



**Universidade Federal de São João Del Rei**  
**Centro Federal de Educação Tecnológica**  
**de Minas Gerais**



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA - PPGEL

---

**Daniel Almeida Godinho**

**Síntese de pré-filtro discreto**  
**para desacoplamento de sistemas multivariáveis:**  
**formulações LMI e BMI**

Belo Horizonte

2014

Daniel Almeida Godinho

## **Síntese de pré-filtro discreto para desacoplamento de sistemas multivariáveis: formulações LMI e BMI**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, associação ampla entre UFSJ e CEFET-MG, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Modelagem e Controle de Sistemas  
Linha de Pesquisa: Sistema de Controle.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Nunes Gonçalves  
Coorientador: Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite

Belo Horizonte

2014

Banca Examinadora

“Quero cada vez mais aprender como belo aquilo que é necessário nas coisas: - Assim me tornarei um daqueles que fazem belas as coisas. Amor fati Amor ao destino: seja este, doravante, o meu amor. Não quero fazer guerra ao que é feio. Não quero acusar, não quero nem mesmo acusar aos acusadores. Que minha única negação seja desviar o olhar e, tudo somado e em suma: quero ser, algum dia, apenas alguém que diz sim!”

- Nietzsche (1844-1900)

# Agradecimentos

Agradeço ao professor Eduardo por me atar ao programa, me apresentar o pré-filtro, me ensinar a programar algoritmos de otimização, a Rosimeire pelo sorriso; a Izabela por me esperar; ao professor Valter por me ensinar a programar LMIs. A minha mãe por sempre perguntar: "Daniel, e o mestrado, tudo sobre controle?". Ao Marcio do Leacopi pelo suporte tecnico, ao Rafael pelo antivirus de Pendrive e ao Vinícius por fazer me relembrar do Nietzsche.

Ao investimento das agencias de fomento à pesquisa do governo federal:

CAPES, FAPEMIG e CNPQ.

À família.

Aos amigos.

Pela vida e o trabalho. Conhecimento, técnica, engenharia e filosofia.

“Quando for fazer alguma coisa, lembre-se de quando era criança, faça com entusiasmo, faça parecer divertido”

- Daniel Godinho (2008)

# Resumo

O objetivo dessa dissertação é desenvolver uma formulação para o problema de síntese de pré-filtro para ser aplicado na manipulação das entradas de referência de processos lineares multivariáveis modelados no tempo discreto para garantir as especificações da resposta de rastreamento e o desacoplamento das malhas de controle. Para isso parte-se do método de aproximação de modelo de referência  $\mathcal{H}_\infty$  e é investigada a representação convexa por desigualdades matriciais lineares (LMI, do inglês *Linear Matrix Inequality*) para aplicação em sistemas precisamente conhecidos. Por tratar processos com incertezas paramétricas, é apresentada uma formulação não convexa baseada em desigualdades matriciais bilineares (BMI, do inglês *Bilinear Matrix Inequality*) cuja solução é feita através de adaptação de um procedimento já existente na literatura. Uma vantagem do pré-filtro é poder ser instalado como interface para os sinais de comando em processos para os quais já foram projetados controladores. Os controladores garantem a estabilidade e o desempenho com relação à rejeição de distúrbios e atenuação de ruídos de medição. O pré-filtro atuará somente na resposta transitória para atender às especificações da resposta de rastreamento e obter o desacoplamento das malhas de controle no caso de sistemas multivariáveis sem influenciar nas características do projeto do controlador. Para demonstrar a eficiência da formulação proposta são comparados os resultados de sistemas de controle apresentados na literatura científica com o resultado obtido ao se acrescentar o pré-filtro com relação a resposta de rastreamento e desacoplamento das malhas de controle.

**Palavras-chave:** pré-filtro, controle desacoplador, aproximação de modelo  $\mathcal{H}_\infty$ , LMI, sistemas multivariáveis.

---

# Abstract

The aim of this dissertation is to develop a formulation for the prefilter synthesis problem to be applied to the manipulation of the reference inputs of discrete-time linear multivariable processes to guarantee the specifications of the tracking response and decoupling of the control loops. It is considered the method of  $\mathcal{H}_\infty$  reference model approximation and it is investigated the convex representation based on linear matrix inequalities (LMI) for application in precisely known systems. To deal with processes with parametric uncertainties, it is presented a non-convex formulation based on bilinear matrix inequalities (BMI) and its solution is achieved by means of an adaptation of a procedure already existing in literature. One advantage of the prefilter is that it can be installed as the interface to the command signal in processes for which controllers have been designed. The controllers assure stability and performance with respect to disturbance rejection and measurement noise attenuation. The prefilter will act only in the transient response to meet the specifications of the tracking response and obtain the decoupling of control loops in the case of multivariable systems without affecting the characteristics of the controller design. To demonstrate the effectiveness of the proposed formulation, the results of control systems presented in the literature are compared to the results obtained after adding the prefilter with respect to response tracking and decoupling of the control loops.

**Keywords:** prefilter, decoupler control,  $\mathcal{H}_\infty$  model approximation, LMI, multivariable systems.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xi</b>
<b>Acrônimos</b>	<b>xii</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Contextualização do problema . . . . .	1
1.2 Aproximação de modelo . . . . .	5
1.3 Desigualdades Matriciais Lineares - LMI . . . . .	6
1.4 Objetivo . . . . .	8
1.5 Metodologia . . . . .	9
1.6 Estrutura da dissertação . . . . .	9
<b>2 Formulações do Problema de Síntese do Pré-filtro</b>	<b>11</b>
2.1 Descrição do Sistema de Controle . . . . .	11
2.2 Projeto do pré-filtro por aproximação do modelo de referência . . . . .	15
2.3 Definição do erro de aproximação do modelo . . . . .	18
2.4 Problema de otimização $H_\infty$ . . . . .	20
2.5 Considerações . . . . .	20
<b>3 Formulação LMI para sistemas precisamente conhecidos</b>	<b>21</b>
3.1 Formulação $H_\infty$ Estendida - LMI de Análise . . . . .	21
3.1.1 Investigação de convexidade . . . . .	22
3.2 Formulação $H_\infty$ aplicada à síntese do pré-filtro . . . . .	23
3.2.1 LMI para delimitação da região para posicionamento dos pólos . . . . .	30
3.3 Considerações . . . . .	30
<b>4 Resultados de aplicação do pré-filtro para sistemas precisamente conhecidos</b>	<b>32</b>
4.1 Planta de quatro tanques . . . . .	32
4.1.1 Controle por realimentação . . . . .	35
4.1.2 Projeto do pré-filtro . . . . .	35
4.1.3 Resposta em frequência . . . . .	37



4.1.4	Resposta Transitória . . . . .	39
4.1.5	Necessidade da delimitação de região para posicionamento de pólos . . . . .	42
4.1.6	Conclusões acerca do exemplo . . . . .	43
4.2	Coluna de Destilação 2 x 2 . . . . .	46
4.2.1	Controle por realimentação . . . . .	47
4.2.2	Projeto do pré-filtro . . . . .	47
4.2.3	Resposta em frequência . . . . .	49
4.2.4	Resposta Transitória . . . . .	49
4.3	Coluna de Destilação 3 x 3 . . . . .	53
4.3.1	Controle por realimentação . . . . .	54
4.3.2	Projeto do pré-filtro . . . . .	54
4.3.3	Resposta em frequência . . . . .	56
4.3.4	Resposta Transitória . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Formulação BMI para sistema incerto</b>	<b>65</b>
5.1	Formulação BMI para o problema de síntese de pré-filtro robusto . . . . .	65
5.2	Considerações . . . . .	70
<b>6</b>	<b>Resultado de aplicação do pré-filtro para sistema incerto</b>	<b>72</b>
6.1	EXEMPLO: Tanques conectados . . . . .	72
6.1.1	Bloco 1 - Projeto do controlador Robusto . . . . .	74
6.1.2	Bloco 2 - Projeto do Pré-filtro Robusto . . . . .	75
6.1.3	Resultados da Simulação . . . . .	77
6.1.4	Considerações da formulação BMI para sistemas incertos . . . . .	82
<b>7</b>	<b>Conclusão deste trabalho</b>	<b>83</b>
7.1	Conclusões . . . . .	83
7.2	Proposta de prosseguimento do trabalho . . . . .	84
7.3	Publicações relacionadas a essa dissertação . . . . .	85
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>86</b>

# Lista de Figuras

1.1	Controle de sistema multivariável . . . . .	2
1.2	Controle descentralizado . . . . .	3
1.3	Estrutura de controle descentralizado para desacoplamento . . . . .	4
1.4	Estrutura de controle com o pré-filtro. . . . .	5
2.1	Diagrama de blocos geral do sistema de controle . . . . .	12
2.2	Diagrama de blocos do sistema de controle com pré-filtro . . . . .	12
2.3	Diagrama de blocos do erro de aproximação de modelo . . . . .	18
4.1	Diagrama esquemático do processo dos quatro tanques. . . . .	33
4.2	Resposta em Frequência de $T_{cr}(z)T_r(z)$ e do modelo de referência. . . . .	37
4.3	Resposta em Frequência de $T_{cr}(z)T_r(z)$ e do modelo de referência (marcadores). . . . .	38
4.4	Resposta do pré-filtro para o sinal de referência . . . . .	39
4.5	Resposta transitória dos níveis dos tanques com o pré-filtro, sem esse e do modelo . . . . .	41
4.6	Resposta transitória do sinal de controle com e sem o pré-filtro . . . . .	42
4.7	Detalhamento da resposta transitória do sinal de controle com o pré-filtro . . . . .	43
4.8	Resposta transitória do sinal de controle com e sem o pré-filtro . . . . .	44
4.9	Detalhamento da resposta transitória do sinal de controle com e sem o pré-filtro . . . . .	45
4.10	Coluna de Destilação. . . . .	46
4.11	Resposta em Frequência de $T_{cr}(z)T_r(z)$ e do modelo de referência. . . . .	49
4.12	Respostas transitória do pré-filtro . . . . .	50
4.13	Resposta transitória das saídas com o pré-filtro, sem esse e do modelo . . . . .	51
4.14	Resposta transitória do sinal de controle com e sem o pré-filtro . . . . .	52
4.15	Diagrama de controle da coluna de destilação. . . . .	53
4.16	Resposta em Frequência de $T_{cr}(z)T_r(z)$ e do modelo de referência. . . . .	57
4.17	Sinais de entrada de referência do pré-filtro . . . . .	58
4.18	Resposta do pré-filtro para o sinal de referência . . . . .	59
4.19	Respostas transitórias da saída $c_1$ da planta . . . . .	60
4.20	Resposta transitória da saída $c_2$ da planta . . . . .	61
4.21	Resposta transitória da saída $c_3$ da planta . . . . .	62
4.22	Variáveis manipuladas . . . . .	63
4.23	Variáveis manipuladas . . . . .	64
6.1	Sistema de controle de nível de dois tanques interligados. . . . .	73
6.2	Variação do custo garantido na otimização do filtro. . . . .	77

---

6.3	Resposta dos quatro vértices do sistema com pré-filtro comparada a do modelo. . . .	78
6.4	Sinais de simulação de referência $\hat{r}_1$ e $\hat{r}_2(t)$ e da saída do pré-filtro $r_1$ e $r_2$ . . . . .	79
6.5	Resposta de $h_1$ e $h_2(t)$ com o filtro e somente do controlador em MF e modelo. . . .	80
6.6	Resposta transitória de $q_{u1}(t)$ e $q_{u2}(t)$ sem o pré-filtro e com o pré-filtro. . . . .	81

# Lista de Tabelas

4.1	Parâmetros de operação do ponto de fase não-mínima. . . . .	34
4.2	Variáveis do controle da coluna de destilação <b>3x3</b> . . . . .	54
4.3	Parâmetros do Controlador I-P. . . . .	54

# Acrônimos

BLT	- “Biggest log Modulus Tuning” - Sintonia pelo Maior Módulo Logarítmico
BMI	- “Bilinear Matrix Inequality” - Desigualdade Matricial Bilinear
ILMI	- “Interactive Linear Matrix Inequality” - Desigualdade Matricial Linear Interativa
I-P	- Controlador Proporcional-Integral com ação proporcional na realimentação
LMI	- “Linear Matrix Inequality” - Desigualdade Matricial Linear
LMIC	- “LMI Control Toolbox”
MIMO	- “Multiple Input, Multiple Output” - Múltiplas Entradas, Múltiplas Saídas
MPC	- “Model Predictive Control” - Controle Preditivo Baseado em Modelo
SISO	- “Single Input, Single Output” - Uma Entrada, Uma Saída
SLIT	- Sistema Linear Invariante no Tempo
SVD	- “Singular Value Decomposition” - Decomposição por Valores Singulares
PID	- Controlador Proporcional-Integral-Derivativo
SeDuMi	- “Self-Dual-Minimization”
ZOH	- “Zero-order Holder” - Segurador de Ordem Zero

# Lista de Símbolos

$\triangleq$	- igual por definição
$\in$	- pertence a
$\mathbb{R}$	- corpo dos números reais
$I$	- matriz identidade
$\alpha$	- vetor de coeficientes da combinação convexa que parametriza o politopo
$\Omega$	- domínio politópico de incerteza
$A \succ 0$	- matriz A é definida positiva ou $\lambda_i(A) > 0, \forall i$
$A \succeq 0$	- matriz A é semi-definida positiva ou $\lambda_i(A) \geq 0, \forall i$
$A \prec 0$	- matriz A é definida negativa ou $\lambda_i(A) < 0, \forall i$
$A \preceq 0$	- matriz A é semi-definida negativa ou $\lambda_i(A) \leq 0, \forall i$
$\mathcal{G}^T$	- transposta da matriz $\mathcal{G}$
*	- em matrizes simétricas, corresponde a termos simétricos em relação à diagonal
$\text{Real}(\cdot)$	- parte real do argumento
$\text{Imag}(\cdot)$	- parte imaginária do argumento
$\mathcal{P}$	- politopo de matrizes
$\left[ \begin{array}{c c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$	- realização da matriz de transferência $T(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$
$\ T\ _2$	- norma $\mathcal{H}_2$ da matriz de transferência $T$
$\ T\ _\infty$	- norma $\mathcal{H}_\infty$ da matriz de transferência $T$

# Capítulo 1

## Introdução

Na atualidade vários sistemas de controle apresentam múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO, do inglês *multiple-input, multiple-output*). Uma das características principais de um processo MIMO é a existência de interações entre as múltiplas malhas de controle. As técnicas de controle aplicadas a sistemas de uma entrada e uma saída (SISO, do inglês *single-input, single-output*) nem sempre são aplicadas com sucesso em sistemas MIMO. Os procedimentos utilizados nas técnicas convencionais não consideram as malhas adjacentes. A escolha da melhor configuração de controle e a melhor técnica de projeto é complexa devendo atender a um compromisso entre simplicidade e desempenho. Este capítulo apresenta uma contextualização do problema de controle de sistemas MIMO, as diferentes configurações de controle, algumas estratégias de projeto para tais configurações, os conceitos básicos relacionados com a metodologia adotada nessa dissertação, além dos objetivos e contribuições desta dissertação de mestrado.

### 1.1 Contextualização do problema

O controle multivariável se faz necessário para modificar o desempenho de sistemas MIMO modelados com múltiplas saídas controladas e múltiplas entradas passíveis de manipulação. Um diagrama de um sistema de controle multivariável é apresentado na figura 1.1. A planta MIMO é representada pelo bloco  $P(s)$  com  $m$  saídas controladas, chamadas de  $c_i, i = 1, \dots, m$  e  $p$  entradas manipuladas representadas por  $u_i, i = 1, \dots, p$ . O controle é do tipo centralizado e é feito pelo bloco controlador  $K(s)$  cujas entradas são os sinais de referência,  $r_i, i = 1, \dots, m$ , e as saídas controladas, corrompidas pelos ruídos de medição,  $n_i, i = 1, \dots, m$ . As perturbações sobre o sistema são representados por  $d_i, i = 1, \dots, n_d$ . O controlador deve garantir a estabilização do sistema e o desempenho frente à influência de perturbações, ruídos externos e sinais de referência, denominados sinais exógenos<sup>1</sup> ao

---

<sup>1</sup>Aquilo que é de origem externa, produzidos por fatores externos ao processo.

sistema. Nessa configuração considera-se que todas as entradas atuam sobre todas as saídas, ou seja o processo é acoplado. O controle centralizado é desvantajoso se utilizado em processos industriais pois não permite o ajuste fino da ação de controle pelo operador<sup>2</sup>. Além disso, qualquer falha no controlador compromete todo o processo.

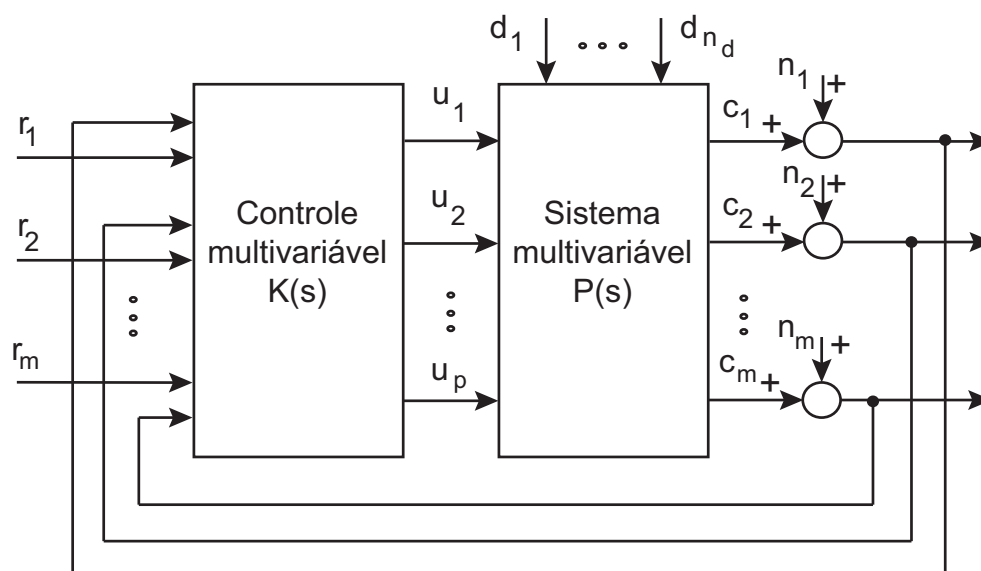


Figura 1.1: Controle de sistema multivariável

O Controle Preditivo Baseado em Modelo (MPC, do inglês, *Model Predictive Control*) é bastante popular na indústria química para lidar com problemas de controle multivariável mais complexos, incluindo restrições nas variáveis manipuladas e controladas (Quin e Thomas, 2003). A ideia básica do método é obter a ação de controle ótima predizendo o comportamento das saídas da planta. O sucesso do método MPC depende da existência de um modelo preciso da planta cuja obtenção e manutenção frente as variabilidades pode ser difícil. Além disso, é necessário resolver em tempo real, a cada instante de amostragem, um problema de otimização de várias variáveis, restringindo a aplicação a processos de dinâmica lenta.

A figura 1.2 apresenta uma estrutura de projeto de controle descentralizado, sendo o controlador dividido em malhas independentes, constituindo multi-malhas de controle. Dessa forma cada controlador  $K_i$ ,  $i=1,2,\dots,m$ , é responsável por atuar sob a saída  $c_i$  através da variável manipulada  $u_i$  de forma independente para garantir a rejeição dos distúrbios e atenuação dos efeitos dos ruídos de medição.

O controle Proporcional-Integral-Derivativo (PID) é o mais utilizado nessa configuração de controle descentralizado em processos industriais. O controlador PID permanece como padrão na indus-

<sup>2</sup>O controlador do processo tendo suas configuração implementadas por projeto realizado com matrizes, a modificação de qualquer valor numérico de uma das matrizes do controlador, posterior ao procedimento de cálculo dos parâmetros, interfere em todo projeto.



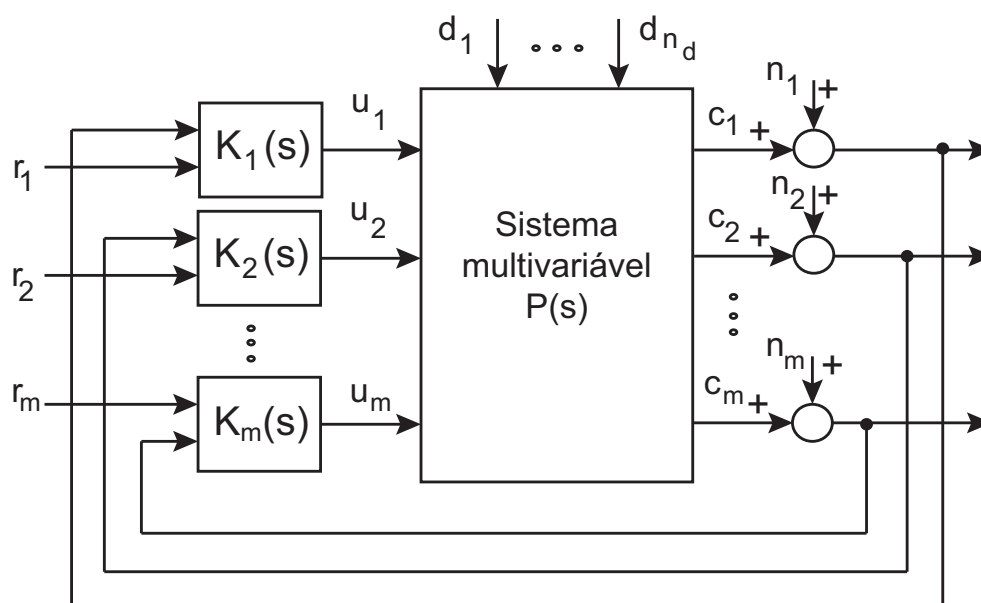


Figura 1.2: Controle descentralizado

tria por ter uma estrutura simples, poucos parâmetros para sintonizar, é fácil de ser compreendido pelos operadores e o controle descentralizado é mais tolerante a falhas. Para cálculo dos parâmetros dos controladores PID existem diversas técnicas disponíveis na literatura. Do conjunto de métodos conhecido em inglês como *detuning methods*, o método BLT (do inglês *biggest log modulus tuning*) exposto em Luyben (1986) é baseado na escolha dos parâmetros do controlador PID segundo condições de estabilidade estendidas do método de Nyquist, considerando o sistema multivariável constituído de multi-malhas, tratados como múltiplos sistemas de controle de uma entrada e uma saída ou sistemas SISO.

Outra possibilidade de escolha do método de sintonia está no grupo de métodos de sintonia sequencial, conhecido pelo termo em inglês *sequential loop closing methods* apresentado em (Hovd e Skogestad, 1994), em que as malhas de controle são fechadas a partir daquela que possui a dinâmica mais rápida para a que possui dinâmica mais lenta. Outra categoria de métodos, conhecidos pelo termo em inglês *independent design methods*, é abordada na referência (Chen e Seborg, 2003). A expressão em inglês *relay-feedback auto-tuning methods* identifica outros conjuntos de métodos que são considerados em (Campestrini et al., 2009; Halevi et al., 1997). Quando existe dificuldade de se projetar o controle PID com desempenho adequado devido a alta interação das malhas de controle, uma possível solução é o uso de pré-compensador ou desacoplador, representado pelo bloco  $D(s)$  na figura 1.3. O desacoplador é projetado para que seu produto com a planta,  $H(s) = P(s)D(s)$ , seja diagonal. O conjunto do desacoplador combinado com a planta resulta em um sistema desacoplado do ponto de vista do controle descentralizado. Para obter a função de transferência do desacoplador

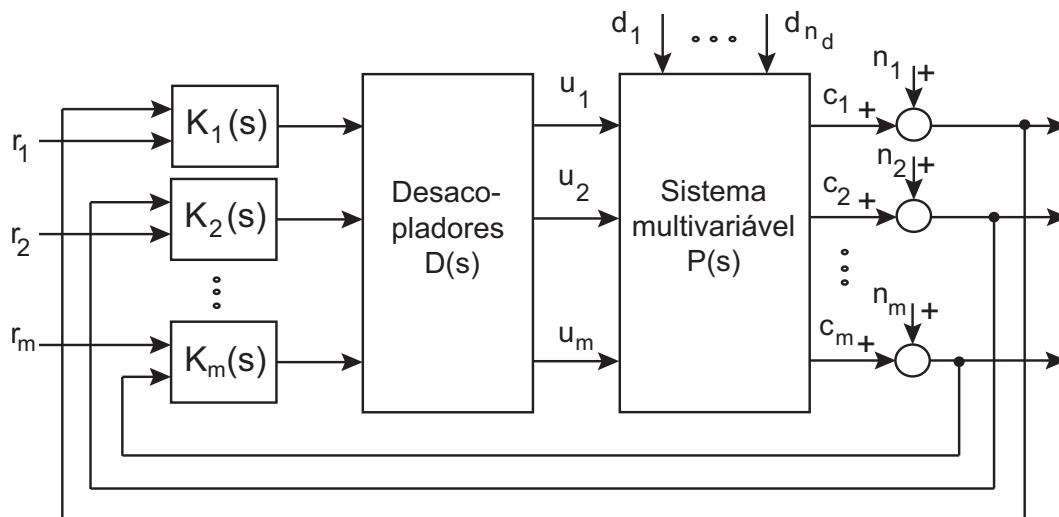


Figura 1.3: Estrutura de controle descentralizado para desacoplamento

existem diferentes métodos, como, por exemplo, o desacoplador ideal (Luyben, 1970), desacoplador simplificado (Shinskey, 1988), desacoplador invertido (Gagnon et al., 1998) e desacoplador pelo método da adjunta (Shen et al., 2012).

O desacoplador do tipo ideal é determinado pela escolha de uma função de transferência  $H(s)$ , diagonal, normalmente a diagonal da planta. O desacoplador,  $D(s)$ , é obtido como sendo  $D(s) = P(s)^{-1}H(s)$ . Neste método a sintonia do controlador é mais simples mas o desacoplador pode ser muito complexo, instável ou até mesmo não realizável (possuir mais zeros que pólos).

No desacoplador simplificado os elementos da diagonal são fixados com valor igual a 1. Os elementos diferentes de 1 do desacoplador são funções das frações dos elementos de  $P(s)$ . É um método mais simples porém o sistema resultante  $H(s) = P(s)D(s)$  é mais complexo podendo dificultar o projeto do controlador. Já o desacoplador invertido possui os mesmos elementos do desacoplador simplificado, resulta em uma matriz de transferência  $H(s)$  mais simples e pode ser implementado como um controlador *feedforward*. O método da adjunta proposto em Shen et al. (2012), semelhante ao método ideal, simplifica o desacoplador resultante porque não utiliza a divisão pelo determinante no seu cálculo, evitando que o desacoplador seja não causal ou instável. A desvantagem do uso de desacopladores cujo cálculo é baseado no modelo da planta é que devido às inerentes incertezas do modelo, seja por parâmetros não precisamente conhecidos ou dinâmicas de alta frequência não modeladas, o resultado pode não ser o esperado.

