -1{,}0569 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}1120 & -0{,}0291 \end{array} \right]$$

e custo garantido $\mathcal{H}_\infty = 2{,}7134$.

Na Figura 4.4 são mostrados os autovalores do sistema incerto discreto no tempo com atraso conhecido no vetor de estados (4.44) em malha fechada através da lei de controle (4.9). Como era de se esperar, observe que todos os autovalores estão localizados no interior da região $\mathcal{D}(0{,}1; 0{,}78)$ em cada vértice do politopo de incertezas. Na Figura 4.5 é apresentada a nuvem de autovalores do sistema em malha fechada. Utilizou-se um algoritmo de bissecção junto com (4.60) para determinar o menor valor do raio r para cada posição do centro α, tal que o Corolário 4.1 seja factível. Veja a Figura 4.6 e observe que a faixa de variação do parâmetro α foi $-0{,}1 \leq \alpha \leq 0{,}15$. E que o menor valor de $r = 0{,}5751$ foi obtido para $\alpha = 0{,}05$. Também através do algoritmo de bissecção e (4.60), mantendo fixo o parâmetro α e varrendo o intervalo $1 - \alpha \geq r \geq 0{,}1$, avaliou-se o valor do custo $\mathcal{H}_\infty$ tal que o Corolário 4.1 seja factível. O valor de α também foi varrido dentro do intervalo $0 \leq \alpha \leq 0{,}5$. A Figura 4.7 mostra as superfícies geradas com tais dados. As condições foram infactiveis fora desses intervalos.

4.3 Sistema precisamente conhecido e atraso incerto

Considere o caso particular do sistema (4.1) em que o sistema seja precisamente conhecido e o atraso incerto e invariante no tempo, ou seja, $d \in \mathcal{I}[1,\tau]$ e $\beta = [\ ]$, definindo o sistema precisamente conhecido discreto no tempo com atraso incerto no vetor de estados

$$\Upsilon_d : \left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & Ax_k + A_\theta x_{k-d} + Bu_k + B_e w_k \\ z_k & = & Cx_k + C_\theta x_{k-d} + Du_k + D_e w_k, \end{array} \right. \tag{4.61}$$

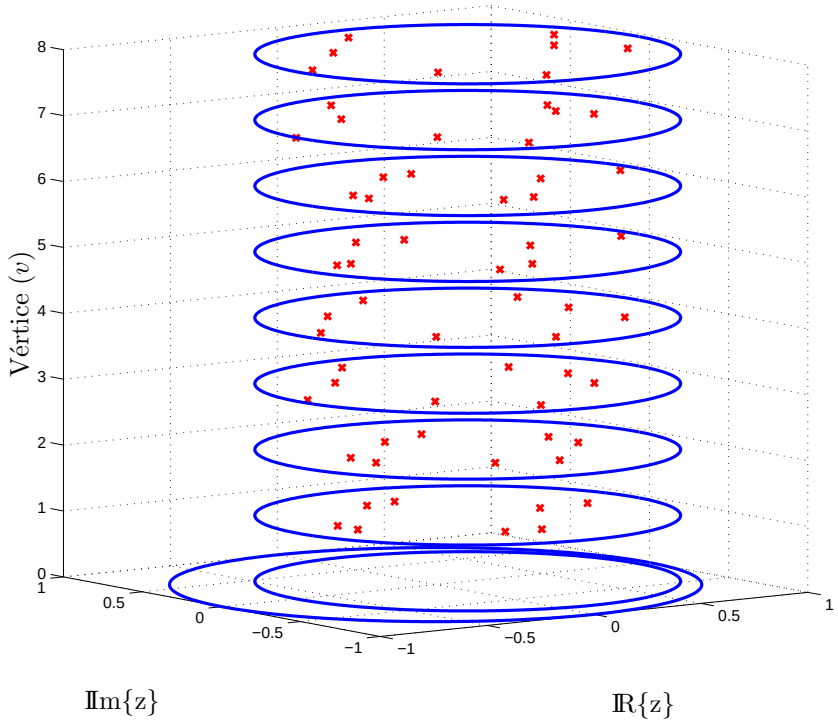

Figura 4.4: Autovalores do sistema (4.44) em malha fechada através da lei de controle (4.9) para cada vértice do politopo de incertezas

.

em que $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^p$ e $w_k \in \mathbb{R}^\ell$ são os vetores dos estados, das entradas de controle e das entradas exógenas, respectivamente, $k \in \mathbb{N}$ é a amostragem, $d \in \mathcal{I}[1,\tau]$ é o atraso que pode assumir qualquer valor dentro do intervalo. As matrizes A e $A_\theta \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $B_e \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$, C e $C_\theta \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{q\times p}$, $D_e \in \mathbb{R}^{q\times \ell}$ representam a dinâmica do sistema (4.61).

Esses sistemas podem ser representados na forma aumentada livres de atraso por

$$\bar{\Upsilon}_d : \left\{ \begin{array}{rcl} \bar{x}_{k+1} & = & \bar{A}_d \bar{x}_k + \bar{B} u_k + \bar{B}_e w_k \\ \bar{z}_k & = & \bar{C}_d \bar{x}_k + \bar{D} u_k + \bar{D}_e w_k, \end{array} \right. \tag{4.62}$$

sendo

$$\bar{x}_k = \left[\begin{array}{cccc} x_k^T & x_{k-1}^T & \cdots & x_{k-\tau}^T \end{array} \right]^T, \tag{4.63}$$

$$\begin{array}{c} \bar{A}_d = \left[\begin{array}{ccccc} A & \mathbf{0}_{n\times(d-1)n} & A_\theta & \mathbf{0}_{n\times(\tau-d-1)n} & \mathbf{0} \\ & & I_{\tau n} & & \mathbf{0}_{\tau n\times n} \end{array} \right], \\ \bar{C}_d = \left[\begin{array}{ccccc} C & \mathbf{0}_{n\times(d-1)n} & C_\theta & \mathbf{0}_{n\times(\tau-d-1)n} & \mathbf{0} \end{array} \right], \text{ para} d \in \mathcal{I}[1,\tau-1], \\ \bar{A}_d = \left[\begin{array}{ccc} A & \mathbf{0}_{n\times(d-1)n} & A_\tau \\ & I_{\tau n} & \mathbf{0}_{\tau n\times n} \end{array} \right], \\ \bar{C}_d = \left[\begin{array}{ccc} C & \mathbf{0}_{n\times(d-1)n} & C_\tau \end{array} \right], \text{ para } d = \tau, \end{array} \tag{4.64}$$

$$\bar{B} = \left[\begin{array}{c} B \\ \mathbf{0}_{\tau n\times p} \end{array} \right], \bar{B}_e = \left[\begin{array}{c} B_e \\ \mathbf{0}_{\tau n\times \ell} \end{array} \right], \bar{D} = D, \bar{D}_e = D_e, \tag{4.65}$$

com $d \in \mathcal{I}[1,\tau]$, $\bar{A}_d \in \mathbb{R}^{n(\tau+1)\times n(\tau+1)}$, $\bar{B} \in \mathbb{R}^{n(\tau+1)\times p}$, $\bar{B}_e \in \mathbb{R}^{n(\tau+1)\times \ell}$, $\bar{C}_d \in \mathbb{R}^{q\times n(\tau+1)}$, $\bar{D} \in \mathbb{R}^{q\times p}$, $\bar{D}_e \in \mathbb{R}^{q\times \ell}$.

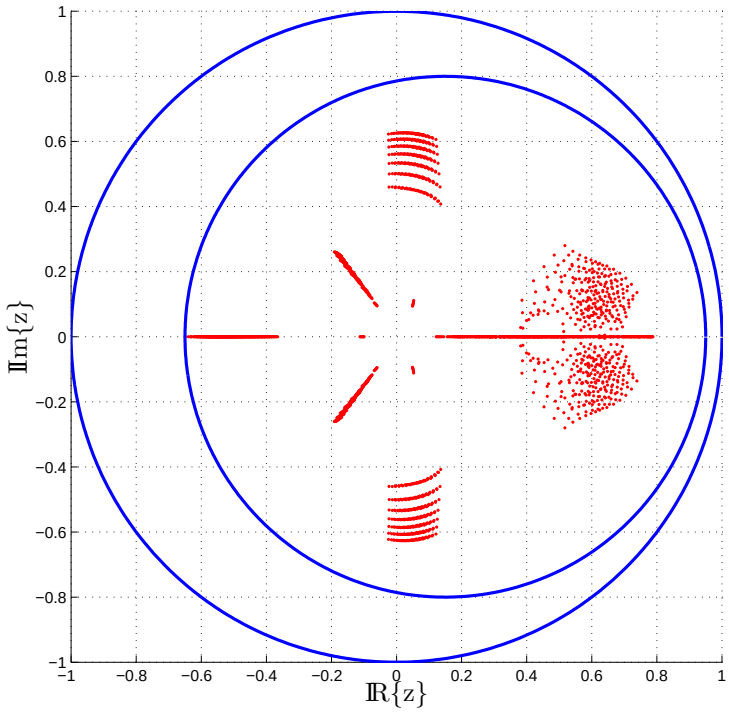

Figura 4.5: Nuvem de autovalores do sistema (4.44) em malha fechada através da lei de controle (4.9).

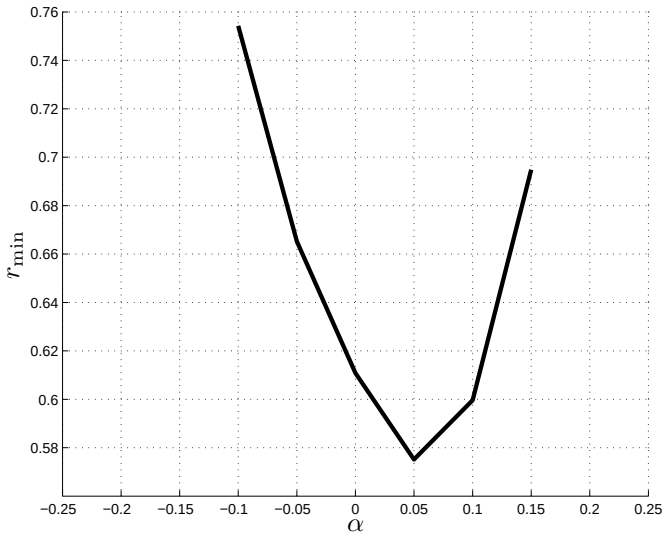

Figura 4.6: Valores mínimos de raio em função do parâmetro α a partir de (4.58).

Assume-se a lei de controle (4.9), expressa em sua forma aumentada por (4.10).

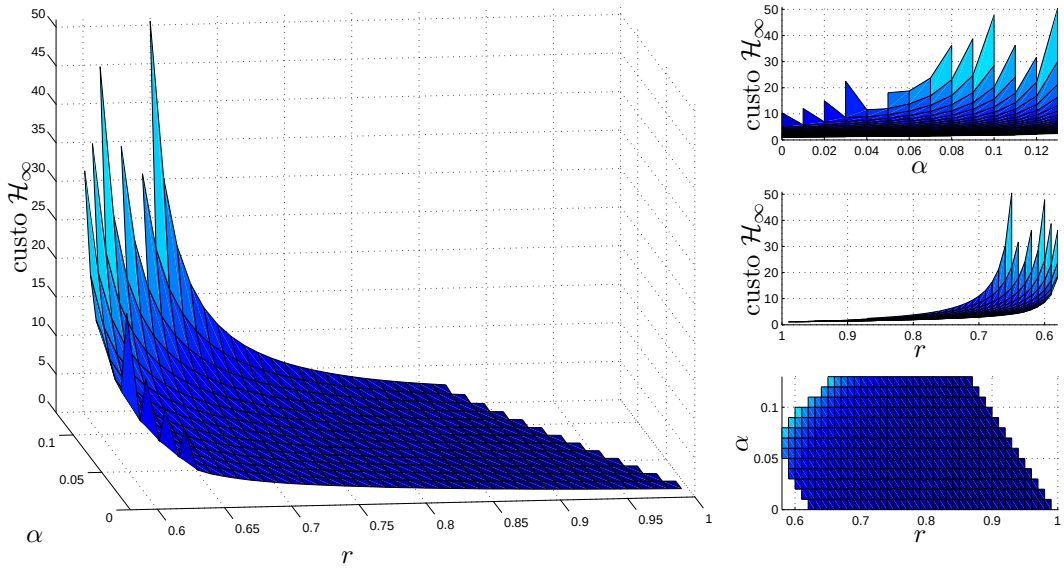

Figura 4.7: Superfície custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ em função de α e r a partir de (4.60).

Substituindo (4.10) em (4.62) resulta no sistema de malha fechada

$$\bar{\mathbf{\Upsilon}}_d : \left\{ \begin{array}{rcl} \bar{x}_{k+1} & = & \bar{\mathbf{A}}_d \bar{x}_k + \bar{B}_e w_k \\ z_k & = & \bar{\mathbf{C}}_d \bar{x}_k + \bar{D}_e w_k, \end{array} \right. \tag{4.66}$$

com

$$\bar{\mathbf{A}}_d = \bar{A}_d + \bar{B}\bar{K} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{C}}_d = \bar{C}_d + \bar{D}\bar{K}. \tag{4.67}$$

Para considerar a alocação de polos na região $\mathcal{D}(\alpha,r)$ aplica-se a operação $\tilde{A}_d = \dfrac{(\bar{\mathbf{A}}_d - \alpha\mathbf{I})}{r}$, dada em (2.8), em (4.66), resultando em

$$\tilde{\mathbf{\Upsilon}}_d : \left\{ \begin{array}{rcl} \bar{x}_{k+1} & = & \tilde{A}_d \bar{x}_k + \bar{B}_e w_k \\ z_k & = & \bar{\mathbf{C}}_d \bar{x}_k + \bar{D}_e w_k. \end{array} \right. \tag{4.68}$$

Passando pelas mesmas transformações (4.15)-(4.18), resulta no sistema equivalente com múltiplos atrasos nos estados

$$\left\{ \begin{array}{l} \check{x}_{k+1} = \sum_{m=0}^{\tau} \check{A}_{m,d} \check{x}_{k-m} + \check{B} u_k + \check{B}_e w_k \\ \check{z}_k = \sum_{m=0}^{\tau} \check{C}_{m,d} \check{x}_{k-m} + \check{D} u_k + \check{D}_e w_k. \end{array} \right. \tag{4.69}$$

Supondo a lei de controle (4.20) e utilizando-a em (4.69) temos o sistema discreto no tempo com múltiplos atrasos no vetor de estados em malha fechada

$$\check{\mathbf{\Upsilon}}_d : \left\{ \begin{array}{l} \check{x}_{k+1} = \sum_{m=0}^{\tau} \check{\mathbf{A}}_{m,d} \check{x}_{k-m} + \check{B}_e w_k \\ \check{z}_k = \sum_{m=0}^{\tau} \check{\mathbf{C}}_{m,d} \check{x}_{k-m} + \check{D}_e w_k, \end{array} \right. \tag{4.70}$$

sendo

$$\begin{array}{l} \check{\mathbf{A}}_{m,d} = \check{A}_{m,d} + \check{B}\check{K}_m \\ \check{\mathbf{C}}_{m,d} = \check{C}_{m,d} + \check{D}\check{K}_m, \end{array} \tag{4.71}$$

com $m \in \mathcal{I}[0,\tau]$. Assim sendo, as regras de formação para $\check{A}_{m,d}$, $\check{K}_m$ e $\check{C}_{m,d}$, são definidas pela seguinte simplificação do Fato 1:

$$\check{A}_{m,d} = \begin{cases} \dfrac{A-(\tau+1)\alpha\mathbf{I}}{r}, \text{ para } m=0 \\ \dfrac{b_{2,m+2}A\alpha^m - b_{1,m+2}\alpha^{m+1}\mathbf{I}}{r^{m+1}}, \text{ para } m \in \mathcal{I}[1,d-1] \\ \dfrac{b_{2,m+2}A\alpha^m - b_{1,m+2}\alpha^{m+1}\mathbf{I} + A_\theta}{r^{m+1}}, \text{ para } m=d \\ \dfrac{b_{2,m+2}A\alpha^m - b_{1,m+2}\alpha^{m+1}\mathbf{I} + b_{d+2,m+2}A_\theta\alpha^{m-d}}{r^{m+1}}, \text{ para } m>d \\ \dfrac{A\alpha^\tau + A_\theta\alpha^{\tau-d} - \alpha^{\tau+1}\mathbf{I}}{r^{\tau+1}}, \text{ para } m=\tau, \end{cases} \tag{4.72}$$

$$\check{K}_m = \begin{cases} K, \text{ para } m=0 \\ \dfrac{b_{2,m+2}K\alpha^m}{r^m}, \text{ para } m \in \mathcal{I}[1,\tau-1] \\ \dfrac{K\alpha^\tau + K_\tau}{r^\tau}, \text{ para } m=\tau, \end{cases} \tag{4.73}$$

$$\check{C}_{m,d} = \begin{cases} C, \text{ para } m=0 \\ \dfrac{b_{2,m+2}C\alpha^m}{r^m}, \text{ para } m \in \mathcal{I}[1,d-1] \\ \dfrac{b_{2,m+2}C\alpha^m + C_\theta}{r^m}, \text{ para } m=d \\ \dfrac{b_{2,m+2}C\alpha^m + b_{d+2,m+2}C_\theta\alpha^{m-d}}{r^m}, \text{ para } m>d \\ \dfrac{C\alpha^\tau + C_\theta\alpha^{\tau-d}}{r^\tau}, \text{ para } m=\tau, \end{cases} \tag{4.74}$$

$\check{B} = \check{B}_v$, $\check{B}_e = \check{B}_{ev}$, $\check{D} = \check{D}_v$, $\check{D}_e = \check{D}_{ev}$ são dadas em (4.17)-(4.18).

Seguindo as mesmas operações da Seção 4.1.2 para $d \in \mathcal{I}[1,\tau]$, τ condições LMI para a estabilização e para a síntese de ganhos K e K_τ do sistema (4.61), sujeito a lei de controle (4.9), são apresentadas no corolário que segue

Corolário 4.2 *Se existirem as matrizes* $\tilde{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $Z_\tau \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $\mathbf{0} < \tilde{P}_d = \tilde{P}_d^T \in$

$\mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < \tilde{S}_{c,d} = \tilde{S}_{c,d}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *e os escalares* $0 < \theta \leq 1$ *e* $\mu > 0$, *tais que,*

$$\Theta_d = \left[\begin{array}{cccc} \tilde{P}_d + \sum_{c=1}^{\tau} \tilde{S}_{c,d} - \tilde{F}^{-1} - \tilde{F}^T & \check{A}_{0,d}\tilde{F}^T + (\frac{B}{r})Z & \check{A}_{1,d}\tilde{F}^T + b_{2,3}(\frac{B}{r})(\frac{\alpha^1 Z}{r^1}) & \cdots \\ \star & -\tilde{P}_d & \mathbf{0} & \cdots \\ \star & \star & -\tilde{S}_{1,d} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc} \check{A}_{\tau,d}\tilde{F}^T + b_{2,\tau+2}(\frac{B}{r})(\frac{\alpha^\tau Z + Z_\tau}{r^\tau}) & \mathbf{0} & \check{B}_e \\ \mathbf{0} & -\tilde{F}\check{C}_{0,d}^T - Z^T D^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\tilde{F}\check{C}_{1,d}^T - b_{2,3}(\frac{\alpha^1 Z^T}{r^1})D^T & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\tilde{S}_{\tau,d} & -\tilde{F}\check{C}_{\tau,d}^T - b_{2,\tau+2}(\frac{\alpha^\tau Z^T + Z_\tau^T}{r^\tau})D^T & \mathbf{0} \\ \star & -\theta\mathbf{I}_q & -\check{D}_e \\ \star & \star & -\mu\mathbf{I}_\ell \end{array}\right] < 0 \quad (4.75)$$

seja verificado, com $d \in \mathcal{I}[1,\tau]$, $c \in \mathcal{I}[1,\tau]$, *as matrizes* $\check{A}_{m,d}$, $\check{C}_{m,d}$, $m \in \mathcal{I}[0,\tau]$ *calculadas de acordo com (4.72) e (4.74), então o sistema (4.69) sujeito a lei de controle (4.20) é Schur-estável, o que implica no sistema (4.61), sujeito a lei de controle (4.9)* $\mathcal{D}(\alpha,r)$*-estável com custo garantido* $\mathcal{H}_\infty$ *dado por* $\gamma = \sqrt{\mu}$ *e ganhos robustos de realimentação dos estados*

$$K = Z\tilde{F}^{-T} \quad e \quad K_\tau = Z_\tau \tilde{F}^{-T}. \quad (4.76)$$

Prova: Os mesmos passos da Prova do Teorema 4.1 se aplicam para o Corolário 4.2, desta vez considerando-se todas as matrizes precisamente conhecidas, ou seja, independentes do parâmetro v, que representa o vértice do politopo de incertezas. Portanto, pelas transformações (4.15)-(4.21) e (2.8), se (4.70) é Schur-estável, então (4.61) sujeito a lei de controle (4.9) é $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estável com o mesmo custo garantido $\mathcal{H}_\infty$. ■

A partir do Corolário 4.2, podemos estimar a norma $\mathcal{H}_\infty$ pelo seguinte procedimento convexo de otimização

$$\mathcal{H}_\infty : \left\{ \begin{array}{c} \min \quad \mu \\ \tilde{P}_d = \tilde{P}_d^T > \mathbf{0},\ \tilde{S}_{c,d} = \tilde{S}_{c,d}^T > \mathbf{0},\ 0 < \theta \leq 1, \text{ tal que:} \\ \Theta_d < \mathbf{0}\ (\Theta_d \text{ dada em (4.75)}). \end{array} \right. \quad (4.77)$$

Exemplo 4.3 *Considere o sistema (4.61) com* $d \in \mathcal{I}[1,\tau]$, $\tau = 3$ *e matrizes dinâmicas*

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 1 \\ 0{,}05 & 0{,}8 \end{bmatrix}, \quad A_\theta = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}1 \end{bmatrix}, \quad B = B_e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}, \quad (4.78)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_\theta = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0{,}1 \end{bmatrix}, \quad D_e = \begin{bmatrix} 0{,}2 \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

Utilizando o problema de otimização (4.77) e escolhendo $\alpha = 0{,}1$ e $r = 0{,}8$, obteve-se os seguintes resultados para a $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilidade do sistema:

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 0{,}1297 & -1{,}1033 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0162 & -0{,}0296 \end{bmatrix}$$

e custo garantido $\mathcal{H}_\infty = 2{,}0779$.