No caso em que as configurações de controle discutidas não apresentem um bom desempenho devido à grande interação entre suas malhas de controle, independente da estrutura do sistema de controle, seja multivariável, descentralizado, ou desacoplador, um pré-filtro é uma opção simples para melhorar o desempenho da resposta transitória e do desacoplamento, quando necessário, como

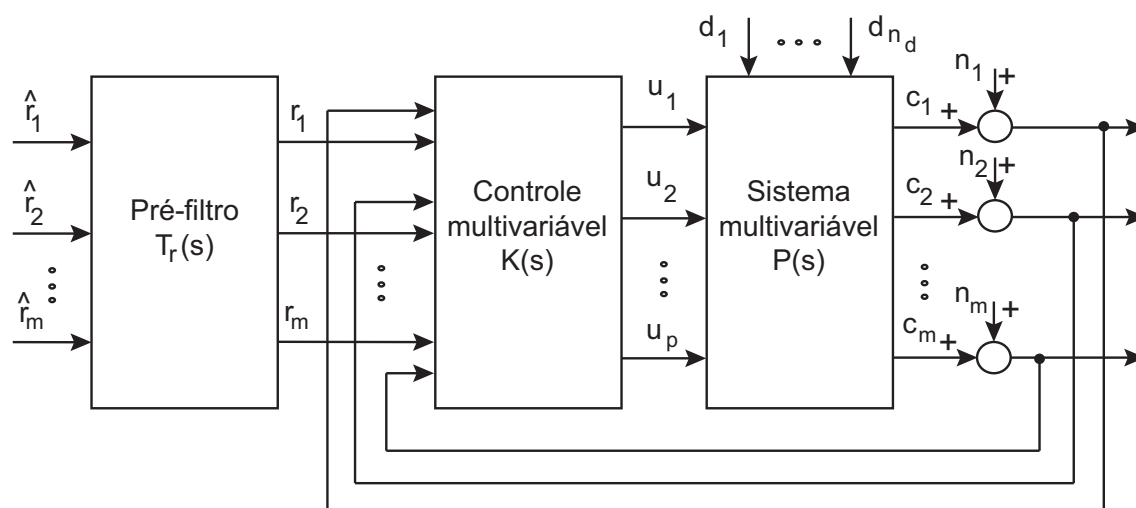


Figura 1.4: Estrutura de controle com o pré-filtro.

mostra a figura 1.4.

O uso de estrutura de controle com dois graus de liberdade para sistemas SISO é bem conhecido na literatura de controle, sendo que um bloco é projetado para garantir a estabilidade e um bom compromisso entre rejeição de perturbação e atenuação de ruídos. Um segundo bloco, o pré-filtro, é projetado de forma independente para atuar no sinal de referência. Este trabalho apresenta uma investigação do uso do pré-filtro para sistemas MIMO não só para melhoria da resposta de rastreamento mas também para o desacoplamento das malhas de controle. Para atender a esses objetivos é considerado o método de aproximação de modelos para a síntese do pré-filtro. O problema de síntese do pré-filtro é formulado como um problema de otimização que faz uso de representações em termos de Desigualdades Matriciais Lineares (LMI, do inglês *linear matrix inequality*).

## 1.2 Aproximação de modelo

O problema de aproximação de modelo (do inglês, *model matching problem*) é um problema clássico da teoria de controle (Doyle et al., 1990). Seja  $T_1(s)$  e  $T_2(s)$  duas funções de transferência próprias e estáveis, o problema de aproximação de modelo é determinar a função de transferência  $Q(s)$  estável que minimiza o erro de aproximação  $\|T_1(s) - T_2(s)Q(s)\|_\infty$ . A solução trivial, caso seja estável, é  $Q(s) = T_1(s)/T_2(s)$ , que resulta no erro de aproximação igual a zero. O método de aproximação de modelo  $\mathcal{H}_\infty$  é aplicado na formulação do problema de síntese do pré-filtro considerado nesta dissertação. Seja  $T_m(s)$  um modelo de referência bloco diagonal, com os elementos da diagonal que resultam na resposta de rastreamento desejada, e  $T_{cr}(s)$  a matriz de transferência relacionando os sinais de referência com as saídas das planta. O problema de síntese do pré-filtro,

$T_r(s)$ , é determinar a matriz de transferência própria e estável que minimiza o erro de aproximação  $\|T_m(s) - T_{cr}(s)T_r(s)\|_\infty$ .

Para demonstrar essa situação, considere, por exemplo,

$$T_{cr}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{s+4}{s+1} & \frac{s+3}{s+2} \end{bmatrix}.$$

Definindo o modelo de referência, como

$$T_m(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{s+3}{s+2} \end{bmatrix},$$

a solução trivial pode ser calculada como

$$T_r(s) = T_{cr}^{-1}T_m(s) = \begin{bmatrix} \frac{-(s+3)(s+1)}{s+1} & \frac{(s+3)(s+1)}{s+2} \\ \frac{(s+4)(s+2)}{s+1} & \frac{-(s+3)(s+2)}{s+2} \end{bmatrix},$$

que é estável mas não própria. Este simples exemplo, em que a solução trivial não poderia ser utilizada na prática, motiva parte do desenvolvimento apresentado nesta dissertação. Outra dificuldade ocorre quando existe incerteza no modelo da planta e conseqüentemente em  $T_{cr}(s)$ , o que também é considerado na formulação do pré-filtro nessa dissertação.

Como discutido, para garantir o desacoplamento o modelo de referência é escolhido como uma matriz no formato diagonal. As funções de transferência da diagonal determinam as características transitórias de cada malha de controle individualmente. Os zeros fora da diagonal dessa matriz garantem o desacoplamento entre as malhas. Se a matriz de transferência do sistema combinado com o pré-filtro aproximar o modelo de referência isto resulta no desacoplamento do sistema.

### 1.3 Desigualdades Matriciais Lineares - LMI

A solução do problema de otimização por aproximação de modelo é procedida pela formulação do problema na forma de desigualdades matriciais lineares (LMI, do inglês *linear matrix inequality*). Essas desigualdades traduzem para o ambiente matemático as restrições que garantam as condições sugeridas pelo problema de otimização. Tais restrições são construídas a partir da representação ma-

tricial no espaço de estados do sistema de controle, com seus blocos envolvidos (planta, controlador, pré-filtro, modelo de referência) com suas operações matriciais relacionadas à satisfação das condições do problema de aproximação de modelo. Os procedimentos para análise e síntese de sistemas de controle utilizando o formato de LMI estão em evidência por serem problemas de otimização convexos implementáveis e eficientemente solucionáveis por meio de *softwares* comerciais (Gahinet et al., 1995) ou livres (Sturm, 1999) disponíveis.

Uma das vantagens imediatas da abordagem por LMIs é a disponibilidade de softwares, comerciais ou gratuitos, para a solução em tempo polinomial de tal classe de problemas de otimização como por exemplo o LMI Control Toolbox (Gahinet et al., 1995) e SeDuMi Interface (Sturm, 1999; Peaucelle et al., 2002), ambos para uso com o MATLAB. A princípio, caracterizar um problema de controle na forma de um problema baseado em LMIs significa, na prática, a sua solução mesmo que não existam soluções analíticas disponíveis (Boyd et al., 1994). Representar todas as especificações do sistema sendo projetado através de um único objetivo de controle é bastante restritivo. Desse modo outra vantagem importante da abordagem por LMIs é que, como elas aparecem na forma de restrições no problema de projeto, elas oferecem maior flexibilidade para combinar várias especificações sobre o sistema a ser projetado (Boyd et al., 1994). A terceira característica de destaque dos problemas formulados em termos de LMIs, fundamental quando os sistemas considerados possuem domínio politópico de incerteza, é que é suficiente verificar o conjunto de vértices para garantir as especificações de estabilidade e desempenho para todos os sistemas pertencentes ao politopo.

São frequentes o uso de formulações LMI para análise de estabilidade e desempenho de sistemas de controle que apresentam parâmetros incertos. Em (de Oliveira et al., 2002) é concebida a análise robusta e também a síntese de um controlador por realimentação das variáveis de saída para sistemas que possuam seus parâmetros precisamente conhecidos, porém ao se considerar uma formulação LMI de análise para síntese robusta, é obtida uma formulação com desigualdade matricial bilinear (BMI, do inglês *bilinear matrix inequality*) que é um problema não-convexo em geral. Existem vários trabalhos que apresentam métodos para transformar problemas BMI em problemas LMI. Alguns destes trabalhos são baseados em transformações congruentes e mudança de variáveis linearizantes (Bernussou et al., 1989; Scherer et al., 1997; Masubuchi et al., 1998; de Oliveira et al., 2002). Em (Lee et al., 2009), é proposto uma formulação LMI para síntese de controladores com dois graus de liberdade.

Para alguns problemas na área de controle robusto, para tratar sistemas com modelos politópicos, não existe até o momento mudanças de variáveis linearizantes ou transformações de congruência que transforme a formulação BMI em uma formulação LMI, o que o caso da síntese de controladores por realimentação dinâmica de saída, apresentada em de Oliveira et al. (2002), e também o problema de síntese do pré-filtro robusto estudado neste trabalho. Deste modo, é necessário aplicar técnicas para

a solução do problema BMI. Em Helmersson (1994) é apresentado um procedimento iterativo para solução do problema BMI para aplicação no problema de redução de modelo. Este procedimento é composto de dois passos, onde cada passo é um problema LMI, viabilizando a sua solução. Procedimentos com idéia similar, denominados desigualdades matriciais lineares iterativas (ILMI, do inglês *Iterative Linear Matrix Inequalities* também são propostos para tratar a síntese de controladores por realimentação estática de saída (Cao et al., 1998; Cao et al., 1998b; Fujimori, 2004; Lin et al., 2004; He e Wang, 2006; Zheng et al., 2002; Solimana et al., 2010).

## 1.4 Objetivo

O foco principal desta dissertação é o de estender a aplicação de pré-filtros, em configurações de controle com dois graus de liberdade de sistemas SISO, para sistemas multivariáveis (MIMO) lineares, em tempo discreto e invariantes no tempo. O objetivo é investigar se é possível desenvolver formulações de síntese de pré-filtros que possibilitem não somente aprimorar o desempenho da resposta transitória de rastreamento, como no caso de sistemas de controle SISO, mas também minimizar o acoplamento entre as malhas de controle, problema específico de sistemas de controle MIMO. Devido à configuração do sistema de controle, a síntese do pré-filtro pode ser realizada de forma independente, sem interferir no projeto do controlador inserido na malha de realimentação, responsável pela garantia da estabilidade do sistema em malha-fechada e dos desempenhos relacionados com a rejeição de distúrbios e atenuação dos ruídos de medição.

A contribuição da dissertação é propor duas formulações de síntese do pré-filtro, baseadas no problema de aproximação de modelo  $\mathcal{H}_\infty$ , para atuar nas respostas de rastreamento e no desacoplamento de sistemas MIMO:

- Formulação LMI para sistemas precisamente conhecidos.
- Formulação BMI para sistemas com incertezas politópicas.

Será considerada uma condição LMI para análise de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  para desenvolver as formulações LMI e BMI de síntese baseados no problema de aproximação  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas lineares, invariantes no tempo, em tempo discretos. No caso de sistemas precisamente conhecidos, serão consideradas transformações e mudanças de variáveis linearizante para obter uma formulação LMI que pode ser facilmente resolvida por softwares disponíveis para tal. No caso dos sistemas com incertezas politópicas, será investigada uma metodologia simples de solução do problema LMI, já testada com sucesso na literatura, que é baseado em um procedimento iterativo de dois passos, onde cada passo envolve a solução de um problema LMI.

Serão considerados problemas clássicos de sistemas multivariáveis, estudados frequentemente na literatura, para ilustrar o tratamento do acoplamento entre as malhas de controle dos sistemas MIMO pela inclusão do pré-filtro projetado por uma das formulações de síntese propostas.

## 1.5 Metodologia

A metodologia utilizada é a pesquisa bibliográfica das formulações para síntese de pré-filtro para rastreamento do sinal de referência e desacoplamento de malhas de controle de sistemas MIMO. Neste trabalho será utilizada uma formulação LMI já existente a partir dos teoremas apresentados em (de Oliveira et al., 2002)<sup>3</sup> para solucionar o problema a partir de uma LMI para sistemas precisamente conhecidos e uma formulação BMI para sistemas com incertezas paramétricas, empregados a sistemas multivariáveis, lineares, invariantes no tempo e em tempo discreto. O procedimento utilizado nesta dissertação para solução do problema BMI é baseado no procedimento apresentado em Helmersson (1994) aplicado à redução de modelo. O projeto do pré-filtro é desenvolvido de forma a garantir a resposta transitória similar à de um modelo de referência, escolhido pelo projetista, e um bom desacoplamento das malhas de controle do sistema.

São comparados os resultados de desempenho de processos de controle já existentes (projetados e implementados que garantem a estabilidade do processo, com a rejeição a distúrbios e ruídos de medição) obtidos na literatura com relação ao novo desempenho destes processos incluindo o pré-filtro - projetado para garantir a resposta de rastreamento e desacoplamento das malhas de controle. É utilizado o artigo (Wood e M.W.Berry, 1973) e também o artigo (Johansson, 2000) para comparar a eficiência da formulação do pré-filtro integrado ao controle PID, presente nesses artigos, que sozinho não é suficiente para garantir o desacoplamento das malhas e atender os requisitos da resposta de rastreamento.

O software MATLAB é utilizado para implementação e teste dos procedimentos de projeto desenvolvidos.

## 1.6 Estrutura da dissertação

O restante da dissertação está organizada na forma descrita a seguir.

No **capítulo 2** é apresentado o diagrama de blocos geral do sistema de controle, incluindo o pré-filtro, e são apresentadas as representações no espaço de estados de cada bloco. São apresentados a formulação do problema de aproximação de modelo, adaptado para o projeto do pré-filtro, e a

---

<sup>3</sup>síntese de controlador por realimentação dinâmica de saída

representação do erro de aproximação no espaço de estados, que será a base para o desenvolvimento das formulações de síntese a serem desenvolvidas nos capítulos seguintes.

O **capítulo 3** apresenta a formulação LMI do problema de síntese do pré-filtro baseado no método de aproximação de modelo para o caso em que o sistema é precisamente conhecido. São reproduzidas as transformações apresentadas em de Oliveira et al., 2002, aplicadas nesta dissertação para o caso da síntese do pré-filtro. É também apresentada uma formulação LMI para posicionamento regional de pólos em uma região disco que pode ser incluída como uma restrição adicional no problema de aproximação de modelo.

O **capítulo 4** apresenta os resultados de simulação para três exemplos de sistemas precisamente conhecidos em que os pré-filtros, projetados com base na formulação LMI proposta no capítulo anterior, são aplicados para aprimorar o desempenho da resposta de rastreamento e o desacoplamento de projetos apresentados previamente na literatura.

O **capítulo 5** propõe uma formulação BMI para a síntese de pré-filtros que consideram sistemas com incerteza politópica. Neste caso também são consideradas as formulações LMI de análise propostas em de Oliveira et al., 2002. Como para sistemas incertos ainda não foram derivadas transformações ou mudanças de variáveis que resultem em uma formulação LMI, é apresentado um procedimento para solução do problema BMI com base em um procedimento iterativo de dois passos, em que cada passo é necessário resolver um problema LMI.

O **capítulo 6** apresenta os resultados de simulação para para exemplo de aplicação da formulação BMI para síntese do pré-filtro considerando sistemas com incerteza politópica.

Por fim, o último capítulo apresenta as conclusões gerais do trabalho, propostas de prosseguimento e a informação a respeito da publicação científica associada à dissertação.



## Capítulo 2

# Formulações do Problema de Síntese do Pré-filtro

Neste capítulo são apresentadas as definições matemáticas utilizadas para o trabalho, primeiro com a descrição introdutória do sistema de controle para aplicação do pré-filtro e em seguida a formulação de síntese do pré-filtro utilizando o método de aproximação do modelo de referência. Nesse tópico é definido o erro de aproximação baseado na diferença entre o modelo de referência e o produto entre a associação em série do filtro com o sistema de controle em malha fechada. O problema de otimização é enunciado para encontrar um pré-filtro que garanta o desempenho de rastreamento e o desacoplamento entre as malhas de controle, mas que não interfira na estabilidade do sistema, na rejeição de distúrbios e na atenuação de ruídos de medição. Pela redução da norma  $H_\infty$  do erro de aproximação é garantido que as saídas da planta possuam um comportamento semelhante ao do modelo de referência.

### 2.1 Descrição do Sistema de Controle

Um sistema de controle formado pela planta, representada por  $P(z)$ , e um controlador,  $K(z)$ , é apresentado no diagrama 2.1 no qual o vetor de saídas que se deseja controlar é representado por  $\mathbf{z}$ , sob influência do vetor de entradas exógenas,  $\mathbf{w}$ , que representa os sinais externos a este sistema. Essa configuração de controle possui apenas um bloco controlador formado por  $K(z)$ , que tem como entrada o vetor de variáveis medidas na planta,  $\mathbf{y}$ , e como saída o vetor de variáveis manipuladas,  $\mathbf{u}$ .

Em relação à figura 2.1, o diagrama 2.2 apresenta uma representação expandida dos vetores de entradas exógenas  $\mathbf{w}$ . São definidos os vetores  $\mathbf{d}$  como as entradas de perturbações,  $\mathbf{n}$ , as entradas de ruídos de medição e  $\mathbf{r}$  são os sinais de referências para as variáveis controladas da planta  $\mathbf{c}$ . Nesse diagrama temos a configuração para o sistema em que o controle é realizado por dois blocos com

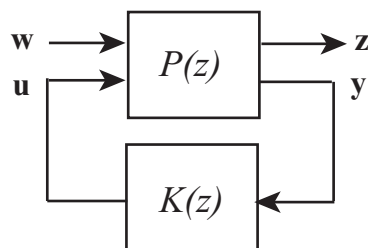


Figura 2.1: Diagrama de blocos geral do sistema de controle

funções diferentes. O primeiro bloco é formado pelo controlador  $K(z)$ , que enlaça a planta  $P(z)$  manipulando as entradas  $u$  por meio da realimentação dos sinais medidos das saídas  $y$ . Esse bloco tem a função de garantir a estabilidade da planta, a rejeição das entradas de distúrbios,  $d$ , sobre as saídas da planta,  $c$ , e redução da interferência dos ruídos de medição,  $n$ , sobre as variáveis manipuladas,  $u$ . O controlador pode ser projetado, por exemplo, por meio da minimização das normas  $\|T_{cd}(z)\|_\infty$  entre as entradas de distúrbios e a saídas da planta e  $\|T_{un}(z)\|_2$  entre as entradas de ruídos de medição e as entradas manipuladas. O segundo bloco de controle, que é um pré-filtro, representado por  $T_r(z)$ , tem a função de adequar a resposta de rastreamento das saídas da planta de acordo com o especificado pelo modelo de referência escolhido pelo projetista. Para alterar a dinâmica das saídas, o pré-filtro formata o vetor de entradas de referência  $r$ , tendo como entrada o vetor  $\hat{r}$ , que é o sinal real de comando nesta configuração.

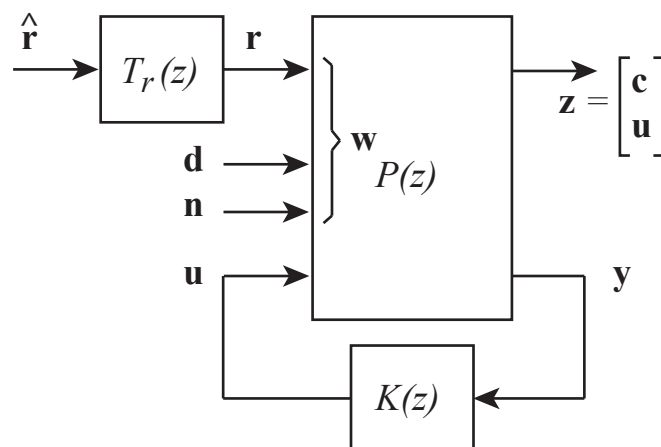


Figura 2.2: Diagrama de blocos do sistema de controle com pré-filtro

Neste trabalho será utilizada uma representação compacta da realização de uma função de transferência  $\mathcal{G}(z)$  no espaço de estados. Considere as equações de estados e de saída

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k), \\ \mathbf{y}(k) &= C\mathbf{x}(k) + D\mathbf{u}(k). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Estas equações podem ser representadas como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k) \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Pela simplificação da notação a realização de  $\mathcal{G}(z)$  será representada por

$$\mathcal{G}(z) = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right], \quad (2.3)$$

sendo  $\mathcal{G}(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$ .

A planta referida pelo bloco  $P(z)$  é a representação de um processo, seja ele físico, químico ou biológico, desde que possa ser modelado como um sistema linear e invariante no tempo, operando como um sistema discreto no tempo, pela amostragem dos sinais envolvidos, em intervalos regulares. A apresentação formal escolhida para representar matematicamente as dinâmicas de trocas energéticas internas e externas à planta é, no espaço de estados

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B_u\mathbf{u}(k) + B_w\mathbf{w}(k), \quad (2.4)$$

$$\mathbf{z}(k) = C_z\mathbf{x}(k) + D_{zu}\mathbf{u}(k) + D_{zw}\mathbf{w}(k), \quad (2.5)$$

$$\mathbf{y}(k) = C_y\mathbf{x}(k) + D_{yw}\mathbf{w}(k), \quad (2.6)$$

sendo  $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$  o vetor de variáveis de estado;  $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^p$  o vetor de sinais de controle, as variáveis manipuladas;  $\mathbf{w}(k)$  o vetor de variáveis exógenas que compõem sinais de referência filtrados  $\mathbf{r}(k)$ , distúrbios  $\mathbf{d}(k)$  e ruídos de medição  $\mathbf{n}(k)$ . O vetor de variáveis controladas  $\mathbf{z}(k)$  é constituído pelas saídas da planta  $\mathbf{c}(k) \in \mathbb{R}^p$  e pelos sinais de controle  $\mathbf{u}(k)$ ;  $\mathbf{y}(k)$  é o vetor de variáveis medidas que é utilizado como entrada do bloco de realimentação do controlador.

Para simplificar a notação da representação no espaço de estados do sistema em (2.4), (2.5) e (2.6) é considerada a representação simplificada

$$P(z) \triangleq \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_u & B_w \\ \hline C_z & D_{zu} & D_{zw} \\ C_y & 0 & D_{yw} \end{array} \right]. \quad (2.7)$$

A ação de controle do bloco  $K(z)$  é

$$U(z) = K(z)Y(z), \quad (2.8)$$

sendo o controlador representado na notação compacta por

$$K(z) \triangleq \left[ \begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right]. \quad (2.9)$$

A representação no espaço de estados do sistema em malha fechada  $T_{zw}(z)$  relaciona as entradas exógenas com as variáveis controladas, de acordo com a equação

$$Z(z) = T_{zw}(z)W(z). \quad (2.10)$$

Considerando a realização no espaço de estados de  $K(z)$ :

$$\mathbf{x}_c(k+1) = A_c\mathbf{x}_c(k) + B_c\mathbf{y}(k), \quad (2.11)$$

$$\mathbf{u}(k) = C_c\mathbf{x}_c(k) + D_c\mathbf{y}(k). \quad (2.12)$$

Pela substituição do sinal de controle da expressão (2.12) em (2.4), obtém-se

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B_u[C_c\mathbf{x}_c(k) + D_c\mathbf{y}(k)] + B_w\mathbf{w}(k), \quad (2.13)$$

o resultado de (2.13) é reescrito em termos da equação do vetor de saída  $\mathbf{y}(k)$  de (2.6), resultando em

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= A\mathbf{x}(k) + B_uC_c\mathbf{x}_c(k) + B_uD_c[C_y\mathbf{x}(k) + D_{yw}\mathbf{w}(k)] + B_w\mathbf{w}(k) \\ &= (A + B_uD_cC_y)\mathbf{x}(k) + B_uC_c\mathbf{x}_c(k) + [B_uD_cD_{yw} + B_w]\mathbf{w}(k). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Neste ponto, a equação do vetor de saída de (2.6) é escrita na equação de estados do controlador em (2.11)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_c(k+1) &= A_c\mathbf{x}_c(k) + B_c[C_y\mathbf{x}(k) + D_{yw}\mathbf{w}(k)] \\ &= B_cC_y\mathbf{x}(k) + A_c\mathbf{x}_c(k) + B_cD_{yw}\mathbf{w}(k) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Agrupando (2.14) e (2.15) obtém-se a equação em malha fechada do sistema considerando as

matrizes da planta  $P(z)$  e as do controlador  $K(z)$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{x}_c(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_u D_c C_y & B_u C_c \\ B_c C_y & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}_c(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_u D_c D_{yw} + B_w \\ B_c D_{yw} \end{bmatrix} \mathbf{w}(k) \quad (2.16)$$

Pela substituição da expressão do sinal de controle de (2.12) em (2.5), obtém-se

$$\mathbf{z}(k) = C_z \mathbf{x}(k) + D_{zu} [C_c \mathbf{x}_c(k) + D_c \mathbf{y}(k)] + D_{zw} \mathbf{w}(k). \quad (2.17)$$

A equação de saída de  $\mathbf{z}(k)$  pode ser reescrita de (2.17) substituindo  $\mathbf{y}(k)$  de (2.6), e tem como resultado:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(k) &= C_z \mathbf{x}(k) + D_{zu} C_c \mathbf{x}_c(k) + D_{zu} D_c [C_y \mathbf{x}(k) + D_{yw} \mathbf{w}(k)] + D_{zw} \mathbf{w}(k) \\ &= (C_z + D_{zu} D_c C_y) \mathbf{x}(k) + D_{zu} C_c \mathbf{x}_c(k) + [D_{zu} D_c D_{yw} + D_{zw}] \mathbf{w}(k) \\ &= \begin{bmatrix} C_z + D_{zu} D_c C_y & D_{zu} C_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}_c(k) \end{bmatrix} + [D_{zu} D_c D_{yw} + D_{zw}] \mathbf{w}(k). \end{aligned} \quad (2.18)$$

A representação simplificada de  $T_{zw}(z)$  considerando as equações (2.18) e (2.16) é dada por

$$T_{zw}(z) = \left[ \begin{array}{cc|c} A + B_u D_c C_y & B_u C_c & B_w + B_u D_c D_{yw} \\ B_c C_y & A_c & B_c D_{yw} \\ \hline C_z + D_{zu} D_c C_y & D_{zu} C_c & D_{zw} + D_{zu} D_c D_{yw} \end{array} \right], \quad (2.19)$$

e a matriz de transferência no domínio da frequência,  $T_{zw}(z)$ , pode ser decomposta nos blocos

$$\begin{bmatrix} C(z) \\ U(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{cr}(z) & T_{cd}(z) & T_{cn}(z) \\ T_{ur}(z) & T_{ud}(z) & T_{un}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(z) \\ D(z) \\ N(z) \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

## 2.2 Projeto do pré-filtro por aproximação do modelo de referência

Considerando que já foi projetado o bloco  $K(z)$  mas que o desempenho das especificações transitórias não são satisfatórios ou que existe acoplamento entre as malhas de controle, o objetivo deste trabalho é desenvolver uma nova formulação para síntese independente do pré-filtro de modo a melhorar as características do sistema MIMO.

O pré-filtro acoplado ao sistema em malha-fechada modifica a dinâmica de transmissão dos sinais de referência afetando o modo como os mesmos atuam sobre as saídas controladas dessa mesma planta. A estratégia utilizada é a busca de um filtro que reduza a diferença entre a matriz de transferência do modelo de referência, especificado pelo projetista, e o produto da planta pelo pré-filtro; a essa diferença chamamos erro de aproximação. A minimização da norma  $H_\infty$  desse erro garante que as especificações do projeto são atendidas. O desacoplamento das malhas de controle, outro objetivo do trabalho, é conseguido por meio do modelo de referência com formato bloco diagonal.

A saída controlada da planta é relacionada à entrada de referência por

$$C(z) = T_{cr}(z)R(z), \quad (2.21)$$

de acordo com a relação, apresentada em (2.20).

A matriz de transferência é definida no espaço de estados como

$$T_{cr}(z) \triangleq \left[ \begin{array}{c|c} A_{cr} & B_{cr} \\ \hline C_{cr} & D_{cr} \end{array} \right]. \quad (2.22)$$

Não é objetivo deste trabalho contribuir para o desenvolvimento de técnicas de projeto do controlador  $K(z)$  que irá determinar as funções de transferência  $T_{cd}(z)$  e  $T_{cn}(z)$ , relacionadas com a rejeição de perturbações e atenuação de ruídos de medição respectivamente.

A representação da matriz de transferência do pré-filtro, no espaço de estados, é definida como

$$T_r(z) \triangleq \left[ \begin{array}{c|c} A_r & B_r \\ \hline C_r & D_r \end{array} \right]. \quad (2.23)$$

O modelo de referência,  $T_m(z)$ , definido pelas matrizes

$$T_m(z) \triangleq \left[ \begin{array}{c|c} A_m & B_m \\ \hline C_m & D_m \end{array} \right], \quad (2.24)$$

é escolhido pelo projetista para garantir que as saídas controladas da planta atendam às especificações da resposta transitória de rastreamento como sobresinal, tempo de acomodação, amortecimento, tempo de subida entre outras especificações.

Em um sistema MIMO, em que é desejado que cada entrada de referência controle individualmente uma única saída controlada da planta, o formato de organização da matriz de transferência do

modelo de referência bloco diagonal garante o desacoplamento entre as malhas de controle:

$$T_m(z) = \begin{bmatrix} T_{m,1}(z) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{m,2}(z) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{m,i}(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{m,p}(z) \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Desta forma, para que o sinal de comando da entrada  $\hat{r}_1$ , relativo à saída  $c_1$ , não interfira na saída  $c_2$ , o elemento na posição (1; 2) da matriz (2.25) é definido como sendo *zero* com a finalidade de anular, no sistema aproximado pelo modelo de referência, essa possível interferência. A função de transferência  $T_{m,1}(z)$  apresenta o comportamento dinâmico desejado para a saída controlada  $c_1$  em relação à entrada de referência  $\hat{r}_1$ . O restante da matriz de transferência do modelo de referência é definido seguindo a mesma lógica.

De uma forma geral, considerando uma planta de  $m$  saídas da planta e suas correspondentes entradas de referência, o desacoplamento da  $i$ -ésima saída,  $c_i$ , é esperado pela anulação de todas as colunas da linha  $i$  com a ressalva da  $i$ -ésima coluna onde é definida a função de transferência modelo  $T_{m,i}(z)$  que se relaciona à entrada de referência  $\hat{r}_i$ . Na prática, o sistema resultante, que aproxima o modelo de referência, não terá funções de transferência nulas fora da diagonal. Se o erro de aproximação for suficientemente pequeno, isto significará que o valor máximo de ganho da resposta em frequência de cada função de transferência fora da diagonal, isto é, sua norma  $\mathcal{H}_\infty$ , será também pequeno e as interações entre as malhas de controle será reduzida de forma satisfatória.

A escolha das funções de transferência  $T_{m_i}(z)$  da matriz do modelo de referência (2.25) estão relacionadas às limitações da associação da planta com o pré-filtro em seguir um modelo de referência de dinâmicas muito rápidas. A princípio, existe um compromisso entre a velocidade das respostas transitórias (tempos de subida), definidas por cada  $T_{m_i}(z)$ , e o desacoplamento do sistema, cabendo ao projetista definir qual é a escolha mais adequada para o sistema de controle que está sendo projetado. O efeito da escolha das funções de transferências do modelo de referência é demonstrado em exemplos apresentados no capítulo 4.

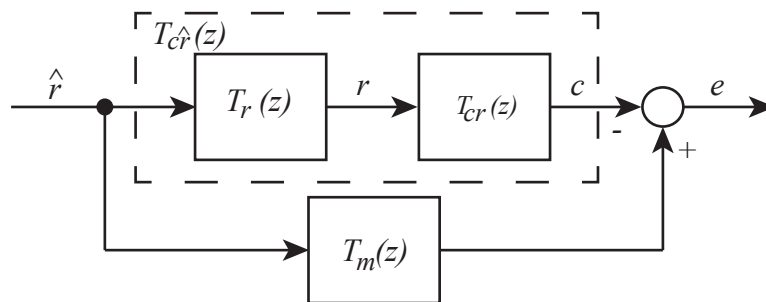


Figura 2.3: Diagrama de blocos do erro de aproximação de modelo

## 2.3 Definição do erro de aproximação do modelo

A figura 2.3 apresenta em diagrama de blocos a definição do erro de aproximação de modelo, dada por

$$E(z) = T_m(z) - T_{cr}(z)T_r(z), \quad (2.26)$$

sendo  $T_r(z)$  o pré-filtro, estável e causal,  $T_m(z)$  e  $T_{cr}(z)$  as funções de transferência próprias e estáveis representando, respectivamente, o modelo de referência e o sistema em malha-fechada.

Considerando a realização da função de transferência no espaço de estados que relaciona os sinais de saída,  $c(k)$ , do sistema em malha-fechada com a entrada de referência da planta,  $r(k)$

$$\mathbf{x}_{cr}(k+1) = A_{cr}\mathbf{x}_{cr}(k) + B_{cr}\mathbf{r}(k), \quad (2.27)$$

$$\mathbf{c}(k) = C_{cr}\mathbf{x}_{cr}(k) + D_{cr}\mathbf{r}(k), \quad (2.28)$$

e a realização da função de transferência do pré-filtro que relaciona sua saída  $\mathbf{r}(k)$  com sua entrada  $\hat{\mathbf{r}}(k)$

$$\mathbf{x}_r(k+1) = A_r\mathbf{x}_r(k) + B_r\hat{\mathbf{r}}(k), \quad (2.29)$$

$$\mathbf{r}(k) = C_r\mathbf{x}_r(k) + D_r\hat{\mathbf{r}}(k). \quad (2.30)$$

Substituindo a expressão da entrada de referência do pré-filtro em (2.30) na equação de estados do sistema em malha-fechada de (2.27), obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{cr}(k+1) &= A_{cr}\mathbf{x}_{cr}(k) + B_{cr}[C_r\mathbf{x}_r(k) + D_r\hat{\mathbf{r}}(k)] \\ &= A_{cr}\mathbf{x}_{cr}(k) + B_{cr}C_r\mathbf{x}_r(k) + B_{cr}D_r\hat{\mathbf{r}}(k). \end{aligned} \quad (2.31)$$



Agrupando (2.31) e (2.29), obtém-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{cr}(k+1) \\ \mathbf{x}_r(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{cr} & B_{cr}C_c \\ 0 & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{cr}(k) \\ \mathbf{x}_r(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{cr}D_r \\ B_r \end{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}(k). \quad (2.32)$$

A equação de saída  $\mathbf{c}(k)$  é obtida substituindo (2.30) em (2.28)

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(k) &= C_{cr}\mathbf{x}_{cr}(k) + D_{cr}[C_r\mathbf{x}_r(k) + D_r\hat{\mathbf{r}}(k)] \\ &= C_{cr}\mathbf{x}_{cr}(k) + D_{cr}C_r\mathbf{x}_r(k) + D_{cr}D_r\hat{\mathbf{r}}(k) \\ &= \begin{bmatrix} C_{cr} & D_{cr}C_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{cr}(k) \\ \mathbf{x}_r(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{cr}D_r \end{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}(k) \end{aligned} \quad (2.33)$$

O produto  $T_{cr}(z)T_r(z)$  no espaço de estados pode ser representado na forma compacta a partir de (2.32) e (2.33), como

$$T_{cr}(z)T_r(z) = \left[ \begin{array}{cc|c} A_{cr} & B_{cr}C_r & B_{cr}D_r \\ \mathbf{0} & A_r & B_r \\ \hline C_{cr} & D_{cr}C_r & D_{cr}D_r \end{array} \right]. \quad (2.34)$$

O erro de aproximação pode ser calculado a partir das representações no espaço de estados. Dada a representação do modelo como

$$\mathbf{x}_m(k+1) = A_m\mathbf{x}_m(k) + B_m\hat{\mathbf{r}}(k), \quad (2.35)$$

$$\hat{\mathbf{c}}(k) = C_m\mathbf{x}_m(k) + D_m\hat{\mathbf{r}}(k). \quad (2.36)$$

O erro é definido como sendo

$$\mathbf{e}(k) = \hat{\mathbf{c}}(k) - \mathbf{c}(k). \quad (2.37)$$

Substituindo (2.36) e (2.33) na equação (2.37) resulta em

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(k) &= C_m\mathbf{x}_m(k) + D_m\hat{\mathbf{r}}(k) - [C_{cr}\mathbf{x}_{cr}(k) + D_{cr}C_r\mathbf{x}_r(k) + D_{cr}D_r\hat{\mathbf{r}}(k)] \\ &= C_m\mathbf{x}_m(k) - C_{cr}\mathbf{x}_{cr}(k) - D_{cr}C_r\mathbf{x}_r(k) + [D_m - D_{cr}D_r]\hat{\mathbf{r}}(k) \\ &= \begin{bmatrix} C_m & -C_{cr} & -D_{cr}C_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m(k) \\ \mathbf{x}_{cr}(k) \\ \mathbf{x}_r(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_m - D_{cr}D_r \end{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}(k) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Agrupando as equações de estados (2.36) e (2.32), resulta

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_m(k+1) \\ \mathbf{x}_{cr}(k+1) \\ \mathbf{x}_r(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_m & 0 & 0 \\ 0 & A_{cr} & B_{cr}C_c \\ 0 & 0 & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m(k) \\ \mathbf{x}_{cr}(k) \\ \mathbf{x}_r(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_m \\ B_{cr}D_r \\ B_r \end{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}(k) \quad (2.39)$$

A representação no espaço de estados do erro de aproximação é definida a partir dos resultados de (2.38) e (2.39), como

$$E(z) \triangleq \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} A_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_m \\ \mathbf{0} & A_{cr} & B_{cr}C_r & B_{cr}D_r \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_r & B_r \\ \hline C_m & -C_{cr} & -D_{cr}C_r & D_m - D_{cr}D_r \end{array} \right]. \quad (2.40)$$

## 2.4 Problema de otimização $H_\infty$

O problema de aproximação de modelo  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser descrito como

$$\begin{aligned} T_r(z)^* &= \arg \min_{T_r(z)} \|E(z)\|_\infty \\ \text{sujeito a: } &T_r(z) \in \mathcal{F}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

ou seja, encontrar o pré-filtro  $T_r(z)$  que minimize o erro de aproximação de modelo (2.40), sendo  $\mathcal{F}$  o conjunto de pré-filtros estáveis e causais.

## 2.5 Considerações

Neste capítulo foi definida a formulação do problema de síntese do pré-filtro com base no método de aproximação de modelo  $\mathcal{H}_\infty$  que resulta em um problema de otimização. No próximo capítulo é exposto o desenvolvimento de uma formulação para solução do problema de otimização apresentado em um formato de desigualdades matriciais lineares para aplicação em sistemas precisamente conhecidos.

## Capítulo 3

# Formulação LMI para sistemas precisamente conhecidos

Neste capítulo é desenvolvida uma formulação LMI para o problema de otimização (2.41), aplicável a sistemas precisamente conhecidos, que possibilita a determinação do pré-filtro que minimiza a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do erro de aproximação. É definido um agrupamento para as matrizes do erro de aproximação que viabiliza estender os resultados apresentados em de Oliveira et al. (2002), para síntese de controladores por realimentação dinâmica de saída, para a síntese do pré-filtro baseada no problema de aproximação de modelo  $\mathcal{H}_\infty$ .

### 3.1 Formulação $H_\infty$ Estendida - LMI de Análise

O erro de aproximação de modelo é definido em (2.40), considerando  $D_r = 0$ , é representado por

$$E(z) \triangleq \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} A_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_m \\ \mathbf{0} & A_{cr} & B_{cr}C_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_r & B_r \\ \hline C_m & -C_{cr} & -D_{cr}C_r & D_m \end{array} \right]. \quad (3.1)$$

A razão por considerar a matriz  $D_r$  do filtro nula é que deve ser calculada *a posteriori* para garantir que o o ganho de regime estacionário seja unitário, de modo que o sinal de referência modificado pelo filtro,  $r(k)$ , se iguale ao sinal de referência real,  $\hat{r}(k)$ , em regime estacionário, isto é,  $\lim_{k \rightarrow \infty} r_i(k) = \hat{r}_i(k), \forall i$ .

Para adequar o problema de síntese do pré-filtro ao formato do problema de síntese de controle por realimentação dinâmica de saída apresentado em de Oliveira et al. (2002), é sugerida uma nova

organização das matrizes do erro de aproximação de modelo para representar a matriz  $\mathcal{A}$  em um formato de 4 blocos, definindo

$$\hat{A} \triangleq \begin{bmatrix} A_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{cr} \end{bmatrix}, \hat{B}_1 \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ B_{cr} \end{bmatrix}, \hat{B}_2 \triangleq \begin{bmatrix} B_m \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \hat{C} \triangleq \begin{bmatrix} C_m & -C_{cr} \end{bmatrix}, \hat{D} \triangleq -D_{cr}, \quad (3.2)$$

em que  $A_{cr} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $A_m \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p}$ ,  $B_m \in \mathbb{R}^{n_p \times n_u}$ ,  $A_r \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$  e  $B_r \in \mathbb{R}^{n_r \times n_u}$ .

Este agrupamento tem o objetivo de separar as variáveis de otimização (matrizes do pré-filtro) e os blocos constantes com acento circunflexo, resultando na representação:

$$E(z) \triangleq \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} \hat{A} & \hat{B}_1 C_r & \hat{B}_2 \\ \hline \mathbf{0} & A_r & B_r \\ \hline \hat{C} & \hat{D} C_r & \mathbf{0} \end{array} \right]. \quad (3.3)$$

Neste ponto é descrito como o Teorema 2, apresentado em de Oliveira et al. (2002), é utilizado para solução do problema de síntese do pré-filtro por meio do cálculo da norma  $\mathcal{H}_\infty$  estendida. A desigualdade matricial

$$\left[ \begin{array}{cccc} \mathcal{P} & \mathcal{A}\mathcal{G} & \mathcal{B} & \mathbf{0} \\ * & \mathcal{G} + \mathcal{G}^T - \mathcal{P} & \mathbf{0} & \mathcal{G}^T \mathcal{C}^T \\ * & * & \mathbf{I} & \mathcal{D}^T \\ * & * & * & \mu \mathbf{I} \end{array} \right] \succ 0, \quad (3.4)$$

permite que de posse das matrizes  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  possa ser calculada a norma  $\mathcal{H}_\infty = \sqrt{\mu}$  do erro de aproximação de modelo. Para isso é necessário buscar valores para as matrizes  $\mathcal{G}$  (cheia) e  $\mathcal{P}$  (simétrica), ambas com dimensão  $\in \mathbb{R}^{n_p+n_x+n_r \times n_p+n_x+n_r}$ , de tal forma que seja satisfeita a condição da desigualdade matricial.

A partir da LMI de análise (3.4) é verificada na próxima seção a possibilidade de síntese do pré-filtro de forma a obter o menor valor para a norma do erro de aproximação de modelo,  $\|E(z)\|_\infty^2$ , ou seja, encontrar as matrizes do filtro obtendo o menor valor de  $\mu$  numa representação convexa do problema.

### 3.1.1 Investigação de convexidade

Ao se substituir as matrizes da representação do erro de aproximação, equação (3.3), na formulação LMI de cálculo da norma  $\mathcal{H}_\infty$ , equação (3.4), aparecem produtos das matrizes da representação do pré-filtro e as matrizes de Lyapunov,  $\mathcal{P}$ , e auxiliar,  $\mathcal{G}$ , todas variáveis matriciais a serem determinadas, resultando em uma formulação BMI, cuja solução ótima global é mais difícil de se obter. São reproduzidas aqui as transformações e mudanças de variáveis linearizantes apresentadas em de Oli-

veira et al. (2002), para síntese de controladores por realimentação dinâmica de saída, adaptadas nesta dissertação para a síntese do pré-filtro baseada no problema de aproximação de modelo  $\mathcal{H}_\infty$ . Por meio destas transformações e mudanças de variáveis linearizantes, é possível obter uma formulação LMI para o problema de otimização (2.41), para o caso de sistemas precisamente conhecidos, cuja solução ótima é mais fácil de ser obtida.

Considere a decomposição da matriz  $\mathcal{G}$  em quatro blocos com dimensões compatíveis com as dos blocos da matriz  $\mathcal{A}$  em (3.2), são eles

$$\mathcal{G} \triangleq \begin{bmatrix} X & W \\ U & Z \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Ao montar as matrizes do erro de aproximação (3.3) na desigualdade matricial (3.4) é realizada as operações dos blocos seguintes

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathcal{G} &= \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_1 C_r \\ \mathbf{0} & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & W \\ U & Z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{A}X + \hat{A}U & \hat{A}W + \hat{B}_1 C_r Z \\ A_r U & A_r Z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.6)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^T \mathcal{C}^T &= \begin{bmatrix} X^T & U^T \\ W^T & Z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{C}^T \\ C_r^T D^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X^T \hat{C}^T + U^T C_r^T D^T \\ W^T \hat{C}^T + Z^T C_r^T D^T \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Os produtos das variáveis de otimização do filtro  $A_r$  e  $C_r$  com os blocos  $U$  e  $Z$  da variável  $\mathcal{G}$  caracterizam o problema como bilinear, portanto não necessariamente convexo. Para tornar o problema convexo é aplicado uma transformação de congruência e mudança de variáveis linearizantes sobre a desigualdade (3.4) na próxima seção.

## 3.2 Formulação $H_\infty$ aplicada à síntese do pré-filtro

Considere a mesma transformação apresentada em de Oliveira et al. (2002) para o caso de realimentação dinâmica de saída. Multiplicando a desigualdade matricial no problema (3.4), a direita por

$T \triangleq \text{diag}[\mathcal{T}, \mathcal{T}, \mathbf{I}, \mathbf{I}]$  e a esquerda por  $T^T$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{T}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{T}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P} & \mathcal{A}\mathcal{G} & \mathcal{B} & \mathbf{0} \\ * & \mathcal{G} + \mathcal{G}^T - \mathcal{P} & \mathbf{0} & \mathcal{G}^T\mathcal{C}^T \\ * & * & \mathbf{I} & \mathcal{D}^T \\ * & * & * & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.8)$$

resulta em

$$\begin{bmatrix} \mathcal{T}^T\mathcal{P}\mathcal{T} & \mathcal{T}^T\mathcal{A}\mathcal{G}\mathcal{T} & \mathcal{T}^T\mathcal{B} & \mathbf{0} \\ * & \mathcal{T}^T(\mathcal{G} + \mathcal{G}^T - \mathcal{P})\mathcal{T} & \mathbf{0} & \mathcal{T}^T\mathcal{G}^T\mathcal{C}^T \\ * & * & \mathbf{I} & \mathcal{D}^T \\ * & * & * & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0. \quad (3.9)$$

É necessário eliminar o produto de variáveis de otimização na forma da desigualdade matricial de representação do problema de síntese do pré-filtro para sistemas precisamente conhecidos. A estratégia utilizada é escolher uma matriz  $\mathcal{T}$  que possua entre seus blocos  $\mathbf{I}$  ou  $\mathbf{0}$  de tal forma que também o produto  $\mathcal{G}\mathcal{T}$  possua esses blocos para diminuir a complexidade da formulação. Para isso é definido os blocos da matriz  $\mathcal{G}$  e sua inversa  $\mathcal{G}^{-1}$

$$\mathcal{G} \triangleq \begin{bmatrix} X & W \\ U & Z \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G}^{-1} \triangleq \begin{bmatrix} Y^T & R^T \\ V^T & E^T \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

de modo que o produto entre os dois resulta na matriz identidade, conforme

$$\begin{aligned} \mathcal{G}\mathcal{G}^{-1} &= \begin{bmatrix} XY^T + WV^T & XR^T + WE^T \\ UY^T + ZV^T & UR^T + ZE^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Como exposto em de Oliveira et al. (2002), a matriz de transformação de congruência é definida como

$$\mathcal{T} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{I} & Y^T \\ \mathbf{0} & V^T \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

com a primeira coluna formada pelos blocos  $\mathbf{I}$  e  $\mathbf{0}$ , para que o produto  $\mathcal{G}\mathcal{T}$  só tenha variáveis na

primeira coluna:

$$\begin{aligned} \mathcal{GT} &= \begin{bmatrix} X & XY^T + WV^T \\ U & UY^T + ZV^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X & \mathbf{I} \\ U & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

de tal forma que os termos variáveis da segunda coluna do produto  $\mathcal{GT}$  são cancelados pela substituição observada na equação (3.11) que apresenta igualdade termo a termo resultante da primeira coluna da matriz identidade.

A partir deste ponto, na sequência do texto é calculado os elemento pertencente a matriz da desigualdade apresentada em (3.9). Primeiro calcula-se o elemento  $\mathcal{T}^T \mathcal{P} \mathcal{T}$  localizado na posição (1,1) - apontamento referenciado à primeira linha e primeira coluna da matriz apresentada em (3.9). Inicialmente é definida a matriz  $\mathcal{P}$ , como

$$\mathcal{P} \triangleq \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

em seguida é aplicada a transformação de congruência sobre a matriz  $\mathcal{P}$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^T \mathcal{P} \mathcal{T} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ Y & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & Y^T \\ \mathbf{0} & V^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ YP_1 + VP_2^T & YP_2 + VP_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & Y^T \\ \mathbf{0} & V^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_1 & P_1 Y^T + P_2 V^T \\ YP_1 + VP_2^T & YP_1 Y^T + VP_2^T Y^T + YP_2 V^T + VP_3 V^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.15)$$

e com as mudanças de variáveis  $P \triangleq P_1$ ,

$$J \triangleq P_1 Y^T + P_2 V^T, \quad (3.16)$$

$$H \triangleq YP_1 Y^T + VP_2^T Y^T + YP_2 V^T + VP_3 V^T, \quad (3.17)$$

o termo resulta em

$$\mathcal{T}^T \mathcal{P} \mathcal{T} = \begin{bmatrix} P & J \\ J^T & H \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

O segundo termo calculado,  $\mathcal{T}^T \mathcal{A} \mathcal{G} \mathcal{T}$ , pertence à posição (1,2) da matriz de (3.9), é obtido pré-

multiplicando o produto  $\mathcal{GT}$  obtido em (3.13) por  $\mathcal{T}^T \mathcal{A}$ , se desenvolvendo em

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^T \mathcal{AGT} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ Y & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_1 C_r \\ \mathbf{0} & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & \mathbf{I} \\ U & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_1 C_r \\ Y \hat{A} & Y \hat{B}_1 C_r + V A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & \mathbf{I} \\ U & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{A} X + \hat{B}_1 C_r U & \hat{A} \\ Y \hat{A} X + (Y \hat{B}_1 C_r + V A_r) U & Y \hat{A} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

e com as mudanças de variáveis linearizantes

$$L \triangleq C_r U, \quad (3.20)$$

$$Q \triangleq V A_r U + Y \hat{A} X + Y \hat{B}_1 C_r U, \quad (3.21)$$

resulta em blocos que não apresentam produtos entre as variáveis

$$\mathcal{T}^T \mathcal{AGT} = \begin{bmatrix} \hat{A} X + \hat{B}_1 L & \hat{A} \\ Q & Y \hat{A} \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

O bloco  $\mathcal{T}^T \mathcal{B}$  é calculado como

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^T \mathcal{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ Y & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_2 \\ B_r \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{B}_2 \\ Y \hat{B}_2 + V B_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{B}_2 \\ Y \hat{B}_2 + F \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

com a mudança de variável

$$F \triangleq V B_r. \quad (3.24)$$

O bloco  $\mathcal{CGT}$  resulta em

$$\begin{aligned} \mathcal{CGT} &= \begin{bmatrix} \hat{C} & \hat{D} C_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & \mathbf{I} \\ U & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{C} X + \hat{D} C_r U & \hat{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{C} X + \hat{D} L & \hat{C} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

utilizando a mudança de variável  $L \triangleq C_r U$  definida em (3.20).

O termo  $\mathcal{T}^T (\mathcal{G} + \mathcal{G}^T - \mathcal{P}) \mathcal{T}$  localizado na posição (2,2) da matriz da desigualdade apresentada



em (3.9) é obtido pela subtração da expressão algébrica  $\mathcal{T}^T(\mathcal{G} + \mathcal{G}^T)\mathcal{T}$  menos a expressão  $\mathcal{T}^T\mathcal{P}\mathcal{T}$ . O cálculo dessa primeira expressão é dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^T(\mathcal{G} + \mathcal{G}^T)\mathcal{T} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ Y & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X + X^T & W + U^T \\ U + W^T & Z + Z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & Y^T \\ \mathbf{0} & V^T \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} X + X^T & W + U^T \\ Y(X + X^T) + V(U + W^T) & Y(W + U^T) + V(Z + Z^T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & Y^T \\ \mathbf{0} & V^T \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} X + X^T & W + U^T \\ (YX^T + VW^T) + (YX + VU) & YW + VZ + (YU^T + VZ^T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & Y^T \\ \mathbf{0} & V^T \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} X + X^T & W + U^T \\ \mathbf{I} + S & YW + VZ + \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & Y^T \\ \mathbf{0} & V^T \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} X + X^T & (XY^T + WV^T) + (X^TY^T + U^TV^T) \\ S + \mathbf{I} & SY^T + Y^T + (YW + VZ)V^T \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Para eliminar os produtos entre as variáveis  $X, Y, U, V$  e  $W$  da expressão  $(XY^T + WV^T) + (X^TY^T + U^TV^T)$  é definida a mudança de variável linearizante

$$S \triangleq YX + VU, \tag{3.27}$$

a transposição dessas matrizes resulta em  $S^T = X^TY^T + U^TV^T$  e a equivalência do bloco de posição (1,1) da matriz de (3.11) em relação à matriz identidade:  $\mathbf{I} = XY^T + WV^T$ ; permitem obter a convexidade do bloco de posição (1,2) da matriz última dos passos de solução de (3.26). Deste modo a expressão  $\mathcal{T}^T(\mathcal{G} + \mathcal{G}^T)\mathcal{T}$  passa a ser

$$\mathcal{T}^T(\mathcal{G} + \mathcal{G}^T)\mathcal{T} = \begin{bmatrix} X + X^T & \mathbf{I} + S^T \\ \mathbf{I} + S & SY^T + Y^T + (YW + VZ)V^T \end{bmatrix}, \tag{3.28}$$

e continuando

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^T(\mathcal{G} + \mathcal{G}^T)\mathcal{T} &= \begin{bmatrix} X + X^T & \mathbf{I} + S^T \\ \mathbf{I} + S & SY^T + Y^T + YWV^T + VZV^T \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} X + X^T & \mathbf{I} + S^T \\ \mathbf{I} + S & SY^T + Y^T + Y(\mathbf{I} - XY^T) - VUY^T \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} X + X^T & \mathbf{I} + S^T \\ \mathbf{I} + S & SY^T + Y^T + Y - (YX - VU)Y^T \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} X + X^T & \mathbf{I} + S^T \\ \mathbf{I} + S & SY^T + Y^T + Y - SY^T \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} X + X^T & \mathbf{I} + S^T \\ \mathbf{I} + S & Y + Y^T \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

O bloco  $\mathcal{T}^T(\mathcal{G} + \mathcal{G}^T - \mathcal{P})\mathcal{T}$  é obtido pela operação de subtração do termo  $\mathcal{T}^T(\mathcal{G} + \mathcal{G}^T)\mathcal{T}$  por  $\mathcal{T}^T\mathcal{P}\mathcal{T}$  desenvolvidos respectivamente em (3.26) e (3.29), resultando em

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^T(\mathcal{G} + \mathcal{G}^T - \mathcal{P})\mathcal{T} &= \mathcal{T}^T(\mathcal{G} + \mathcal{G}^T)\mathcal{T} - \mathcal{T}^T\mathcal{P}\mathcal{T} \\
&= \begin{bmatrix} X + X^T - P & \mathbf{I} + S^T - J \\ \mathbf{I} + S - J^T & Y + Y^T - H \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Portanto a transformação sugerida em (3.9) sobre a desigualdade matricial no problema BMI (3.4) a direita por  $T \triangleq \text{diag}[\mathcal{T}, \mathcal{T}, \mathbf{I}, \mathbf{I}]$  e a esquerda por  $T^T$  e considerando as mudanças de variáveis linearizantes, a BMI pode ser transformada em uma LMI resultando no seguinte problema de otimização convexo:

**Problema LMI de síntese de pré-filtro baseado aproximação de modelo  $\mathcal{H}_\infty$  em tempo discreto:** minimizar  $\mu$  sujeito a

$$\begin{bmatrix} P & J & \hat{A}X + \hat{B}_1L & \hat{A} & \hat{B}_2 & \mathbf{0} \\ * & H & Q & Y\hat{A} & Y\hat{B}_2 + F & \mathbf{0} \\ * & * & X + X^T - P & \mathbf{I} + S^T - J & \mathbf{0} & X^T\hat{C}^T + L^T\hat{D}^T \\ * & * & * & Y + Y^T - H & \mathbf{0} & \hat{C}^T \\ * & * & * & * & \mathbf{I} & D_m^T \\ * & * & * & * & * & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0, \tag{3.31}$$

sendo variáveis as matrizes  $X, L, Y, F, Q, S, J$  e as matrizes simétricas  $P$  e  $H$ . A desigualdade

$\|E(z)\|_\infty^2 < \mu$  é garantida pelo pré-filtro calculado como:

$$\begin{aligned} C_r &= LU^{-1}, \\ B_r &= V^{-1}F, \\ A_r &= V^{-1}(Q - Y\hat{A}X - Y\hat{B}_1C_rU)U^{-1}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

sendo  $U$  e  $V$  quaisquer matrizes não-singulares tal que

$$VU = S - YX,$$

pela equação (3.27). Para obter as variáveis  $V$  e  $U$  separadas é utilizada a decomposição em valores singulares (SVD, do inglês, *Singular Value Decomposition*). Pela decomposição SVD podemos escrever

$$VU = U_d \Sigma_d V_d^T = S - YX, \quad (3.33)$$

sendo  $U_d$  e  $V_d$  matrizes unitárias e  $\Sigma_d$  uma matriz diagonal. A partir destas matrizes podemos calcular as matrizes  $U$  e  $V$  como sendo

$$\begin{aligned} V &= U_d \sqrt{\Sigma_d}, \\ U &= \sqrt{\Sigma_d} V_d^T. \end{aligned}$$

Para impor que o ganho em regime estacionário da função de transferência do pré-filtro seja unitário, de modo que os sinais de referência filtrados,  $r$ , apresentem o mesmo valor dos sinais de comando,  $\hat{r}$ , em regime estacionário, a matriz  $D_r$  considerada inicialmente nula é calculada a partir da definição da função de transferência do filtro

$$T_r(z) = C_r(z\mathbf{I} - A_r)^{-1}B_r + D_r, \quad (3.34)$$

e utilizando o teorema do valor final para sistemas discretos: fazendo  $z$  tender a 1 e igualando a função de transferência do filtro à matriz identidade

$$\lim_{z \rightarrow 1} T_r(z) = C_r(\mathbf{I} - A_r)^{-1}B_r + D_r = \mathbf{I}, \quad (3.35)$$

resolvendo para  $D_r$  chega-se a fórmula para o cálculo da matriz  $D_r$  definitiva para implementação

$$D_r = \mathbf{I} - C_r(\mathbf{I} - A_r)^{-1}B_r. \quad (3.36)$$

A ordem do pré-filtro é a soma das ordens de  $T_m(z)$  e  $T_{cr}(z)$ . Se desejado, é possível aplicar

técnicas de redução de modelos para reduzir a ordem do pré-filtro mantendo desempenho similar, até uma determinada ordem que depende de cada problema.