Na Figura 4.8 são mostrados os autovalores do sistema precisamente conhecido discreto no tempo com atraso incerto no vetor de estados (4.61) em malha fechada através da lei de controle (4.9). Como era de se esperar, observe que todos os autovalores estão localizados no interior da região $\mathcal{D}(0{,}1;0{,}8)$, para cada valor do atraso. Utilizou-se um algoritmo de bissecção junto com (4.77) para determinar o menor valor do raio r para cada posição do centro α, tal que o Corolário 4.2 seja factível. Veja a Figura 4.9 e observe que a faixa de variação do parâmetro α foi $-0{,}2 \leq \alpha \leq 0{,}2$. E que o menor valor de $r = 0{,}5729$ foi obtido para $\alpha = 0{,}05$. Também através do algoritmo de bissecção e (4.77), mantendo fixo o parâmetro α e varrendo o intervalo $1 - \alpha \geq r \geq 0{,}1$, avaliou-se o valor do custo $\mathcal{H}_\infty$ tal que o Corolário 4.2 seja factível. O valor de α também foi varrido dentro do intervalo $0 \leq \alpha \leq 0{,}5$. A Figura 4.10 mostra as superfícies geradas com tais dados. As condições foram infactiveis fora desses intervalos.

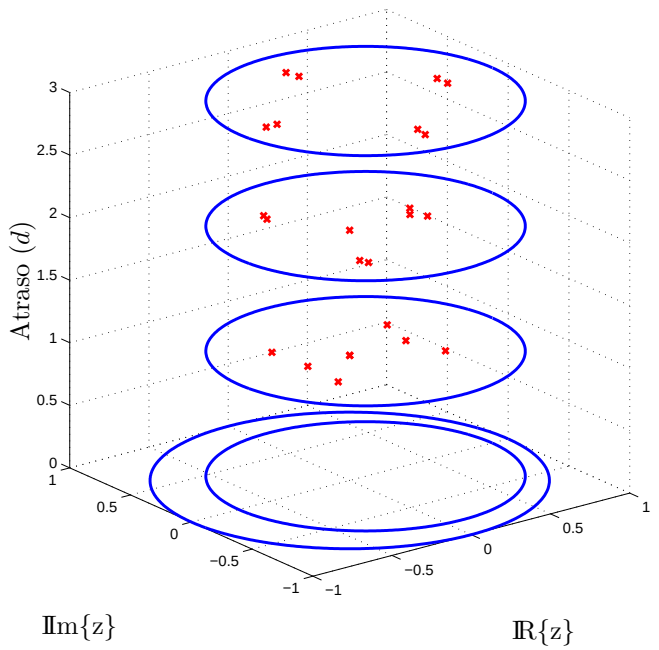

Figura 4.8: Autovalores do sistema (4.61) em malha fechada através da lei de controle (4.9) para cada valor do atraso

.

4.4 Sistema e atraso precisamente conhecidos

Considere o caso particular do sistema (4.1) em que o tanto o sistema quanto o seu atraso sejam precisamente conhecidos, ou seja, $d = \tau$ e $\beta = [\ ]$, definindo o sistema precisamente

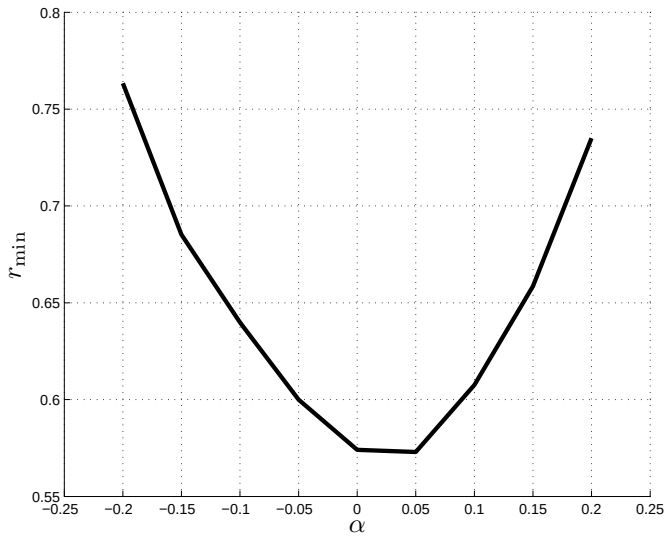

Figura 4.9: Valores mínimos de raio em função do parâmetro α a partir de (4.75).

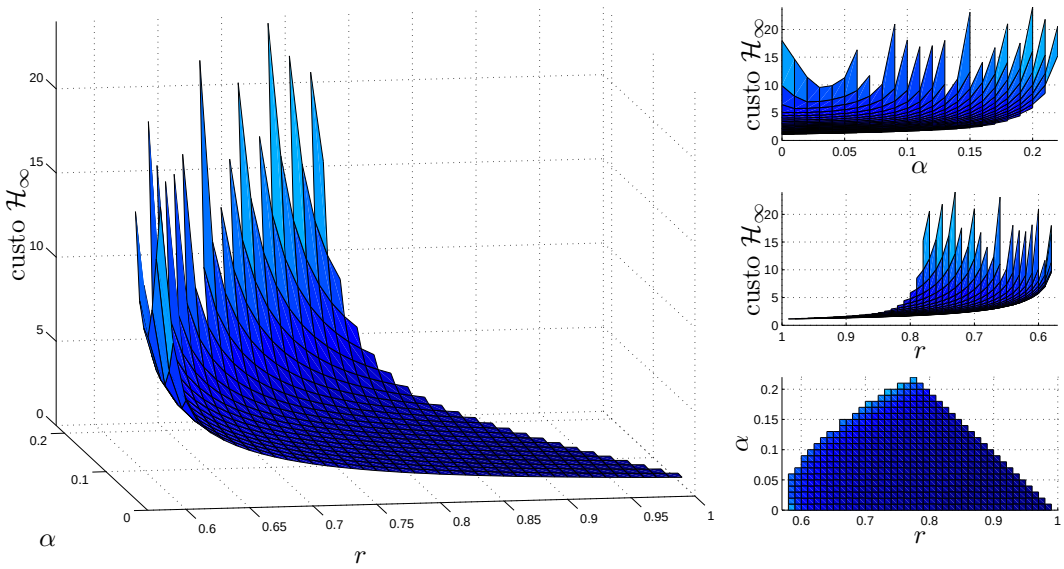

Figura 4.10: Superfície custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ em função de α e r a partir de (4.77).

conhecido discreto no tempo com atraso conhecido no vetor de estados

$$\Upsilon : \left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & Ax_k + A_\theta x_{k-\tau} + Bu_k + B_e w_k \\ z_k & = & Cx_k + C_\theta x_{k-\tau} + Du_k + D_e w_k, \end{array} \right. \tag{4.80}$$

em que $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^p$ e $w_k \in \mathbb{R}^\ell$ são os vetores dos estados, das entradas de controle e das entradas exógenas, respectivamente, $k \in \mathbb{N}$ é a amostragem, $d = \tau$ é o atraso conhecido. As matrizes A e $A_\theta \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $B_e \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$, C e $C_\theta \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{q\times p}$, $D_e \in \mathbb{R}^{q\times \ell}$ representam a dinâmica do sistema (4.80).

Esses sistemas podem ser representados na forma aumentada livres de atraso por

$$\bar{\Upsilon} : \left\{ \begin{array}{rcl} \bar{x}_{k+1} & = & \bar{A}\bar{x}_k + \bar{B}u_k + \bar{B}_e w_k \\ \bar{z}_k & = & \bar{C}\bar{x}_k + \bar{D}u_k + \bar{D}_e w_k, \end{array} \right. \tag{4.81}$$

sendo

$$\bar{x}_k = \left[\begin{array}{cccc} x_k^T & x_{k-1}^T & \cdots & x_{k-\tau}^T \end{array} \right]^T, \tag{4.82}$$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc} A & \mathbf{0}_{n\times(\tau-1)n} & A_\tau \\ & I_{\tau n} & \mathbf{0}_{\tau n\times n} \end{array} \right], \bar{B} = \left[\begin{array}{c} B_v \\ \mathbf{0}_{\tau n\times p} \end{array} \right], \bar{B}_e = \left[\begin{array}{c} B_e \\ \mathbf{0}_{\tau n\times \ell} \end{array} \right], \tag{4.83}$$

$$\bar{C} = \left[\begin{array}{cccc} C & \mathbf{0}_{n\times(\tau-1)n} & C_\tau \end{array} \right], \bar{D} = D, \bar{D}_e = D_e, \tag{4.84}$$

com $\bar{A} \in \mathbb{R}^{n(\tau+1)\times n(\tau+1)}$, $\bar{B} \in \mathbb{R}^{n(\tau+1)\times p}$, $\bar{B}_e \in \mathbb{R}^{n(\tau+1)\times \ell}$, $\bar{C} \in \mathbb{R}^{q\times n(\tau+1)}$, $\bar{D} \in \mathbb{R}^{q\times p}$, $\bar{D}_e \in \mathbb{R}^{q\times \ell}$.

Assume-se a lei de controle (4.9), expressa em sua forma aumentada por (4.10).

Substituindo (4.10) em (4.81) resulta no sistema de malha fechada

$$\bar{\mathbf{\Upsilon}} : \left\{ \begin{array}{rcl} \bar{x}_{k+1} & = & \bar{\mathbf{A}}\bar{x}_k + \bar{B}_e w_k \\ z_k & = & \bar{\mathbf{C}}\bar{x}_k + \bar{D}_e w_k, \end{array} \right. \tag{4.85}$$

com

$$\bar{\mathbf{A}} = \bar{A} + \bar{B}\bar{K} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{C}} = \bar{C} + \bar{D}\bar{K}. \tag{4.86}$$

Para considerar a alocação de polos na região $\mathcal{D}(\alpha,r)$ aplica-se a operação $\tilde{A} = \dfrac{(\bar{\mathbf{A}} - \alpha\mathbf{I})}{r}$, dada em (2.8), em (4.85), resultando em

$$\tilde{\mathbf{\Upsilon}} : \left\{ \begin{array}{rcl} \bar{x}_{k+1} & = & \tilde{A}\bar{x}_k + \bar{B}_e w_k \\ z_k & = & \bar{\mathbf{C}}\bar{x}_k + \bar{D}_e w_k. \end{array} \right. \tag{4.87}$$

Passando pelas mesmas transformações (4.15)-(4.18), resulta no sistema equivalente com múltiplos atrasos nos estados

$$\left\{ \begin{array}{l} \check{x}_{k+1} = \sum_{m=0}^{\tau} \check{A}_m \check{x}_{k-m} + \check{B}u_k + \check{B}_e w_k \\ \check{z}_k = \sum_{m=0}^{\tau} \check{C}_m \check{x}_{k-m} + \check{D}u_k + \check{D}_e w_k. \end{array} \right. \tag{4.88}$$

Supondo a lei de controle (4.20), utilizando (4.20)-(4.21) em (4.88) temos o sistema discreto no tempo com múltiplos atrasos no vetor de estados em malha fechada

$$\check{\mathbf{\Upsilon}} : \left\{ \begin{array}{l} \check{x}_{k+1} = \sum_{m=0}^{\tau} \check{\mathbf{A}}_m \check{x}_{k-m} + \check{B}_e w_k \\ \check{z}_k = \sum_{m=0}^{\tau} \check{\mathbf{C}}_m \check{x}_{k-m} + \check{D}_e w_k, \end{array} \right. \tag{4.89}$$

sendo

$$\begin{array}{l} \check{\mathbf{A}}_m = \check{A}_m + \check{B}\check{K}_m \\ \check{\mathbf{C}}_m = \check{C}_m + \check{D}\check{K}_m, \end{array} \tag{4.90}$$

com $m \in \mathcal{I}[0,\tau]$. Assim sendo, as regras de formação para $\check{A}_m$, $\check{K}_m$ e $\check{C}_m$, são definidas pela seguinte simplificação do Fato 1:

$$\check{\mathcal{A}}_m = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{A - (\tau+1)\alpha\mathbf{I}}{r}, \text{ para } m = 0 \\ \dfrac{b_{2,(m+2)}A\alpha^m\mathbf{I} - b_{1,(m+2)}\alpha^{m+1}\mathbf{I}}{r^{m+1}}, \text{ para } m \in \mathcal{I}[1,\tau-1] \\ \dfrac{A\alpha^\tau + A_\tau - \alpha^{\tau+1}\mathbf{I}}{r^{\tau+1}}, \text{ para } m = \tau, \end{array} \right. \tag{4.91}$$

$$\check{\mathcal{K}}_m = \begin{cases} K \text{ , para } m = 0 \\ \dfrac{b_{2,(m+2)} K \alpha^m}{r^m} \text{ , para } m \in \mathcal{I}[1, \tau - 1] \\ \dfrac{K\alpha^\tau + K_\tau}{r^\tau} \text{ , para } m = \tau, \end{cases} \tag{4.92}$$

$$\check{\mathcal{C}}_m = \begin{cases} C \text{ , para } m = 0 \\ \dfrac{b_{2,(m+2)} C \alpha^m}{r^m} \text{ , para } m \in \mathcal{I}[1, \tau - 1] \\ \dfrac{C\alpha^\tau + C_\tau}{r^\tau} \text{ , para } m = \tau. \end{cases} \tag{4.93}$$

$\check{B} = \check{B}_v$, $\check{B}_e = \check{B}_{ev}$, $\check{D} = \check{D}_v$, $\check{D}_e = \check{D}_{ev}$ são dadas em (4.17)-(4.18).

Seguindo as mesmas operações da Seção 4.1.2 para $d = \tau$, uma condição LMI para a estabilização e para a síntese de ganhos K e K_τ do sistema (4.80), sujeito a lei de controle (4.9), é apresentada no corolário que segue

Corolário 4.3 *Se existirem as matrizes $\tilde{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $Z_\tau \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $\mathbf{0} < \tilde{P} = \tilde{P}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < \tilde{S}_c = \tilde{S}_c^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e os escalares $0 < \theta \leq 1$ e $\mu > 0$, tais que,*

$$\Theta = \begin{bmatrix} \tilde{P} + \sum_{c=1}^{\tau} \tilde{S}_c - \tilde{F}^{-1} - \tilde{F}^T & \check{A}_0 \tilde{F}^T + (\frac{B}{r})Z & \check{A}_1 \tilde{F}^T + b_{2,3}(\frac{B}{r})(\frac{\alpha^1 Z}{r^1}) & \cdots & \check{A}_\tau \tilde{F}^T + b_{2,\tau+2}(\frac{B}{r})(\frac{\alpha^\tau Z + Z_\tau}{r^\tau}) & \mathbf{0} & \check{B}_e \\ \star & -\tilde{P} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & -\tilde{F}\check{C}_0^T - Z^T D^T & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\tilde{S}_1 & \cdots & \mathbf{0} & -\tilde{F}\check{C}_1^T - b_{2,3}(\frac{\alpha^1 Z^T}{r^1})D^T & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \star & \star & \star & \star & -\tilde{S}_\tau & -\tilde{F}\check{C}_\tau^T - b_{2,\tau+2}(\frac{\alpha^\tau Z^T + Z_\tau^T}{r^\tau})D^T & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & \star & -\theta \mathbf{I}_q & -\check{D}_e \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & -\mu \mathbf{I}_\ell \end{bmatrix} < 0 \tag{4.94}$$

seja verificado, com $c \in \mathcal{I}[1, \tau]$, as matrizes $\check{A}_m$, $\check{C}_m$, $m \in \mathcal{I}[0, \tau]$ calculadas de acordo com (4.91) e (4.93), então o sistema (4.88) sujeito a lei de controle (4.20) é Schur-estável, o que implica no sistema (4.80), sujeito a lei de controle (4.9) $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estável com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma = \sqrt{\mu}$ e ganhos robustos de realimentação dos estados

$$K = Z\tilde{F}^{-T} \quad e \quad K_\tau = Z_\tau \tilde{F}^{-T}. \tag{4.95}$$

Prova: Os mesmos passos da Prova do Teorema 4.1 se aplicam para o Corolário 4.3, desta vez considerando-se todas as matrizes precisamente conhecidas, ou seja, independentes do parâmetro v, que representa o vértice do politopo de incertezas e fixando-se $d = \tau$. Portanto, pelas

transformações (4.15)-(4.21) e (2.8), se (4.89) é Schur-estável, então (4.80) sujeito a lei de controle (4.9) é $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estável com o mesmo custo garantido $\mathcal{H}_\infty$. ■

A partir do Corolário 4.3, podemos estimar a norma $\mathcal{H}_\infty$ pelo seguinte procedimento convexo de otimização

$$\mathcal{H}_\infty : \begin{cases} \min \quad \mu \\ \tilde{P} = \tilde{P}^T > \mathbf{0},\ \tilde{S}_c = \tilde{S}_c^T > \mathbf{0},\ 0 < \theta \leq 1, \text{ tal que:} \\ \Theta < \mathbf{0}\ (\Theta \text{ dada em } (4.94)). \end{cases} \tag{4.96}$$

Exemplo 4.4 *Considere o sistema (4.80) com $\tau = 3$ e matrizes dinâmicas dadas em (4.78)-(4.79). Utilizando o problema de otimização (4.96) e escolhendo $\alpha = 0{,}1$ e $r = 0{,}8$, obteve-se os seguintes resultados para a $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilidade do sistema:*

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 0{,}1297 & -1{,}1033 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0162 & -0{,}0296 \end{bmatrix}$$

e custo garantido $\mathcal{H}_\infty = 2{,}0779$.

Na Figura 4.14 são mostrados os autovalores do sistema precisamente conhecido discreto no tempo com atraso conhecido no vetor de estados (4.80) em malha fechada através da lei de controle (4.9). Como era de se esperar, observe que todos os autovalores estão localizados no interior da região $\mathcal{D}(0{,}1; 0{,}8)$. Utilizou-se um algoritmo de bissecção junto com (4.94) para determinar o menor valor do raio r para cada posição do centro α, tal que o Corolário 4.3 seja factível. Veja a Figura 4.15 e observe que a faixa de variação do parâmetro α foi $-0{,}2 \leq \alpha \leq 0{,}2$. E que o menor valor de $r = 0{,}5693$ foi obtido para $\alpha = 0$. Também através do algoritmo de bissecção e (4.96), mantendo fixo o parâmetro α e varrendo o intervalo $1-\alpha \geq r \geq 0{,}1$, avaliou-se o valor do custo $\mathcal{H}_\infty$ tal que o Corolário 4.3 seja factível. O valor de α também foi varrido dentro do intervalo $0 \leq \alpha \leq 0{,}5$. A Figura 4.16 mostra as superfícies geradas com tais dados. As condições foram infactiveis fora desses intervalos.

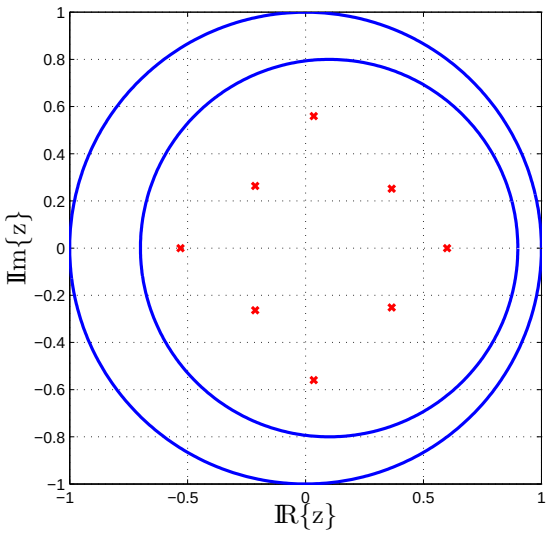

Figura 4.11: Autovalores do sistema (4.80) em malha fechada através da lei de controle (4.9) para cada valor do atraso

.

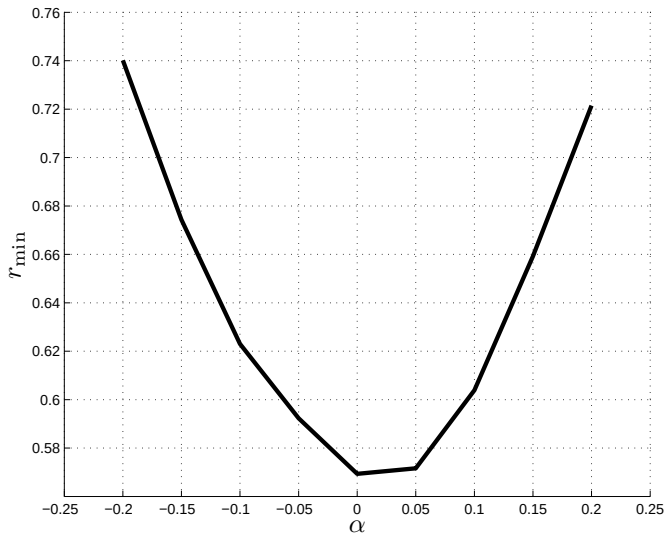

Figura 4.12: Valores mínimos de raio em função do parâmetro α a partir de (4.94).

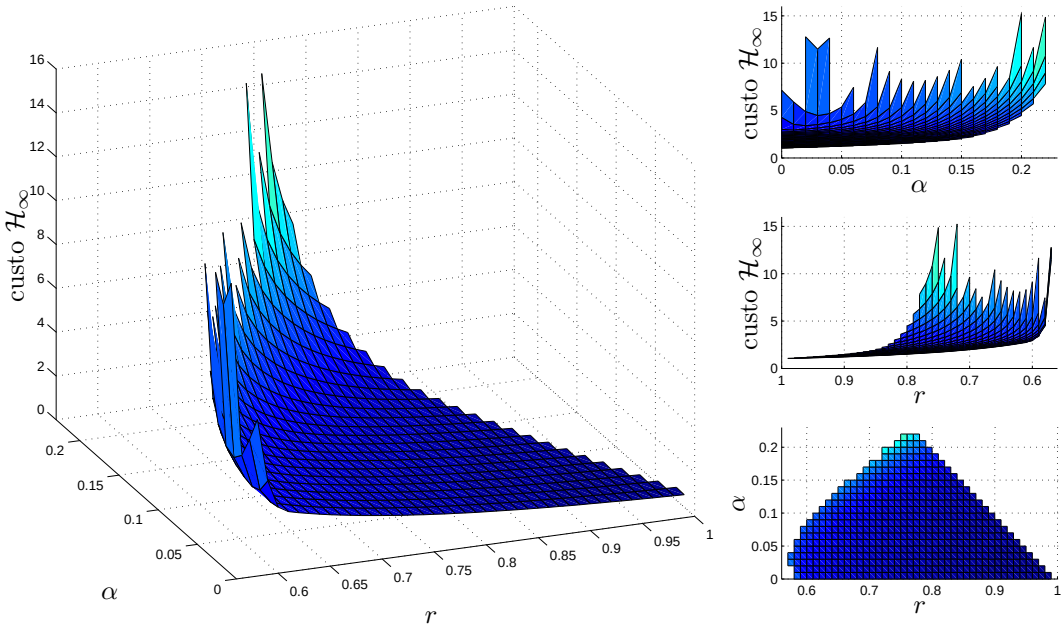

Figura 4.13: Superfície custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ em função de α e r a partir de (4.96).