### 3.2.1 LMI para delimitação da região para posicionamento dos pólos

Com a inclusão do pré-filtro, o sinal de controle pode apresentar bruscas variações, característica de sistemas com pólos sub-amortecidos rápidos. Para evitar esse problema, o problema de otimização pode ser reestruturado, para incluir uma LMI de restrição de pólos em uma região disco.

A restrição regional de pólos em um disco é apresentada no formato LMI em Chilali e Gahinet (1996):

$$\begin{bmatrix} -rX & qX + AX \\ * & -rX \end{bmatrix} \prec 0, \quad X \succ 0. \quad (3.37)$$

sendo  $r$  o raio do disco de centro em  $-q$  localizado sobre o eixo real que delimita a região de alocação dos pólos, no plano  $z$ .

Aplicando as transformações de congruência e mudanças de variáveis propostas em de Oliveira et al. (2002), chega-se a nova formulação da restrição regional de pólos para o sistema em malha-fechada para síntese do pré-filtro:

$$\begin{bmatrix} P & J & (\hat{A} - qI)X + \hat{B}_1L & \hat{A} - qI \\ * & H & -qS + Q & Y(\hat{A} - qI) \\ * & * & r^2(X + X^T - P) & r^2(I + S^T - J) \\ * & * & * & r^2(Y + Y^T - H) \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.38)$$

Com a diferença em relação a condição apresentada em (3.37) que o centro do disco é determinado por  $q$  ao invés de  $-q$ .

É importante frisar que o problema de otimização será infactível se os pólos do modelo de referência não fizerem parte da região delimitada pelo disco.

## 3.3 Considerações

Como ocorre no caso de síntese de controladores por realimentação dinâmica de saída em de Oliveira et al. (2002), o problema LMI (3.31) pode ser aplicado para calcular um pré-filtro fixo apenas no caso de sistemas precisamente conhecidos, uma vez que a matriz  $A_r$  é função das matrizes do sistema. Em caso de sistemas incertos, é necessário utilizar procedimentos para solução de problemas BMI como em Helmersson (1994). Neste trabalho este procedimento é desenvolvido no capítulo 5.

No próximo capítulo são apresentados exemplos de aplicação da formulação LMI de síntese do pré-filtro em sistemas precisamente conhecidos.

## Capítulo 4

# Resultados de aplicação do pré-filtro para sistemas precisamente conhecidos

É apresentado neste capítulo resultados para aplicação da formulação LMI para sistemas precisamente conhecidos tratados pela literatura na área. O primeiro exemplo considera o uso do pré-filtro em um processo de laboratório de quatro tanques com grande acoplamento de suas malhas de controle, apresentado em Johansson (2000). No segundo exemplo é feita a otimização do processo de destilação que ocorre em uma coluna Wood e M.W.Berry (1973). No terceiro exemplo a formulação é aplicada em uma coluna de destilação com três malhas de controle apresentada em Ogunnaike et al. (1983).

### 4.1 Planta de quatro tanques

O processo de laboratório descrito em Johansson (2000) é utilizado para demonstrar técnicas de controle multivariáveis sendo considerado em vários trabalhos na literatura (Johansson, 2002; Åström et al., 2002; Garelli et al., 2006; Alavi et al., 2007; Moaveni e Sedigh, 2008; Bianchi et al., 2008; Gundes et al., 2009; Jevtović e Matausek, 2010; Garrido et al., 2011; Liu et al., 2011; Alipouri e Posh-tan, 2013; Caponnetton e Dongola, 2013). Este processo é constituído de quatro tanques, conforme figura 4.1, e tem como variáveis controladas os níveis  $h_1$  e  $h_2$  dos tanques inferiores. O controle dos níveis dos tanques é realizado através das bombas 1 e 2 por intermédio dos sinais de tensão  $v_1$  e  $v_2$  que são as variáveis manipuladas. A vazão de água bombeada é dividida pelas duas válvulas de três vias conforme diagrama. Cada tanque possui um orifício inferior pelo qual a água flui dos tanques superiores para os inferiores e finalmente para o reservatório. Para aumentar o nível,  $h_1$ , do tanque 1, pelo acionamento da bomba 1, o nível do tanque 4 também é aumentado e por sua vez contribui para o aumento do nível do tanque 2. Essa situação acontece de forma semelhante na tentativa de

aumentar o nível  $h_2$ , logo pode-se inferir que existe um acoplamento significativo que é observado na tentativa de utilizar somente o controle PI. O objetivo de desacoplamento das variáveis de controle, ou seja, modificar o nível de um tanque sem afetar o nível do outro, pela manipulação somente do sinal de referência, é conseguido com o uso do pré-filtro otimizado.

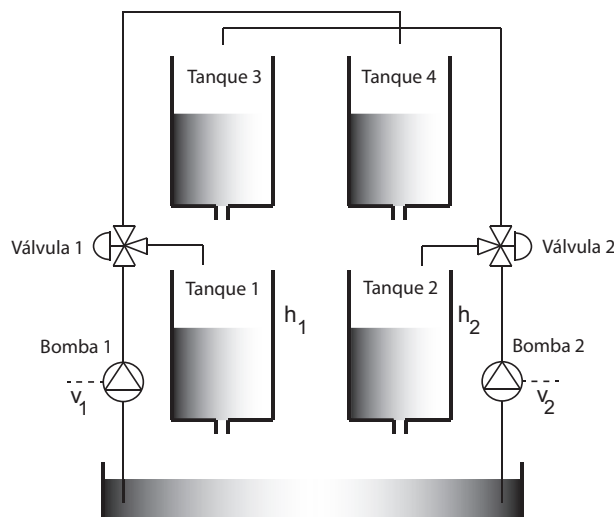


Figura 4.1: Diagrama esquemático do processo dos quatro tanques.

O modelo em espaço de estados linearizado que representa a planta de quatro tanques, considerando os desvios das variáveis em torno de um ponto de operação é

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt}(t) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & \frac{A_3}{A_1 T_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & 0 & \frac{A_4}{A_2 T_4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_4} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} \\ \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} & 0 \\ \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3} & 0 \\ 0 & \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t), \\
 \mathbf{z}(t) &= \begin{bmatrix} k_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_c & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \\
 \mathbf{y}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_c & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{w}(t)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

As variáveis de estados são as variações dos níveis dos quatro tanques em torno do ponto de operação,  $x_i = h_i - h_i^0$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , sendo  $h_i$  o nível atual do tanque e  $h_i^0$  o nível respectivo de cada tanque no ponto de operação, medidos em centímetros. As entradas representadas pelo vetor  $\mathbf{u} = [v_1 - v_1^0 \quad v_2 - v_2^0]^T$  e as saídas controladas  $\mathbf{z} = [k_c(h_1 - h_1^0) \quad k_c(h_2 - h_2^0)]^T = [k_c x_1 \quad k_c x_2]$  são modeladas como sinais de diferença de potencial elétrico com unidade em Volts (V), sendo  $k_c$  o ganho

Tabela 4.1: Parâmetros de operação do ponto de fase não-mínima.

Parâmetros		Valores
$(h_1^0, h_2^0)$	[cm]	(12,6; 13,0)
$(h_3^0, h_4^0)$	[cm]	(4,8; 4,9)
$(v_1^0, v_2^0)$	[V]	(3,15; 3,15)
$(k_1, k_2)$	[cm <sup>3</sup> /Vs]	(3,14; 3,29)
$(\gamma_1, \gamma_2)$		(0,43; 0,34)
$(T_1, T_2)$		(63; 91)
$(T_3, T_4)$		(39; 56)

do sensor. Os sinais de controle são os desvios da diferença de potencial elétrico das duas bombas  $u_j \triangleq v_j - v_j^0, j = 1, 2$ . As entradas exógenas são os sinais de referência,  $w = [r_1 \ r_2]^T$ , representam suas variações em torno do ponto de operação. As variáveis medidas são os sinais de referência, desejados para os níveis, e os sinais atuais que encontram-se os níveis,  $y = [r_1 \ r_2 \ z_1 \ z_2]^T$ . As constantes de tempo relacionadas a cada tanque são

$$T_i \triangleq \frac{A_i}{a_i} \sqrt{\frac{2h_i^0}{g}}, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (4.2)$$

Os valores dos parâmetros do modelo linearizado para os quatro tanques são: área da seção transversal circular dos tanques  $A_1 = A_3 = 28\text{cm}^2$ ,  $A_2 = A_4 = 32\text{cm}^2$ ; seção transversal do orifício de saída  $a_1 = a_3 = 0,071\text{cm}^2$ ,  $a_2 = a_4 = 0,057\text{cm}^2$ ; ganho do sensor  $k_c = 0,50\text{V/cm}$ ; e aceleração da gravidade  $g = 981\text{cm/s}^2$ .

Em Johansson (2000) são considerados dois pontos de operação  $P_-$  e  $P_+$ , que correspondem a pontos de operação de fase mínima e fase não-mínima do processo, respectivamente. Esses pontos são obtidos pelo ajuste dos parâmetros  $\gamma_i, i = 1, 2$ , que definem as posições das duas válvulas de três vias.

O processo no ponto de operação de fase mínima pode ser desacoplado de forma satisfatória por meio de um controlador PI descentralizado conforme apresentado em Gonçalves et al. (2012). Para o ponto de operação de fase não-mínima é mais difícil obter o desacoplamento das malhas de controle, portanto é a partir deste ponto de operação que aplicamos a síntese do pré-filtro para otimização deste processo. Os parâmetros para o sistema operando no ponto de fase não-mínima são apresentados na tabela 4.1 (Johansson, 2000). O fluxo de entrada dos tanques é deste modo função dos coeficientes  $k_1$  e  $k_2$  da bomba e dos coeficientes  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  das válvulas de três vias.



### 4.1.1 Controle por realimentação

Para o controle da planta ajustada para operação no ponto de fase não-minima, descrita, é utilizado como primeiro bloco o controlador PI descentralizado apresentado em Johansson (2000). Nesse artigo os parâmetros para o controlador, respectivamente para as malhas 1 e 2, são: ganhos proporcionais  $k_{p,1} = 1,5$  e  $k_{p,2} = -0,12$ ; e tempos para o controle integral  $T_{i,1} = 110$  e  $T_{i,2} = 220$ .

### 4.1.2 Projeto do pré-filtro

A instalação do bloco de controle adicional, o pré-filtro, tem por objetivos:

1. atender à resposta de rastreamento de acordo com um modelo de referência;
2. desacoplamento das malhas de controle.

Para satisfazer ao primeiro objetivo é necessário ter-se um modelo de referência que possua as dinâmicas da resposta transitória desejadas. O segundo objetivo depende da formulação apresentada do erro de aproximação de modelo definido na equação (2.40). Quanto menor a norma  $H_\infty$  do erro  $E(z)$  calculado, mais próxima a matriz de transferência do sistema resultante está do modelo com característica diagonal, conseqüentemente menor é o acoplamento. Porém, dependendo da escolha do modelo de referência, a otimização não consegue encontrar um pré-filtro que reduza satisfatoriamente a norma do erro para proporcionar a resposta transitória desejada e o desacoplamento entre as malhas de controle. Contudo, para o nosso trabalho, é preferível que durante a escolha do modelo de referência o segundo objetivo seja majoramente ponderado em relação ao primeiro. Deste modo, o desacoplamento das malhas de um sistema de controle é garantido pelo pré-filtro quando se tem a liberdade de ajustar o modelo de referência para obter uma menor norma  $H_\infty$ .

### Escolha do modelo de referência

Para desacoplamento será adotado um modelo de referência diagonal

$$T_m(z) = \begin{bmatrix} T_{m_1}(z) & 0 \\ 0 & T_{m_2}(z) \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

É adotado para as funções da diagonal do modelo, funções de transferência que combinam um termo de segunda ordem e o atraso por aproximação de Padé de primeira ordem

$$T_{m,i}(s) = \frac{\omega_{n,i}^2(-\tau_i s + 1)}{(\tau_i s + 1)(s^2 + 2\zeta_i \omega_{n,i} s + \omega_{n,i}^2)}, \quad i = 1, 2. \quad (4.4)$$

com  $\tau_1 = 50$ ;  $\omega_{n,1} = 0,01$ ;  $\zeta_1 = 0,8$ ;  $\tau_2 = 60$ ;  $\omega_{n,2} = 0,01$  e  $\zeta_2 = 1,5$ . Considerando o tempo de amostragem  $T_s = 2,5$ s e uma realização balanceada baseada no Graminiano, as funções de transferência do modelo de referência em tempo discreto resultam em

$$\begin{aligned} T_{m_1}(z) &= \frac{-0,00029817(z - 1,051)(z + 0,9544)}{(z - 0,9512)(z^2 - 1,96z + 0,9608)}; \\ T_{m_2}(z) &= \frac{-0,00029638(z - 1,043)(z + 0,9486)}{(z - 0,9905)(z - 0,9592)(z - 0,9366)}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

### Processo de Otimização: busca do pré-filtro ótimo

Para resolver a LMI de síntese do pré-filtro (3.31) que caracteriza o problema de otimização, é utilizado o comando *mincx*( $\cdot$ ) que pertence ao pacote MATLAB<sup>®</sup> LMI Control Toolbox. É incluído na formulação uma LMI de restrição para posicionamento de pólos (3.38), com  $q = 1$  e  $r = 0,4$ . Considerando as seguintes opções *options* =  $[1 \times 10^{-6} \ 500 \ 1 \times 10^5 \ 10 \ 0]$  na função *mincx*( $\cdot$ ) é encontrado o pré-filtro com a função de transferência

$$T_r(z) = \frac{1}{D(z)} \begin{bmatrix} N_{11}(z) & N_{12}(z) \\ N_{21}(z) & N_{22}(z) \end{bmatrix},$$

em que

$$N_{11}(z) = 0,024746(z - 2,445)(z - 1,026)(z - 0,9905)(z - 0,9887)(z - 0,9769)(z - 0,9592) \dots \\ (z - 0,9364)(z - 0,8582)(z - 0,7753)(z - 0,771)(z^2 - 1,835z + 0,852),$$

$$N_{21}(z) = -0,013043(z - 2,203)(z - 1)(z - 0,9887)(z - 0,9733)(z - 0,9553)(z - 0,953) \dots \\ (z - 0,7644)(z - 0,6908)(z^2 - 1,96z + 0,9602)(z^2 - 1,82z + 0,8498),$$

$$N_{12}(z) = -0,019855(z - 23,73)(z - 1)(z - 0,9905)(z - 0,9775)(z - 0,864) \dots \\ (z - 0,722)(z^2 - 1,92z + 0,922)(z^2 - 1,874z + 0,8782)(z^2 - 1,937z + 0,949),$$

$$N_{22}(z) = 0,012102(z - 34,52)(z - 0,9966)(z - 0,9775)(z - 0,9515)(z - 0,9229) \dots \\ (z - 0,7372)(z^2 - 1,96z + 0,9603)(z^2 - 1,953z + 0,954)(z^2 - 1,72z + 0,7573),$$

$$D(z) = (z - 0,7301)(z - 0,8692)(z - 0,9365)(z - 0,9515)(z - 0,9592)(z - 0,9775) \dots \\ (z - 0,9887)(z - 0,9905)(z^2 - 1,96z + 0,9607)(z^2 - 1,492z + 0,6035).$$

resultando na norma do erro de aproximação  $\|E(z)\|_\infty = 0,0407$ . O tempo de processamento do algoritmo de busca executado em um computador<sup>1</sup>, para essa solução, foi de aproximadamente 8 minutos e 1 segundo.

### 4.1.3 Resposta em frequência

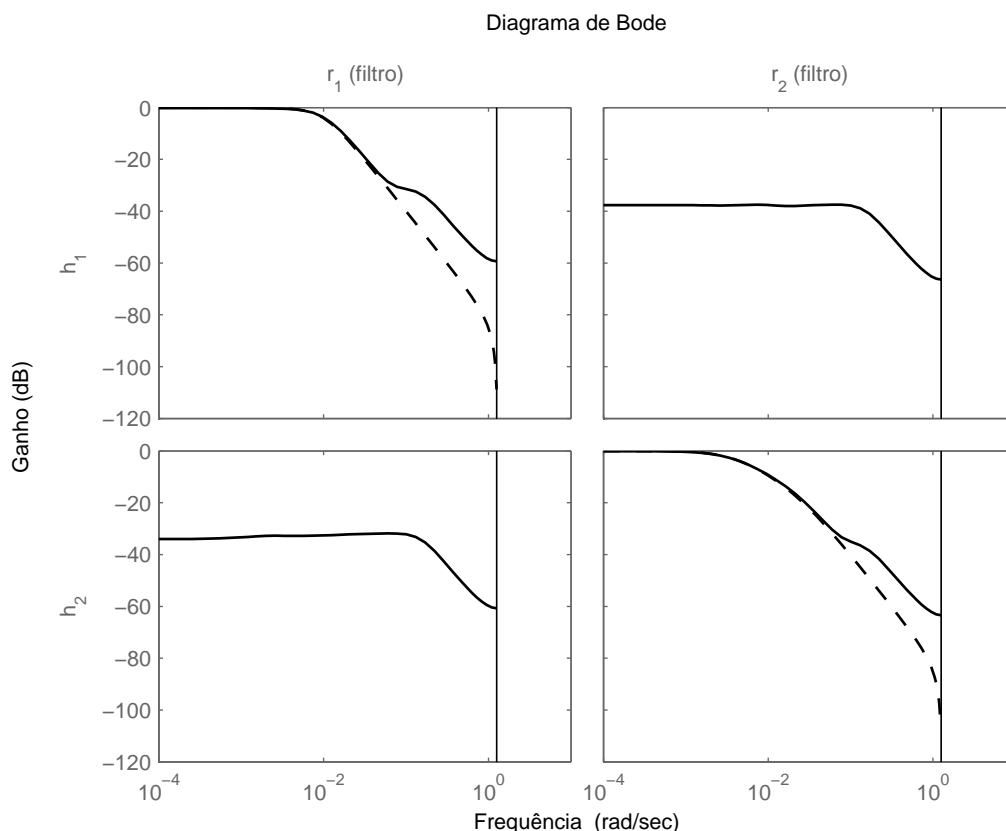


Figura 4.2: Resposta em Frequência de  $T_{cr}(z)T_r(z)$  (linha cheia) e do modelo de referência (linha tracejada).

A resposta em frequência obtida pelo uso do pré-filtro, com o produto  $T_{cr}(z)T_r(z)$ , é apresentada na figura 4.2. A figura relaciona em quatro gráficos o ganho em amplitude das saídas em decibéis (dB) para sinais senoidais aplicados nas entradas em uma faixa de frequência que varia de 0,0001 a 1,26 radianos por segundo. Nessa figura, as respostas em frequência de cada função de transferência de  $T_{cr}(z)T_r(z)$  são representadas por linha cheia e o modelo  $T_m(z)$ , proposto na equação (4.5), são representadas por linha tracejada.

<sup>1</sup>Com as configurações de *hardware*: processador Intel(R) Core(TM) i5 CPU operando na frequência de 2,67 GHz com memória (RAM) de 4GB; e de *software*: sistema operacional de 64 Bits.

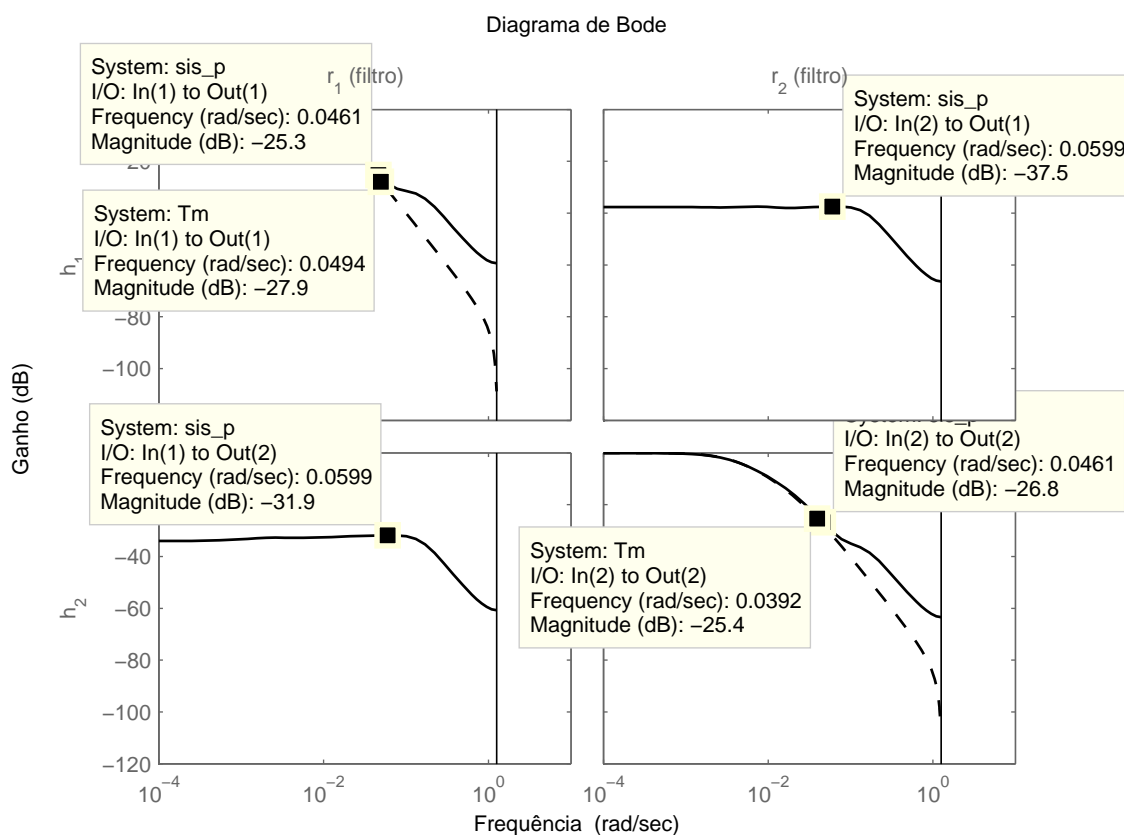


Figura 4.3: Resposta em Frequência de  $T_{cr}(z)T_r(z)$  (linha cheia) e do modelo de referência (linha tracejada) com marcadores.

Para ilustrar a análise realizada na sequência do texto, na figura 4.3, alguns pontos são evidenciados por marcadores, fornecendo a informação precisa das coordenadas do ponto a que remetem. As respostas em frequência apresentadas nas duas diagonais do diagrama estão de acordo com a resposta do modelo de referência dentro da faixa de frequência de 0,0001 a 0,04 radianos por segundo, faixa em que a magnitude do ganho é significativa. Para frequências superiores a essa faixa o sistema funciona como um filtro rejeita altas. Isso significa que a resposta transitória do sistema em malha-fechada com a adição do pré-filtro será similar a resposta especificada pelo modelo de referência.

Os gráficos fora da diagonal principal do diagrama relacionam o ganho entre a entrada de referência  $r_2$  e a saída  $h_1$  da planta e a entrada de referência  $r_1$  e a saída  $h_2$ . Como evidenciado, os maiores ganhos são -31,9dB e -37,5dB, ambos verificados na frequência de 0,0599 rad/s. Esses valores representam ganhos menores que 0,03 em unidade adimensional, segundo a definição de decibéis,  $mag_{db} = 20 \log_{10}(mag)$ , em que  $mag$  é o valor de ganho real e  $mag_{db}$  o ganho em decibéis. Em fim, o desacoplamento entre as malhas pode ser averiguado, pois a entrada de referência de um canal interfere com ganho muito pequeno para faixa de frequência de interesse.

### 4.1.4 Resposta Transitória

Para verificar o efeito do projeto do pré-filtro em relação a interação entre as malhas de controle, o sistema é simulado pela mudança do sinal em degrau dos sinais de referência. A entrada 1 recebe o sinal  $\hat{r}_1(t) = 1 \times 1(t)$  Volts e a entrada 2 recebe o sinal  $\hat{r}_2(t) = 1 \times 1(t - 4000)$  Volts, em que  $1(t - \tau)$  representa a função degrau unitário transladado por  $\tau$  segundos.