Exemplo 4.5 *Considere o sistema (4.80) com $\tau = 3$ e matrizes dinâmicas dadas em (4.78)-(4.79). Utilizando o problema de otimização (4.96) e escolhendo $\alpha = 0{,}1$ e $r = 0{,}8$, obteve-se os seguintes resultados para a $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilidade do sistema:*

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 0{,}1297 & -1{,}1033 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0162 & -0{,}0296 \end{bmatrix}$$

e custo garantido $\mathcal{H}_\infty \;=\; 2{,}0779$.

Na Figura 4.14 são mostrados os autovalores do sistema precisamente conhecido discreto no tempo com atraso conhecido no vetor de estados (4.80) em malha fechada através da lei de controle (4.9). Como era de se esperar, observe que todos os autovalores estão localizados no interior da região $\mathcal{D}(0{,}1;0{,}8)$. *Utilizou-se um algoritmo de bissecção junto com (4.94) para determinar o menor valor do raio* r *para cada posição do centro* α, *tal que o Corolário 4.3 seja factível. Veja a Figura 4.15 e observe que a faixa de variação do parâmetro* α *foi* $-0{,}2 \leq \alpha \leq 0{,}2$. *E que o menor valor de* $r = 0{,}5693$ *foi obtido para* $\alpha = 0$. *Também através do algoritmo de bissecção e (4.96), mantendo fixo o parâmetro* α *e varrendo o intervalo* $1-\alpha \geq r \geq 0{,}1$, *avaliou-se o valor do custo* $\mathcal{H}_\infty$ *tal que o Corolário 4.3 seja factível. O valor de* α *também foi varrido dentro do intervalo* $0 \leq \alpha \leq 0{,}5$. *A Figura 4.16 mostra as superfícies geradas com tais dados. As condições foram infactiveis fora desses intervalos.*

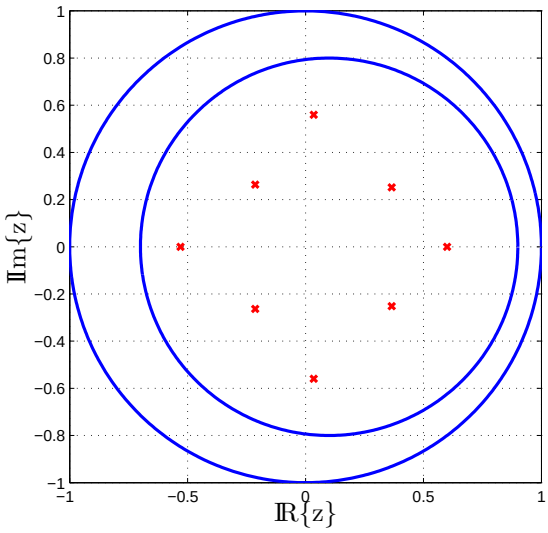

Figura 4.14: Autovalores do sistema (4.80) em malha fechada através da lei de controle (4.9) para cada valor do atraso

.

Exemplo 4.6 *Neste exemplo comparam-se os resultados obtidos com condições dos Capítulos 3 e 4 com os resultados utilizando a condição* (38) *proposta em [XS12]. Nesse último as condições propostas lidam com sistemas que possuem incertezas limitadas em norma e considera atraso tanto nos estados quanto na entrada. Tais sistemas são representados por*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & \hat{A}x_k + \hat{A}_\theta x_{k-\tau} + \hat{B}u_k + \hat{B}_\theta x_{k-\tau_1} + \hat{B}_e w_k \\ z_k & = & Cx_k + Du_k + D_e w_k, \end{array} \right. \tag{4.97}$$

em que $\hat{A} = A + GFE_1$, $\hat{A}_\theta = A_\theta + GFE_2$, $\hat{B} = A + GFE_3$, $\hat{B}_\theta = A + GFE_4$, $\hat{B}_e = A + GFE_5$, *são matrizes incertas com* G, E_n, $n \in \mathcal{I}[1{,}5]$ *matrizes constantes conhecidas,* $F^T F \leq \mathbf{I}$, τ *e* τ_1 *são inteiros positivos conhecidos que representam o atraso nos estados e atraso na entrada respectivamente. Nesta dissertação as comparações com a condição [XS12,* (38)*] são realizadas considerando-se que não existe atraso na entrada, portanto* $\hat{B}_\theta = \mathbf{0}$ *e* $\tau_1 = 0$. *Em [XS12],*

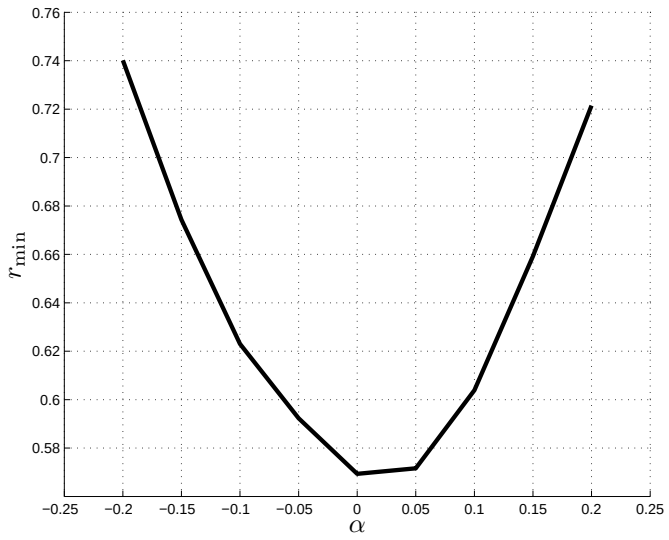

Figura 4.15: Valores mínimos de raio em função do parâmetro α a partir de (4.94).

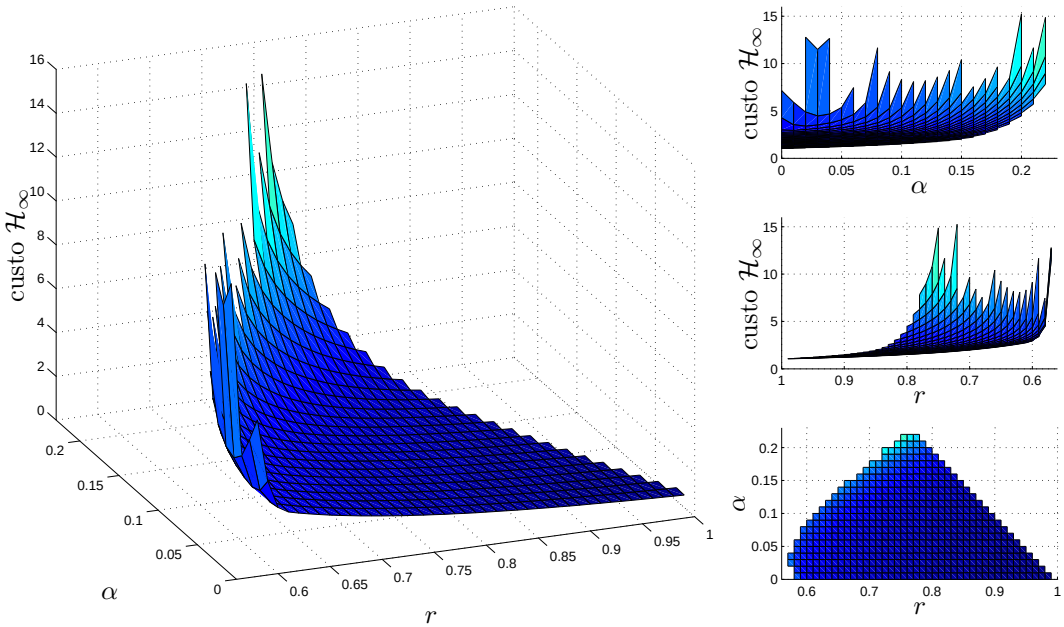

Figura 4.16: Superfície custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ em função de α e r a partir de (4.96).

diferentemente desta dissertação, não é considerado atraso na saída, portanto nos sistemas descritos em (3.38) e (4.44) assume-se $C_\theta = \mathbf{0}$ *e as demais matrizes são dadas por*

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}47 & 1{,}31 & -0{,}31 \\ -0{,}55 & -1{,}27 & 1{,}04 \\ 0{,}39 & 0{,}97 & -0{,}11 \end{bmatrix}, A_\theta = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 & -0{,}12 \\ -0{,}1 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}15 & -0{,}2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1{,}1 \\ -1 \\ 0{,}8 \end{bmatrix}, B_e = \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{bmatrix}, \quad (4.98)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}8 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0{,}45 \\ 0{,}3 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}, D_e = \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ -0{,}3 \\ -1 \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} -0{,}2 & 0{,}15 & 0{,}13 \end{bmatrix}, \tag{4.99}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0{,}2 & -0{,}3 & 0{,}1 \end{bmatrix}, E_3 = 0{,}2, E_5 = -0{,}8, G = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{bmatrix}^T. \tag{4.100}$$

Para o caso de sistemas precisamente conhecidos, equivale a fazer $F = \mathbf{0}$ em [XS12]. Sendo assim, utilizando-se os problemas de otimização (3.25) e (4.96) para resolver as condições (3.23), (4.94) respectivamente e adaptando-os para a condição [XS12, (38)*], com as escolhas $\tau = 2$, $\alpha = 0{,}1$, $r = 0{,}78$, os resultados para a $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilidade de (4.97) obtidos são apresentados na Tabela 4.1. Observe que o menor valor de custo foi obtido utilizando a condição [XS12,* (38)*].*

Para o caso de sistemas incertos considerou-se a matriz G dada em (4.100) multiplicada por 4*. Esse procedimento torna maior o domínio das incertezas associadas ao sistema. Considerando-se também a representação politópica utilizada nesta dissertação temos dois vértices obtidos pelos valores mínimo e máximo de F, i.e., $F = -1$ e $F = 1$. Utilizando-se os problemas de otimização (3.50), (4.60) para resolver as condições (3.48), (4.58) respectivamente e adaptando-os para a condição [XS12,* (38)*], com as considerações acima e as escolhas $\tau = 2$, $\alpha = 0{,}1$, $r = 0{,}78$, os resultados para a $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilidade de (4.97) obtidos são apresentados na Tabela 4.2. Observe que neste caso o menor valor de custo foi obtido utilizando a condição (4.58).*

Tabela 4.1: Sistema e atraso precisamente conhecidos

Condição	Custo $\mathcal{H}_\infty$ (λ)
[XS12, (38)]	0,776
(3.23)	1,121
(4.94)	1,161

Tabela 4.2: Sistema incerto e atraso conhecido

Condição	Custo $\mathcal{H}_\infty$ (λ)
[XS12, (38)]	9,566
(3.48)	1,331
(4.58)	1,195

4.5 Conclusões

Diferentemente do Capítulo 3, neste capítulo, as condições propostas para $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilidade com estimação do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas discretos com atraso no vetor de estados, podendo tanto os sistemas quanto seus atrasos, serem precisamente conhecidos ou incertos, foram obtidas mediante a transformação do sistema original com atraso no seu equivalente com

múltiplos atrasos nos estados. A abordagem empregada utiliza funções de L-K dependentes de parâmetros, levando a resultados menos conservadores do que os apresentados no Capítulo 3.

Foi realizada uma transformação de similaridade através de uma matriz de mudança de base para a obtenção do sistema equivalente com múltiplos atrasos nos estados, além de aplicar o Lema de Finsler (Apêndice A.3) na obtenção de condições convexas, sa quais satisfeitas garantem a Schur estabilidade do sistema equivalente com múltiplos atrasos que consequentemente garantem $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilidade com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dos sistemas originais com atraso.

A busca de valores de raio mínimo (r) para a região $\mathcal{D}(\alpha,r)$, em função de valores fixos de centro (α), foi realizada para cada tipo de sistema apresentado. Na Figura 3.14 podemos observar os resultados e concluir que à medida que a complexidade dos sistemas aumenta, a faixa de variação dos valores do centro (α) e seus respectivos valores de raio mínimo (r) diminuem.

Outra avaliação realizada para cada sistema, foi relativa a variação do custo $\mathcal{H}_\infty$ em função da variação da região $\mathcal{D}(\alpha,r)$. Na Figura 3.15 é mostrado a variação do custo $\mathcal{H}_\infty$ de cada tipo de sistema, fixando-se o centro em $\alpha = 0{,}1$ e diminuindo o raio r a partir de $1 - \alpha = 0{,}9$, até o menor valor factível. Observe que o custo aumenta à medida que o raio diminui e à medida que a complexidade do sistema aumenta.

Do Exemplo 4.6 conclui-se que para sistemas precisamente conhecidos, os resultados obtidos com as condições propostas em [XS12] são melhores do que os resultados obtidos com as condições (3.23), (4.94) propostas nesta dissertação, conforme podemos ver na Tabela 4.1. No entanto, assumindo algumas incertezas no sistema, este nem sempre será o caso. Como podemos ver na Tabela 4.2, o custo obtido com as condições propostas em [XS12] é em torno de 718,7% e 800,5% maior do que o custo obtido com as condições (3.48), (4.58) propostas nesta dissertação, respectivamente.

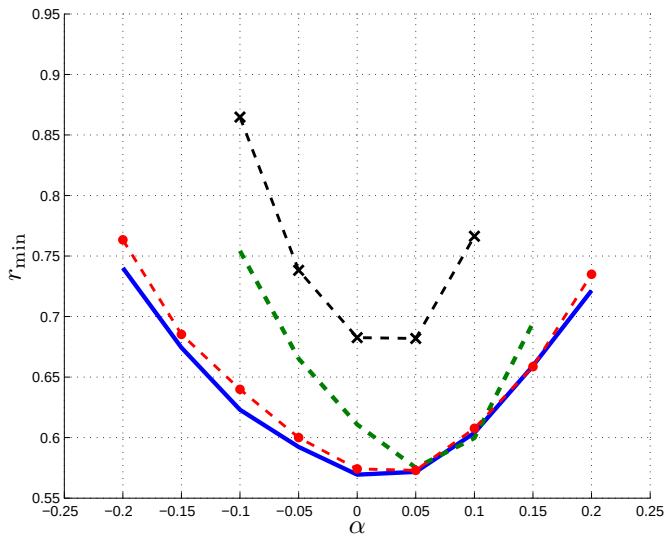

Figura 4.17: Comportamento dos raios mínimos em relação aos valores de α: (–) obtida a partir de (4.94), (-•-) obtida a partir de (4.75), (- -) obtida a partir de (4.58), (-x-) obtida a partir de (4.38).

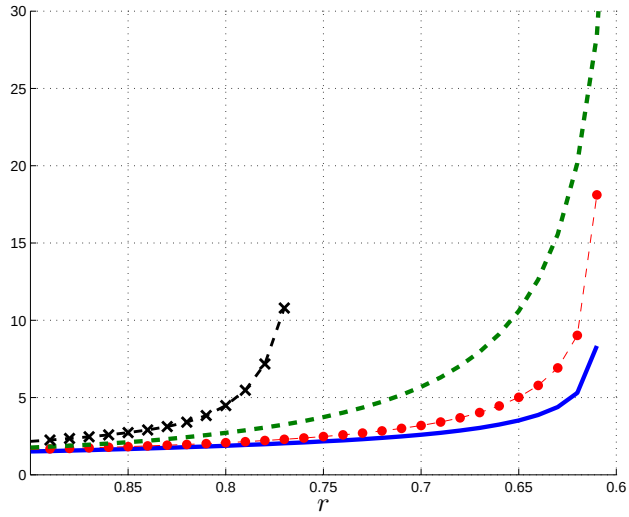

Figura 4.18: Comportamento do custo $\mathcal{H}_\infty$ em função do raio e α fixo em 0,1: (–) obtida a partir de (4.94), (-•-) obtida a partir de (4.75), (- -) obtida a partir de (4.58), (-x-) obtida a partir de (4.38).

Capítulo 5

$\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilização com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ via nova função de LK

Neste capítulo as mesmas abordagens apresentadas no Capítulo 4 serão utilizadas, porém através de uma função L-K mais completa, levando a resultados menos conservadores. Portanto, as transformações necessárias para obtenção de um sistema aumentado equivalente com múltiplos atrasos no vetor de estados visto na Seção 4.1.1 são aplicadas na íntegra também neste capítulo, sendo novas condições para síntese obtidas de acordo com a nova função de Lyapunov-Krasovskii. Em certo momento dos desenvolvimentos deste capítulo, será utilizada a Desigualdade de Jensen, que permite uma majoração das funções empregadas de maneira menos conservadoras que outras abordagens disponíveis na literatura [ZY08].

5.1 Uma candidata a função de L-K mais completa

Como visto anteriormente, a estabilidade do sistema

$$x_{k+1} = Ax_k + A_\theta x_{k-\tau} \tag{5.1}$$

pode ser caracterizada utilizando uma função de L-K, neste caso dada por:

$$V(x_k) = \underbrace{x_k^T P x_k}_{V_1(x_k)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{\tau} x_{k-i}^T R x_{k-i}}_{V_2(x_k)} + \underbrace{\tau \sum_{i=1}^{\tau} \sum_{j=1}^{i} y_{k-j}^T S y_{k-j}}_{V_3(x_k)} \tag{5.2}$$

em que τ é o valor máximo do atraso,

$$y_k = x_{k+1} - x_k. \tag{5.3}$$

Note que se $S = 0$, recupera-se a candidata a função de L-K na forma usada no Capítulo 4. Como feito anteriormente, para que (5.2) seja uma função de Lyapunov-Krasovskii, além de assumir sua positividade, ela precisa satisfazer

$$\Delta V(x_k) < 0, \tag{5.4}$$

para valores de x_{k+1}, x_k e $x_{k-\tau}$ que satisfaçam a trajetória dada por (5.1) e

$$\Delta V(x_k) = V(x_{k+1}) - V(x_k). \tag{5.5}$$

A partir de (5.2), pode-se escrever (5.5) como

$$\Delta V(x_k) = \Delta V_1(x_k) + \Delta V_2(x_k) + \Delta V_3(x_k), \tag{5.6}$$

com

$$\Delta V_1(x_k) = V_1(x_{k+1}) - V_1(x_k), \tag{5.7}$$

$$\Delta V_2(x_k) = V_2(x_{k+1}) - V_2(x_k), \tag{5.8}$$

$$\Delta V_3(x_k) = V_3(x_{k+1}) - V_3(x_k), \tag{5.9}$$

que usando (5.2) resulta em:

$$\Delta V_1(x_k) = x_{k+1}^T P x_{k+1} - x_k^T P x_k, \tag{5.10}$$

$$\Delta V_2(x_k) = x_k^T R x_k - x_{k-\tau}^T R x_{k-\tau}, \tag{5.11}$$

$$\Delta V_3(x_k) = \tau y_k^T S y_k - \sum_{i=1}^{\tau} y_{k-i}^T S y_{k-i}. \tag{5.12}$$

Aplicando a Desigualdade de Jensen em $\Delta V_3(x_k)$ (veja Apêndice A.4), define-se como J o segundo termo de (5.12), ou seja,

$$\Delta V_3(x_k) = \tau y_k^T S y_k + J, \tag{5.13}$$

com

$$J = -\sum_{i=1}^{\tau} y_{k-i}^T S y_{k-i}. \tag{5.14}$$

logo,

$$J \leq -\left(\sum_{i=1}^{\tau} y_{k-i}^T\right) S \left(\sum_{i=1}^{\tau} y_{k-i},\right) \tag{5.15}$$

o que permite reescrever $\Delta V_3(x_k)$ como

$$\Delta V_3(x_k) \leq \tau^2 y_k^T S y_k - \left(\sum_{i=1}^{\tau} y_{k-i}^T\right) S \left(\sum_{i=1}^{\tau} y_{k-i}\right). \tag{5.16}$$

Substituindo (5.3) em (5.16), desenvolvendo e fazendo as devidas simplificações temos,

$$\Delta V_3(x_k) \leq (x_{k+1} - x_k)^T \tau^2 S (x_{k+1} - x_k) - (x_k - x_{k-\tau})^T S (x_k - x_{k-\tau}). \tag{5.17}$$

Portanto, de acordo com (5.10), (5.11), desenvolvendo os produtos de (5.17) e colocando os termos comuns em evidência, podemos escrever

$$\begin{aligned}\Delta V(x_k) \leq\ & x_{k+1}^T (P + \tau^2 S) x_{k+1} + x_{k+1}^T (-\tau^2 S) x_k^T + x_k^T [-P + R + (\tau^2 - 1) S] x_k \\ & x_k^T S x_{k-\tau} + x_{k-\tau}^T (-S - R) x_{k-\tau} + x_{k-\tau}^T S x_k + x_k^T (-\tau^2 S) x_{k+1}^T,\end{aligned} \tag{5.18}$$

para valores de x_{k+1}, x_k e $x_{k-\tau}$ que satisfaçam a trajetória dada por (5.1). Matricialmente pode-se escreveer:

$$\Delta V(x_k) \leq \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k \\ x_{k-\tau} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P+\tau^2 S & -\tau^2 S & \mathbf{0} \\ \star & -P+R+(\tau^2-1)S & \mathbf{0} \\ \star & \star & -S-R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k \\ x_{k-\tau} \end{bmatrix}. \tag{5.19}$$

Pensando numa função para um sistema com múltiplos atrasos, i.e. para atrasos de $d=1$ até $d=\tau$, a seguinte função

$$V(x_k) = x_k^T P x_k + \sum_{c=1}^{\tau}\sum_{i=1}^{c} x_{k-i}^T R_c x_{k-i} + \sum_{c=1}^{\tau} c \sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{i} y_{k-j}^T S_c y_{k-j}, \tag{5.20}$$

em que $c \in \mathcal{I}[1,\tau]$, τ é o valor máximo do atraso, $\mathbf{0} < P = P^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < S_c = S_c^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < R_c = R_c^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, y_k dado em (5.3), será assumida como nova candidata a função de Lyapunov-Krasovskii nas abordagens subsequentes.

5.2 Alocação regional de polos com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$

Considere o sistema incerto discreto no tempo com atraso incerto no vetor de estados (4.1), por comodidade repetido a seguir

$$\Upsilon(\beta) : \begin{cases} x_{k+1} &= A(\beta)x_k + A_\theta(\beta)x_{k-d} + B(\beta)u_k + B_e(\beta)w_k \\ z_k &= C(\beta)x_k + C_\theta(\beta)x_{k-d} + D(\beta)u_k + D_e(\beta)w_k, \end{cases} \tag{5.21}$$

em que $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^p$ e $w_k \in \mathbb{R}^\ell$ são os vetores dos estados, das entradas de controle e das entradas exógenas, respectivamente, $k \in \mathbb{N}$ é a amostragem, $d \in \mathcal{I}[1,\tau]$ é o atraso incerto que pode assumir qualquer valor inteiro dentro do intervalo, sendo τ o valor máximo desse atraso. As matrizes $A(\beta)$ e $A_\theta(\beta) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(\beta) \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $B_e(\beta) \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$, $C(\beta)$ e $C_\theta(\beta) \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $D(\beta) \in \mathbb{R}^{q\times p}$, $D_e(\beta) \in \mathbb{R}^{q\times \ell}$ representam a dinâmica do sistema.

Esse sistema pode ser representado na forma aumentada livre de atraso

$$\bar{\Upsilon}_{v,d} : \begin{cases} \bar{x}_{k+1} &= \bar{A}_{v,d}\bar{x}_k + \bar{B}_v u_k + \bar{B}_{ev} w_k \\ \bar{z}_k &= C_{v,d}\bar{x}_k + \bar{D}_v u_k + \bar{D}_{ev} w_k, \end{cases} \tag{5.22}$$

com $\bar{x}_k$, $\bar{A}_{v,d}$, $C_{v,d}$, $\bar{B}_v$, $\bar{D}_v$, $\bar{B}_{ev}$, $\bar{D}_{ev}$ dadas em (4.6)-(4.8).

Submetido a lei de controle

$$u_k = Kx_k + K_\tau x_{k-\tau}, \tag{5.23}$$

e de acordo com (4.9)-(4.29), (5.21) esse sistema pode ser representado pelo seguinte sistema equivalente com múltiplos atrasos no vetor de estados

$$\begin{cases} \check{x}_{k+1} = \sum_{m=0}^{\tau} \check{A}_{m,v,d}\check{x}_{k-m} + \check{B}_v u_k + \check{B}_{ev} w_k \\ \check{z}_k = \sum_{m=0}^{\tau} \check{C}_{m,v,d}\check{x}_{k-m} + \check{D}_v u_k + \check{D}_{ev} w_k, \end{cases} \tag{5.24}$$

que sujeito a lei de controle (4.20) apresenta o seguinte sistema equivalente em malha fechada com múltiplos atrasos nos estados:

$$\check{\mathbf{\Upsilon}}_{v,d} : \begin{cases} \check{x}_{k+1} = \sum_{m=0}^{\tau} \check{\mathbf{A}}_{m,v,d}\check{x}_{k-m} + \check{B}_{ev} w_k \\ \check{z}_k = \sum_{m=0}^{\tau} \check{\mathbf{C}}_{m,v,d}\check{x}_{k-m} + \check{D}_{ev} w_k, \end{cases} \tag{5.25}$$

sendo

$$\begin{aligned}\check{\mathbf{A}}_{m,v,d} &= \check{A}_{m,v,d} + \check{B}_v\check{K}_m,\\ \check{\mathbf{C}}_{m,v,d} &= \check{C}_{m,v,d} + \check{D}_v\check{K}_m,\end{aligned} \tag{5.26}$$

com $m \in \mathcal{I}[0,\tau]$, $\check{A}_{m,v,d}$, $\check{C}_{m,v,d}$, $\check{K}_m$, dadas em Fato 1, $\check{B}_v$, $\check{D}_v$, $\check{B}_{ev}$, $\check{D}_{ev}$, dadas em (4.17)-(4.18).

Para avaliar a $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilidade com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ de (5.25), a candidata a função de L-K, (5.20), será utilizada, sendo reescrita na forma

$$V(x_k) = V_1(x_k) + V_2(x_k) + V_3(x_k), \tag{5.27}$$

com

$$V_1(x_k) = x_k^T P_{v,d} x_k, \tag{5.28}$$

$$V_2(x_k) = \sum_{c=1}^{\tau}\sum_{i=1}^{c} x_{k-i}^T R_{c,v,d} x_{k-i}, \tag{5.29}$$

$$V_3(x_k) = \sum_{c=1}^{\tau} c \sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{i} y_{k-j}^T S_{c,v,d} y_{k-j}. \tag{5.30}$$

Similarmente aos desenvolvimentos (5.4)-(5.12), aplicando-os em (5.27)-(5.30), temos

$$\Delta V_1(x_k) = x_{k+1}^T P_{v,d} x_{k+1} - x_k^T P_{v,d} x_k, \tag{5.31}$$

$$\Delta V_2(x_k) = \sum_{c=1}^{\tau} \left(x_k^T R_{c,v,d} x_k - x_{k-c}^T R_{c,v,d} x_{k-c},\right) \tag{5.32}$$

$$\Delta V_3(x_k) = \sum_{c=1}^{\tau} c^2 y_k^T S_{c,v,d} y_k - \sum_{c=1}^{\tau} c \sum_{i=1}^{c} y_{k-i}^T S_{c,v,d} y_{k-i}. \tag{5.33}$$

Definindo como J o segundo termo de (5.33), ou seja,

$$\Delta V_3(x_k) = \sum_{c=1}^{\tau} c^2 y_k^T S_{c,v,d} y_k + J, \tag{5.34}$$

com

$$J = -\sum_{c=1}^{\tau} c \sum_{i=1}^{c} y_{k-i}^T S_{c,v,d} y_{k-i}, \tag{5.35}$$

e aplicando a Desigualdade Jensen (Apêndice A.4) em (5.35), temos

$$J \leq \sum_{c=1}^{\tau} \left[\left(\sum_{i=1}^{c} y_{k-i}^T \right) S_{c,v,d} \left(\sum_{i=1}^{c} y_{k-i} \right) \right]. \tag{5.36}$$

Substituindo (5.36) em (5.34), podemos reescrever $\Delta V_3(x_k)$ como

$$\Delta V_3(x_k) \leq \sum_{c=1}^{\tau} c^2 y_k^T S_{c,v,d} y_k + \sum_{c=1}^{\tau} \left[\left(\sum_{i=1}^{c} y_{k-i}^T \right) S_{c,v,d} \left(\sum_{i=1}^{c} y_{k-i} \right) \right]. \tag{5.37}$$

Substituindo (5.3) em (5.37), desenvolvendo e fazendo as devidas simplificações temos

$$\Delta V_3(x_k) \leq \sum_{c=1}^{\tau}(x_{k+1}^T - x_k^T)c^2 S_{c,v,d}(x_{k+1} - x_k) - (x_{k-c}^T - x_k^T)S_{c,v,d}(x_{k-c} - x_k). \tag{5.38}$$

Portanto, de acordo com (5.31), (5.32), desenvolvendo os produtos de (5.38) e colocando os termos comuns em evidência, podemos escrever

$$\begin{aligned}\Delta V(x_k) \leq\ & x_{k+1}^T\left(P_{v,d} + \sum_{c=1}^{\tau} c^2 S_{c,v,d}\right)x_{k+1} + x_k^T\left(-P_{v,d} + \sum_{c=1}^{\tau}\left[R_{c,v,d} + (c^2-1)S_{c,v,d}\right]\right)x_k + \\ & \sum_{c=1}^{\tau}\left[x_{k-c}^T(-S_{c,v,d} - R_{c,v,d})x_{k-c}\right] + \sum_{c=1}^{\tau}\left(x_k^T S_{c,v,d}x_{k-c}\right) + \sum_{c=1}^{\tau}\left(x_{k-c}^T S_{c,v,d}x_k\right)\end{aligned} \tag{5.39}$$

para valores de x_{k+1}, x_k e x_{k-c} que satisfaçam a trajetória dada por (5.24) e $c \in \mathcal{I}[1,\tau]$.

De acordo com (5.4), (5.39), aplicando-se o ítem 1 do Lema de Finsler (Apêndice A.3), com a escolha

$$\omega = \begin{bmatrix} \check{x}_{k+1}^T & \check{x}_k^T & \check{x}_{k-1}^T & \cdots & \check{x}_{k-3}^T & z_k^T & w_k^T \end{bmatrix}^T, \tag{5.40}$$

temos

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} P_{v,d} + \sum_{c=1}^{\tau} c^2 S_{c,v,d} & -\sum_{c=1}^{\tau} c^2 S_{c,v,d} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -P_{v,d} + \sum_{c=1}^{\tau}[(c^2-1)S_{c,v,d} + R_{c,v,d}] & S_{1,v,d} & \cdots & S_{\tau,v,d} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -S_{1,v,d} - R_{1,v,d} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -S_{\tau,v,d} - R_{\tau,v,d} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mu\mathbf{I}_l \end{bmatrix} \tag{5.41}$$

e

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_n & \check{\mathbf{A}}_{0,v,d} & \check{\mathbf{A}}_{1,v,d} & \cdots & \check{\mathbf{A}}_{\tau,v,d} & \mathbf{0} & \check{B}_{ev} \\ \mathbf{0} & \check{\mathbf{C}}_{0,v,d} & \check{\mathbf{C}}_{1,v,d} & \cdots & \check{\mathbf{C}}_{\tau,v,d} & -\mathbf{I}_q & \check{D}_{ev} \end{bmatrix}. \tag{5.42}$$

Aplicando o ítem 2 do Lema de Finsler (Apêndice A.3) com a escolha

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} F_0^T & F_1^T & F_2^T & F_3^T & F_4^T & \cdots & F_{\tau+3}^T \\ G_0^T & G_1^T & G_2^T & G_3^T & G_4^T & \cdots & G_{\tau+3}^T \end{bmatrix}^T, \tag{5.43}$$

sendo F_i e G_i com $i = 0,...,\tau+3$ de dimensões adequadas. Fazendo $\mathcal{X} = \mathbf{0}$, exceto para $F_0 = F$, $G_{\tau+2} = -G$. Pré e pós multiplicando por H e H^T, respectivamente, em que $H =$

bloco-diag$\{\mathbf{I}_{\tau+2}\otimes F^{-1}, G^{-1}_{q\times q}, \mathbf{I}_\ell\}$ resulta na condição $\check{\Phi}_{v,d}<0$, com $\check{\Phi}_{v,d}$ dada por

$$\check{\Phi}_{v,d}=\left[\begin{array}{cccccc}
F^{-1}(P_{v,d}+\sum_{c=1}^{\tau}c^2S_{c,v,d})F^{-T}-F^{-1}-F^{-T} & \check{\mathbf{A}}_{0,v,d}F^{-T}-F^{-1}\sum_{c=1}^{\tau}c^2S_{c,v,d}F^{-T} & \check{\mathbf{A}}_{1,v,d}F^{-T} & \cdots & \check{\mathbf{A}}_{\tau,v,d}F^{-T} & \mathbf{0} & \check{B}_{ev}\\
\star & F^{-1}\{-P_{v,d}+\sum_{c=1}^{\tau}[(c^2-1)S_{c,v,d}+R_{c,v,d}]\}F^{-T} & F^{-1}S_{1,v,d}F^{-T} & \cdots & \mathbf{0} & -F^{-1}\check{\mathbf{C}}^T_{0,v,d} & \mathbf{0}\\
\star & \star & -F^{-1}(S_{1,v,d}+R_{1,v,d})F^{-T} & \cdots & \mathbf{0} & -F^{-1}\check{\mathbf{C}}^T_{1,v,d} & \mathbf{0}\\
\star & \star & \star & \ddots & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0}\\
\star & \star & \star & \star & -F^{-1}(S_{\tau,v,d}+R_{\tau,v,d})F^{-T} & -F^{-1}\check{\mathbf{C}}^T_{\tau,v,d} & \mathbf{0}\\
\star & \star & \star & \star & \star & G^{-1}(\mathbf{I}_q+G+G^T)G^{-T} & -\check{D}_{ev}\\
\star & \star & \star & \star & \star & \star & -\mu\mathbf{I}_\ell
\end{array}\right]. \tag{5.44}$$

De acordo com (3.94)-(3.95), podemos substituir o parêntese do bloco $(\tau+3,\tau+3)$ de (5.44) por $-\theta\mathbf{I}_q$ e, fazendo $F^{-1}P_{v,d}F^{-T}=\tilde{P}_{v,d}$, $F^{-1}S_{c,v,d}F^{-T}=\tilde{S}_{c,v,d}$, para $c\in\mathcal{I}[1,\tau]$, (5.44) pode ser reescrita como

$$\check{\Phi}_{v,d}=\left[\begin{array}{cccccc}
\tilde{P}_{v,d}+\sum_{c=1}^{\tau}c^2\tilde{S}_{c,v,d}-F^{-1}-F^{-T} & \check{\mathbf{A}}_{0,v,d}F^{-T}-\sum_{c=1}^{\tau}c^2\tilde{S}_{c,v,d} & \check{\mathbf{A}}_{1,v,d}F^{-T} & \cdots & \check{\mathbf{A}}_{\tau,v,d}F^{-T} & \mathbf{0} & \check{B}_{ev}\\
\star & -\tilde{P}_{v,d}+\sum_{c=1}^{\tau}[(c^2-1)\tilde{S}_{c,v,d}+\tilde{R}_{c,v,d}] & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & -F^{-1}\check{\mathbf{C}}^T_{0,v,d} & \mathbf{0}\\
\star & \star & -\tilde{S}_{1,v,d}-\tilde{R}_{1,v,d} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -F^{-1}\check{\mathbf{C}}^T_{1,v,d} & \mathbf{0}\\
\star & \star & \star & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\star & \star & \star & \star & -\tilde{S}_{\tau,v,d}-\tilde{R}_{\tau,v,d} & -F^{-1}\check{\mathbf{C}}^T_{\tau,v,d} & \mathbf{0}\\
\star & \star & \star & \star & \star & -\theta\mathbf{I}_q & -\check{D}_{ev}\\
\star & \star & \star & \star & \star & \star & -\mu\mathbf{I}_\ell
\end{array}\right]. \tag{5.45}$$

Fazendo $F^{-1}=\tilde{F}$, usando (5.26), (4.27), definindo $\check{B}_v$ e $\check{D}_v$ como em (4.17), $K\tilde{F}^T=Z$ e

$K_\tau \tilde{F}^T = Z_\tau$, τN condições LMI para a estabilização e para a síntese de ganhos K e K_τ do sistema (5.21), sujeito a lei de controle (5.23), são apresentadas no teorema que segue

Teorema 5.1 *Se existirem as matrizes* $\tilde{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $Z_\tau \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $\mathbf{0} < \tilde{P}_{v,d} = \tilde{P}_{v,d}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < \tilde{S}_{c,v,d} = \tilde{S}_{c,v,d}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < \tilde{R}_{c,v,d} = \tilde{R}_{c,v,d}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *e os escalares* $0 < \theta \leq 1$ *e* $\mu > 0$, *tais que,*

$$\Theta_{v,d} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{v,d} + \sum_{c=1}^{\tau} c^2 \tilde{S}_{c,v,d} - \tilde{F} - \tilde{F}^T & \check{A}_{0,v,d}\tilde{F}^T + (\frac{B_v}{r})Z - \sum_{c=1}^{\tau} c^2 \tilde{S}_{c,v,d} & \check{A}_{1,v,d}\tilde{F}^T + b_{2,3}(\frac{B_v}{r})(\frac{\alpha^1 Z}{r^1}) & \cdots & \check{A}_{\tau,v,d}\tilde{F}^T + b_{2,\tau+2}(\frac{B_v}{r})(\frac{\alpha^\tau Z + Z_\tau}{r^\tau}) & \mathbf{0} & B_{ev} \\ \star & -\tilde{P}_{v,d} + \sum_{c=1}^{\tau}[(c^2-1)\tilde{S}_{c,v,d} + \tilde{R}_{c,v,d}] & \tilde{S}_{1,v,d} & \cdots & \tilde{S}_{\tau,v,d} & -\tilde{F}\check{C}_{0,v,d}^T - Z^T D_v^T & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\tilde{S}_{1,v,d} - \tilde{R}_{1,v,d} & \cdots & \mathbf{0} & -\tilde{F}\check{C}_{1,v,d}^T - b_{2,3}(\frac{\alpha^1 Z^T + Z_\tau^T}{r^1})D_v^T & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \star & \star & \star & \star & -\tilde{S}_{\tau,v,d} - \tilde{R}_{\tau,v,d} & -\tilde{F}\check{C}_{\tau,v,d}^T - b_{2,\tau+2}(\frac{\alpha^\tau Z^T + Z_\tau^T}{r^\tau})D_v^T & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & \star & -\theta \mathbf{I}_q & -D_{ev} \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & -\mu \mathbf{I}_l \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (5.46)$$

em que d e $c \in \mathcal{I}[1,\tau]$, $v \in \mathcal{I}[1,N]$, seja verificado, sendo as matrizes $\check{A}_{c,v,d}$, $\check{C}_{c,v,d}$, $c \in \mathcal{I}[0,\tau]$, dadas em Fato 1, então o sistema (5.24) sujeito a lei de controle (4.20) é Schur-estável, o que implica no sistema (5.21), sujeito a lei de controle (4.9), $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estável com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma = \sqrt{\mu}$ e ganhos robustos de realimentação dos estados:

$$K = Z\tilde{F}^{-T} \quad \text{e} \quad K_\tau = Z_\tau \tilde{F}^{-T}. \quad (5.47)$$

Prova: Similarmente aos passos da Prova do Teorema 4.1 ocorrem os passos da corrente Prova. Portanto, se (5.46) é verificada com $\tilde{P}_{v,d}$, $\tilde{R}_{c,v,d} > 0$,$\tilde{S}_{c,v,d} > 0$, com d e $c \in \mathcal{I}[1,\tau]$, $v \in \mathcal{I}[1,N]$, então $\tilde{F}$ é não singular. Definindo $Z = K\tilde{F}^T$, $Z_\tau = K_\tau \tilde{F}^T$, usando (4.27), (5.26) e $\tilde{F} = F^{-1}$, recupera-se (5.45). Definindo $\tilde{P}_{v,d} = F^{-1}P_{v,d}F^{-T}$, $\tilde{R}_{c,v,d} = F^{-1}R_{c,v,d}F^{-T}$, $\tilde{S}_{c,v,d} = F^{-1}S_{c,v,d}F^{-T}$, $-\theta\mathbf{I}_q = G^{-1}(\mathbf{I}_q + G + G^T)G^{-T}$ conforme (3.94)-(3.95), obtém-se (5.44). Aplicando

a transformação de congruência $\coprod \check{\Phi}_{v,d} \coprod^T$, com $\check{\Phi}_{v,d}$ dada em (5.44) e $\coprod$ = bloco-diag$\{\mathbf{I}_{\tau+2} \otimes F, G_{q\times q}, \mathbf{I}_\ell\}$ e de acordo com o desenvolvimento (5.40)-(5.43), a verificação de (5.44) assegura a verificação de (5.4). Portanto, o sistema descrito por (5.25) é Schur-estável com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\sqrt{\mu}$. Além disso, pelas transformações (4.15)-(4.21) e (2.8), se (5.25) é Schur-estável, então (5.21), sujeito a lei de controle (4.9), é $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estável com o mesmo custo garantido $\mathcal{H}_\infty$. ■

A partir do Teorema 5.1, podemos estimar a norma $\mathcal{H}_\infty$ pelo seguinte procedimento convexo de otimização

$$\mathcal{H}_\infty : \left\{ \begin{array}{c} \min \quad \mu \\ \tilde{P}_{v,d} = \tilde{P}_{v,d}^T > \mathbf{0},\ \tilde{R}_{c,v,d} = \tilde{R}_{c,v,d}^T > \mathbf{0},\ \tilde{S}_{c,v,d} = \tilde{S}_{c,v,d}^T > \mathbf{0},\ 0 < \theta \leq 1, \text{ tal que:} \\ \Theta_{v,d} < \mathbf{0}\ (\Theta_{v,d} \text{ dada em (5.46)}). \end{array} \right. \tag{5.48}$$

Exemplo 5.1 *Considere o sistema (5.21) com $d \in \mathcal{I}[1,\tau]$, $\tau = 3$ e parâmetros incertos afetando todas as matrizes dinâmicas da seguinte forma*

$$A(\rho) = \begin{bmatrix} 0{,}1+\rho & 1 \\ 0{,}05 & 0{,}8-\rho \end{bmatrix},\quad A_\theta(\eta) = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}1-\eta \end{bmatrix}, \tag{5.49}$$

$$B(\sigma) = B_e(\sigma) = \begin{bmatrix} 1+\sigma \\ 0{,}6-\sigma \end{bmatrix},\quad C(\rho) = \begin{bmatrix} 0+\rho & 1 \end{bmatrix},\quad C_\theta(\eta) = \begin{bmatrix} 0{,}5-\eta & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.50}$$

$$D(\sigma) = \begin{bmatrix} 0{,}1-\sigma \end{bmatrix},\quad D_e(\sigma) = \begin{bmatrix} 0{,}2-\sigma \end{bmatrix}, \tag{5.51}$$

em que $|\rho| \leq 0{,}1$, $|\eta| \leq 0{,}05$, e $|\sigma| \leq 0{,}1$. Utilizando o problema de otimização (5.48) e escolhendo $\alpha = 0{,}1$ e $r = 0{,}8$, obteve-se os seguintes resultados para a $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilidade do sistema:

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 0{,}1976 & -1{,}2630 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0378 & -0{,}0070 \end{bmatrix}$$

e custo garantido $\mathcal{H}_\infty = 2{,}6293$.

Na Figura 5.1 são mostrados as nuvens de autovalores do sistema incerto discreto no tempo com atraso incerto no vetor de estados (5.21) em malha fechada através da lei de controle (4.9), para cada valor do atraso. Como era de se esperar, observe que todos os autovalores estão localizada no interior da região $\mathcal{D}(0{,}1; 0{,}8)$.