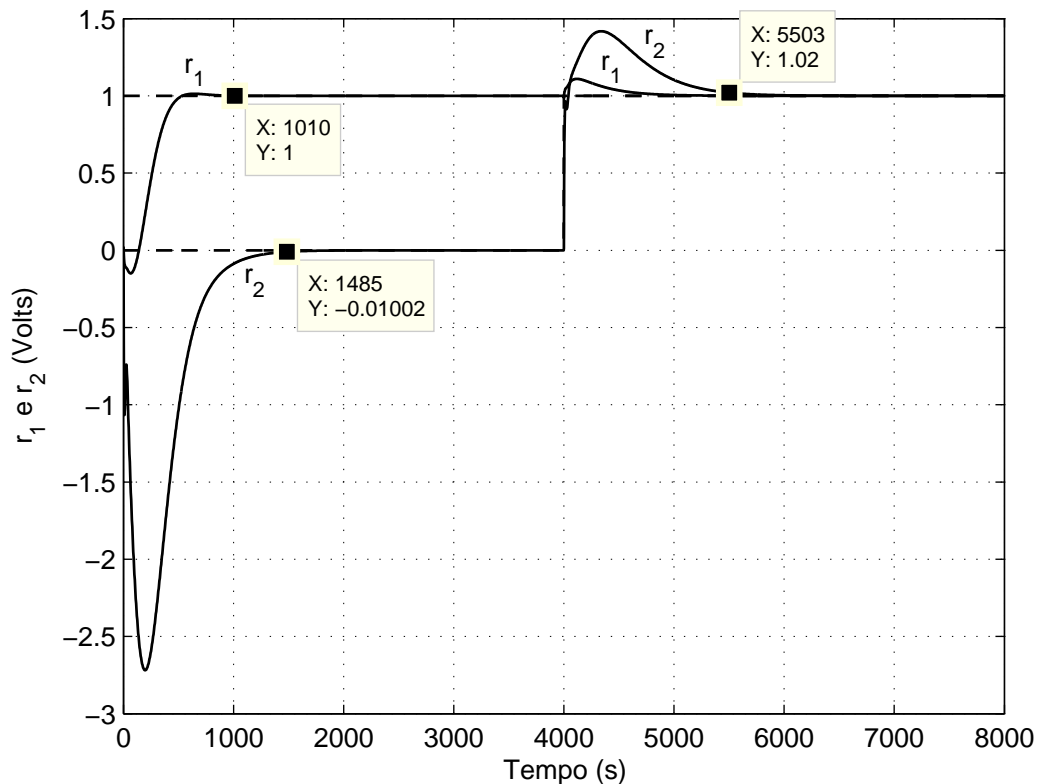


Figura 4.4: Respostas do pré-filtro:  $r_1$  (linha pontilhada) e  $r_2$  (linha cheia); aos sinais de referência das entradas (linha tracejada).

A figura 4.4 apresenta os novos valores para as referências no período de simulação de  $t \in [0 \ 8000]$ . Durante esse período, a entrada um do pré-filtro,  $\hat{r}_1$ , passa de zero para 1 Volt, em  $t = 0$ , e a entrada dois permanece em zero. Mediante essa variação o pré-filtro calculado impõem novos valores para as referências do controle dos níveis dos tanques,  $h_1$  e  $h_2$ . De acordo com a figura, a resposta do pré-filtro para variável  $r_1$  apresenta uma oscilação e se estabiliza aproximadamente em  $t = 1000$  segundos, porém a resposta  $r_2$ , partindo do valor zero em  $t = 0$  varia consideravelmente estabilizando-se aproximadamente em  $t = 1500$  segundos. É interessante perceber que, apesar de a referência  $\hat{r}_2$  não ter sido alterada, o pré-filtro atua sobre a variável correspondente,  $r_2$ . O efeito na

variação de  $r_2$  é o de antecipar a perturbação provocada em  $h_2$  pela variação de  $r_1$  de forma a minimizar este efeito. O efeito na variação de  $r_1$  é o de adequar a resposta transitória de  $h_1$  ao especificado pela função de transferência  $T_{m,1}(z)$  do modelo de referência. Em  $t = 4000$  a entrada do pré-filtro  $\hat{r}_2$  é alterada para  $1V$ . O transitório das saídas  $r_1$  e  $r_2$  do pré-filtro são apresentados na figura 4.4, durante o intervalo  $t \in [4000 \quad 5500]$ , em que o sistema se estabiliza em aproximadamente  $t = 5503$  segundos. Do mesmo modo, a variação de  $\hat{r}_2$  resulta em variações de  $r_1$  e  $r_2$  para obter o transitório especificado por  $T_{m,2}(z)$  e minimizar a perturbação na malha de controle de  $h_1$ .

As respostas transitórias das saídas da planta, os níveis dos tanques inferiores  $h_1$  e  $h_2$ , são apresentadas na figura 4.5. A evolução das variáveis manipuladas  $v_1$  e  $v_2$ , para o acionamento das bombas, está presente na figura 4.8. A simulação é executada para a configuração do sistema com e sem o pré-filtro para comparação do efeito do mesmo.

Na figura 4.5 podemos perceber que o pré-filtro obtido melhora significativamente a dissociação entre as malhas de controle do sistema. Isso é devido a escolha da estrutura diagonal do modelo de referência. Pelo erro de aproximação ser baixo, a resposta de rastreamento corresponde à resposta do modelo especificado. Ao passo que a escolha do modelo de referência melhora a resposta transitória de  $h_2$ , a resposta transitória de  $h_1$  apresenta uma resposta inversa e um atraso que são necessários para melhorar o desacoplamento. Este é um compromisso que deve ser obtido entre a velocidade da resposta transitória e o acoplamento entre as malhas de controle.

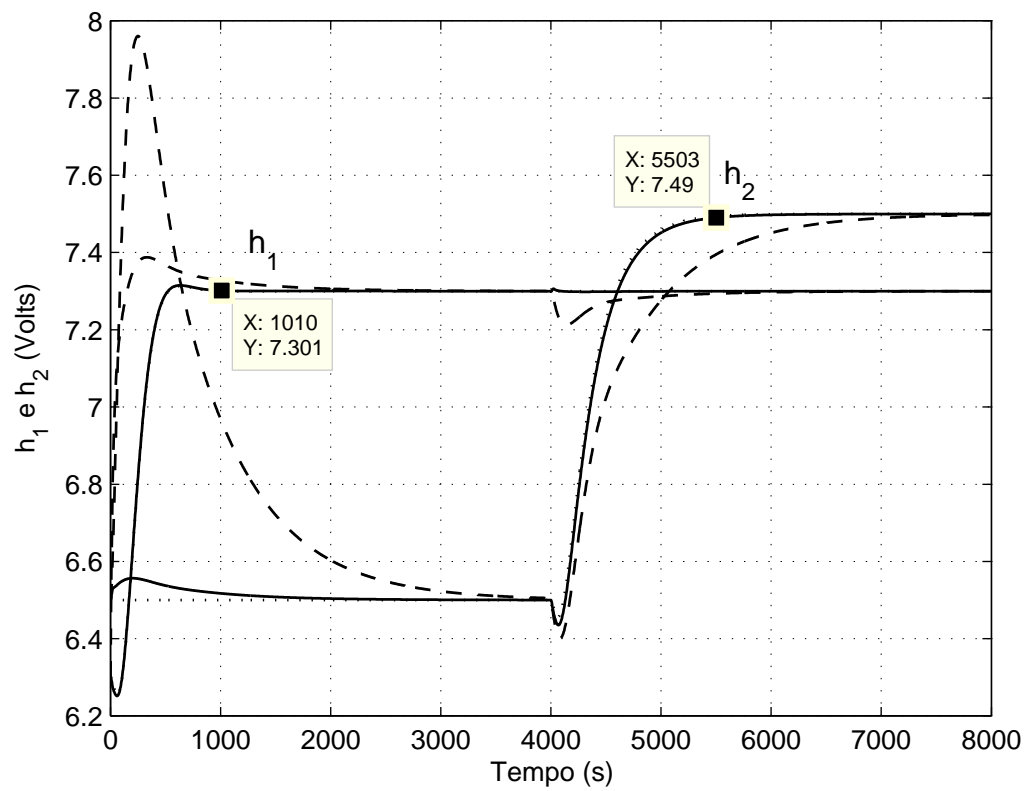


Figura 4.5: Resposta transitória dos níveis inferiores dos tanques com o pré-filtro (linha cheia), sem esse (linha tracejada) e do modelo de referência (linha pontilhada).

## 4.1.5 Necessidade da delimitação de região para posicionamento de pólos

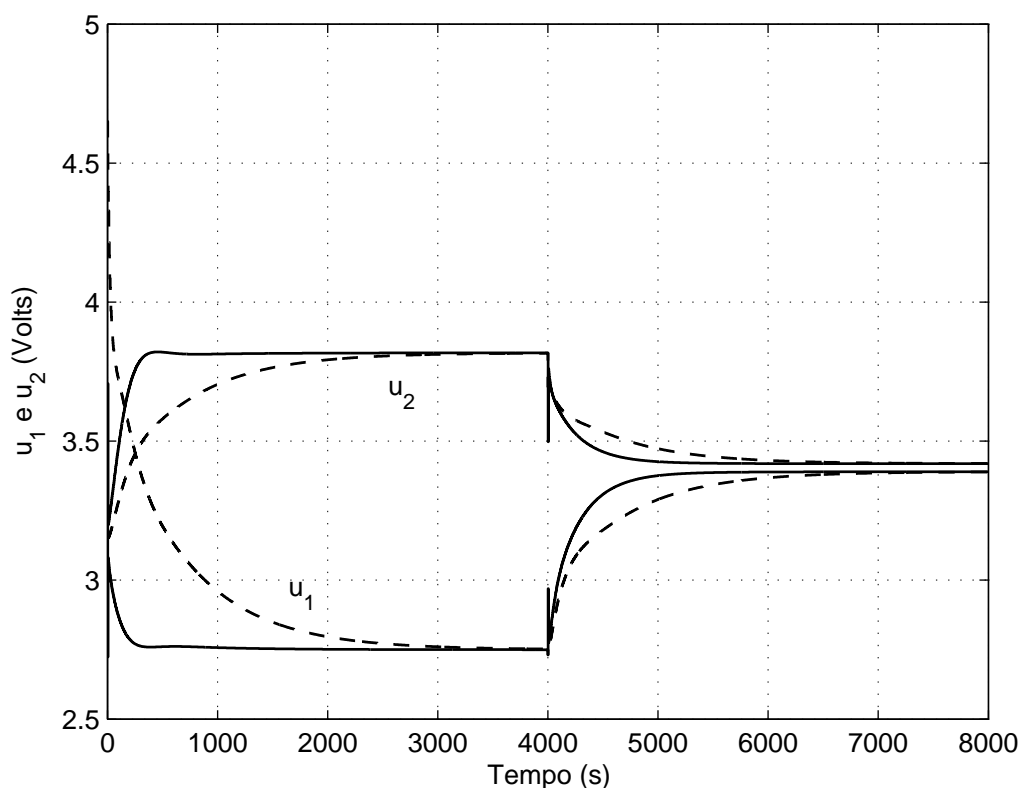


Figura 4.6: Resposta transitória das tensões elétricas de acionamento das bombas sem a restrição regional de alocação de pólos: com o pré-filtro (linha cheia) e sem o pré-filtro (linha tracejada).

Conforme mostram as figuras 4.6 e 4.7, uma tentativa de projeto inicial sem a restrição<sup>2</sup> apresentou os sinais abruptos de controle das bombas nos tempos de mudança do sinal de referência, em  $t = 0$  e  $t = 4000s$ . Na primeira figura é apresentado todo tempo de simulação e na segunda é dado foco sobre os dois intervalos próximos da transição dos sinais de referência, em que no primeiro gráfico dessa segunda figura ocorre a mudança em  $t = 0$  de  $\hat{r}_1$  de 0 para 1 Volt, e no segundo gráfico há a transição da referência  $\hat{r}_2$  para 1V. Na segunda figura são apresentados os gráficos das respostas apenas para o uso do pré-filtro. Para evitar tal comportamento pode ser acrescentada à formulação do problema uma restrição regional de pólos. Garantindo que os pólos estejam restritos em uma região limitada do plano  $z$ , evita-se que sejam obtidos pólos relacionados a estes modos de alta frequência.

Para o projeto desenvolvido neste exemplo é acrescentada a LMI (3.38) para restrição da alocação dos pólos do sistema resultante. A nova área do plano  $z$  é definida como um disco centrado em  $q = 1$

<sup>2</sup>Considerando a alocação dos pólos no disco de raio unitário centrado na origem do plano  $z$ , condição de estabilidade para sistemas discretos



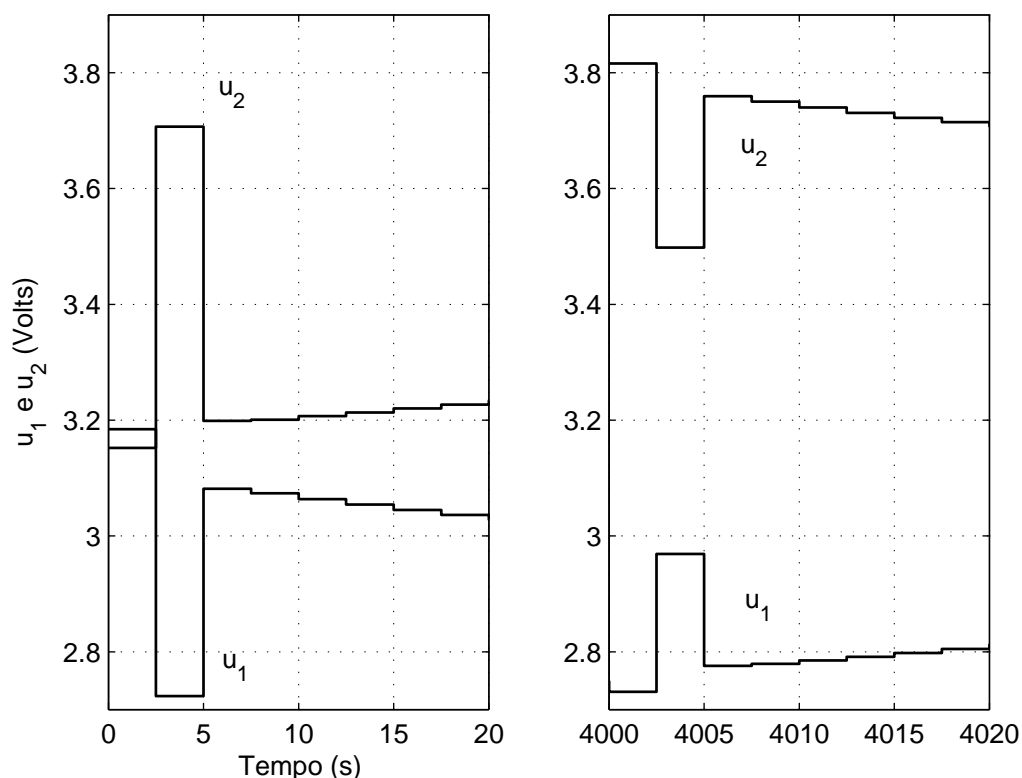


Figura 4.7: Resposta transitória das tensões elétricas de acionamento das bombas sem a restrição regional de alocação de pólos com o pré-filtro.

de raio  $r = 0,4$ . O resultado é apresentado nas figuras 4.8 e 4.9 evidenciando um sinal de controle mais suave.

O acréscimo da restrição garante, do ponto de vista prático, uma maior vida útil dos atuadores mecânicos envolvidos na alteração das variáveis manipuladas.

#### 4.1.6 Conclusões acerca do exemplo

A figura 4.9 mostra que não é necessário um maior esforço de controle para obter as melhorias da resposta de rastreamento. Isso é devido a escolha do modelo de referência. Um modelo de referência que possua resposta transitória rápida resulta em maior erro de aproximação e conseqüentemente maior interação entre as malhas de controle. A interação pode ser reduzida pela escolha de um modelo de referência com a resposta transitória mais lenta, desta forma é conseguido o desacoplamento das malhas.

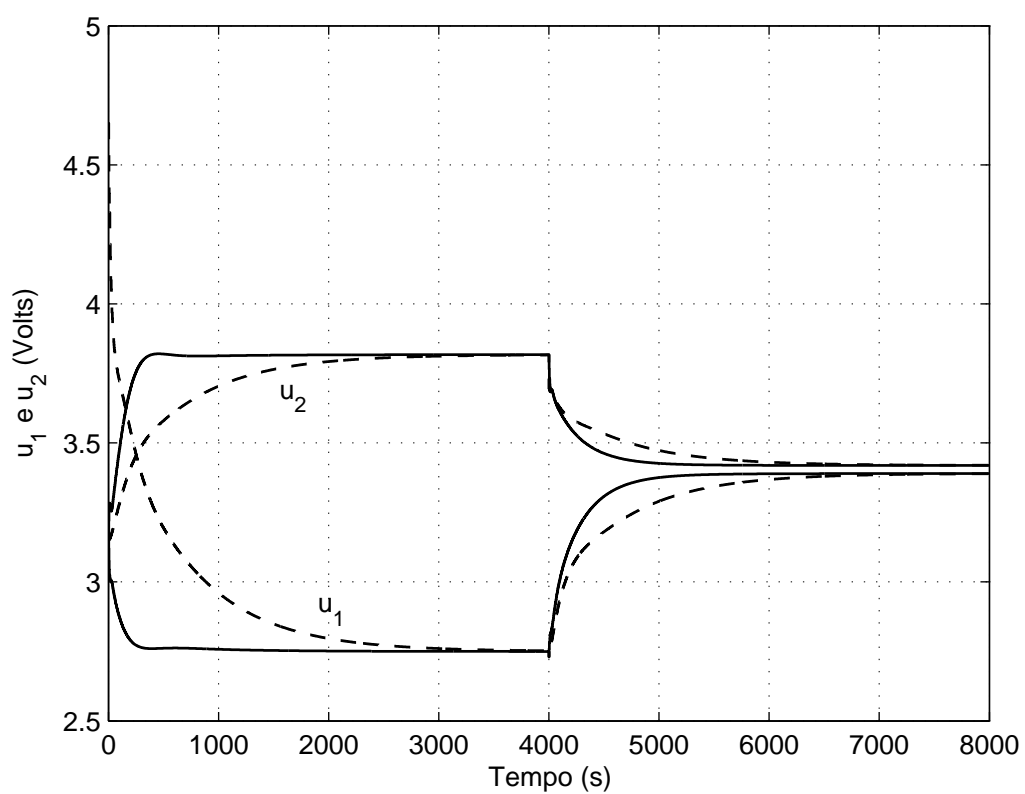


Figura 4.8: Resposta transitória das tensões elétricas de acionamento das bombas com o pré-filtro (linha cheia) sem o pré-filtro (linha tracejada), com restrição regional de alocação de pólos.

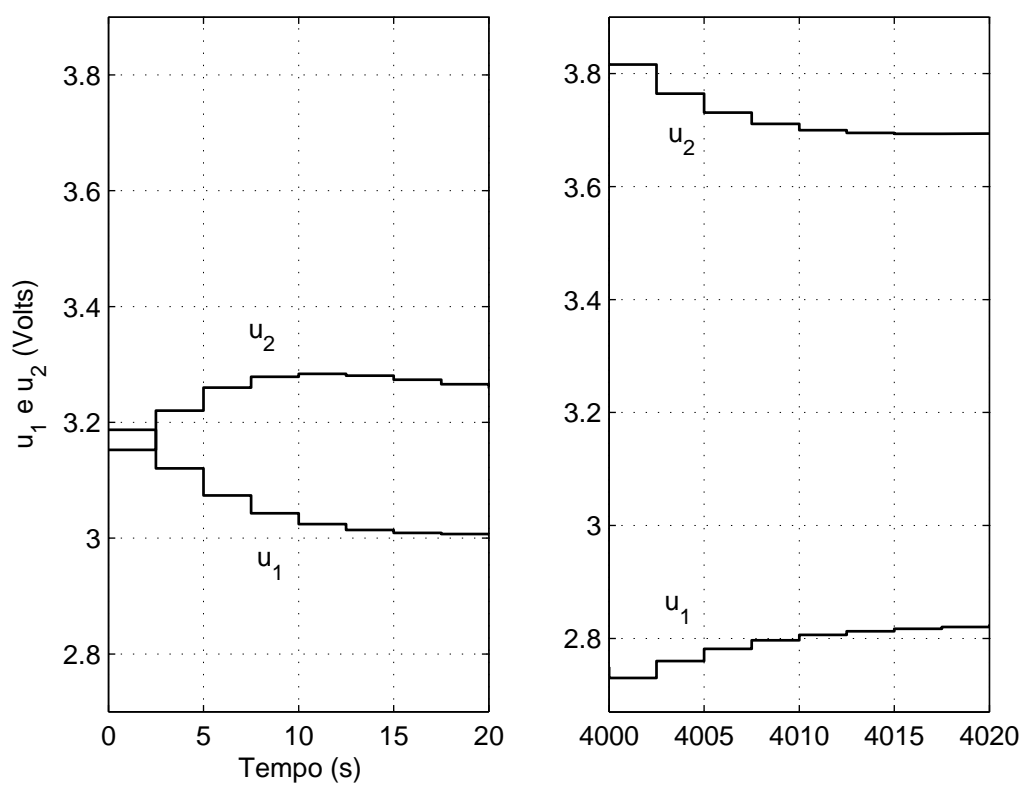


Figura 4.9: Detalhamento da resposta transitória das tensões elétricas de acionamento das bombas com o pré-filtro com restrição regional de alocação de pólos.

## 4.2 Coluna de Destilação 2 x 2

Este exemplo considera o controle de um modelo de uma coluna de destilação descrito em Wood e M.W.Berry (1973), apresentado no diagrama da figura 4.10. Este processo é utilizado por vários pesquisadores para demonstrar a eficiência de seus métodos de controle, em particular o uso do controlador PID em estruturas de controle descentralizada com e sem desacopladores (Loh e Vasnani, 1994; Åström et al., 2002; Zhanga et al., 2002; Huang et al., 2003; Lee e Edgar, 2006; Campes-trini et al., 2009; Shen et al., 2010; Vu e Lee, 2010; Kumar et al., 2012). O principal interesse neste processo é avaliar o uso do pré-filtro combinado com o controle descentralizado PID verificando principalmente a melhoria no desacoplamento das malhas do processo.

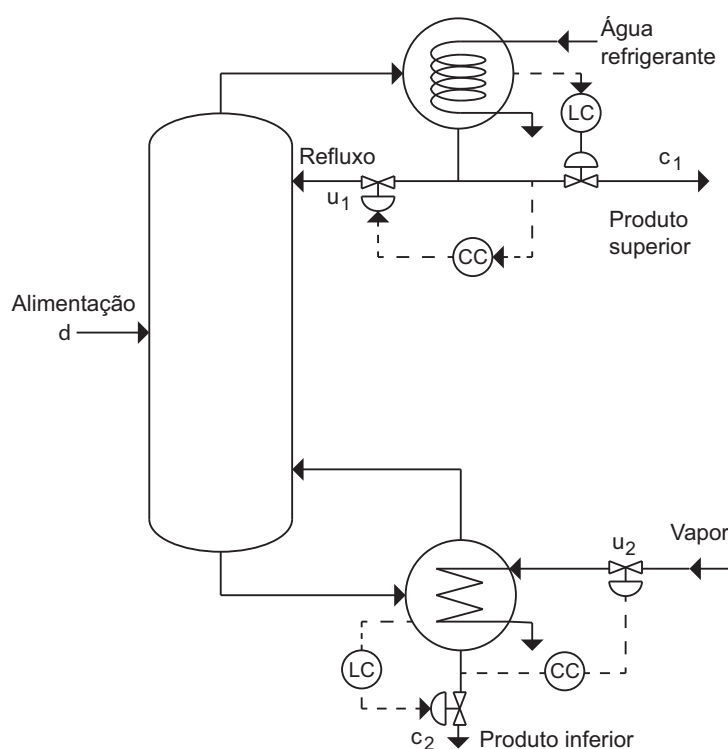


Figura 4.10: Coluna de Destilação.

O processo de destilação separa uma mistura de metanol e água que entra na coluna pela *alimentação*  $d$  saindo principalmente metanol saturado no produto superior,  $c_1$ , e água no produto inferior,  $c_2$ . A matrix de transferência em tempo contínuo que relaciona as variáveis de saída  $c_1$ , porcentagem de metanol no produto superior, e  $c_2$ , porcentagem de metanol no produto inferior, pela variação nas entradas  $u_1$ , que representa a taxa de refluxo do produto superior, e  $u_2$ , que representa a taxa de fluxo

de vapor, dada por (Wood e M.W.Berry, 1973)

$$\begin{bmatrix} C_1(s) \\ C_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12,8e^{-1s}}{16,7s + 1} & \frac{-18,9e^{-3s}}{21,0s + 1} \\ \frac{6,6e^{-7s}}{10,9s + 1} & \frac{-19,4e^{-3s}}{14,4s + 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

O modelo da planta em tempo contínuo é transformado para o tempo discreto com o tempo de amostragem de 1,5 minutos considerando o método ZOH, resultando em  $P(z)$ :

$$\begin{aligned} C_1(z) &= z^{-1} \frac{0,3776z + 0,722}{z - 0,9141} U_1(z) + z^{-2} \frac{-1,303}{z - 0,9311} U_2(z), \\ C_2(z) &= z^{-5} \frac{0,2959z + 0,5526}{z - 0,8714} U_1(z) + z^{-2} \frac{-1,919}{z - 0,9011} U_2(z). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Para converter as funções de transferência para o formato adequado para sua representação no espaço de estados, o numerador e denominador de cada função de transferência é multiplicado por  $z^d$ , sendo  $d$  o atraso:

$$\begin{aligned} C_1(z) &= \frac{0,3776z + 0,722}{z^2 - 0,9141} U_1(z) + \frac{-1,303}{z^3 - 0,9311z^2} U_2(z), \\ C_2(z) &= \frac{0,2959z + 0,5526}{z^6 - 0,8714z^5} U_1(z) + \frac{-1,919}{z^3 - 0,9011z^2} U_2(z). \end{aligned} \quad (4.8)$$

### 4.2.1 Controle por realimentação

A configuração do controle utilizada no bloco de realimentação é a I-P, apresentada em Vu e Lee (2010), com as constantes de ganhos proporcionais  $k_{p,1} = 0,5$  e  $k_{p,2} = -0,09$ ; tempos de integração  $T_{i,1} = 10,54$  e  $T_{i,2} = 7,32$  em que os segundos índices referem-se às malhas 1 e 2. Foi encontrada uma representação da planta em malha-fechada de ordem 16.

### 4.2.2 Projeto do pré-filtro

O pré-filtro é calculado a partir do sistema em malha-fechada, com o modelo de referência diagonal

$$T_m(s) = \begin{bmatrix} \frac{\omega_{n,1}^2 e^{-1s}}{s^2 + 2\zeta_1 \omega_{n,1} s + \omega_{n,1}^2} & 0 \\ 0 & \frac{\omega_{n,2}^2 e^{-3s}}{s^2 + 2\zeta_2 \omega_{n,2} s + \omega_{n,2}^2} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

sendo  $\omega_{n,1} = \omega_{n,2} = 0,3$  e  $\zeta_{n,1} = \zeta_{n,2} = 0,7$ .

Considerando as seguintes opções  $options = [1 \times 10^{-5} \ 500 \ 1 \times 10^9 \ 10 \ 0]$  para a função  $mincx(\cdot)$

é encontrado o pré-filtro de ordem 22. É feita a realização mínima da função de transferência do pré-filtro, com o cancelamento de pólos e zeros, a função de transferência do pré-filtro resultante é de ordem 20, resultando em

$$T_r(z) = \frac{1}{D(z)} \begin{bmatrix} N_{11}(z) & N_{12}(z) \\ N_{21}(z) & N_{22}(z) \end{bmatrix},$$

em que

$$\begin{aligned} N_{11}(z) = & 0,031302(z + 13,97)(z - 0,9423)(z - 0,8627)(z - 0,7951)(z - 0,4615) \cdots \\ & (z - 0,3679)(z + 7,092 \times 10^{-6})(z + 2,98 \times 10^{-6})(z^2 - 0,1454z + 0,0088) \cdots \\ & (z^2 - 1,766z + 0,7845)(z^2 + 1,129z + 0,3237)(z^2 - 1,385z + 0,5326) \cdots \\ & (z^2 + 0,5045z + 0,4734)(z^2 - 1,086z + 0,8075), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{12}(z) = & -0,013062(z - 1)(z - 0,9169)(z - 0,8968)(z - 0,8719)(z - 0,795)(z - 0,5173) \cdots \\ & (z - 0,3386)(z - 0,1353)(z - 0,04978)(z + 0,2257)(z + 0,002639) \cdots \\ & (z + 2,947 \times 10^{-6})(z^2 + 0,9657z + 0,2598)(z^2 - 1,385z + 0,5324) \cdots \\ & (z^2 - 0,3834z + 0,1429)(z^2 - 6,73z + 22,47), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{21}(z) = & -0,0047651(z - 1)(z - 0,9318)(z - 0,9086)(z - 0,9053)(z - 0,8577) \cdots \\ & (z - 0,4652)(z - 0,3679)(z + 0,1665)(z + 0,5575)(z - 0,04782) \cdots \\ & (z + 5,235 \times 10^{-5})(z + 2,609 \times 10^{-6})(z^2 - 0,246z + 0,03489) \cdots \\ & (z^2 - 1,385z + 0,5326)(z^2 + 3,439z + 4,423)(z^2 - 8,642z + 32,6), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{22}(z) = & 0,1335(z + 8,421)(z - 0,9434)(z - 0,8577)(z - 0,8428)(z - 0,4996)(z - 0,2785) \cdots \\ & (z + 0,6906)(z - 0,04979)(z + 4,909 \times 10^{-5})(z + 2,609 \times 10^{-6}) \cdots \\ & (z^2 - 1,799z + 0,8156)(z^2 + 0,9468z + 0,2638)(z^2 - 1,385z + 0,5324) \cdots \\ & (z^2 - 1,323z + 0,6174)(z^2 + 0,07863z + 0,3891), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(z) = & z(z + 0,8453)(z - 0,8577)(z - 0,7953)(z - 0,9417)(z - 0,4612)(z - 0,3679) \cdots \\ & (z - 0,04979)(z + 4,953 \times 10^{-5})(z + 2,611 \times 10^{-6})(z^2 + 1,073z + 0,29) \cdots \\ & (z^2 - 1,716z + 0,74)(z^2 - 1,385z + 0,5326)(z^2 - 1,385z + 0,5326) \cdots \\ & (z^2 + 0,005844z + 0,7257), \end{aligned}$$

resultando na norma do erro de aproximação  $\|E(z)\|_\infty = 0,1346$ . Com  $D_r$  calculado para que em regime permanente o ganho entre a entrada e a saída seja unitário a norma  $\|E(z)\|_\infty = 0,1772$ .

### 4.2.3 Resposta em frequência

A resposta em frequência obtida pelo uso do pré-filtro, com o produto  $T_{cr}(z)T_r(z)$ , é apresentada na figura 4.11. Nos gráficos da diagonal do diagrama existe semelhança entre o modelo de referência e a resposta em frequência do sistema com o pré-filtro para essa faixa de frequências. Os gráficos fora da diagonal apresentam ganho pequeno, evidenciando o desacoplamento entre as malhas de controle.

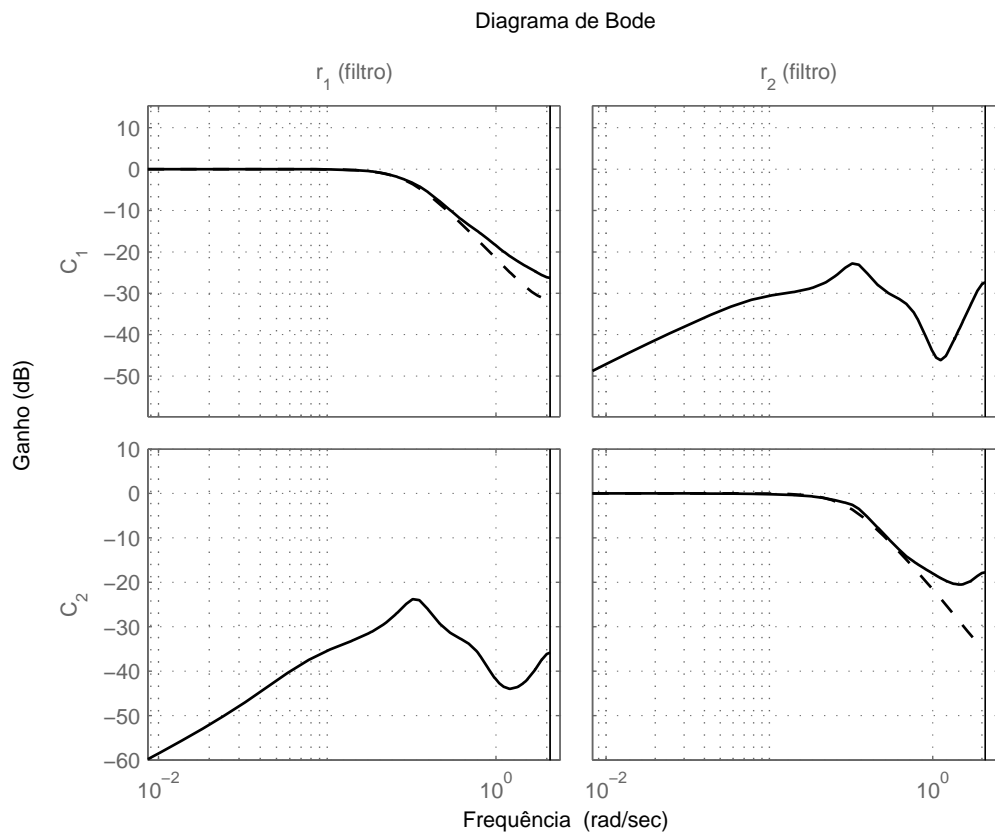


Figura 4.11: Resposta em Frequência de  $T_{cr}(z)T_r(z)$  (linha cheia) comparada com o modelo de referência (linha tracejada).

### 4.2.4 Resposta Transitória

Foram realizadas simulações para verificar o efeito do pré-filtro no sistema de controle baseado no resultado do controle I-P apresentado em Vu e Lee (2010). Para isso o sinal de comando da entrada 1 é variado em degrau unitário em  $t = 0$ , e a entrada 2 é variada em degrau unitário em  $t = 78,5$  minutos. A figura 4.12 apresenta a resposta do pré-filtro para estas variações nas entradas, mostrando como o mesmo modifica os sinais de referência.

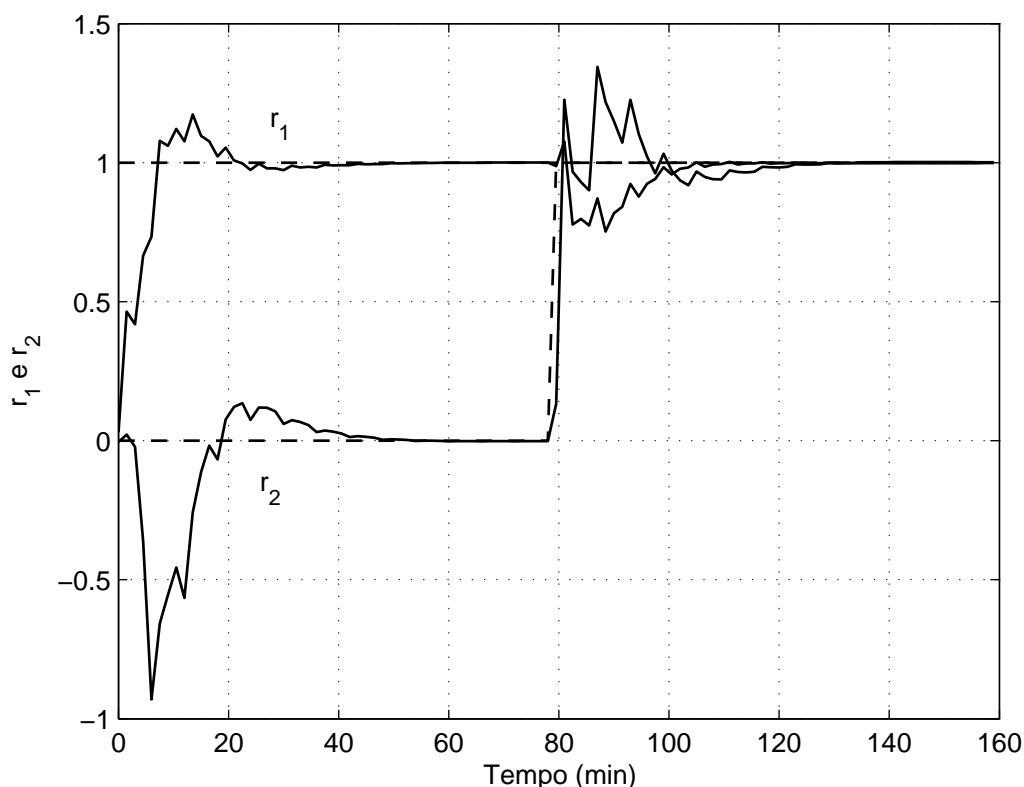


Figura 4.12: Respostas transitória do pré-filtro, sinal de referência na entrada (linha tracejada) e saída do pré-filtro (linha cheia).

A figura 4.13 apresenta a resposta das saídas da coluna de destilação submetidas às variações dos sinais de referência. O resultado de Vu e Lee (2010) é comparado com o uso do pré-filtro projetado. Nessa figura é observada uma melhoria significativa em relação ao desacoplamento das malhas. A interação na segunda malha, quando o sinal de referência da entrada 1 é variado em degrau, em  $t = 0$ , diminui consideravelmente com o uso do pré-filtro se comparado ao resultado somente com o primeiro bloco de controle I-P. A mesma melhoria é observada no momento da variação em degrau do sinal de referência  $\hat{r}_2$ . Em ambos os transitórios de  $c_1$  e  $c_2$  foram escolhidas funções de transferência para a diagonal do modelo de referência que resultam em um maior tempo de subida e tempo de atraso mas o tempo de acomodação é menor e a resposta não é tão oscilatória com melhor amortecimento. Deste modo pode ser concluído que o uso do pré-filtro para esse sistema de controle melhora tanto a resposta transitória de rastreamento como o desacoplamento entre as malhas de controle.

A figura 4.14 apresenta o sinal de controle sobre as variáveis  $u_1$  e  $u_2$  para essa simulação com e sem o uso do pré-filtro. O uso do pré-filtro neste problema tornou a atuação sobre as variáveis manipuladas mais oscilatória mas com menor valor de pico inicial do que a opção de não utiliza-lo,



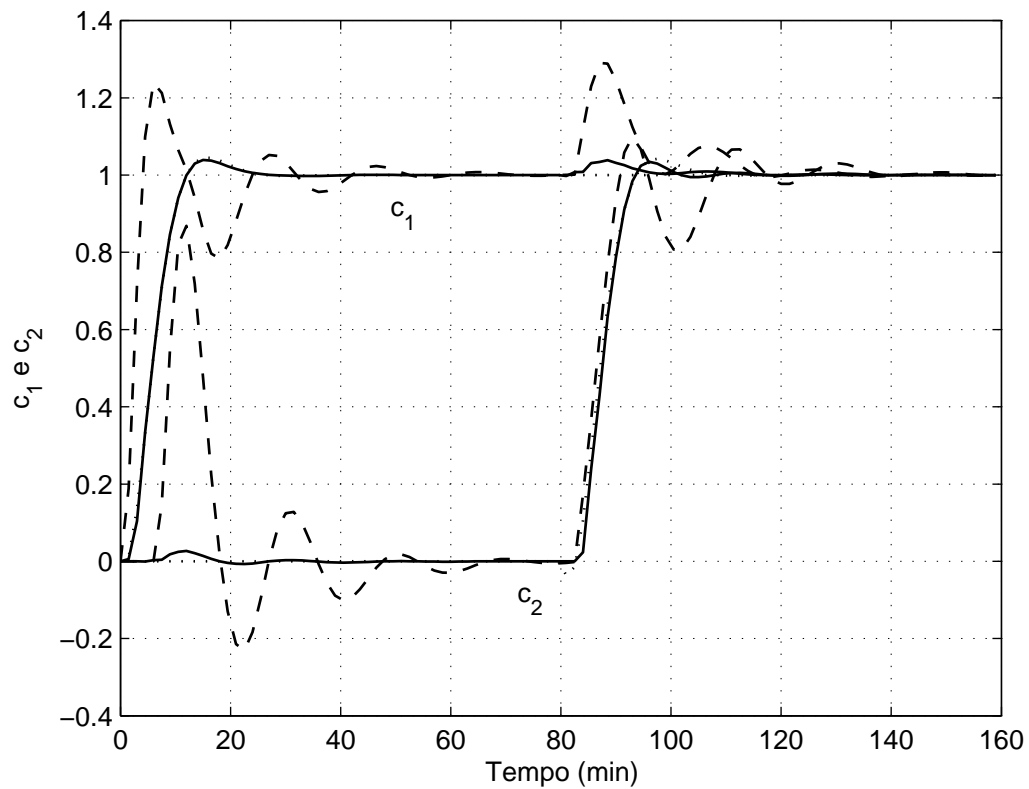


Figura 4.13: Resposta transitória das saídas com o pré-filtro (linha cheia), sem esse (linha tracejada) e do modelo de referência (linha pontilhada).

conforme observado na figura 4.14.

Usando o comando *balred*(·) do MATLAB®, é possível obter uma aproximação de 10ª ordem para o pré-filtro de 22ª ordem para gerar um resultado similar de desacoplamento e resposta transitória de rastreamento. Aproximações de ordem menor que 10 apresentam modificações mais significativas nos resultados mas ainda melhores que não usar o pré-filtro.

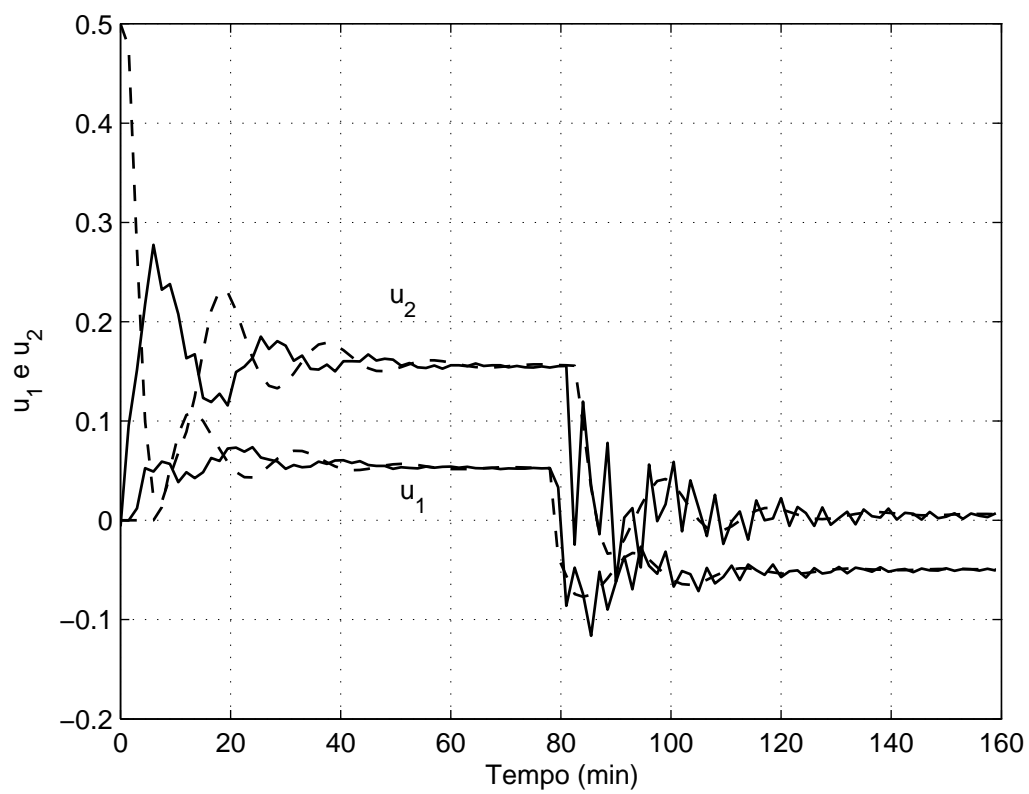


Figura 4.14: Resposta transitória do sinal de controle com (linha cheia) e sem o pré-filtro (linha tracejada).

### 4.3 Coluna de Destilação 3 x 3

Este exemplo utiliza uma coluna de destilação com três entradas e três saídas, que é apresentada em Ogunnaike et al. (1983). É utilizado como comparação de resultados controle apresentado em Vu e Lee (2009). O diagrama da planta evidenciado entradas e saídas para ações de controle é mostrado na figura 4.15.

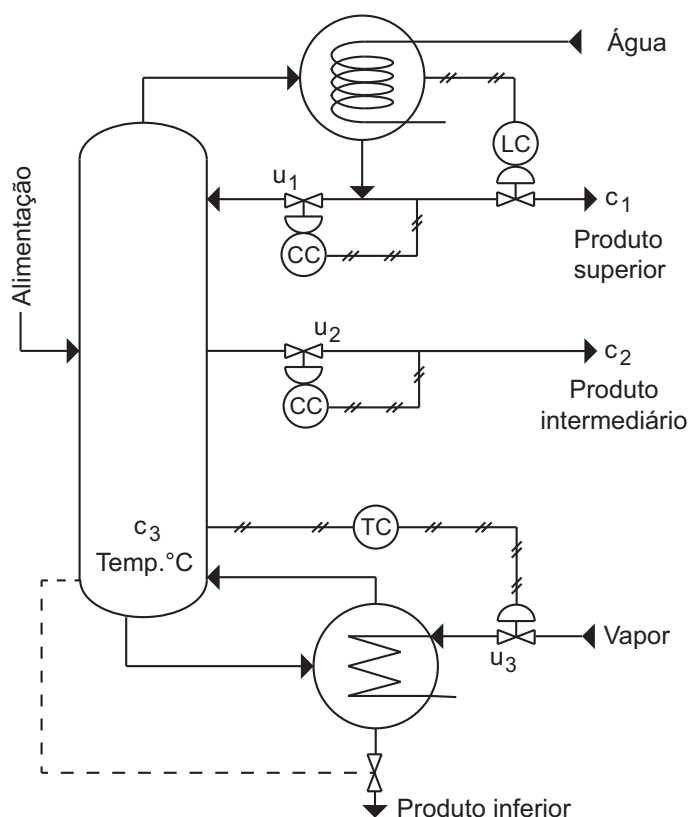


Figura 4.15: Diagrama de controle da coluna de destilação.

A matriz de transferência, no tempo contínuo, relacionando as funções de transferência entre as entradas,  $u_i$ , e saídas,  $c_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , relacionadas na tabela 4.2, é dada por

$$\begin{bmatrix} C_1(s) \\ C_2(s) \\ C_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0,66e^{-2,6s}}{6,7s+1} & \frac{-0,61e^{-3,5s}}{8,64s+1} & \frac{-0,0049e^{-s}}{9,06s+1} \\ \frac{1,11e^{-6,5s}}{1,11e^{-6,5s}} & \frac{-2,36e^{-3s}}{-2,36e^{-3s}} & \frac{-0,012e^{-1,2s}}{-0,012e^{-1,2s}} \\ \frac{3,25s+1}{-34,68e^{-9,2s}} & \frac{5,0s+1}{46,2e^{-9,4s}} & \frac{7,09s+1}{0,87(11,61s+1)e^{-s}} \\ \frac{8,15s+1}{8,15s+1} & \frac{10,9s+1}{10,9s+1} & \frac{(3,89s+1)(18,8s+1)}{(3,89s+1)(18,8s+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Para tratar computacionalmente o atraso é utilizado método semelhante ao apresentado para o exemplo anterior. Com a diferença, que o exemplo atual possui mais um par constituído pela entrada

Tabela 4.2: Variáveis do controle da coluna de destilação 3x3.

Entradas manipuladas			Saídas controladas	
$u_1$	vazão do refluxo	$[m^3/s]$	$c_1$	produto superior
$u_2$	vazão do produto intermediário	$[m^3/s]$	$c_2$	produto intermediário
$u_3$	pressão de vapor do aquecedor	$[kPa]$	$c_3$	temperatura do fundo $[(^{\circ}C)]$

$U_3$  e saída  $C_3$ .

A planta é transformada para o tempo discreto com o tempo de amostragem de  $\frac{1}{2}$  minuto usando o método segurador de ordem zero (do inglês, *Zero-Order Hold*).

### 4.3.1 Controle por realimentação

O bloco de controle na realimentação é formado pelo controlador I-P de Vu e Lee (2009) e possui os parâmetros de ganhos proporcional e tempos de integração de cada das três malhas dados na tabela 4.3.

Tabela 4.3: Parâmetros do Controlador I-P.

Parâmetro	Valor
$(k_{p,1}, T_{i,1})$	(0,25 0,1)
$(k_{p,2}, T_{i,2})$	(1 0,25)
$(k_{p,3}, T_{i,3})$	(0,1 1)

Foi encontrada uma representação em tempo da planta em malha-fechada de ordem 90, reduzida para ordem 11, com escolha baseada no vetor de valores singulares de Hankel, com representabilidade de 90,35% em relação ao sistema completo (com 90 variáveis de estado). Foi utilizada a função *balred*( $\cdot$ ) para obter a representação de ordem 11.

### 4.3.2 Projeto do pré-filtro

O pré-filtro é calculado com o modelo de referência

$$T_m(z) = \begin{bmatrix} T_{m_1}(z) & 0 & 0 \\ 0 & T_{m_2}(z) & 0 \\ 0 & 0 & T_{m_3}(z) \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

As funções de transferência da diagonal da matriz são obtidas pela discretização, com o tempo de amostragem de 0,5 minuto, das funções representadas no tempo contínuo por

$$T_{m,i}(s) = \frac{\omega_{n,i}^2(-\tau_i s + 1)}{(\tau_i s + 1)(\epsilon_i s + 1)(s^2 + 2\zeta_i \omega_{n,i} s + \omega_{n,i}^2)}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.12)$$

com  $\tau_1 = 1$ ;  $\epsilon_1 = 20$ ;  $\omega_{n,1} = 0,3$ ;  $\zeta_1 = 0,6$ ;  $\tau_2 = -\frac{3}{2}$ ;  $\epsilon_2 = 20$ ;  $\omega_{n,2} = 0,6$  e  $\zeta_2 = 0,6$ ;  $\tau_3 = 1$ ;  $\epsilon_3 = 6$ ;  $\omega_{n,3} = 0,8$  e  $\zeta_3 = 0,2$ .

É encontrado o pré-filtro com a função de transferência

$$T_r(z) = \frac{1}{D(z)} \begin{bmatrix} N_{11}(z) & N_{12}(z) & N_{13}(z) \\ N_{21}(z) & N_{22}(z) & N_{23}(z) \\ N_{31}(z) & N_{32}(z) & N_{33}(z) \end{bmatrix},$$

em que

$$\begin{aligned} N_{11}(z) = & 0.015835(z + 1.65)(z - 0.7732)(z - 0.7443)(z - 0.9263)(z - 0.9712)(z - 0.974) \cdots \\ & (z - 0.6045)(z^2 - 1.07z + 0.3138)(z^2 - 1.562z + 0.6401)(z^2 - 1.964z + 0.9973) \cdots \\ & (z^2 - 1.686z + 0.8225)(z^2 - 1.603z + 0.8999)(z^2 - 1.094z + 0.8293) \cdots \\ & (z^2 - 0.3213z + 0.6567)(z^2 - 0.1798z + 1.07), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{12}(z) = & 0.006439(z - 0.766)(z - 0.7478)(z - 0.9263)(z - 0.9767)(z - 1)(z - 1.105) \cdots \\ & (z - 0.6045)(z^2 + 1.557z + 0.6149)(z^2 - 1.054z + 0.3046) \cdots \\ & (z^2 - 1.564z + 0.6421)(z^2 - 1.687z + 0.8231)(z^2 - 2.01z + 1.183) \cdots \\ & (z^2 - 1.538z + 1.127)(z^2 - 0.8345z + 1.047)(z^2 + 0.0832z + 1.087), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{13}(z) = & 0.0060144(z + 7.326)(z - 1)(z - 0.9755)(z - 0.9257)(z - 0.7783)(z - 0.7421) \cdots \\ & (z - 0.6045)(z^2 - 1.054z + 0.3046)(z^2 - 1.561z + 0.6392)(z^2 - 2.483z + 1.587) \cdots \\ & (z^2 - 1.688z + 0.8233)(z^2 - 2.219z + 1.601)(z^2 - 1.641z + 1.465) \cdots \\ & (z^2 + 0.2329z + 0.924)(z^2 - 0.9432z + 1.35), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{21}(z) = & 0.00080901(z + 8.012)(z - 0.9274)(z - 0.9731)(z - 1)(z - 0.6243)(z - 0.6042) \cdots \\ & (z - 0.1599)(z^2 - 1.514z + 0.5735)(z^2 - 1.835z + 0.8514)(z^2 - 1.813z + 0.8513) \cdots \\ & (z^2 - 1.683z + 0.8211)(z^2 - 1.576z + 0.8661)(z^2 - 1.058z + 0.8491) \cdots \\ & (z^2 - 0.3622z + 0.7265)(z^2 - 2.186z + 5.125), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{22}(z) = & -3.8904 \times 10^{-5}(z - 37.16)(z - 0.9279)(z - 0.9732)(z - 0.6237)(z - 0.6042) \cdots \\
& (z + 0.48)(z - 0.1602)(z^2 - 1.515z + 0.5737)(z^2 - 1.835z + 0.8452) \cdots \\
& (z^2 - 1.778z + 0.838)(z^2 - 1.684z + 0.8215)(z^2 - 2.705z + 2.306) \cdots \\
& (z^2 - 1.734z + 1.292)(z^2 - 0.8016z + 1.081)(z^2 - 2.435z + 3.938),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{23}(z) = & -5.649 \times 10^{-5}(z - 270.8)(z - 1)(z - 0.9733)(z - 0.926)(z - 0.6246)(z - 0.6042) \cdots \\
& (z - 0.1588)(z^2 - 1.513z + 0.5728)(z^2 - 1.734z + 0.7625)(z^2 - 2.512z + 1.618) \cdots \\
& (z^2 - 1.683z + 0.8208)(z^2 - 2.292z + 1.728)(z^2 - 1.816z + 1.703) \cdots \\
& (z^2 - 1.031z + 1.605)(z^2 - 1.139z + 2.192),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{31}(z) = & -0.0039552(z + 31.53)(z - 1.219)(z - 1.037)(z - 1)(z - 0.9736)(z - 0.9663) \cdots \\
& (z - 0.7876)(z - 0.753)(z - 0.2961)(z^2 - 1.254z + 0.3934)(z^2 - 1.974z + 1.009) \cdots \\
& (z^2 - 1.556z + 0.6403)(z^2 - 1.807z + 0.8998)(z^2 - 1.569z + 0.8629) \cdots \\
& (z^2 - 1.056z + 0.8499)(z^2 - 0.3611z + 0.7281),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{32}(z) = & 0.0018215(z - 16.03)(z - 1)(z - 0.9792)(z - 0.7828)(z - 0.7556)(z - 0.2958) \cdots \\
& (z + 0.4899)(z^2 - 1.255z + 0.3936)(z^2 - 1.955z + 0.9564)(z^2 - 2.897z + 2.104) \cdots \\
& (z^2 - 1.552z + 0.6371)(z^2 - 1.842z + 0.9249)(z^2 - 1.988z + 1.12) \cdots \\
& (z^2 - 1.531z + 1.149)(z^2 - 0.7699z + 1.05),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{33}(z) = & -0.0049061(z + 70.53)(z - 1.67)(z - 0.7922)(z - 0.7514)(z - 0.2928) \cdots \\
& (z^2 - 1.952z + 0.9529)(z^2 - 1.256z + 0.3945)(z^2 - 1.885z + 0.8896) \cdots \\
& (z^2 - 1.561z + 0.6446)(z^2 - 1.731z + 0.7998)(z^2 - 1.883z + 1.043) \cdots \\
& (z^2 - 1.796z + 1.282)(z^2 - 1.304z + 1.392)(z^2 - 0.763z + 1.479),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(z) = & (z - 0.7579)(z - 0.7152)(z - 0.923)(z - 0.9408)(z - 0.9731)(z - 0.9752) \cdots \\
& (z - 0.01713)(z^2 - 1.208z + 0.3647)(z^2 - 1.664z + 0.6931) \cdots \\
& (z^2 - 1.552z + 0.6343)(z^2 - 0.118z + 0.05626)(z^2 - 1.683z + 0.8212) \cdots \\
& (z^2 - 1.695z + 0.9295)(z^2 - 0.9216z + 0.7213)(z^2 - 0.4428z + 0.8253).
\end{aligned}$$

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  do erro de aproximação é de  $\|E(z)\|_\infty = 0,0407$  como resultado do processo de otimização considerando a matriz do pré-filtro  $D_r = 0$ . Para a matriz  $D_r$  calculada, no intuito de obter o ganho da função de transferência do pré-filtro em regime estacionário igual a 1.