Utilizou-se um algoritmo de bissecção junto com (5.46) para determinar o menor valor do raio r para cada posição do centro α, tal que o Teorema 5.1 seja factível. Veja a Figura 5.2 e observe que a faixa de variação do parâmetro α foi $-0{,}15 \leq \alpha \leq 0{,}2$. E que o menor valor de $r = 0{,}6714$ foi obtido para $\alpha = 0{,}05$. Também através do algoritmo de bissecção e (5.48), mantendo fixo o parâmetro α e varrendo o intervalo $1-\alpha \geq r \geq 0{,}1$, avaliou-se o valor do custo $\mathcal{H}_\infty$ tal que o Teorema 5.1 seja factível. O valor de α também foi varrido dentro do intervalo $0 \leq \alpha \leq 0{,}5$. A Figura 5.3 mostra as superfícies geradas com tais dados. As condições foram infactiveis fora desses intervalos.

5.3 Sistema incerto e atraso conhecido

Considere o mesmo caso particular apresentado na Seção 4.2, no qual o atraso é conhecido e invariante no tempo, ou seja, $d = \tau$, definindo um sistema incerto discreto no tempo com atraso

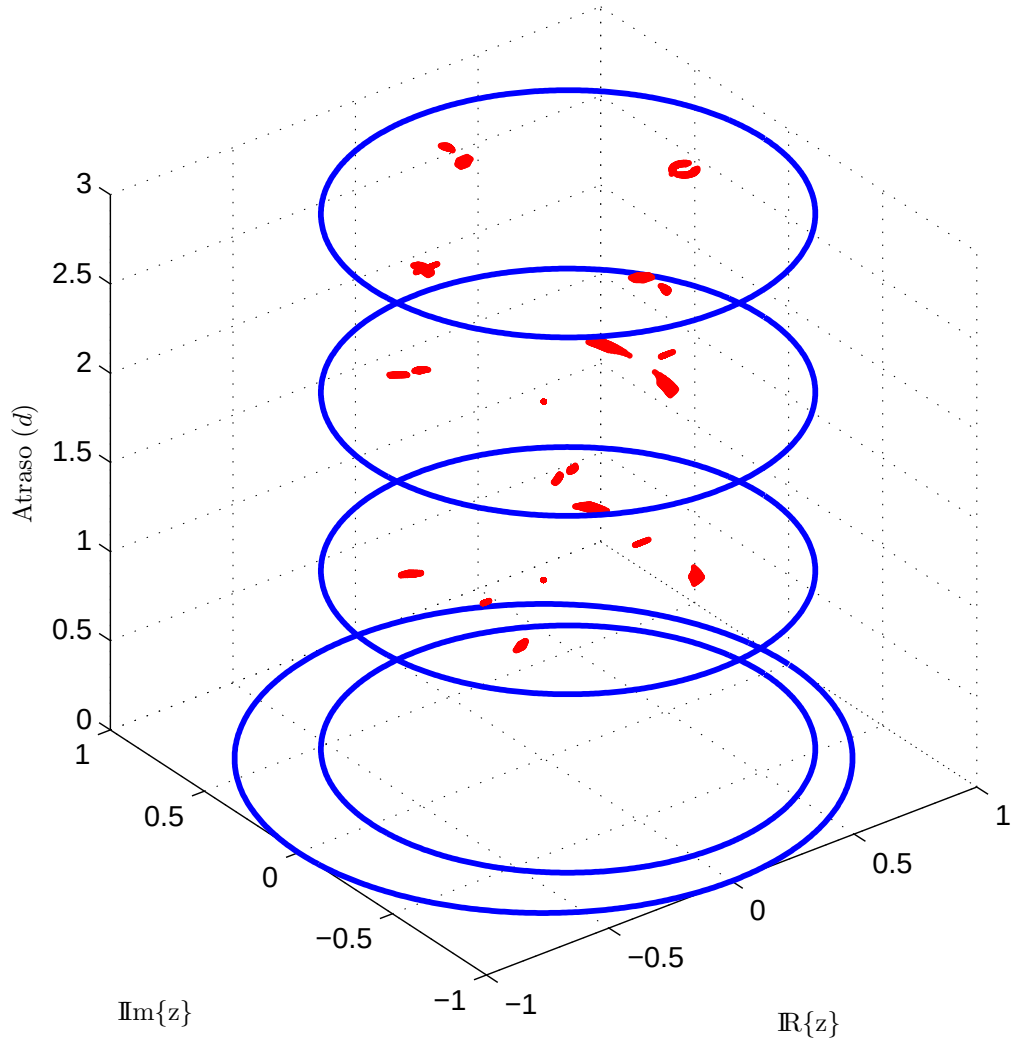

Figura 5.1: Nuvens de autovalores do sistema (5.21) em malha fechada através da lei de controle (4.9), para cada valor do atraso.

conhecido no vetor de estados (por comodidade algumas equações da Seção 4.2 serão repetidas nesta seção)

$$\Upsilon(\beta) : \left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & A(\beta)x_k + A_\theta(\beta)x_{k-\tau} + B(\beta)u_k + B_e(\beta)w_k \\ z_k & = & C(\beta)x_k + C_\theta(\beta)x_{k-\tau} + D(\beta)u_k + D_e(\beta)w_k \end{array} \right. \tag{5.52}$$

em que $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^p$ e $w_k \in \mathbb{R}^\ell$ são os vetores dos estados, das entradas de controle e das entradas exógenas, respectivamente, $k \in \mathbb{N}$ é a amostragem, τ é o atraso conhecido. As matrizes $A(\beta)$ e $A_\theta(\beta) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(\beta) \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $B_e(\beta) \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$, $C(\beta)$ e $C_\theta(\beta) \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $D(\beta) \in \mathbb{R}^{q\times p}$, $D_e(\beta) \in \mathbb{R}^{q\times \ell}$ representam a dinâmica do sistema (5.52) pertencente ao politopo $\mathcal{A}_{o\ell}$ dado em (4.2) de todas as matrizes obtidas pela combinação convexa de seus N vértices, definido pelo conjunto Ω, dado em (4.3). Os vértices são conhecidos e dados por Υ_v em (4.4).

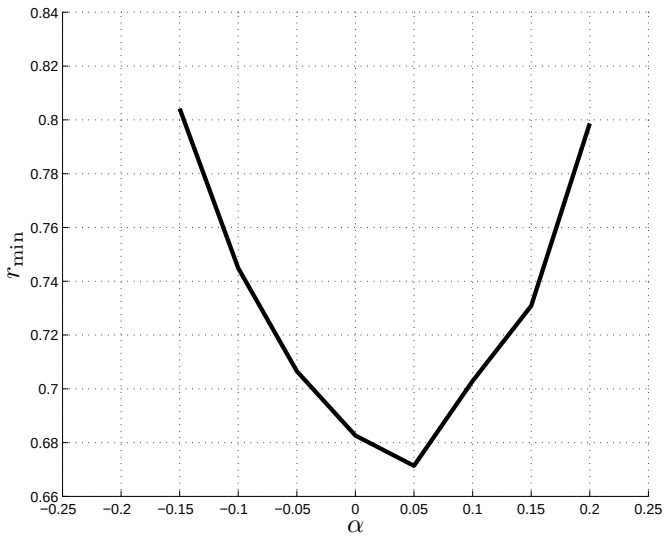

Figura 5.2: Valores mínimos de raio em função do parâmetro α a partir de (5.46).

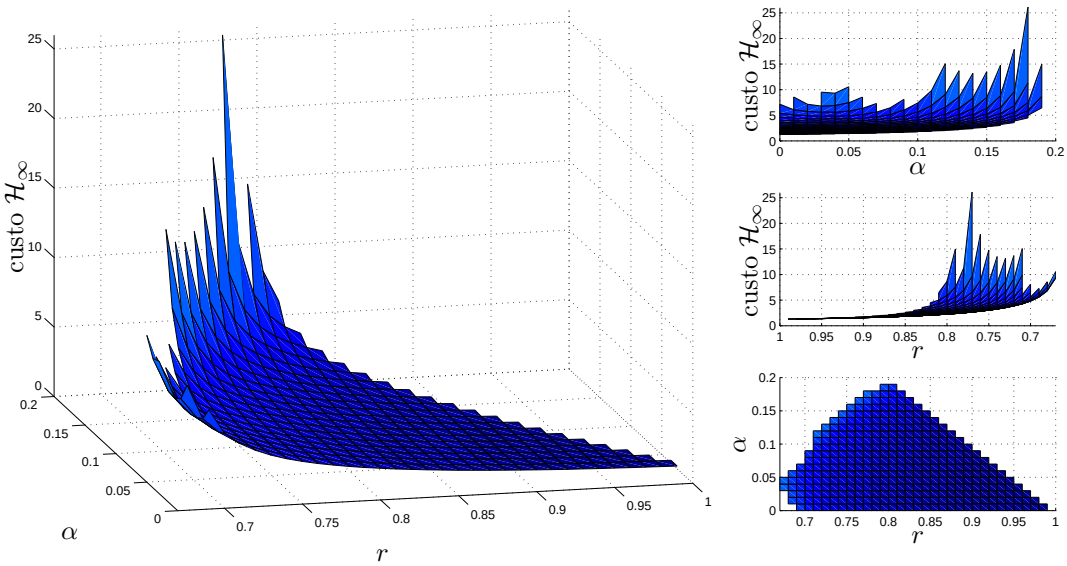

Figura 5.3: Superfície custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ em função de α e r a partir de (5.48).

As mesmas operações da Seção 4.2 serão realizadas para obtenção do sistema incerto aumentado livre de atraso,

$$\bar{\Upsilon}_v : \left\{ \begin{array}{rcl} \bar{x}_{k+1} & = & \bar{A}_v \bar{x}_k + \bar{B}_v u_k + \bar{B}_{ev} w_k \\ \bar{z}_k & = & C_v \bar{x}_k + \bar{D}_v u_k + \bar{D}_{ev} w_k \end{array} \right. \tag{5.53}$$

e para obtenção do sistema equivalente com múltiplos atrasos nos estados,

$$\left\{ \begin{array}{l} \check{x}_{k+1} = \sum_{m=0}^{\tau} \check{A}_{m,v} \check{x}_{k-m} + \check{B}_v u_k + \check{B}_{ev} w_k \\ \check{z}_k = \sum_{m=0}^{\tau} \check{C}_{m,v} \check{x}_{k-m} + \check{D}_v u_k + \check{D}_{ev} w_k, \end{array} \right. \tag{5.54}$$

o qual submetido a lei de controle (4.20) resulta no sistema em malha fechada discreto no tempo com múltiplos atrasos no vetor de estados,

$$\check{\mathbf{\Upsilon}}_v : \begin{cases} \check{x}_{k+1} = \sum_{m=0}^{\tau} \check{\mathbf{A}}_{m,v}\check{x}_{k-m} + \check{B}_{ev}w_k \\ \check{z}_k = \sum_{m=0}^{\tau} \check{\mathbf{C}}_{m,v}\check{x}_{k-m} + \check{D}_{ev}w_k, \end{cases} \tag{5.55}$$

com

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{A}}_{m,v} &= \check{A}_{m,v} + \check{B}_v\check{K}_m \\ \check{\mathbf{C}}_{m,v} &= \check{C}_{m,v} + \check{D}_v\check{K}_m, \end{aligned} \tag{5.56}$$

e $m \in \mathcal{I}[0,\tau]$.

Em seguida, realizando os mesmos desenvolvimentos da Seção 5.2, porém para o sistema dado em (5.52), N condições LMI para a estabilização e para a síntese de ganhos K e K_τ do sistema (5.52), sujeito a lei de controle (5.23), são apresentadas no corolário que segue

Corolário 5.1 *Se existirem as matrizes* $\tilde{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $Z_\tau \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $\mathbf{0} < \tilde{P}_v = \tilde{P}_v^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < \tilde{S}_{c,v} = \tilde{S}_{c,v}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < \tilde{R}_{c,v} = \tilde{R}_{c,v}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *e os escalares* $0 < \theta \leq 1$ *e* $\mu > 0$, *tais que,*

$$\Theta_v = \left[\begin{array}{cccccccc}
\tilde{P}_v + \sum_{c=1}^{\tau} c^2\tilde{S}_{c,v} - \tilde{F} - \tilde{F}^T & \check{A}_{0,v}\tilde{F}^T + (\frac{B_v}{r})Z - \sum_{c=1}^{\tau} c^2\tilde{S}_{c,v} & \check{A}_{1,v}\tilde{F}^T + b_{2,3}(\frac{B_v}{r})(\frac{\alpha^1 Z}{r^1}) & \cdots & \check{A}_{\tau,v}\tilde{F}^T + b_{2,\tau+2}(\frac{B_v}{r})(\frac{\alpha^\tau Z + Z_\tau}{r^\tau}) & \mathbf{0} & B_{ev} \\
\star & -\tilde{P}_v + \sum_{c=1}^{\tau}[(c^2-1)\tilde{S}_{c,v} + \tilde{R}_{c,v}] & \tilde{S}_{1,v} & \cdots & \tilde{S}_{\tau,v} & -\tilde{F}\check{C}_{0,v}^T - Z^T D_v^T & \mathbf{0} \\
\star & \star & -\tilde{S}_{1,v} - \tilde{R}_{1,v} & \cdots & \mathbf{0} & -\tilde{F}\check{C}_{1,v}^T - b_{2,3}(\frac{\alpha^1 Z^T + Z_\tau^T}{r^1})D_v^T & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\star & \star & \star & \star & -\tilde{S}_{\tau,v} - \tilde{R}_{\tau,v} & -\tilde{F}\check{C}_{\tau,v}^T - b_{2,\tau+2}(\frac{\alpha^\tau Z^T + Z_\tau^T}{r^\tau})D_v^T & \mathbf{0} \\
\star & \star & \star & \star & \star & -\theta\mathbf{I}_q & -D_{ev} \\
\star & \star & \star & \star & \star & \star & -\mu\mathbf{I}_l
\end{array}\right] < \mathbf{0}, \tag{5.57}$$

Prova: Os mesmos passos da Prova do Teorema 5.1 se aplicam para o Corolário 5.1, desta vez fixando-se $d = \tau$. Portanto, pelas transformações (4.15)-(4.21) e (2.8), se (5.55) é Schur-estável,

então (5.52), sujeito a lei de controle (4.9), é $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estável com o mesmo custo garantido $\mathcal{H}_\infty$.
■

A partir do Corolário 5.1, podemos estimar a norma $\mathcal{H}_\infty$ pelo seguinte procedimento convexo de otimização

$$\mathcal{H}_\infty : \left\{ \begin{array}{c} \min \quad \mu \\ \tilde{P}_v = \tilde{P}_v^T > \mathbf{0},\ \tilde{S}_{c,v} = \tilde{S}_{c,v}^T > \mathbf{0},\ 0 < \theta \leq 1, \text{ tal que:} \\ \Theta_v < \mathbf{0}\ (\Theta_v \text{ dada em (5.57)}). \end{array} \right. \tag{5.58}$$

Exemplo 5.2 *Considere o sistema (5.52) com $\tau = 3$, e matrizes dinâmicas incertas dadas em (5.49)-(5.51). Utilizando o problema de otimização (5.58) e escolhendo $\alpha = 0{,}1$ e $r = 0{,}8$, obteve-se os seguintes resultados para a $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilidade do sistema:*

$$\bar{K} = \left[\begin{array}{cccccccc} 0{,}1229 & -1{,}0448 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0972 & -0{,}0443 \end{array} \right]$$

e custo garantido $\mathcal{H}_\infty = 2{,}1137$.

Na Figura 5.4 são mostrados os autovalores do sistema incerto discreto no tempo com atraso conhecido no vetor de estados (5.52) em malha fechada através da lei de controle (4.9). Como era de se esperar, observe que todos os autovalores estão localizados no interior da região $\mathcal{D}(0{,}1; 0{,}78)$ para cada vértice do politopo de incertezas. Na Figura 5.5 é apresentada a nuvem de autovalores do sistema em malha fechada. Utilizou-se um algoritmo de bissecção junto com (5.57) para determinar o menor valor do raio r para cada posição do centro α, tal que o Corolário 5.1 seja factível. Veja a Figura 5.6 e observe que a faixa de variação do parâmetro α foi $-0{,}15 \leq \alpha \leq 0{,}2$. E que o menor valor de $r = 0{,}6468$ foi obtido para $\alpha = 0{,}05$. Também através do algoritmo de bissecção e (5.58), mantendo fixo o parâmetro α e varrendo o intervalo $1 - \alpha \geq r \geq 0{,}1$, avaliou-se o valor do custo $\mathcal{H}_\infty$ tal que o Corolário 5.1 seja factível. O valor de α também foi varrido dentro do intervalo $0 \leq \alpha \leq 0{,}5$. A Figura 5.7 mostra as superfícies geradas com tais dados. As condições foram infactiveis fora desses intervalos.

5.4 Sistema precisamente conhecido e atraso incerto

Considere o mesmo caso particular apresentado na Seção 4.3, no qual o sistema é precisamente conhecido e o atraso é incerto e invariante no tempo, ou seja, $\beta = [\ ]$ e $d \in \mathcal{I}[1,\tau]$, definindo um sistema precisamente conhecido discreto no tempo com atraso incerto no vetor de estados (por comodidade algumas equações da Seção 4.3 serão repetidas nesta seção)

$$\Upsilon_d : \left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & Ax_k + A_\theta x_{k-d} + Bu_k + B_e w_k \\ z_k & = & Cx_k + C_\theta x_{k-d} + Du_k + D_e w_k, \end{array} \right. \tag{5.59}$$

em que $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^p$ e $w_k \in \mathbb{R}^\ell$ são os vetores dos estados, das entradas de controle e das entradas exógenas, respectivamente, $k \in \mathbb{N}$ é a amostragem, $d \in \mathcal{I}[1,\tau]$ é o atraso que pode assumir qualquer valor dentro do intervalo. As matrizes A e $A_\theta \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $B_e \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$, C e $C_\theta \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{q\times p}$, $D_e \in \mathbb{R}^{q\times \ell}$ representam a dinâmica do sistema (5.59).

As mesmas operações da Seção 4.3 serão realizadas para obtenção do sistema incerto aumentado livre de atraso,

$$\bar{\Upsilon}_d : \left\{ \begin{array}{rcl} \bar{x}_{k+1} & = & \bar{A}_d \bar{x}_k + \bar{B} u_k + \bar{B}_e w_k \\ \bar{z}_k & = & \bar{C}_d \bar{x}_k + \bar{D} u_k + \bar{D}_e w_k, \end{array} \right. \tag{5.60}$$

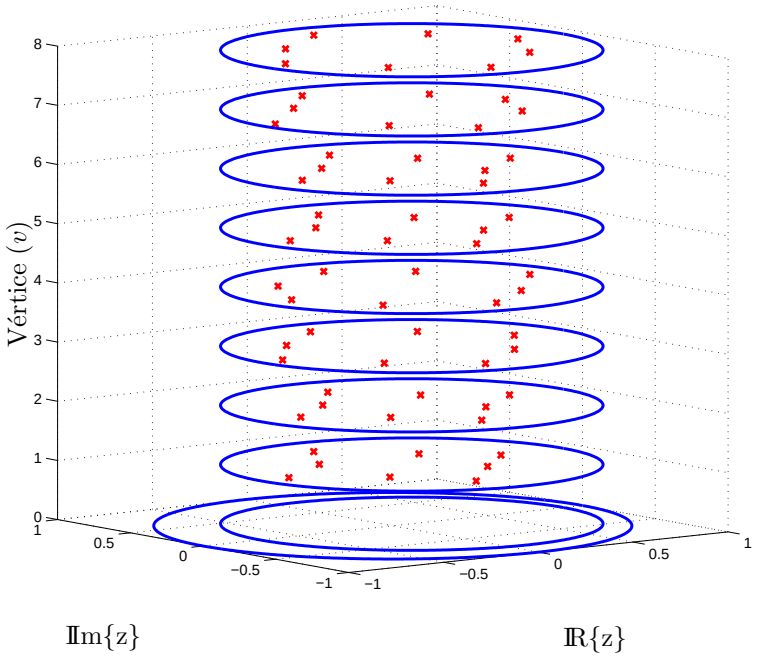

Figura 5.4: Autovalores do sistema (5.52) em malha fechada através da lei de controle (4.9), para cada vértice do politopo de incertezas
.

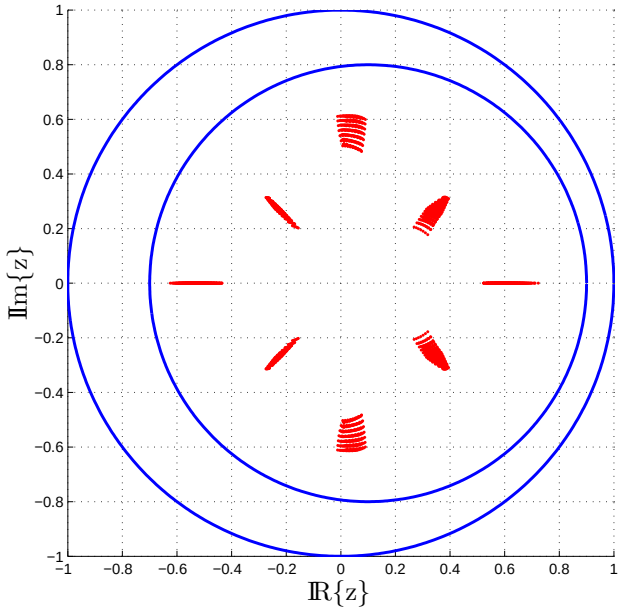

Figura 5.5: Nuvem de autovalores do sistema (5.52) em malha fechada através da lei de controle (3.7).

e para obtenção do sistema equivalente com múltiplos atrasos nos estados,

$$\begin{cases} \check{x}_{k+1} = \sum_{m=0}^{\tau} \check{A}_{m,d}\check{x}_{k-m} + \check{B}u_k + \check{B}_e w_k \\ \check{z}_k = \sum_{m=0}^{\tau} \check{C}_{m,d}\check{x}_{k-m} + \check{D}u_k + \check{D}_e w_k. \end{cases} \tag{5.61}$$

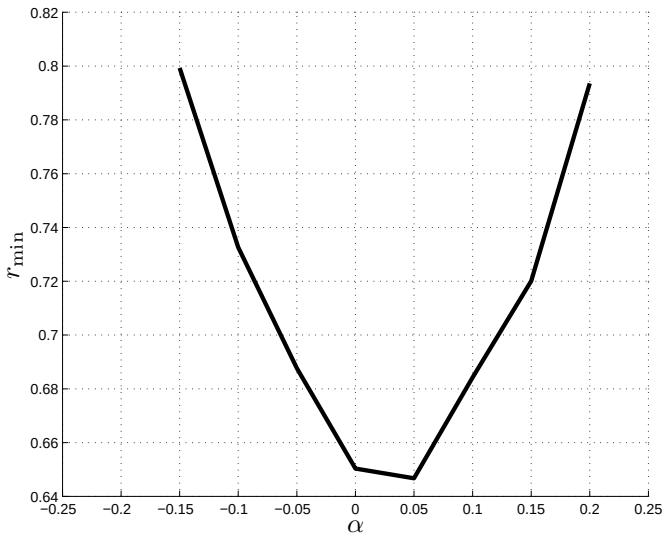

Figura 5.6: Valores mínimos de raio em função do parâmetro α a partir de (5.57).