### 4.3.3 Resposta em frequência

A resposta em frequência obtida pelo uso do pré-filtro, com o produto  $T_{cr}(z)T_r(z)$ , é apresentada na figura 4.16. Nos gráficos da diagonal do diagrama existe semelhança entre o modelo de referência e a resposta em frequência do sistema com o pré-filtro dentro da faixa de frequências relevante. Os

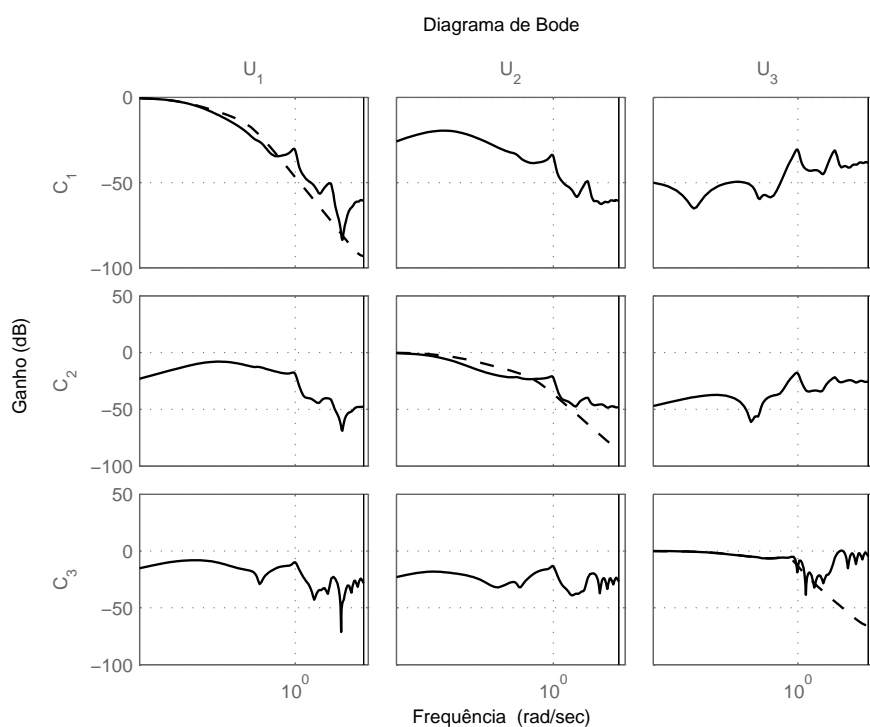


Figura 4.16: Resposta em Frequência de  $T_{cr}(z)T_r(z)$  (linha cheia) e do modelo de referência (linha tracejada).

gráficos fora da diagonal apresentam valores máximos de ganho pequenos, evidenciando o desacoplamento entre as malhas de controle. Porém pode ser observado que o erro de aproximação na faixa de frequência de interesse não é tão pequeno como os observados nos exemplos anteriores, o que irá refletir nas respostas de rastreamento.

#### 4.3.4 Resposta Transitória

Para verificar o efeito do projeto do pré-filtro em relação a interação entre as malhas de controle, o sistema é simulado pela mudança do sinal em degrau dos sinais de referência, conforme apresentado na figura 4.17.

Na figura 4.18 é apresentada a resposta do pré-filtro para variação das entradas de referência em três momentos distintos, relacionado com as variações apresentadas na figura 4.17. Pela formatação dos sinais de referência, conforme mostrado nesta figura é que se obtém a melhoria do desacoplamento do sistema.

As respostas transitórias das saídas,  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$ , da planta são apresentadas nas figuras 4.19, 4.20 e 4.21.

As respostas transitórias obtidas por intermédio da simulação demonstram um melhor desem-

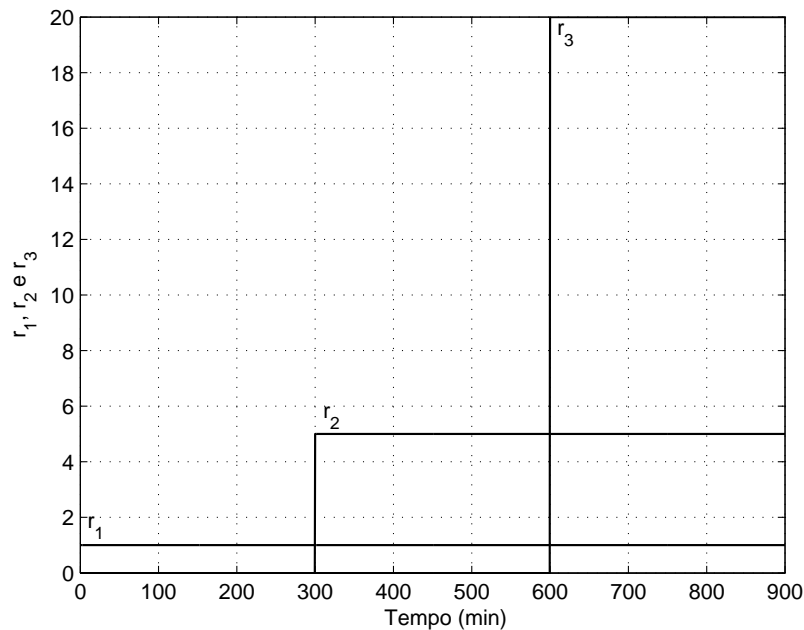


Figura 4.17: Sinais de entrada de referência do pré-filtro.

penho quando se utiliza o pré-filtro projetado pela formulação de síntese proposta aplicada a esse problema. Na variação do sinal de referência  $\hat{r}_1$  a resposta transitória da saída  $c_1$  é mais lenta, porém menos oscilatória que o resultado apenas para o controle I-P apresentado em Vu e Lee (2009) e ambas as respostas apresentam um tempo de acomodação similar. Além disso, as saídas  $c_2$  e  $c_3$  são pouco influenciadas pela variação do sinal de referência  $\hat{r}_1$  com o uso do pré-filtro, sendo que a saída  $c_3$  apresenta acoplamento praticamente nulo. Para variação da referência  $\hat{r}_2$  a resposta transitória da saída  $c_2$  também é mais lenta e menos oscilatória quando comparada com Vu e Lee (2009). É observado, que neste caso, a resposta transitória do sistema não se iguala a aquela especificada pelo pré-filtro. É observado que o efeito da variação de  $\hat{r}_1$  sobre  $c_1$  ainda é considerável, mas por outro lado, o acoplamento em relação a saída  $c_3$  é praticamente nulo, muito melhor que o obtido pelo controlador I-P somente. Com relação a variação da entrada  $\hat{r}_3$ , o uso do pré-filtro não resultou em melhoria em relação ao resultado em Vu e Lee (2009).

As variáveis manipuladas  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  são apresentadas na figura 4.22 para o intervalo de simulação  $t = [0 \ 600]$  e na figura 4.23 para  $t = [600 \ 670]$  minutos. Em ambas as figuras é traçado os sinais de controle resultado do projeto da planta em malha-fechada sem e com o pré-filtro para cada uma das variáveis manipuladas. Observando essas figuras, verifica-se que os sinais de controle, variáveis manipuladas, com o uso do pré-filtro, são menos oscilatórios principalmente na variação de  $\hat{r}_3$ .

Devido a complexidade deste sistema é difícil de se obter um modelo de referência que resulte em



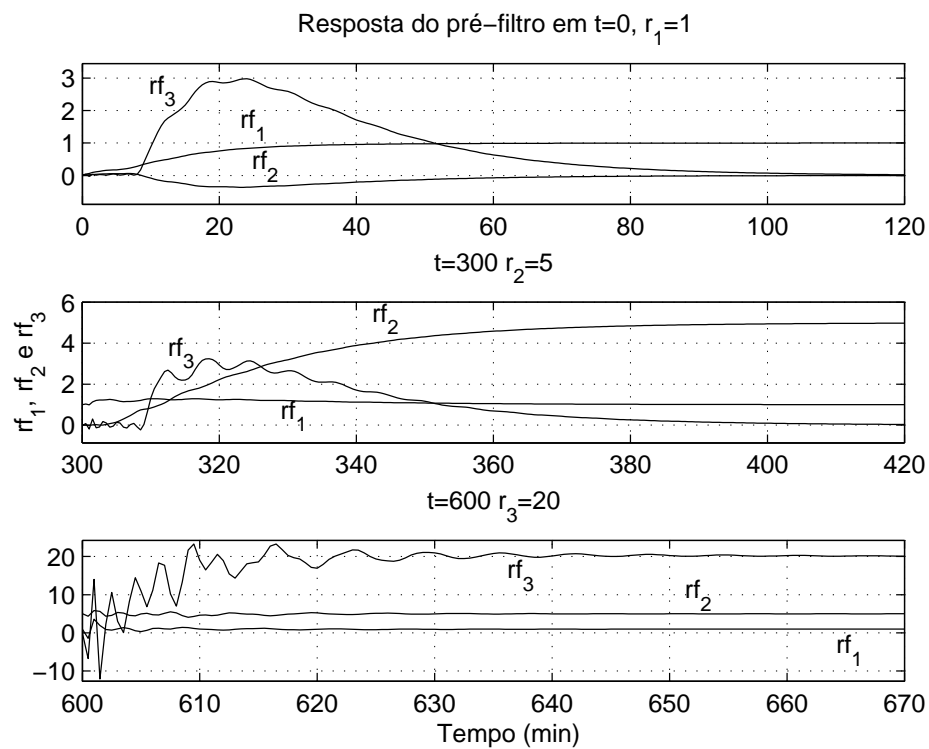


Figura 4.18: Respostas do pré-filtro:  $r_1$  ( $rf_1$ ), entrada da planta 1;  $r_2$  ( $rf_2$ ), entrada da planta 2;  $r_3$  ( $rf_3$ ), entrada da planta 3.

uma melhoria simultânea nas 3 malhas de controle. Mas considerando os desacoplamentos obtidos é justificado o uso do pré-filtro projetado.

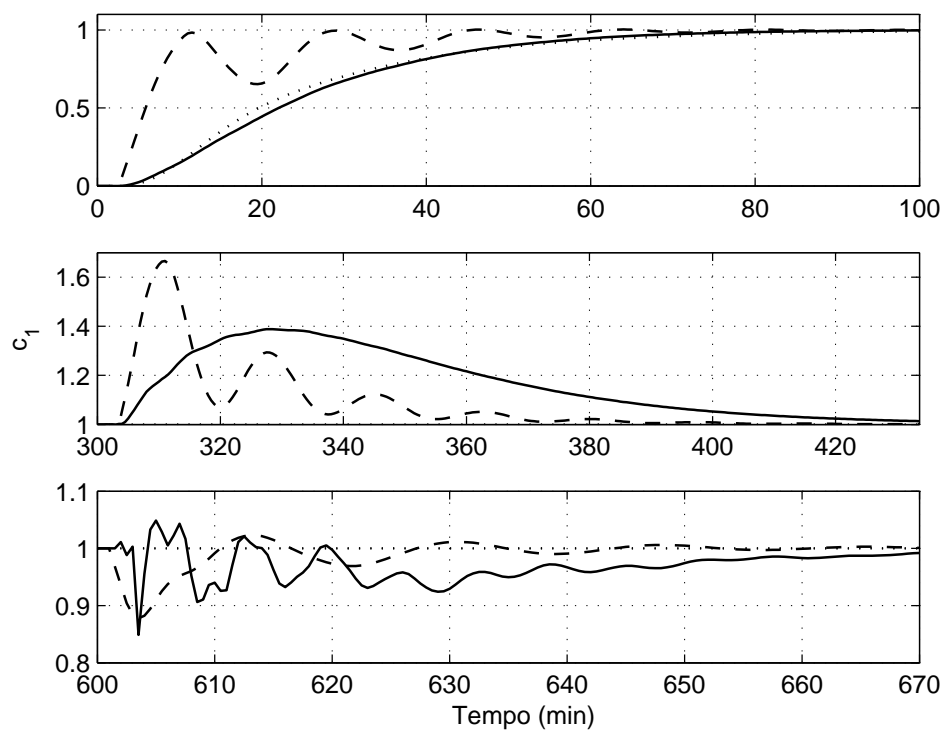


Figura 4.19: Respostas transitórias da saída  $c_1$  nas mudanças em degrau dos sinais de referência, com o pré-filtro (cheia), sem esse (tracejada) e do modelo de referência (pontilhada).

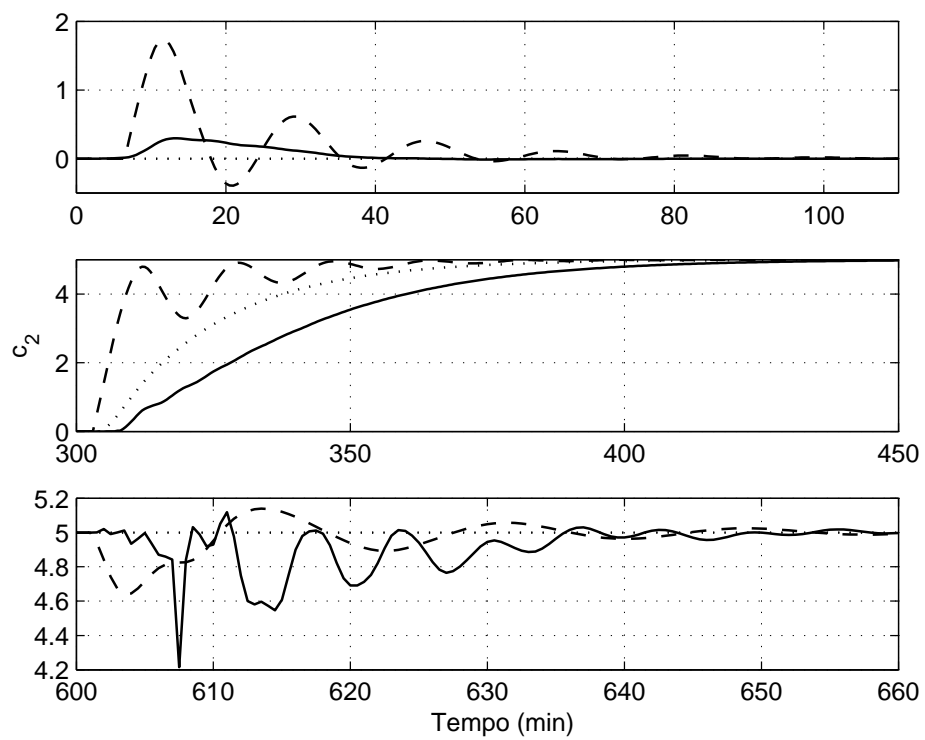


Figura 4.20: Respostas transitórias da saída  $c_2$  nas mudanças em degrau dos sinais de referência, com o pré-filtro (cheia), sem esse (tracejada) e do modelo de referência (pontilhada).

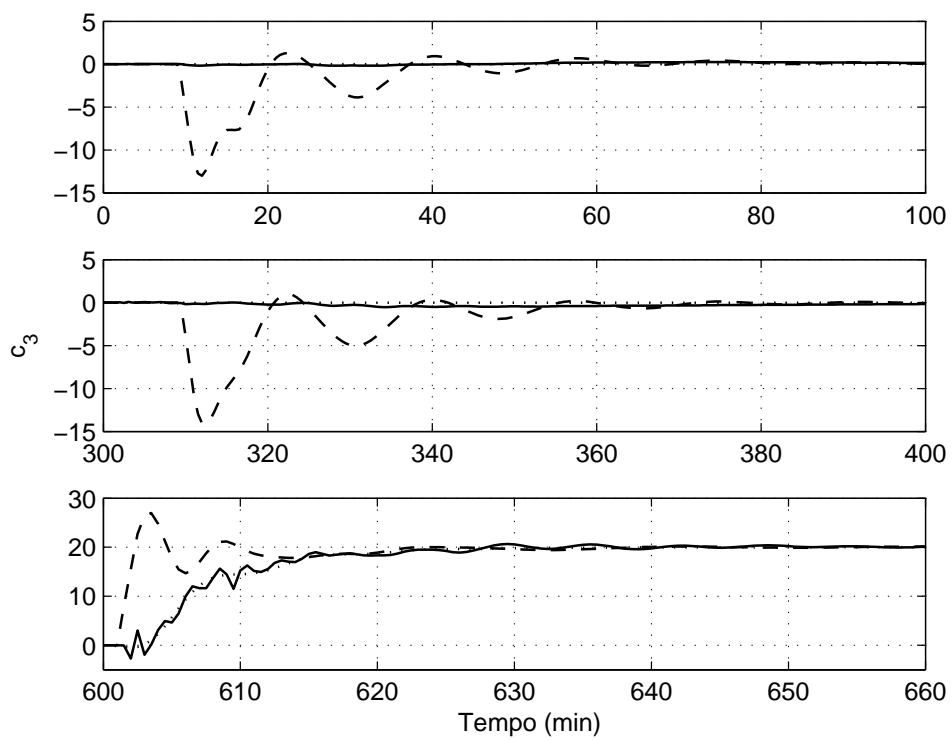


Figura 4.21: Respostas transitórias da saída  $c_3$  nas mudanças em degrau dos sinais de referência, com o pré-filtro (cheia), sem esse (tracejada) e do modelo de referência (pontilhada).

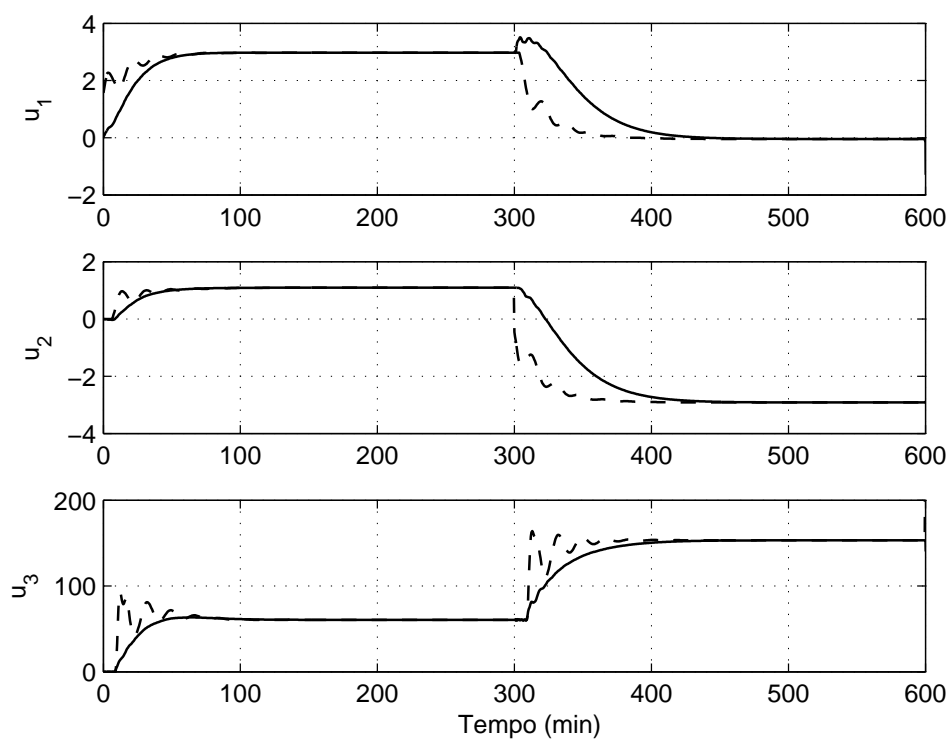


Figura 4.22: Sinais de controle,  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  com o pré-filtro (cheia), sem esse (tracejada) nas variações em degrau dos sinais de referência  $\hat{r}_1$  e  $\hat{r}_2$ .

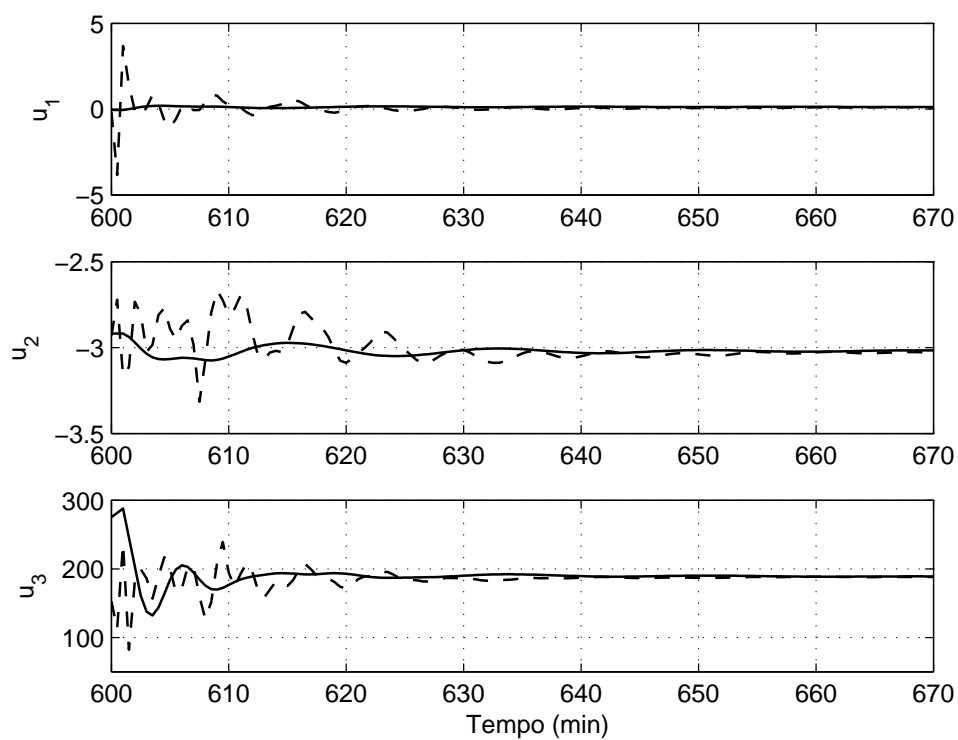


Figura 4.23: Sinais de controle,  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  com o pré-filtro (linha cheia), sem esse (tracejada) nas variações em degrau dos sinais de referência  $\hat{r}_3$ .

# Capítulo 5

## Formulação BMI para sistema incerto

Tanto a formulação LMI para projeto de controladores por realimentação dinâmica de saída, apresentada em de Oliveira et al. (2002), quanto a sua adaptação para o problema de síntese do pré-filtro, apresentada no capítulo 3, só podem ser aplicadas a sistemas precisamente conhecidos uma vez que os cálculos das matrizes do controlador ou do pré-filtro dependem das matrizes do sistema. Processos que apresentam incertezas nos parâmetros podem ser representados por modelos com incertezas politópicas. Não existe até o momento, uma mudança de variáveis linearizantes ou transformação de congruência que transforme a formulação BMI em uma formulação LMI para projeto de controladores por realimentação dinâmica de saída para sistemas politópicos e o mesmo se aplica ao caso do pré-filtro. Deste modo, é necessário aplicar técnicas para a solução do problema BMI obtido substituindo as equações do sistema em malha-fechada nas formulações LMI de análise. O procedimento utilizado nesta dissertação para solução do problema BMI é baseado no procedimento apresentado em Helmersson (1994) aplicado à redução de modelo. O procedimento envolve dois passos, sendo que em cada passo deve-se resolver um problema LMI, sendo desta forma fácil de ser implementado. A desvantagem deste procedimento é que, sendo uma formulação não-convexa, não existe a garantia de convergência para a solução ótima.

### 5.1 Formulação BMI para o problema de síntese de pré-filtro robusto

A planta possui o modelamento matemático dado pelas equações no espaço de estados

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= A\mathbf{x}(k) + B_u\mathbf{u}(k) + B_w\mathbf{w}(k), \\ \mathbf{z}(k) &= C_z\mathbf{x}(k) + D_{zu}\mathbf{u}(k) + D_{zw}\mathbf{w}(k), \\ \mathbf{y}(k) &= C_y\mathbf{x}(k) + D_{yw}\mathbf{w}(k). \end{aligned} \tag{5.1}$$

A descrição das matrizes que representam a planta é semelhante ao apresentado em 2.1. A forma compacta

$$P(z) \triangleq \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_u & B_w \\ \hline C_z & D_{zu} & D_{zw} \\ C_y & 0 & D_{yw} \end{array} \right]. \quad (5.2)$$

é utilizada para simplificar a representação. As matrizes da representação do sistema podem apresentar valores incertos. Para considerar as incertezas do modelo, o sistema pode ser representado por um modelo politópico, que é um conjunto convexo:

$$\mathfrak{P}(\alpha) \triangleq \left\{ P(z) : P(z) = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i(z); \alpha \in \Omega \right\}, \quad (5.3)$$

que é definido como a combinação convexa dos vértices  $P_i(z)$  do politopo,

$$P_i(z) \triangleq \left[ \begin{array}{c|cc} A_i & B_{u,i} & B_{w,i} \\ \hline C_{z,i} & D_{zu,i} & D_{zw,i} \\ C_{y,i} & 0 & D_{yw,i} \end{array} \right], \quad (5.4)$$

em que o índice  $i$  é o número do vértice, que varia de  $i = 1, \dots, N$ . O vetor  $\alpha = [\alpha_1 \dots \alpha_N]'$  parametriza o politopo, sendo  $\Omega$  definido como

$$\Omega \triangleq \left\{ \alpha : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\}, \quad (5.5)$$

A dependência das matrizes do sistema de  $\alpha$  será omitida a partir deste ponto.

O problema de aproximação de modelo  $\mathcal{H}_\infty$  em tempo discreto para o sistema incerto pode ser descrito como: encontre o pré-filtro  $T_r(z)$ , que minimize o erro entre o modelo de referência e o produto da matriz de transferência em malha-fechada e o pré-filtro,  $E(z) \triangleq T_m(z) - T_{cr}(z)T_r(z)$ , para todo domínio incerto:

$$\begin{aligned} T_r^*(z) &= \arg \min_{T_r(z)} \max_{\alpha \in \Omega} \|E(z, \alpha, T_r)\|_\infty \\ &\text{sujeito a: } T_r(z) \in \mathcal{F}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

sendo  $\mathcal{F}$  o conjunto de pré-filtros estáveis e causais.

A representação no espaço de estados do erro de aproximação do modelo de referência, com



$D_r = 0$ , para cada vértice do politopo é

$$E_i(z) \triangleq \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{A}_i & \mathcal{B}_i \\ \hline \mathcal{C}_i & \mathcal{D}_i \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} A_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_m \\ \mathbf{0} & A_{cr,i} & B_{cr,i}C_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_r & B_r \\ \hline C_m & -C_{cr,i} & -D_{cr,i}C_r & D_m \end{array} \right]. \quad (5.7)$$

O pré-filtro é calculado utilizando a desigualdade matricial apresentada no teorema 4 - custo  $H_\infty$  garantido estendido - proposto em de Oliveira et al. (2002). O problema de aproximação de modelo pode ser estabelecido como:

$$\begin{aligned} & \min_{\mu, \mathcal{P}_i, \mathcal{G}} \mu \\ & \text{Sujeito a:} \\ & \left[ \begin{array}{cccc} \mathcal{P}_i & \mathcal{A}_i \mathcal{G} & \mathcal{B}_i & \mathbf{0} \\ * & \mathcal{G} + \mathcal{G}^T - \mathcal{P}_i & \mathbf{0} & \mathcal{G}^T \mathcal{C}_i^T \\ * & * & \mathbf{I} & \mathcal{D}_i^T \\ * & * & * & \mu \mathbf{I} \end{array} \right] \succ 0, \end{aligned} \quad (5.8)$$

sendo variáveis  $\mu$ ,  $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i^T$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $\mathcal{G}$  e as matrizes do filtro  $A_r$ ,  $B_r$  e  $C_r$ . Como mencionado para o caso de sistemas precisamente conhecidos,  $D_r$  será calculado *a posteriori*.