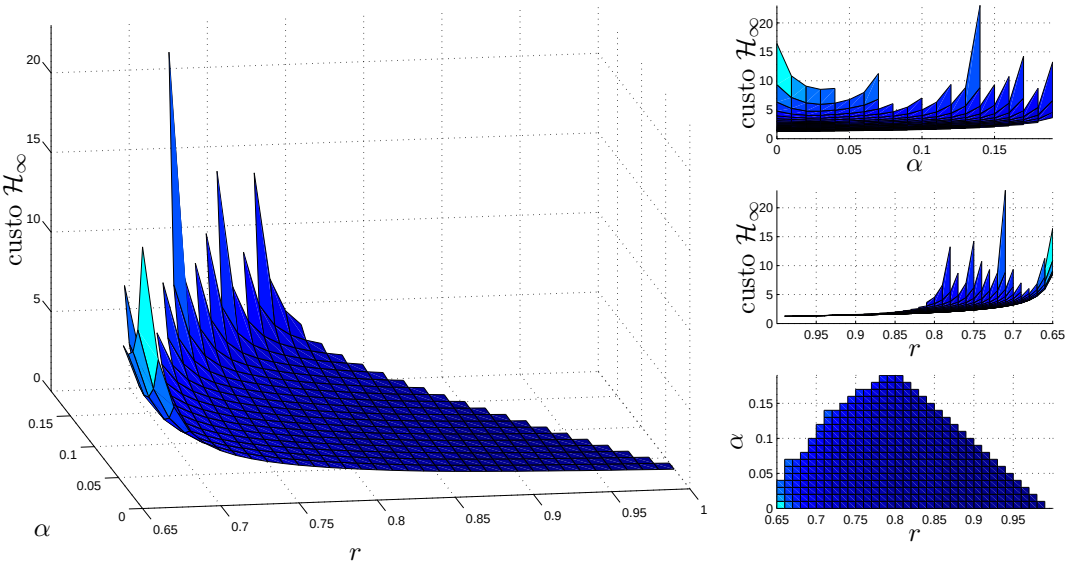

Figura 5.7: Superfície custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ em função de α e r a partir de (5.58).

o qual submetido a lei de controle (4.20) resulta no sistema em malha fechada discreto no tempo com múltiplos atrasos no vetor de estados,

$$\check{\boldsymbol{\Upsilon}}_d : \begin{cases} \check{x}_{k+1} = \sum_{m=0}^{\tau} \check{\mathbf{A}}_{m,d}\check{x}_{k-m} + \check{B}_e w_k \\ \check{z}_k = \sum_{m=0}^{\tau} \check{\mathbf{C}}_{m,d}\check{x}_{k-m} + \check{D}_e w_k, \end{cases} \tag{5.62}$$

com

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{A}}_{m,d} &= \check{A}_{m,d} + \check{B}\check{K}_m \\ \check{\mathbf{C}}_{m,d} &= \check{C}_{m,d} + \check{D}\check{K}_m, \end{aligned} \tag{5.63}$$

e $m \in \mathcal{I}[0,\tau]$.

Em seguida, realizando os mesmos desenvolvimentos da Seção 5.2, porém para o sistema dado em (5.59), τ condições LMI para a estabilização e para a síntese de ganhos K e K_τ do sistema (5.59), sujeito a lei de controle (5.23), são apresentadas no corolário que segue

Corolário 5.2 *Se existirem as matrizes* $\tilde{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $Z_\tau \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $\mathbf{0} < \tilde{P}_d = \tilde{P}_d^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < \tilde{S}_{c,d} = \tilde{S}_{c,d}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < \tilde{R}_{c,d} = \tilde{R}_{c,d}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *e os escalares* $0 < \theta \leq 1$ *e* $\mu > 0$, *tais que,*

$$\Theta_d = \begin{bmatrix} \tilde{P}_d + \sum_{c=1}^{\tau} c^2\tilde{S}_{c,d} - \tilde{F} - \tilde{F}^T & \check{A}_{0,d}\tilde{F}^T + (\frac{B}{r})Z - \sum_{c=1}^{\tau} c^2\tilde{S}_{c,d} & \check{A}_{1,d}\tilde{F}^T + b_{2,3}(\frac{B}{r})(\frac{\alpha^1 Z}{r^1}) & \cdots & \check{A}_{\tau,d}\tilde{F}^T + b_{2,\tau+2}(\frac{B}{r})(\frac{\alpha^\tau Z + Z_\tau}{r^\tau}) & \mathbf{0} & B_e \\ \star & -\tilde{P}_d + \sum_{c=1}^{\tau}[(c^2-1)\tilde{S}_{c,d} + \tilde{R}_{c,d}] & \tilde{S}_{1,d} & \cdots & \tilde{S}_{\tau,d} & -\tilde{F}\check{C}_{0,d}^T - Z^T D^T & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\tilde{S}_{1,d} - \tilde{R}_{1,d} & \cdots & \mathbf{0} & -\tilde{F}\check{C}_{1,d}^T - b_{2,3}(\frac{\alpha^1 Z^T + Z_\tau^T}{r^1})D^T & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \star & \star & \star & \star & -\tilde{S}_{\tau,d} - \tilde{R}_{\tau,d} & -\tilde{F}\check{C}_{\tau,d}^T - b_{2,\tau+2}(\frac{\alpha^\tau Z^T + Z_\tau^T}{r^\tau})D^T & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & \star & -\theta\mathbf{I}_q & -D_e \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & -\mu\mathbf{I}_l \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (5.64)$$

Prova: Os mesmos passos da Prova do Teorema 5.1 se aplicam para o Corolário 5.2, desta vez considerando-se todas as matrizes precisamente conhecidas, ou seja, independentes do parâmetro v, que representa o vértice do politopo de incertezas. Portanto, pelas transformações (4.15)-(4.21) e (2.8), se (5.62) é Schur-estável, então (5.59) é $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estável com o mesmo custo garantido $\mathcal{H}_\infty$. ■

A partir do Corolário 5.2, podemos estimar a norma $\mathcal{H}_\infty$ pelo seguinte procedimento convexo de otimização

$$\mathcal{H}_\infty : \begin{cases} \min \quad \mu \\ \tilde{P}_d = \tilde{P}_d^T > \mathbf{0},\ \tilde{S}_{c,d} = \tilde{S}_{c,d}^T > \mathbf{0},\ 0 < \theta \leq 1, \text{ tal que:} \\ \Theta_d < \mathbf{0}\ (\Theta_d \text{ dada em (5.64)}). \end{cases} \quad (5.65)$$

Exemplo 5.3 *Considere o sistema (5.59) com $d \in \mathcal{I}[1,\tau]$, $\tau = 3$ e matrizes dinâmicas*

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 1 \\ 0{,}05 & 0{,}8 \end{bmatrix}, \quad A_\theta = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}1 \end{bmatrix}, \quad B = B_e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}, \tag{5.66}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_\theta = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0{,}1 \end{bmatrix}, \quad D_e = \begin{bmatrix} 0{,}2 \end{bmatrix} \tag{5.67}$$

Utilizando o problema de otimização (5.65) e escolhendo $\alpha = 0{,}1$ e $r = 0{,}8$, obteve-se os seguintes resultados para a $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilidade do sistema:

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 0{,}1710 & -1{,}2664 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0378 & -0{,}0096 \end{bmatrix}$$

e custo garantido $\mathcal{H}_\infty = 1{,}8866$.

Na Figura 5.8 são mostrados os autovalores do sistema precisamente conhecido discreto no tempo com atraso incerto no vetor de estados (5.59) em malha fechada através da lei de controle (4.9). Como era de se esperar, observe que todos os autovalores estão localizados no interior da região $\mathcal{D}(0{,}1; 0{,}8)$, para cada valor do atraso. Utilizou-se um algoritmo de bissecção junto com (5.64) para determinar o menor valor do raio r para cada posição do centroα, tal que o Corolário 5.2 seja factível. Veja a Figura 5.9 e observe que a faixa de variação do parâmetro α foi $-0{,}2 \leq \alpha \leq 0{,}2$. E que o menor valor de $r = 0{,}572$ foi obtido para $\alpha = 0{,}05$. Também através do algoritmo de bissecção e (5.65), mantendo fixo o parâmetro α e varrendo o intervalo $1 - \alpha \geq r \geq 0{,}1$, avaliou-se o valor do custo $\mathcal{H}_\infty$ tal que o Corolário 5.2 seja factível. O valor de α também foi varrido dentro do intervalo $0 \leq \alpha \leq 0{,}5$. A Figura 5.10 mostra as superfícies geradas com tais dados. As condições foram infactiveis fora desses intervalos.

5.5 Sistema e atraso precisamente conhecidos

Considere o mesmo caso particular apresentado na Seção 4.4, no qual tanto o sistema quanto o seu atraso são precisamente conhecidos e invariante no tempo, ou seja, $\beta = [\,]$ e $d = \tau$, definindo um sistema precisamente conhecido discreto no tempo com atraso conhecido no vetor de estados (por comodidade algumas equações da Seção 4.4 serão repetidas nesta seção)

$$\Upsilon : \begin{cases} x_{k+1} &= Ax_k + A_\theta x_{k-\tau} + Bu_k + B_e w_k \\ z_k &= Cx_k + C_\theta x_{k-\tau} + Du_k + D_e w_k, \end{cases} \tag{5.68}$$

em que $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^p$ e $w_k \in \mathbb{R}^\ell$ são os vetores dos estados, das entradas de controle e das entradas exógenas, respectivamente, $k \in \mathbb{N}$ é a amostragem, $d = \tau$ é o atraso conhecido. As matrizes A e $A_\theta \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $B_e \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$, C e $C_\theta \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{q\times p}$, $D_e \in \mathbb{R}^{q\times \ell}$ representam a dinâmica do sistema (5.68).

As mesmas operações da Seção 4.4 serão realizadas para obtenção do sistema aumentado livre de atraso,

$$\bar{\Upsilon} : \begin{cases} \bar{x}_{k+1} &= \bar{A}\bar{x}_k + \bar{B}u_k + \bar{B}_e w_k \\ \bar{z}_k &= \bar{C}\bar{x}_k + \bar{D}u_k + \bar{D}_e w_k \end{cases} \tag{5.69}$$

e para obtenção do sistema equivalente com múltiplos atrasos nos estados,

$$\begin{cases} \check{x}_{k+1} = \sum_{m=0}^{\tau} \check{A}_m \check{x}_{k-m} + \check{B}u_k + \check{B}_e w_k \\ \check{z}_k = \sum_{m=0}^{\tau} \check{C}_m \check{x}_{k-m} + \check{D}u_k + \check{D}_e w_k. \end{cases} \tag{5.70}$$

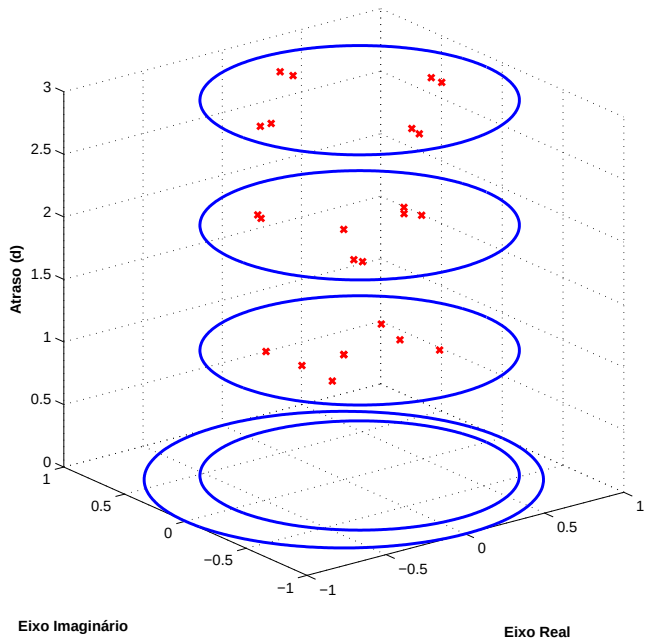

Figura 5.8: Autovalores do sistema (5.59) em malha fechada através da lei de controle (4.9), para cada valor do atraso

.

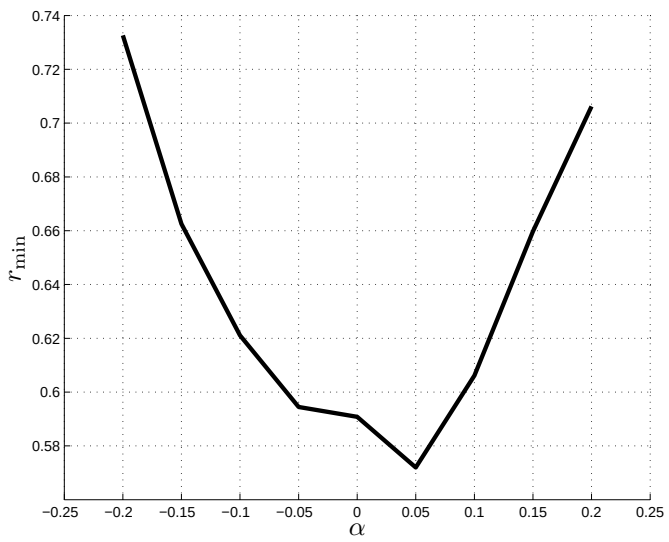

Figura 5.9: Valores mínimos de raio em função do parâmetro α a partir de (5.64).

o qual submetido a lei de controle (4.20) resulta no sistema em malha fechada discreto no tempo com múltiplos atrasos no vetor de estados,

$$\check{\boldsymbol{\Upsilon}} : \begin{cases} \check{x}_{k+1} = \sum_{m=0}^{\tau} \check{\mathbf{A}}_m \check{x}_{k-m} + \check{B}_e w_k \\ \check{z}_k = \sum_{m=0}^{\tau} \check{\mathbf{C}}_m \check{x}_{k-m} + \check{D}_e w_k, \end{cases} \tag{5.71}$$

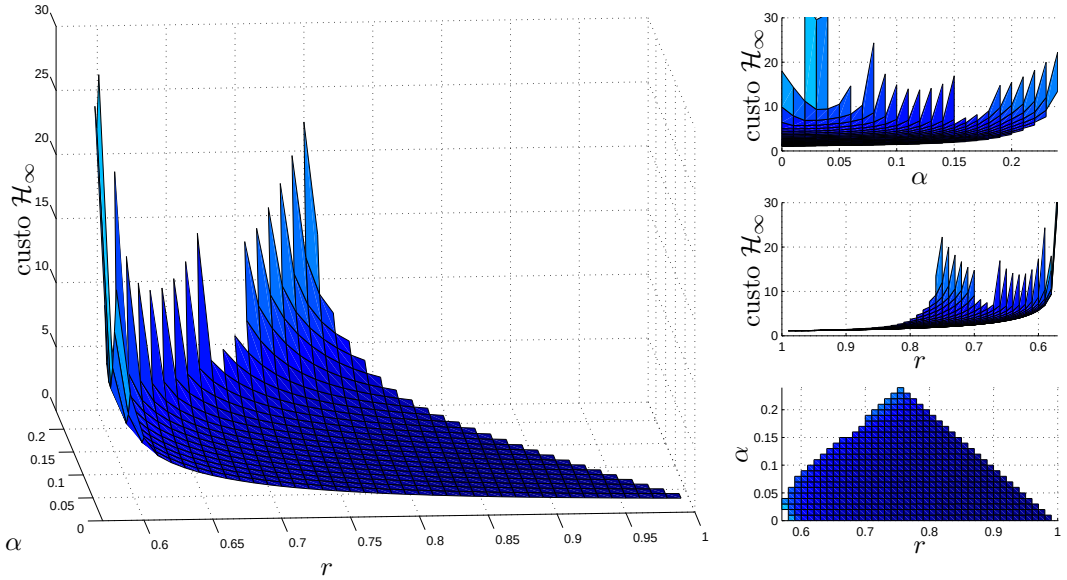

Figura 5.10: Superfície custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ em função de α e r a partir de (5.65).

com

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{A}}_m &= \check{A}_m + \check{B}\check{K}_m \\ \check{\mathbf{C}}_m &= \check{C}_m + \check{D}\check{K}_m, \end{aligned} \tag{5.72}$$

e $m \in \mathcal{I}[0,\tau]$.

Em seguida, realizando os mesmos desenvolvimentos da Seção 5.2, porém para o sistema dado em (5.68), uma condição LMI para a estabilização e para a síntese de ganhos K e K_τ do sistema (5.68), sujeito a lei de controle (5.23), é apresentada no corolário que segue

Corolário 5.3 *Se existirem as matrizes* $\tilde{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $Z_\tau \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $\mathbf{0} < \tilde{P} = \tilde{P}^T \in$

$\mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < \tilde{S}_c = \tilde{S}_c^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < \tilde{R}_c = \tilde{R}_c^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *e os escalares* $0 < \theta \leq 1$ *e* $\mu > 0$, *tais que,*

$$\Theta = \left[\begin{array}{cccccc}
\tilde{P} + \sum_{c=1}^{\tau} c^2\tilde{S}_c - \tilde{F} - \tilde{F}^T & \check{A}_0\tilde{F}^T + (\frac{B}{r})Z - \sum_{c=1}^{\tau} c^2\tilde{S}_c & \check{A}_1\tilde{F}^T + b_{2,3}(\frac{B}{r})(\frac{\alpha^1 Z}{r^1}) & \cdots & \check{A}_{\tau,d}\tilde{F}^T + b_{2,\tau+2}(\frac{B}{r})(\frac{\alpha^\tau Z + Z_\tau}{r^\tau}) & \mathbf{0} & B_e \\
\star & -\tilde{P} + \sum_{c=1}^{\tau}[(c^2-1)\tilde{S}_c + \tilde{R}_c] & \tilde{S}_1 & \cdots & \tilde{S}_\tau & -\tilde{F}\check{C}_0^T - Z^T D^T & \mathbf{0} \\
\star & \star & -\tilde{S}_1 - \tilde{R}_1 & \cdots & \mathbf{0} & -\tilde{F}\check{C}_1^T - b_{2,3}(\frac{\alpha^1 Z^T + Z_\tau^T}{r^1})D^T & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\star & \star & \star & \star & -\tilde{S}_\tau - \tilde{R}_\tau & -\tilde{F}\check{C}_\tau^T - b_{2,\tau+2}(\frac{\alpha^\tau Z^T + Z_\tau^T}{r^\tau})D^T & \mathbf{0} \\
\star & \star & \star & \star & \star & -\theta\mathbf{I}_q & -D_e \\
\star & \star & \star & \star & \star & \star & -\mu\mathbf{I}_l
\end{array}\right] < \mathbf{0}, \quad (5.73)$$

Prova: Os mesmos passos da Prova do Teorema 5.1 se aplicam para o Corolário 5.3, desta vez considerando-se todas as matrizes precisamente conhecidas, ou seja, independentes do parâmetro v, que representa o vértice do politopo de incertezas e fixando-se $d = \tau$. Portanto, pelas transformações (4.15)-(4.21) e (2.8), se (5.71) é Schur-estável, então (5.68), sujeito a lei de controle (4.9), é $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estável com o mesmo custo garantido $\mathcal{H}_\infty$. ∎

A partir do Corolário 5.3, podemos estimar a norma $\mathcal{H}_\infty$ pelo seguinte procedimento convexo de otimização

$$\mathcal{H}_\infty : \left\{ \begin{array}{c} \min \quad \mu \\ \tilde{P} = \tilde{P}^T > \mathbf{0},\ \tilde{S}_c = \tilde{S}_c^T > \mathbf{0},\ 0 < \theta \leq 1,\ \text{tal que:} \\ \Theta < \mathbf{0}\ (\Theta \text{ dada em } (5.73)). \end{array} \right. \quad (5.74)$$

Exemplo 5.4 *Considere o sistema (5.68) com* $\tau = 3$ *e matrizes dinâmicas dadas em (5.66)-(5.67). Utilizando o problema de otimização (5.74) e escolhendo* $\alpha = 0{,}1$ *e* $r = 0{,}8$, *obteve-se os seguintes resultados para a* $\mathcal{D}(\alpha,r)$*-estabilidade do sistema:*

$$\bar{K} = \left[\begin{array}{cccccccc} 0{,}1424 & -1{,}1111 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0938 & -0{,}0552 \end{array}\right]$$

e custo garantido $\mathcal{H}_\infty = 1{,}6939$.

Na Figura 5.11 são mostrados os autovalores do sistema precisamente conhecido discreto no tempo com atraso conhecido no vetor de estados (5.68) em malha fechada através da lei de controle (4.9). Como era de se esperar, observe que todos os autovalores estão localizados no interior da região $\mathcal{D}(0{,}1; 0{,}8)$. *Utilizou-se um algoritmo de bissecção junto com (5.73) para determinar o menor valor do raio* r *para cada posição do centro* α, *tal que o Corolário 5.3 seja factível. Veja a Figura 5.12 e observe que a faixa de variação do parâmetro* α *foi* $-0{,}25 \leq \alpha \leq 0{,}2$. *E que o menor valor de* $r = 0{,}5682$ *foi obtido para* $\alpha = 0$. *Também através do algoritmo de bissecção e (5.74), mantendo fixo o parâmetro* α *e varrendo o intervalo* $1 - \alpha \geq r \geq 0{,}1$, *avaliou-se o valor do custo* $\mathcal{H}_\infty$ *tal que o Corolário 5.3 seja factível. O valor de* α *também foi varrido dentro do intervalo* $0 \leq \alpha \leq 0{,}5$. *A Figura 5.13 mostra as superfícies geradas com tais dados. As condições foram infactiveis fora desses intervalos.*

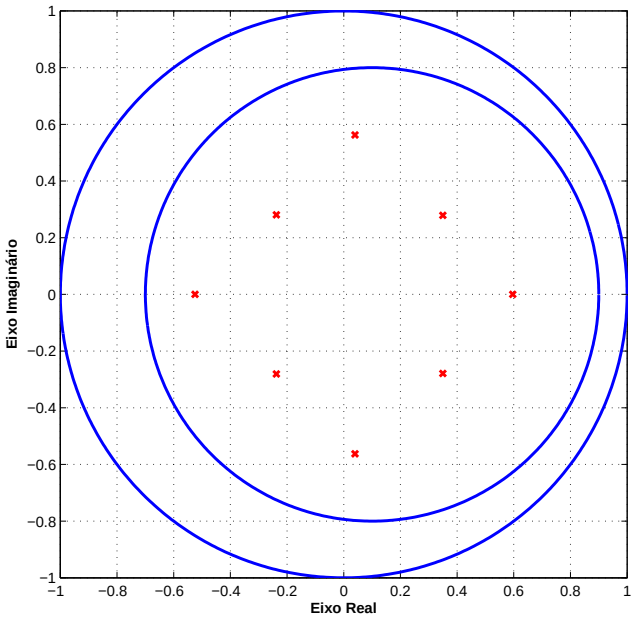

Figura 5.11: Autovalores do sistema (5.68) em malha fechada através da lei de controle (4.9) para cada valor do atraso

.

Exemplo 5.5 *Adicionalmente ao Exemplo 4.6, são apresentados os resultados utilizando-se os problemas de otimização (5.74) e (5.58) para resolver as condições (5.73) para o caso de sistemas precisamente conhecidos e (5.57) para o caso de sistemas incertos respectivamente. Os resultados para a* $\mathcal{D}(\alpha,r)$*-estabilidade de (4.97) obtidos são apresentados na Tabela 5.1 para o caso de sistemas precisamente conhecidos e na Tabela 5.2 para o caso de sistemas incertos. Observe na Tabela 5.1 que o resultado obtido pela com a condição (5.73), diferentemente da condição (4.94), foi melhor que o da condição (3.23). Na Tabela 5.2 o resultado obtido pela condição (4.58) foi melhor que o da condição (5.57).*

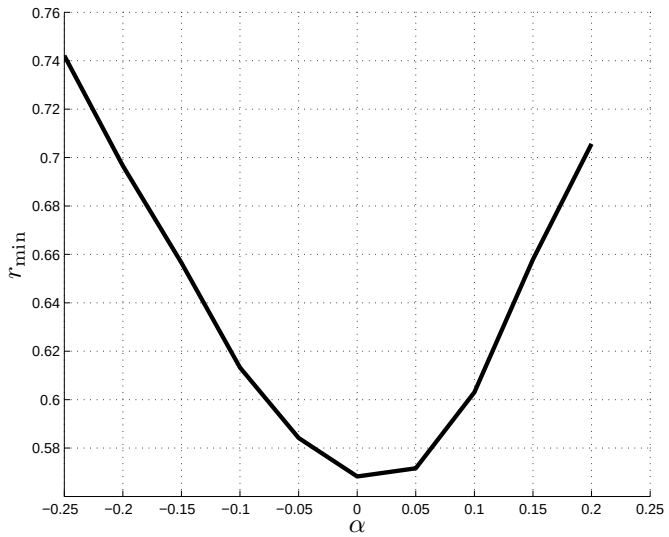

Figura 5.12: Valores mínimos de raio em função do parâmetro α a partir de (5.73).

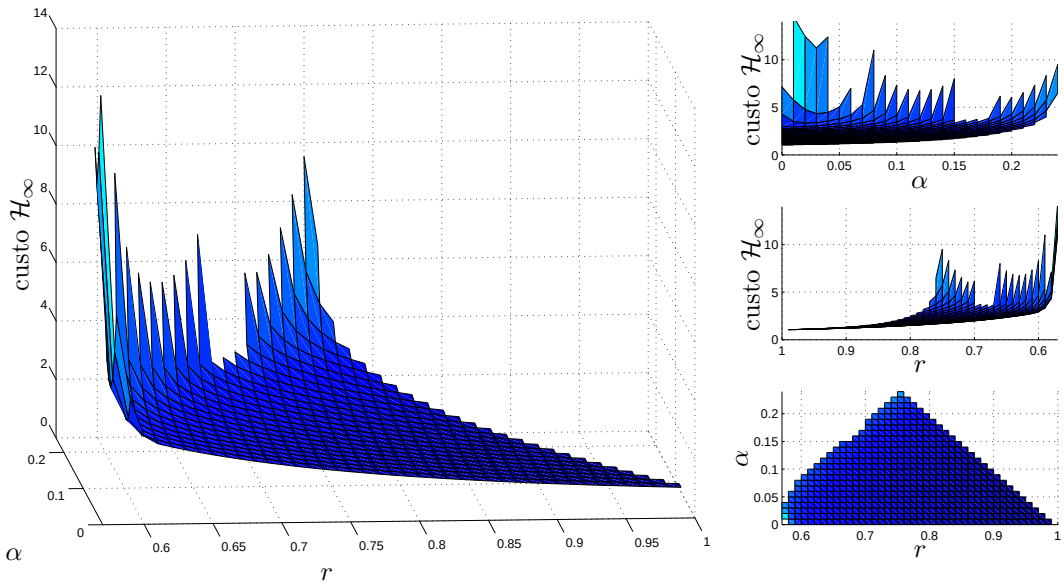

Figura 5.13: Superfície custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ em função de α e r a partir de (5.74).

5.6 Conclusões

Diferentemente do Capítulo 4, neste capítulo, as condições propostas para $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilidade com estimação do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dos sistemas, foram baseadas em uma função de L-K mais completa. O que levou a resultados melhores, menos conservadores do que os apresentados no Capítulo 4.

A busca de valores de raio mínimo (r) para a região $\mathcal{D}(\alpha,r)$, em função de valores fixos de centro (α), foi realizada para cada tipo de sistema apresentado. Na Figura 5.14 podemos observar os resultados e concluir que à medida que a complexidade dos sistemas aumenta, a faixa

Tabela 5.1: Sistema e atraso precisamente conhecidos

Condição	Custo $\mathcal{H}_\infty$ (λ)
[XS12, (38)]	0,776
(5.73)	1,119
(3.23)	1,121
(4.94)	1,161

Tabela 5.2: Sistema incerto e atraso conhecido

Condição	Custo $\mathcal{H}_\infty$ (λ)
[XS12, (38)]	9,566
(3.48)	1,331
(5.57)	1,257
(4.58)	1,195

de variação dos valores do centro (α) e seus respectivos valores de raio mínimo (r) diminuem.

Outra avaliação realizada para cada sistema, foi relativa a variação do custo $\mathcal{H}_\infty$ em função da variação da região $\mathcal{D}(\alpha,r)$. Na Figura 5.15 é mostrado a variação do custo $\mathcal{H}_\infty$ de cada tipo de sistema, fixando-se o centro em $\alpha = 0{,}1$ e diminuindo o raio r a partir de $1 - \alpha = 0{,}9$, até o menor valor factível. Observe que o custo aumenta à medida que o raio diminui e à medida que a complexidade do sistema aumenta.

No Exemplo 5.5, para sistemas precisamente conhecidos, confirmou-se o melhor resultado obtido com a condição proposta em [XS12], conforme podemos ver na Tabela 5.1. Observa-se também que o resultado obtido através da condição (5.73) foi ligeiramente melhor do que com a condição (4.94). Para o caso de sistemas incertos, confirmou-se também a superioridade dos resultados obtidos através das condições propostas nessa dissertação. O custo obtido com a condição propostas em [XS12] foi maior do que o custo obtido com a condição (5.57), em torno de 761%. Porém, em comparação com o resultado obtido através da condição (4.58), o custo obtido com a condição (5.57) foi ligeiramente superior, em torno de 5,2%. Este resultado demonstra que uma condição não está contida na outra devido a pequena diferença entre suas funções de L-K.

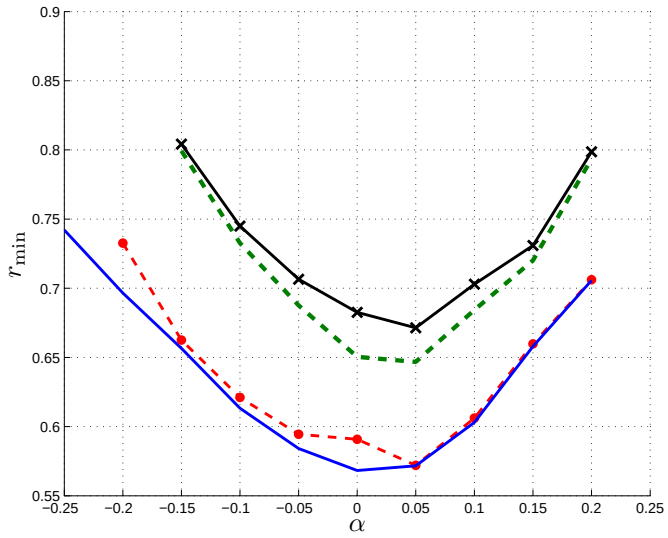

Figura 5.14: Comportamento dos raios mínimos em relação aos valores de α: (–) obtida a partir de (5.46), (-•-) obtida a partir de (5.57), (- -) obtida a partir de (5.64), (-x-) obtida a partir de (5.73).

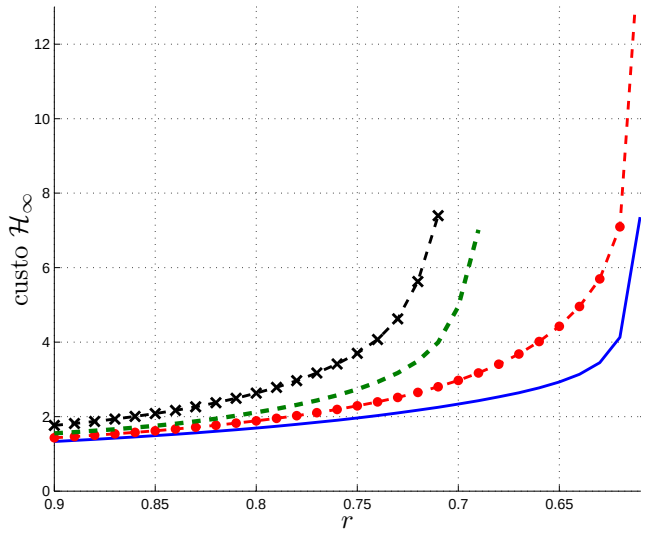

Figura 5.15: Comportamento do custo $\mathcal{H}_\infty$ em função do raio e α fixo em 0,1: (–) obtida a partir de (5.46), (-•-) obtida a partir de (5.57), (- -) obtida a partir de (5.64), (-x-) obtida a partir de (5.73).

Capítulo 6

Considerações Finais

Este trabalho teve como foco o estudo de sistemas lineares invariantes discretos no tempo com atraso invariante no vetor de estados.

No Capítulo 1 foi realizada a introdução e apresentação do problema chave deste trabalho.

No Capítulo 2, conceitos e definições utilizados ao longo do trabalho, foram apresentados.

Nos Capítulos 3, 4, 5, foram propostas condições para $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilidade com estimação do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ através de realimentação de estados para os seguintes casos: *i*) sistemas precisamente conhecidos com atraso conhecido no vetor de estados; *ii*) sistemas precisamente conhecidos com atraso incerto no vetor de estados; *iii*) sistemas incertos com atraso conhecido no vetor de estados e; *iv*) sistemas incertos com atraso incerto no vetor de estados, não necessariamente nesta ordem. As incertezas foram tratadas no domínio politópico.

No Capítulo 3, a abordagem utilizada para obtenção das condições empregou uma candidata a função de L-K simples independente de parâmetros e Complemento de Schur nos sistemas equivalentes aumentados livres de atraso.

No Capítulo 4, para utilizar as condições propostas, se faz necessário realizar uma mudança de base nos sistemas. Essa mudança de base é feita através de uma transformação de similaridade, resultando numa representação equivalente com múltiplos atrasos nos estados. Neste Capítulo são apresentadas as regras de formação para essa matriz de mudança de base e para as matrizes do sistema equivalente com múltiplos atrasos nos estados, baseadas em [Sil11]. A candidata a função de L-K utilizada é dependente de parâmetros, sendo utilizadas variáveis extras via Lema de Finsler para obter condições convexas de dimensão finita no parâmetro da incerteza, as quais são menos conservadores que outras condições LMIs encontradas na literatura. A Figura 6.1 mostra a variação do custo $\mathcal{H}_\infty$ em relação a região $\mathcal{D}(\alpha,r)$ para um $\alpha = 0{,}1$ e raio diminuindo a partir de $(1-\alpha)$ até que a região $\mathcal{D}(\alpha,r)$ não seja mais factível. Na Figura 6.1(a) podemos observar que, para sistemas precisamente conhecidos e atraso conhecido, através das condições propostas no Capítulo 3, obteve-se resultados ligeiramente melhores do que através das condições propostas no Capítulo 4, sendo que os resultados do Capítulo 4 se mostram significativamente melhores a medida que se aproxima dos limites de factibilidade da região $\mathcal{D}(\alpha,r)$. Já para os demais casos apresentados nas Figuras 6.1(b), 6.1(c), 6.1(d), os resultados do Capítulo 4 se mostraram menos conservadores.

No Capítulo 5, utilizou-se a mesma abordagem do Capítulo 4, porém através de uma função

de L-K mais completa, para obtenção de resultados menos conservadores. Sendo utilizado além do Lema de Finsler, a Desigualdade de Jensen, proporcionando resultados menos conservadores, como podemos ver na Figura 6.1, a qual compara os resultados da variação do custo $\mathcal{H}_\infty$ em relação a região $\mathcal{D}(\alpha,r)$, entre as abordagens dos Capítulos 3, 4, 5.

Como em [Sil11], a regra de formação da matriz de mudança de base, $Q(\alpha,r,\tau)$, foi obtida por meio de observações dos resultados das operações de transformação de similaridade de sistemas com atrasos de 1 até 10. A partir disso, foi possível perceber que havia uma regra de formação para essa matriz, $Q(\alpha,r,\tau)$. Contudo, ainda não se tem uma prova formal para justificar a mesma, sendo a investigação desta prova importante em trabalhos futuros.

Trabalhos produzidos e em andamento:

- M. H. Teixeira, V. J. S. Leite, L. F. P. Silva, and E. N. Gonçalves. Revisiting the problem of robust $\mathcal{H}_\infty$ control with regional pole location of uncertain discrete-time systems with delayed states. Proceedings of the 52nd IEEE Conference on Decision and Control, 2013. Aceito para publicação.

- M. H. Teixeira, V. J. S. Leite and M. F. Miranda. A less conservative condition to the $\mathcal{D}(\alpha,r)$stabiliazation with the guaranteed cost $\mathcal{H}_\infty$. Em preparação.

- Comparação entre técnicas de $\mathcal{D}(\alpha,r)$-estabilização com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$. Em preparação para o CBA 2014.

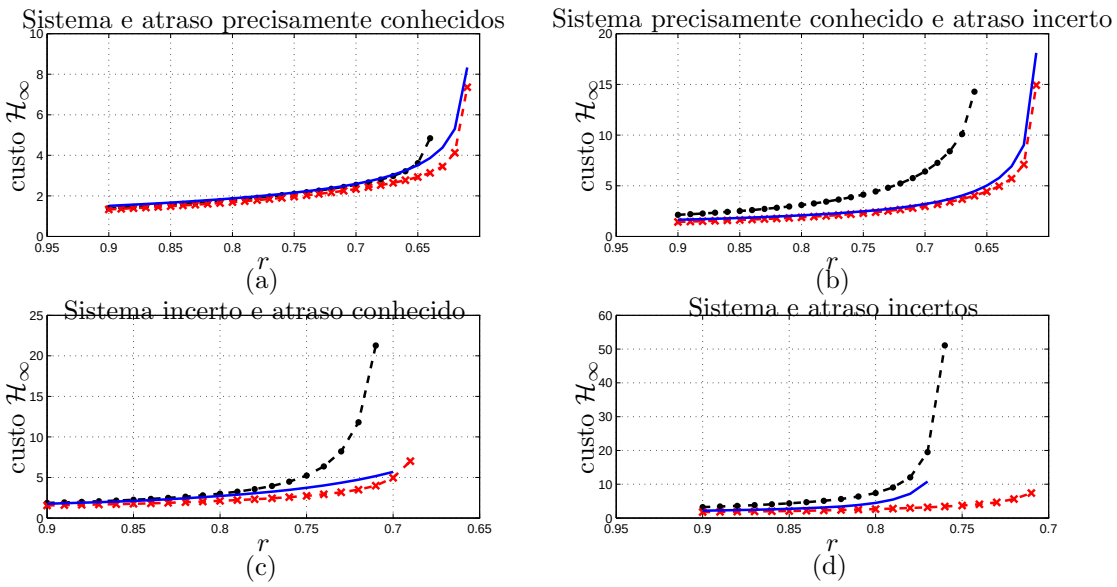

Figura 6.1: Comportamento do custo $\mathcal{H}_\infty$ em função do raio e $\alpha = 0{,}1$. (a): (-•-) obtida a partir de (3.25), (–) obtida a partir de (4.96), (-x-) obtida a partir de (5.74); (b): (-•-) obtida a partir de (3.37), (–) obtida a partir de (4.77), (-x-) obtida a partir de (5.65); (c): (-•-) obtida a partir de (3.50), (–) obtida a partir de (4.60), (-x-) obtida a partir de (5.58); (d): (-•-) obtida a partir de (3.66), (–) obtida a partir de (4.40), (-x-) obtida a partir de (5.48).

Apêndice A

Ferramentas

A.1 Desigualdades Matriciais Lineares – LMIs

Com o desenvolvimento de métodos de pontos interiores para problemas de programação semidefinida, SDP (do inglês *semidefinite programming problem*), desigualdades matriciais lineares, LMIs (do inglês *linear matrix inequalities*), têm sido uma ferramenta útil para resolução de problemas de controle. A idéia básica do método de LMIs é expressar o problema dado como um SDP. A formulação de LMIs é relevante por várias razões. Uma dessas razões é que escrevendo um dado problema nessa forma, as soluções numéricas podem ser encontradas de forma eficiente [BGFB94] [GN00] [PG07].

Uma desigualdade matricial linear tem a seguinte forma:

$$F(p) = F_0 + \sum_{i}^{m} p_i F_i > \mathbf{0} \tag{A.1}$$

em que $p_i \in \mathbb{R}^m$, para $i = 1, \ldots, m$, são variáveis escalares a serem determinadas e $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, para $i = 0, 1, \ldots, m$ são matrizes simétricas precisamente conhecidas. A desigualdade significa que $F(p)$ é uma matriz definida positiva, ou seja,

$$\mathrm{z}^T F(p) \mathrm{z} > 0, \ \forall \mathrm{z} \neq \mathbf{0}, \ \mathrm{z} \in \mathbb{R}^n \tag{A.2}$$

Isso significa que $F(p)$ é uma função afim dos elementos de p, que representa um vetor $p = [p_1, \ldots, p_m]$.

A equação (A.1) é uma LMI estrita. No caso em que $F(p)$ é semidefinida positiva, essa seria uma LMI não estrita. A LMI estrita é factível quando existe um vetor p que torna a desigualdade verdadeira, ou seja, $F(p)$ uma matriz definida positiva. Uma LMI não estrita factível pode ser reduzida para o caso de uma LMI estrita factível equivalente. Isso pode ser feito acrescentando um valor constante a matriz $F(p)$, tornando essa matriz definida positiva, ou seja, $F(p) + \epsilon \mathbf{I} > \mathbf{0}$, $\epsilon < 0$.

Uma LMI pode ser reescrita em termos de um conjunto de desigualdades escalares. De forma mais específica, considere a LMI (A.1), ela é equivalente a n desigualdades polinomiais. Para exemplificar, considere as desigualdades, $P < \mathbf{0}$ e $A^T P A - P > \mathbf{0}$, que são LMIs, na qual

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$

As desigualdades podem ser escritas em termos das incógnitas do problema, p_1, p_2 e p_3, assim

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} > \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} p_1 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} p_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} p_3 > \mathbf{0}$$

$$A^T PA - P = \begin{bmatrix} a^2p_1 + 2acp_2 + c^2p_3 & abp_1 + (ad+bc)p_2 + cdp_3 \\ abp_1 + (ad+bc)p_2 + cdp_3 & b^2p_1 + 2bdp_2 + d^2p_3 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{bmatrix} p_1 + \begin{bmatrix} 2ac & bc+ad \\ ad+bc & 2bd \end{bmatrix} p_2 + \begin{bmatrix} c^2 & cd \\ cd & b^2 \end{bmatrix} p_3 < \mathbf{0}$$

Observe que no exemplo dado a matriz F_0 é nula. De acordo com [WB95, pag 951] e [VB00], as restrições podem ser colocadas em termos dos menores principais líderes de P e de $A^T PA - P$, resultando em

- $p_1 > 0$, $p_3 > 0$, $p_1p_3 - p_2^2 > 0$,
- $a^2p_1 + 2acp_2 + c^2p_3 < 0$, $b^2p_1 + 2bdp_2 + d^2p_3 < 0$, $(a^2p_1 + 2acp_2 + c^2p_3)(b^2p_1 + 2bdp_2 + d^2p_3) - (abp_1 + (ad+bc)p_2 + cdp_3)^2 < 0$

É importante salientar que, ao se representar uma LMI por um conjunto n de desigualdades polinomiais há a possibilidade de alguns desses polinômios serem não-lineares, como acontece no exemplo dado acima.

Uma importante propriedade das LMIs é a convexidade, ou seja, o conjunto de soluções x que atende a desigualdade é convexo. Em um problema de otimização convexa, o mínimo local encontrado é o mínimo global. Isso torna a solução do problema simples do ponto de vista de otimização. Um conjunto $\mathcal{C}$ é convexo se $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathcal{C}$ para todo $x,y \in \mathcal{C}$ e $\lambda \in [0,1]$.

A.2 Complemento de Schur

Considere a matriz quadrada simétrica X

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

O complemento de Schur pode ser usado na caracterização da positividade de X, com as seguintes propriedades:

- $X > \mathbf{0}$ se e somente se $A > \mathbf{0}$ e $C - B^TA^{-1}B > \mathbf{0}$;
- $X > \mathbf{0}$ se e somente se $C > \mathbf{0}$ e $A - BC^{-1}B^T > \mathbf{0}$;
- se $A > \mathbf{0}$, $X \geq \mathbf{0}$ se e somente se $C - B^TA^{-1}B \geq \mathbf{0}$;
- se $C > \mathbf{0}$, $X \geq \mathbf{0}$ se e somente se $A - BC^{-1}B^T \geq \mathbf{0}$.

A matriz $C - B^T A^{-1} B$ é chamada de complemento de Schur de X em relação a A se $\det(A) \neq 0$. Se $\det(C) \neq 0$, $A - BC^{-1}B^T$ é o complemento de Schur de X em relação a C. Manipulações envolvendo o complemento de Schur permitem transformar desigualdades convexas não-lineares, que regularmente aparecem em problemas de controle, em LMIs [VB00], [OP10].

Prova: A partir da transformação de congruência, caso exista A^{-1}, tem-se

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ B^T A^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathcal{T}^T} \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C - B^T A^{-1} B \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & A^{-1}B \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathcal{T}} \tag{A.4}$$

Como $\mathcal{T}$ é uma matriz não singular

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} > \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C - B^T A^{-1} B \end{bmatrix} > \mathbf{0} \tag{A.5}$$

Analogamente, se existe C^{-1} existe,

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & BC^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - BC^{-1}B^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ C^{-1}B^T\mathbf{I} & \end{bmatrix} \tag{A.6}$$

e, portanto,

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} > \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} A - BC^{-1}B^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix} > \mathbf{0} \tag{A.7}$$

■

A.3 Lema de Finsler

O Lema de Finsler pode ser usado para expressar condições de estabilidade em termos de desigualdades matriciais equivalentes, introduzindo ou eliminando variáveis [OP10]. Como esse Lema tem sido utilizado freqüentemente em teoria de controle para eliminar variáveis, ele também é conhecido como Lema da Eliminação [BGFB94]. A seguir esta enunciado o Lema.

Sejam $\varphi \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Q}(\beta) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, simétrica, e $\mathcal{B}(\beta) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\beta : \sum_{j=1}^{N} \beta_j = 1$, $\beta_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, N$, tal que o $posto(\mathcal{B}(\alpha)) < n$. As seguintes afirmativas são equivalentes:

1. *i)* $\varphi^T \mathcal{Q}(\beta)\varphi < \mathbf{0}$, $\forall \varphi : \mathcal{B}(\alpha)\varphi = \mathbf{0}$, $\varphi \neq \mathbf{0}$.
2. *ii)* $\mathcal{B}^{\perp}(\beta)^T \mathcal{Q}(\beta)\mathcal{B}^{\perp}(\beta) < 0$, em que $\mathcal{B}^{\perp}(\beta)$ denota uma base para o espaço nulo de $\mathcal{B}(\beta)$.
3. *iii)* $\exists \mu(\beta) \in \mathbb{R}_+ : \mathcal{Q}(\beta) - \mu\mathcal{B}(\beta)^T\mathcal{B}(\beta) < \mathbf{0}$.
4. *iv)* $\exists \mathcal{X}(\beta) \in \mathbb{R}^{n\times m} : \mathcal{Q}(\beta) + \mathcal{X}(\beta)\mathcal{B}(\beta) + \mathcal{B}(\beta)^T\mathcal{X}(\beta)^T < \mathbf{0}$.

Prova: A prova do Lema de Finsler é baseada na demonstração apresentada em [dOS01], para o caso exato. Verifica-se *i)*$\Leftrightarrow$*ii)*, pois todo x tal que $\mathcal{B}(\beta)x = \mathbf{0}$ e , consequentemente, *i)*$\Rightarrow$ $y^T\mathcal{B}^{\perp}(\beta)^T\mathcal{Q}(\beta)\mathcal{B}^{\perp}(\beta)y < \mathbf{0}$, para todo $y \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathcal{B}^{\perp}(\beta)^T\mathcal{Q}(\beta)\mathcal{B}^{\perp}(\beta) < \mathbf{0}$. Por outro lado, assumindo que *ii)* é verificada, multiplique o lado esquerdo dessa condição, à direita por $y \neq \mathbf{0}$ e à esquerda por y^T para obter *i)*.

Multiplique o lado esquerdo de *iii)* ou *iv)* à direita por $\mathcal{B}^{\perp}(\beta)$ e a à esquerda por $\mathcal{B}^{\perp}(\beta)^T$ para obter *ii)*. Assumindo que *ii)* é verificada, a condição *iii)* pode ser recuperada como seque: fatore $\mathcal{B}(\beta)$ em um produto de matrizes de posto completo, $\mathcal{B}(\beta) = \mathcal{B}_\ell(\beta)\mathcal{B}_r(\beta)$, defina $\mathcal{W}(\beta) = \mathcal{B}_r(\beta)^T \left(\mathcal{B}_r(\beta)\mathcal{B}_r(\beta)^T\right)^T \left(\mathcal{B}_\ell(\beta)^T\mathcal{B}_\ell(\beta)\right)^{0.5}$ e aplique a transformação de congruência

$$\begin{bmatrix}\mathcal{W}(\beta)^T \\ \mathcal{B}^{\perp}(\beta)^T\end{bmatrix} \left(\mathcal{Q}(\beta) - \mu(\beta)\mathcal{B}(\beta)^T\mathcal{B}(\beta)\right) \begin{bmatrix}\mathcal{W}(\beta) & \mathcal{B}^{\perp}(\beta)\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}\mathcal{W}(\beta)^T\mathcal{Q}(\beta)\mathcal{W}(\beta) - \mu(\beta)\mathbf{I} & \mathcal{W}(\beta)^T\mathcal{Q}(\beta)\mathcal{B}^{\perp}(\beta) \\ \star & \mathcal{B}^{\perp}(\beta)^T\mathcal{Q}(\beta)\mathcal{B}^{\perp}(\beta)\end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad \text{(A.8)}$$

Como o bloco (2,2) (A.8) é definido negativo (por hipótese), conclui-se que existe $\mu(\beta) \in \mathbb{R}^+$ suficiente grande tal que a condição acima seja verificada. Resta mostrar que *iii)*$\Rightarrow$*iv)*. Para isso, basta escolher $\mathcal{X}(\beta) = -\mu(\beta)\mathcal{B}(\beta)^T/2$. ∎

A.4 Desigualdade de Jensen

Para qualquer matriz constante $\mathbf{0} < M = M^T \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $d_1 \in \mathbb{N}$, $d_2 \in \mathbb{N}$ e uma função vetorial $f(i)\ : \mathcal{I}[d_1, d_1+1, ..., d_2] \to \mathbb{R}^n$ é verificado

$$-(d_2 - d_1 + 1)\sum_{i=d_1}^{d_2} f(i)^T M f(i) \ \leq\ -\left(\sum_{i=d_1}^{d_2} f(i)\right)^T M \left(\sum_{i=d_1}^{d_2} f(i)\right) \quad \text{(A.9)}$$

desde que as somas sejam bem definidas.

Prova: A prova que segue foi adaptada de [ZY08].

Usando o complemento de Schur (A.2) temos:

$$\begin{bmatrix} f(i)^T M f(i) & f(i)^T \\ f(i) & M^{-1}\end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad \text{(A.10)}$$

para qualquer $i \in [d_1, d_1+1, ..., d_2]$. Somando a inequação (A.10) de d_1 para d_2 temos:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=d_1}^{d_2} f(i)^T M f(i) & \sum_{i=d_1}^{d_2} f(i)^T \\ \sum_{i=d_1}^{d_2} f(i) & (d_2 - d_1 + 1)M^{-1}\end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad \text{(A.11)}$$

Aplicando novamente o complemento de Schur em (A.11), recupera-se (A.9). ∎

Bibliografia

[ÅW84] K. J. Åström and B. Wittenmark. *Computer Controlled Systems: Theory and Design.* Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1984.

[Bar85] B. R. Barmish. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 46(4):399–408, August 1985.

[BGFB94] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory.* V. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1994.

[Bha07] A. Bhaya. *Enciclopédia de Automática - Controle e Automação*, volume 2, chapter Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Lineares, pages 67–91. Editora Blücher, São Paulo, SP, 2007.

[Cal11] A. F. Caldeira. *Análise de desempenho e controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas incertos discretos no tempo com atraso variante no vetor de estado.* Dissertação de mestrado, CEFET-MG, Belo Horizonte (MG), Brasil, Abril 2011.

[CC06] S.-H. Chen and J.-H. Chou. Robust $\mathcal{D}$-stability analysis for linear uncertain discrete singular systems with state delay. *Applied Mathematics Letters*, 19:197–205, February 2006.

[CG96] M. Chilali and P. Gahinet. $\mathcal{H}_\infty$ design with pole placement constraints: An lmi approach. In *IEEE Transactions on Automatic Control*, volume 41, pages 358–367, IEEE Transactions on Automatic Control, March 1996. To appear.

[Che03] J. D. Chen. LMI-based robust $\mathcal{H}_\infty$ control of uncertain neutral systems with state and imputs delays. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 126(3):553–570, 2003.

[CLGC12] A. F. Caldeira, V. J. S. Leite, E. N. Gonçalves, and D. F. Coutinho. Custo ϵ-garantido $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas incertos discretos no tempo com atraso variante nos estados. In *Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática*, Campina Grande, PB, Setembro 2012.

[DB09] R. C. Dorf and R. H. Bishop. *Sistemas de Controle Modernos*. LTC - Livros Técnicos e Científicos S.A, 11 edition, 2009.

[dOGB02] M. C. de Oliveira, J. C. Geromel, and J. Bernussou. Extended $\mathcal{H}_\infty$ and $\mathcal{H}_2$ norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems. *International Journal of Control*, 75(9):666–679, 2002.

[dOOL+04] P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed cost computation by means of parameter dependent Lyapunov functions. *Automatica*, 40(6):1053–1061, June 2004.

[dOS01] M. C. de Oliveira and R. E. Skelton. Stability tests for constrained linear systems. In S. O. Reza Moheimani, editor, *Perspectives in Robust Control*, volume 268 of *Lecture Notes in Control and Information Science*, pages 241–257. Springer-Verlag, New York, 2001.

[dSFX93] C. E. de Souza, M. Fu, and L. Xie. $\mathcal{H}_\infty$ analysis and synthesis of discrete-time systems with time-varying uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38:459–462, 1993.

[DV97] L. Dugard and E. I. Verriest. *Stability and Control of Time-delay Systems*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1997.

[FAG96] E. Feron, P. Apkarian, and P. Gahinet. Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent lyapunov functions. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 41(7):1041–1046, 1996.

[GAC96] P. Gahinet, P. Apkarian, and M. Chilali. Affine parameter-dependent lyapunov functions and real parametric uncertainty. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 41(3):436–442, 1996.

[GN00] L. E. Ghaoui and S. I. Niculescu. *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*, chapter Robust Decision Problems in Engineering: A Linear Matrix Inequality Approach, pages 3–37. Society for Industrial and Applied Mathematics, California, USA, 2000.

[GNLC95] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali. Control toolbox user's guide. The Math Works Inc, Natick, MA, 1995.

[Gon06] E. N. Gonçalves. *Análise e Síntese de Controladores e Filtros Robustos para Sistemas com Domínios Politópicos de Incerteza*. Tese de doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Setembro 2006.

[GPS94] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. R. Souza. $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed cost control for uncertain discrete-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(5):1072–1075, May 1994.

[GX04] L. Gao and A. Xue. On LMI robust $\mathcal{D}$-stability condition for real convex polytopic uncertainty. In *Proceedings of the 5th World Congress on Intelligent Control and Automatic*, volume 1, pages 151–154, Hangzhou, China, June 2004.

[HB92] W. M. Haddad and D. S. Bernstein. Controller design with regional pole constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(1):54–69, January 1992.

[HW02] H. Hu and Z. Wang. *Dynamics of controlled mechanical systems with delayed feedback*. Springer, New York, 2002.

[HWHS08] Y. He, M. Wu, Q.-L. Han, and J.-H. She. Delay-dependent $\mathcal{H}_\infty$ control of linear discrete-time systems with an interval-like time-varying delay. *International Journal of Systems Science*, 39(4):427–436, 2008.

[HZ10] F. Hao and X. Zhao. New delay-dependent stability conditions for discrete-time systems with time-varying delay in the state. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 27:253–266, July 2010.

[KH98] V. Kapila and W. M. Haddad. Memoryless $\mathcal{H}_\infty$ controllers for discrete-time systems with time delay. *Automatica*, 34(9):1141–1144, 1998.

[Kra63] N. N. Krasovskii. *Stability of Motion*. Stanford University Press, Stanford, CA, 1963.

[LCC+11] V. J. S. Leite, M. F. F. Castro, A. F. Caldeira, M. F. Miranda, and E. N. Gonçalves. *Discrete Time Systems*, chapter Uncertain Discrete-Time Systems with Delayed State: Robust Stabilization with Performance Specification via LMI Formulations, pages 295–326. InTech, April 2011.

[Lee95] C.-H. Lee. $\mathcal{D}$-stability of continous time-delay systems subjected to a class of highly structured perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(10):1803–1807, October 1995.

[Lei05] V. J. S. Leite. *Estudos sobre estabilidade robusta de sistemas lineares por meio de funções dependentes de parâmetros*. Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Agosto 2005.

[LLZY10] Z. Liu, S. Lü, S. Zhoung, and M. Ye. Stabilization analysis for discrete-time systems with time delay. *Applied Mathematical and Computation*, 216:2024–2035, 2010.

[LM08] V. J. S. Leite and M. F. Miranda. Convex analisis and synthesis for uncertain discrete-time systems with time-varying state delay. In *Proceedings of the 2008 American Control Conference*, pages 4910–4915, Seattle, Washington, USA, June 2008.

[LP03] V. J. S. Leite and P. L. D. Peres. An improved LMI condition for robust $\mathcal{D}$-stability of uncertain polytopic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48:500–504, March 2003.

[LTP04] V. J. S. Leite, S. Tarbouriech, and P. L. D. Peres. Controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas discretos com atraso nos estados: Condições LMI independentes do atraso. In *Anais do XV Congresso Brasileiro de Automática*, Gramado, RS, Brasil, 2004.

[LTP09] V. S. J. Leite, S. Tarbouriech, and P.L.D. Peres. Robust h_∞ state feedback control of discrete-time systems with state delay: an lmi approach. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, pages 1–17, August 2009.

[LY10] Y. Liu and G. Yang. New delay-dependent stability criteria for continous-time systems with delay. In *Proceedings of the 2010 Chinese Control and Control Conference(CCDC)*, pages 2887–2892, Xuzhou, China, July 2010.

[Lya92] A. M. Lyapunov. *The general problem of the stability of motion.* Taylor & Francis, 1992. With a biography of Lyapunov by V. I. Smirnov and a bibliography of Lyapunov's works by J. F. Barrett.

[Mah00] M. S. Mahmoud. *Robust Control and Filtering for Time-Delay Systems.* Control Engineering Series. Marcel Dekker, Inc., New York, 2000.

[MC06] W.-J. Mao and J. Chu. $\mathcal{D}$-stability for linear continous-time systems with multiple time delays. *Automatica*, 42:1589–1592, March 2006.

[MC09] W.-J. Mao and J. Chu. $\mathcal{D}$-stability and $\mathcal{D}$-stabilization of linear discrete time-delay systems with polytopic uncertainties. *Automatica*, 45(3):842–846, March 2009.

[MK00] T. More and H. Kokame. A parameter-dependent Lyapunov function for a polytope of matrices. *IEEE transactions on Automatic Control*, 45(8):1516–1519, August 2000.

[MLP03] V. F. Montagner, V. J. S. Leite, and P. L. D. Peres. Discrete-time switched systems: Pole location and strutural constrained control. In *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 6242–6247, Maui, Hawaii, USA, December 2003.

[MZJ87] M. Malek-Zavarei and M. Jamshidi. *Time-Delay Systems: Analysis, Optimization and Applications.* North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1987.

[MZRZ07] Y. Mao, Q. Zhang, Y. Ren, and X. Zhang. $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed cost control for time-delay uncertain discrete systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, pages 1–6, July 2007.

[Nic01] S. I. Niculescu. Delay effects on stability. a robust control approach. *Springer-Verlag*, 2001.

[OP06] R. C. L. F. Oliveira and P. L. D. Peres. LMI conditions for robust stability analysis based on polynomially parameter-dependent lyapunov functions. *Systems & Control Letters*, 55(1):55–61, 2006.

[OP10] R. C. L. F. Oliveira and P. L. D. Peres. *Tutoriais do* XVIII *Congresso Brasileiro de Automática*, chapter Análise e Controle de Sistemas Lineares por meio de Desigualdades Matriciais Lineares, pages 203–227. Cultura Acadêmica Editora, 2010.

[PABB00] D. Peaucelle, D. Arzelier, O. Bachelier, and J. Bernussou. A new robust $\mathcal{D}$-stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems & Control Letter*, 40:21–30, May 2000.

[PG07] R. M. Palhares and E. N. Gonçalves. *Enciclopédia de Automática - Controle & Automação*, chapter Desigualdades Matriciais Lineares em Controle, pages 155–195. Editora Blücher, São Paulo, SP, 2007.

[PTP97] R. M. Palhares, R. H. C. Takahashi, and P. L. D. Peres. $\mathcal{H}_\infty$ and $\mathcal{H}_2$ guaranteed costs computation for uncertain linear systems. *International Journal of Systems Science*, 28(2):183–188, February 1997.

[Ric03] J. P. Richard. Time-delay systems: An overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39:1667–1694, April 2003.

[RP01] Domingos C. W. Ramos and Pedro L. D. Peres. A less conservative LMI condition for the robust stability of discrete-time uncertain systems. *Systems & Control Letters*, 43:371–378, 2001.

[SDM07a] S. B. Stojanović, D. Lj. Debeljković, and I. Mladenović. A Lyapunov-Krasovskii methodology for asymptotic stability of discrete time delay systems. *Serbian Journal of Electrical Engineering*, 4(2):109–117, 2007.

[SDM07b] S. B. Stojanovic, D. Lj. Debeljkovic, and I. Mladenovic. A Lyapunov-Krasovskii methodology for asymptotic stability of discrete time delay systems. *Serbia Journal of Electrical Engineering*, 4(2):109–117, November 2007.

[Sil11] L. F. P. Silva. *Estudo sobre inclusão de desempenho na síntese de controladores para sistemas discretos no tempo com atrasos nos estados*. Dissertação de mestrado, CEFET-MG, Belo Horizonte (MG), Brasil, Fevereiro 2011.

[SL10] L. F. P. Silva and V. J. S. Leite. Síntese robusta com alocação regional de polos e custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas discretos no tempo com múltiplos atrasos nos estados. In *Anais do XVIII Congresso Brasileiro de Automática*, pages 187–192, Bonito, MS, Brasil, Setembro 2010.

[SLMN10] L. F. P. Silva, V. J. S. Leite, M. F. Miranda, and E. G. Nepomuceno. $\mathcal{D}$-stabilization with minimization of the $\mathcal{H}_\infty$-guaranteed cost for uncertain discrete-time systems with multiple delays in the state. In *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision Control*, pages 998–1003, Atlanta, GA, USA, December 2010.

[Sou08] F. O. Souza. *Estabilidade e Síntese de Controladores e Filtros Robustos para Sistemas com Retardo no Tempo: Novas Fronteiras*. Tese de doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Novembro 2008.

[SP05] S. Skogestad and I. Postlethwaite. Multivariable feedback control analysis and design. *John Wiley and Sons Ltd*, 2005.

[SPL08] F. O. Souza, R. M. Palhares, and V. J. S. Leite. Improved robust $\mathcal{H}_\infty$ control for neutral systems via discretized Lyapunov-Krasovskii functional. *International Journal of Control*, 81(9):1462–1474, September 2008.

[Stu99] J. F. Sturm. Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Softwares*, 11-12 : 625-653, 1999.

[TCB05] A. Trofino, D. F. Coutinho, and K. A. Barbosa. Improved $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ conditons for robust analysis and control synthesis of linear systems. *SBA Controle & Automação*, 16(4):427–434, 2005.

[Tro99] A. Trofino. Parameter dependent Lyapunov function for a class of uncertain linear systems: an LMI approach. *In Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, AZ*, 1:2341–2346, December 1999.

[Tro00] A. Trofino. Controle robusto. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Agosto 2000.

[VB00] J. G. VanAntwerp and R. D. Braatz. A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. *Journal of Process Control*, 10:363–385, August 2000.

[Vol28] V. Volterra. Sur la théorie mathématique des phénomènes héréditaries. *Journal des Mathematiques Pures et Appliquées*, 7:249–298, 1928.

[Vol31] V. Volterra. *Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie*. Gauthier-Villars, Paris, 1931.

[WB95] C. R. Wylie and L. C. Barret. *Advanced Engineering Mathematics*. McGraw-Hill, 6th edition, 1995.

[WHH06] Y. Weili, J.-F. Han, and S.-Q. Hu. On new suffcient condtions for the Schur $\mathcal{D}$-stability of discrete dynamic interval systems. In *Proceedings of the 15th International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, pages 1558–1560, Dalian, China, August 2006.

[WL10] Z. Wang and W. Li. New delay-dependent robust stability criteria for uncertain systems with interval time-varying delay. In *Proceedings of the 2nd International Workshop on Congress on Intelligent Control and Automation*, pages 1–3, Wuhan, Hubei, China, May 2010.

[WLXG05] Q. Wang, J. Lam, S. Xu, and H. Gao. Delay-dependent and delay-independent energy-to-peak model approximation for systems with time-varying delay. *International Journal of Systems Science*, 36(8):445–460, June 2005.

[XLZ02] S. Xu, J. Lam, and L. Zhang. Robust D-stability analysis for uncertain discrete singular systems with state delay. *IEEE Transactions on Circuits and Systems Part I: Fundamamental Theory and Applications*, 49(4):551–555, April 2002.

[XLZZ04] L. Xie, L. Lu, D. Zhang, and H. Zhang. Improved robust $\mathcal{H}_\infty$ and $\mathcal{H}_2$ filtering for uncertain discrete-time systems. *Automatica*, 40:873–880, 2004.

[XS12] M. Xiao and H. Su. Guaranteed cost $\mathcal{D}$-stabilization and $\mathcal{H}_\infty$ $\mathcal{D}$-stabilization for linear discrete time-delay systems. *Journal of The Franklin Institute*, 349:2956–2974, February 2012.

[ZCC06] L. Zhang, Y. Chen, and P. Cui. Delay-dependent guaranteed cost control for uncertain discrete time state-delayed systems. In *Proceedings of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation*, pages 2244–2248, Dalian, China, June 2006.

[ZDG96] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, Upper Saddle, NJ, USA, 1996.

[ZHW06] X.-M. Zhang, Q.-L. Han, and M. Wu. A new finite sum inequality for delay-dependent $\mathcal{H}_\infty$ control of discrete-time delay systems. In *Proceedings of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation*, pages 364–368, Dalian, China, June 2006.

[ZY08] X. L. Zhu and G.H. Yang. Jensen inequality approach to stability analysis of discrete-time systems with time-varying delay. *American Control Conference*, pages 1644–1649, june 2008.