O pré-filtro,  $T_r(z)$ , com  $D_r = 0$ , garante que  $\max_{\alpha \in \Omega} \|E(z, \alpha)\|_\infty^2 < \mu$ , ou seja, é garantido que o valor de  $\mu$  encontrado pelo algoritmo de otimização é um limitante superior para a norma  $H_\infty$  ao quadrado do erro de aproximação.

Considerando a divisão em blocos da variável matricial  $\mathcal{G}$  de acordo com os blocos de  $\mathcal{A}_i$  na equação (5.7):

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

e das matrizes simétricas  $\mathcal{P}_i$

$$\mathcal{P}_i = \begin{bmatrix} P_{11,i} & P_{12,i} & P_{13,i} \\ P_{12,i}^T & P_{22,i} & P_{23,i} \\ P_{13,i}^T & P_{23,i}^T & P_{33,i} \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

e substituindo os blocos de  $E_i(z)$ ,  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  e  $D_i$ , dados na equação (5.7), na equação (5.8), tem-se

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc|c}
 P_{11,i} & P_{12,i} & P_{13,i} & A_m G_{11} & A_m G_{12} & A_m G_{13} & \dots \\
 P_{12,i}^T & P_{22,i} & P_{23,i} & A_{cr,i} G_{21} + B_{cr,i} C_r G_{31} & A_{cr,i} G_{22} + B_{cr,i} C_r G_{32} & A_{cr,i} G_{23} + B_{cr,i} C_r G_{33} & \dots \\
 P_{13,i}^T & P_{23,i}^T & P_{33,i} & A_r G_{31} & A_r G_{32} & A_r G_{33} & \dots \\
 \hline
 \star & \star & \star & G_{11} + G_{11}^T - P_{11,i} & G_{12} + G_{21}^T - P_{12,i} & G_{13} + G_{31}^T - P_{13,i} & \dots \\
 \star & \star & \star & G_{21} + G_{12}^T - P_{12,i}^T & G_{22} + G_{22}^T - P_{22,i} & G_{23} + G_{32}^T - P_{23,i} & \dots \\
 \star & \star & \star & G_{31} + G_{13}^T - P_{13,i}^T & G_{32} + G_{23}^T - P_{23,i}^T & G_{33} + G_{33}^T - P_{33,i} & \dots \\
 \hline
 \star & \star & \star & \star & \star & \star & \dots \\
 \star & \star & \star & \star & \star & \star & \dots \\
 \hline
 \dots & B_m & & \mathbf{0} & & & \\
 \dots & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & & \\
 \dots & B_r & & \mathbf{0} & & & \\
 \hline
 \dots & \mathbf{0} & & (C_m G_{11} - C_{cr,i} G_{21} - D_{cr,i} C_r G_{31})^T & & & \\
 \dots & \mathbf{0} & & (C_m G_{12} - C_{cr,i} G_{22} - D_{cr,i} C_r G_{32})^T & & & \\
 \dots & \mathbf{0} & & (C_m G_{13} - C_{cr,i} G_{23} - D_{cr,i} C_r G_{33})^T & & & \\
 \hline
 \dots & \mathbf{I} & & D_m^T & & & \\
 \dots & \star & & \mu \mathbf{I} & & & 
 \end{array} \right] \succ 0, \quad (5.11)$$

As dimensões dos blocos das matrizes de otimização  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{P}_i$  são definidas de forma apropriada.

Existem diferentes formas de resolver o problema de otimização BMI, o método apresentado neste trabalho é baseado em um procedimento de dois passos iterativos, onde em cada passo é necessário resolver um problema LMI. Para obter a formulação LMI de cada passo, os termos bilineares são transformados em termos lineares fixando uma das variáveis matriciais do produto. A variável fixada em um passo é considerada variável de otimização no outro passo e vice-versa. Este procedimento é descrito na sequência:

### Procedimento de Síntese do Pré-filtro Robusto

---

#### PASSO 0

Escolher as matrizes  $A_r$ ,  $B_r$  e  $C_r$  iniciais de um pré-filtro estável. Uma possível maneira de começar é atribuir às matrizes do filtro os valores das matrizes do modelo de referência escolhido pelo projetista, conforme

$$\left[ \begin{array}{c|c} A_r & B_r \\ \hline C_r & D_r \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A_m & B_m \\ \hline C_m & \mathbf{0} \end{array} \right]. \quad (5.12)$$

A matriz de transferência direta  $D_r$  é forçada com o valor de zero neste passo e é calculada no passo 4 para que as funções de transferências da diagonal do pré-filtro tenha ganho unitário em regime permanente e as funções fora da diagonal tenham ganho zero em regime permanente.

**PASSO 1**

Resolver (5.11) para obter valores das variáveis  $G_{11}, G_{12}, G_{13}, G_{21}, G_{22}, G_{23}, G_{31}, G_{32}, G_{33}, \mathcal{P}_i; i=1,\dots,N$ , fixando  $A_r, B_r$  e  $C_r$ . Na primeira iteração as matrizes são obtidas da escolha do filtro inicial no passo 0, a partir da segunda iteração, as matrizes do pré-filtro são obtidas do passo 2. A equação (5.11) é reproduzida a seguir com as variáveis matriciais de otimização sublinhadas para evidenciar a não existência de produtos entre variáveis:

$$\left[ \begin{array}{c|ccc|c}
 & \underline{A_m G_{11}} & \underline{A_m G_{12}} & \underline{A_m G_{13}} & \dots \\
 \underline{\mathcal{P}_i} & \underline{A_{cr,i} G_{21}} + \underline{B_{cr,i} C_r G_{31}} & \underline{A_{cr,i} G_{22}} + \underline{B_{cr,i} C_r G_{32}} & \underline{A_{cr,i} G_{23}} + \underline{B_{cr,i} C_r G_{33}} & \dots \\
 & \underline{A_r G_{31}} & \underline{A_r G_{32}} & \underline{A_r G_{33}} & \dots \\
 \hline
 \star & \star & \star & & \dots \\
 \star & \star & \star & \underline{\underline{g}} + \underline{\underline{g}}^T - \underline{\underline{\mathcal{P}_i}} & \dots \\
 \star & \star & \star & & \dots \\
 \hline
 \star & \star & \star & \star & \dots \\
 \star & \star & \star & \star & \dots \\
 \hline
 \dots & B_m & \mathbf{0} & & \\
 \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \\
 \dots & B_r & \mathbf{0} & & \\
 \hline
 \dots & \mathbf{0} & (\underline{C_m G_{11}} - \underline{C_{cr,i} G_{21}} - \underline{D_{cr,i} C_r G_{31}})^T & & \\
 \dots & \mathbf{0} & (\underline{C_m G_{12}} - \underline{C_{cr,i} G_{22}} - \underline{D_{cr,i} C_r G_{32}})^T & & \\
 \dots & \mathbf{0} & (\underline{C_m G_{13}} - \underline{C_{cr,i} G_{23}} - \underline{D_{cr,i} C_r G_{33}})^T & & \\
 \hline
 \dots & \mathbf{I} & D_m^T & & \\
 \dots & \star & \mu \mathbf{I} & & 
 \end{array} \right] \succ 0, \tag{5.13}$$

**PASSO 2**

Resolver (5.11) para obter valores das variáveis  $A_r, B_r, C_r$  e  $\mathcal{P}_i, i = 1, \dots, N$ , fixando  $G_{11}, G_{12},$

$G_{13}, G_{21}, G_{22}, G_{23}, G_{31}, G_{32}, G_{33}$ , com os valores encontrados no passo 1.

$$\left[ \begin{array}{c|ccc|ccc|c}
 & & & & & & & \dots \\
 \mathcal{P}_i & A_m G_{11} & A_m G_{12} & A_m G_{13} & \dots & & & \dots \\
 & A_{cr,i} G_{21} + B_{cr,i} \underline{C}_r G_{31} & A_{cr,i} G_{22} + B_{cr,i} \underline{C}_r G_{32} & A_{cr,i} G_{23} + B_{cr,i} \underline{C}_r G_{33} & \dots & & & \dots \\
 & \underline{A}_r G_{31} & \underline{A}_r G_{32} & \underline{A}_r G_{33} & \dots & & & \dots \\
 \hline
 * & * & * & & & & & \dots \\
 * & * & * & & & & & \dots \\
 * & * & * & & & & & \dots \\
 \hline
 * & * & * & * & * & * & & \dots \\
 * & * & * & * & * & * & & \dots \\
 \hline
 \dots & B_m & \mathbf{0} & & & & & \vdots \\
 \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & & & \vdots \\
 \dots & \underline{B}_r & \mathbf{0} & & & & & \vdots \\
 \dots & \mathbf{0} & (C_m G_{11} - C_{cr,i} G_{21} - D_{cr,i} \underline{C}_r G_{31})^T & & & & & \vdots \\
 \dots & \mathbf{0} & (C_m G_{12} - C_{cr,i} G_{22} - D_{cr,i} \underline{C}_r G_{32})^T & & & & & \vdots \\
 \dots & \mathbf{0} & (C_m G_{13} - C_{cr,i} G_{23} - D_{cr,i} \underline{C}_r G_{33})^T & & & & & \vdots \\
 \dots & \mathbf{I} & D_m^T & & & & & \vdots \\
 \dots & * & \mu \mathbf{I} & & & & & \vdots \\
 \hline
 \end{array} \right] \succ 0, \tag{5.14}$$

### PASSO 3

Repetir os passos 1 e 2 até que a solução convirja tendo como critério de parada, por exemplo o número de interações ou a variação da função objetivo  $\mu$  em relação as iterações anteriores.

### PASSO 4

Calcular  $D_r = \mathbf{I} - C_r(\mathbf{I} - A_r)^{-1}B_r$ .

## 5.2 Considerações

Neste capítulo foi apresentado um procedimento para síntese do pré-filtro robusto que resolve uma formulação BMI. A vantagem deste procedimento é que cada passo consiste na solução um problema LMI. A desvantagem do procedimento é que não existe uma garantia formal de sua convergência e dependendo da característica do problema, a convergência pode ser lenta.

É importante ressaltar que, com relação à formulação LMI, onde a ordem do pré-filtro é fixa igual a soma da ordem do sistema em malha-fechada mais a ordem do modelo de referência, no caso da formulação BMI, a ordem do pré-filtro pode ser escolhida de forma independente pelo projetista.

No próximo capítulo é apresentado um exemplo de projeto do pré-filtro robusto para ser aplicado em uma planta de dois tanques interligados que apresenta incerteza, sendo representada por um modelo politópico.

## Capítulo 6

# Resultado de aplicação do pré-filtro para sistema incerto

O objetivo deste capítulo é o estudo da eficiência do procedimento de síntese de pré-filtro robusto, descrito no capítulo anterior, aplicado a um sistema incerto representado por um modelo politópico. Inicialmente é apresentado o modelo do processo em malha aberta que consiste de uma planta de dois tanques interligados que apresenta incertezas politópicas. O modelo apresentado no tempo contínuo é discretizado e o projeto é realizado a partir desta etapa no tempo discreto. No intuito de comparar o efeito do controle da planta nos quesitos desempenho da resposta de rastreamento e desacoplamento do sistema são realizados dois projetos. No primeiro projeto, que não faz parte da contribuição deste trabalho, é realizado o projeto de controle robusto por realimentação de estados. Neste projeto o controlador obtido fecha as duas malhas e mantém a estabilidade do sistema mesmo na presença de sinais oriundos da entrada de perturbação e ruídos nas medições, porém é verificado que existe um forte acoplamento entre as malhas de controle. Para tratar o problema do acoplamento e para aprimorar a resposta de rastreamento, no segundo projeto é obtido um pré-filtro robusto pelo algoritmo de otimização descrito no capítulo anterior. O desempenho entre o projeto do controlador por realimentação de estados e o efeito do pré-filtro integrado serão avaliados no controle de níveis de dois tanques interligados.

### 6.1 EXEMPLO: Tanques conectados

Na aplicação da formulação para este exemplo é utilizada uma planta didática. As simulações são realizadas com o modelo matemático linearizado em torno de um ponto de operação escolhido. A escolha deste exemplo se dá em razão de sua simplicidade considerando o alto custo computacional do procedimento iterativo de 2 passos a ser aplicado. O diagrama da figura 6.1 mostra a planta

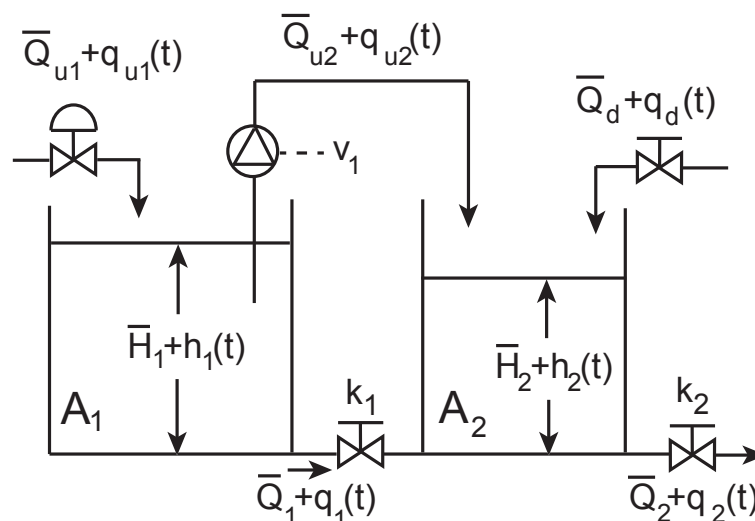


Figura 6.1: Sistema de controle de nível de dois tanques interligados.

constituída por dois tanques interligados. Essa planta é utilizada para esse problema para o controle de níveis dos tanques. Os níveis dos tanques no ponto de operação são  $\bar{H}_1 = 2m$  e  $\bar{H}_2 = 1m$  para o tanque 1 e 2, respectivamente. O primeiro tanque é alimentado pela vazão de entrada  $\bar{Q}_{u1} + q_{u1}(t)$  e no ponto de operação considerado  $\bar{Q}_{u1} = 0,25m^3/s$ . A vazão de entrada do segundo tanque,  $\bar{Q}_{u2} + q_{u2}(t)$ , é controlada pela tensão aplicada à bomba e depende da retirada do líquido do tanque 1, sendo que  $\bar{Q}_{u2} = 0,05m^3/s$ . Essa configuração, definida para o abastecimento do tanque 2, a partir do tanque 1, aumenta o acoplamento entre as variáveis,  $\bar{H}_1 + h_1(t)$  e  $\bar{H}_2 + h_2(t)$ , sobre as quais é desejado o controle. As variáveis manipuladas são  $\bar{Q}_{u1} + q_{u1}(t)$  e  $\bar{Q}_{u2} + q_{u2}(t)$  utilizadas para o controle dos dois níveis.

As restrições hidráulicas ou resistências à passagem do fluido entre os tanques e para a saída do tanque 2 são definidas como o inverso dessa grandeza nas variáveis  $k_1$  e  $k_2$ , respectivamente. Podendo ser chamadas de condutâncias hidráulicas

$$\frac{1}{k_1} = \frac{(\bar{H}_1 + h_1) - (\bar{H}_2 + h_2)}{\bar{Q}_1 + q_1}, \quad \frac{1}{k_2} = \frac{\bar{H}_2 + h_2}{\bar{Q}_2 + q_2}$$

A transferência de líquido entre os tanques, que ocorre pelo duto interligando os 2 tanques, com condutância  $k_1$ , que para este ponto de operação vale  $0,2m^2/s$  resultando em  $\bar{Q}_1 = 0,2m^3/s$ . A saída do líquido do segundo tanque para fora do processo ocorre através da restrição  $k_2 = 0,25m^2/s$  e no ponto de operação a vazão de saída  $\bar{Q}_2 + q_2(t) = 0,25m^3/s$ . O distúrbio do sistema é a vazão de entrada no tanque 2,  $\bar{Q}_d + q_d(t)$ , representa a vazão de perturbação, sendo que no ponto de operação  $\bar{Q}_d = 0$ . As variações em torno deste ponto são representadas pelas variáveis em letra minúscula.

O modelo é obtido pela linearização em torno do ponto de operação e representado no espaço

de estados pelas variáveis de estado  $x(t) \triangleq [h_1(t) \ h_2(t) \ \nu_1(t) \ \nu_2(t)]^T$ . São incluídas as variáveis associadas as ações de controle integral dos erros entre o nível do tanque em questão,  $h_i(t)$ , e o sinal de referência para o nível respectivo,  $r_i(t)$ , considerando a interferência do ruído de medição:  $\nu_i(t) \triangleq \int [r_i(t) - h_i(t) - n_i(t)]dt$ ,  $i = 1, 2$ . As saídas da planta são os níveis de cada tanque,  $c(t) = [h_1(t) \ h_2(t)]^T$ . Os sinais de controle são representados pelas entradas de vazão de cada tanque  $u(t) = [q_{u1}(t) \ q_{u2}(t)]^T$ . As equações dinâmicas no espaço de estados deste sistema representada no tempo contínuo são

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{k_1}{A_1} & \frac{k_1}{A_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{A_2} & -\frac{k_1+k_2}{A_2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & -\frac{1}{A_1} \\ 0 & \frac{1}{A_2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{u1} \\ q_{u2} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A_2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ q_d \\ n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} \\ z &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u. \end{aligned} \quad (6.1)$$

É considerado que que todas as variáveis de estado são medidas para a realimentação de estados, isto é,  $y = x$ . As áreas transversais dos tanques são  $A_1 = 10m^2$  e  $A_2 = 5m^2$ . O sistema é representado por um modelo politópico com quatro vértices, em que  $k_1$  e  $k_2$  são parâmetros incertos que pertencem as faixas:  $0,15 \leq k_1 \leq 0,25$  e  $0,2 \leq k_2 \leq 0,3$ .

Para conversão da representação do sistema do tempo contínuo para o tempo discreto foi utilizado o comando `c2d` do software MATLAB<sup>®</sup>, o método de discretização utilizado é o ZOH.

### 6.1.1 Bloco 1 - Projeto do controlador Robusto

Foi projetado um controlador robusto por realimentação de estados,  $u(k) = Kx(k)$ , considerando um modelo politópico do sistema com 4 vértices. O controlador obtido garante o desempenho do sistema para rejeição de perturbação e atenuação de ruídos considerando normas  $H_\infty$  e  $H_2$  respecti-



vamente, de acordo com a função objetivo

$$f = \lambda_1 \max_{\alpha \in \Omega} \|T_{cd}(\alpha, z, K)\|_{\infty} + \lambda_2 \max_{\alpha \in \Omega} \|T_{un}(\alpha, z, K)\|_2.$$

O algoritmo de otimização procura um controlador que reduza a norma  $H_{\infty}$  entre a entrada de distúrbio,  $d$ , e as saídas controladas,  $c$ , e também que atenua a norma  $H_2$  entre as entradas de ruído,  $n$ , e as variáveis manipuladas,  $u$ , com ponderação de  $\lambda$ . A função objetivo é otimizada fazendo uso da formulação apresentada em de Oliveira et al. (2002). Com ponderação  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5$ , é obtido o controlador

$$K = \begin{bmatrix} -2,7141 & -0,5146 & 0,0339 & -0,0127 \\ -0,1716 & -2,0618 & -0,0164 & 0,0199 \end{bmatrix},$$

As matrizes de transferência do sistema em malha-fechada,  $T_{cr,i}(z)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , são calculadas como

$$T_{cr,i}(z) \triangleq \left[ \begin{array}{c|c} A_{cr,i} & B_{cr,i} \\ \hline C_{cr,i} & D_{cr,i} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A_i + B_{u,i}K & B_{w,i} \\ \hline C_{z,i} + D_{zu,i}K & D_{zw,i} \end{array} \right], i = 1, \dots, 4,$$

que contemplam a representação para os quatro vértices do sistema em malha-fechada. O projeto resulta nos seguintes custos garantidos

$$\max_{\alpha \in \Omega} \|T_{cd}(z)\|_{\infty} \leq 0,5960 \quad e \quad \max_{\alpha \in \Omega} \|T_{un}(z)\|_2 \leq 0,6321.$$

### 6.1.2 Bloco 2 - Projeto do Pré-filtro Robusto

Para o projeto do bloco do pré-filtro que irá atuar sobre as entradas de referência, alterando a resposta transitória da variação dos níveis e otimizando o desacoplamento entre os níveis de cada tanque, foi escolhido o modelo de referência com formato da matriz diagonal para desacoplamento do sistema

$$T_m(z) = \begin{bmatrix} T_{m_1}(z) & 0 \\ 0 & T_{m_2}(z) \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

As funções de transferência da diagonal  $T_{m,i} = (z)$ ,  $i = 1, 2$  - relacionando cada entrada de referência filtrada,  $\hat{r}_1$  e  $\hat{r}_2$ , à sua respectiva saída controlada,  $h_1$  e  $h_2$  - são calculadas a partir do modelo no tempo contínuo por

$$T_{m_i}(s) = \frac{\omega_{n_i}^2}{s^2 + 2\zeta_i\omega_{n_i}s + \omega_{n_i}^2}, \quad (6.3)$$

com  $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,9$  e  $\omega_{n_1} = \omega_{n_2} = 0,05$ . Considerando o tempo de amostragem de 2,5 segundos com

o método ZOH é obtido o modelo de referência no tempo discreto

$$T_{m_i}(z) = \frac{0,007249z + 0,006725}{z^2 - 1,785z + 0,7985}, \quad i = 1, 2. \quad (6.4)$$

Estes parâmetros do modelo foram obtidos a partir de testes e os valores finais são os mais adequados para a planta em estudo.

Para a solução do problema BMI associado a formulação do problema de síntese do pré-filtro robusto pelo procedimento iterativo é necessário escolher um pré-filtro inicial. Para facilitar a reprodução dos resultados, o pré-filtro escolhido corresponde as matrizes do modelo de referência

$$T_r(z) = T_m(z). \quad (6.5)$$

É aplicado o procedimento de aproximação de modelo  $\mathcal{H}_\infty$  utilizando a função  $\text{mincx}(\cdot)$  do MATLAB<sup>®</sup> LMI Control Toolbox para resolver os problemas LMI do procedimento iterativo em dois passos<sup>1</sup>, com as seguintes opções para a função  $\text{mincx}(\cdot)$ :  $\text{options} = [0,01 \quad 500 \quad 10^5 \quad 10 \quad 1]$  é obtido o pré-filtro robusto

$$T_r(z) \triangleq \begin{bmatrix} 0,8266 & 0,0343 & 0,1341 & -0,0029 & -1,0488 & -0,7376 \\ -0,0601 & 0,9344 & 0,0432 & 0,0872 & -0,5989 & -1,7471 \\ 0,2625 & -0,1171 & 0,6623 & 0,0231 & 4,6436 & 4,2332 \\ 0,1041 & -0,0398 & -0,0479 & 0,7812 & 3,4038 & 8,6238 \\ \hline -0,3552 & 0,0478 & 0,2302 & -0,0122 & 0 & 0 \\ -0,1126 & -0,1775 & 0,0757 & 0,1378 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O gráfico da figura 6.2 apresenta a variação do valor do custo garantido para cada iteração do procedimento de síntese do pré-filtro robusto. O valor do custo garantido diminui com o aumento do número de iterações, tendendo para o valor aproximado de  $H_\infty = 0,067$ .

Pela solução da BMI apresentada foram obtidas as matrizes do pré-filtro com um custo garantido

$$\max_{\alpha \in \Omega} \|T_{cr}(z)\|_\infty \leq \sqrt{\mu} = 0,0669, \quad (6.6)$$

com  $D_r = 0$  e  $0,0702$  com

$$D_r = \begin{bmatrix} 0,0535 & 0,0144 \\ 0,0172 & 0,0291 \end{bmatrix}, \quad (6.7)$$

<sup>1</sup>O tempo computacional gasto para o algoritmo convergir para a solução robusta ótima é de aproximadamente 2 minutos e 43 segundos. Foi utilizado um computador com processador Intel(R) Core(TM) i5 CPU operando na frequência de 2,67GHz com memória (RAM) de 4GB em um sistema operacional de 64Bits; é utilizado o Windows 7 Home Basic.

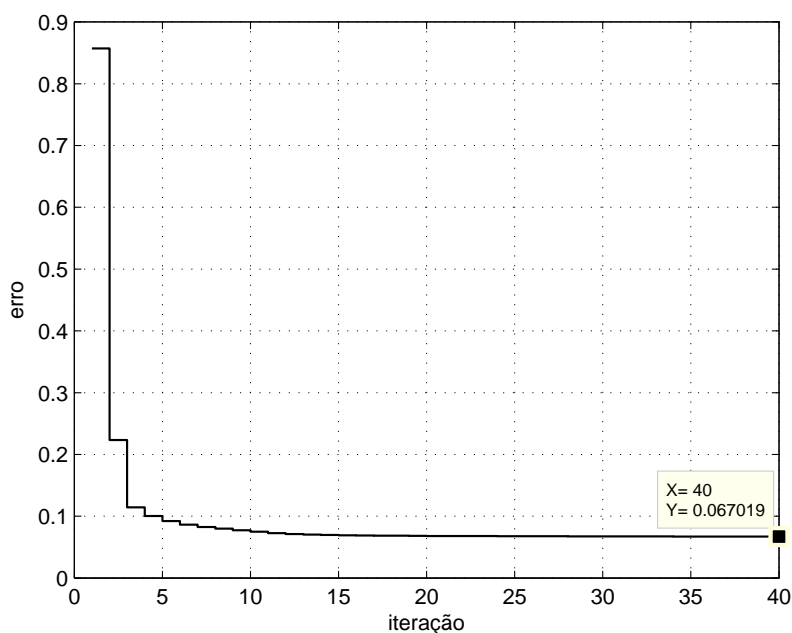


Figura 6.2: Variação do custo garantido durante a otimização do pré-filtro  $\|erro\|_{\infty}$  x iterações do programa.

calculado para que as saídas possuam ganho unitário em regime permanente em relação ao sinais das entradas de referência. Deste modo o calculo *a posteriori* de  $D_r$  não afeta significativamente o erro de aproximação.

### 6.1.3 Resultados da Simulação

Na figura 6.3 é apresentada a resposta em frequência para o resultado da planta em malha-fechada com o pré-filtro. No Diagrama de Bode multivariável são relacionados aos pares os ganhos entre as entradas do pré-filtro,  $\hat{r}_i = r_i$ ,  $i = 1, 2$  e as saídas da planta controlada  $h_i$ ,  $i = 1, 2$  para sinais de entrada de frequência variando de  $10^{-5}$  a 1 radiano por segundo. Nos diagramas que relacionam  $\hat{r}_1$  com  $h_1$  e  $\hat{r}_2$  com  $h_2$  da diagonal principal os ganhos do modelo de referência (linha tracejada) são iguais aos dos sistema em malha-fechada com o pré-filtro para os quatro vertices (linha sólida) com o valor de  $0dB = 1$  para a faixa de passagem superior a  $-3dB$ . Fora da diagonal principal os diagramas que relacionam  $r f_2 h_1$  e  $r f_1 h_2$  para toda faixa de frequências considerada o ganho é muito pequeno próximo de zero. O Diagrama de Bode multivariável evidencia o desacoplamento das malhas da planta, pois o sinal da entrada de referência  $\hat{r}_1$  somente irá influenciar a saída  $h_1$  e o sinal de  $\hat{r}_2$  somente a saída  $h_2$ .

Para verificar as condições de seguimento do modelo de referência e o desacoplamento das ma-

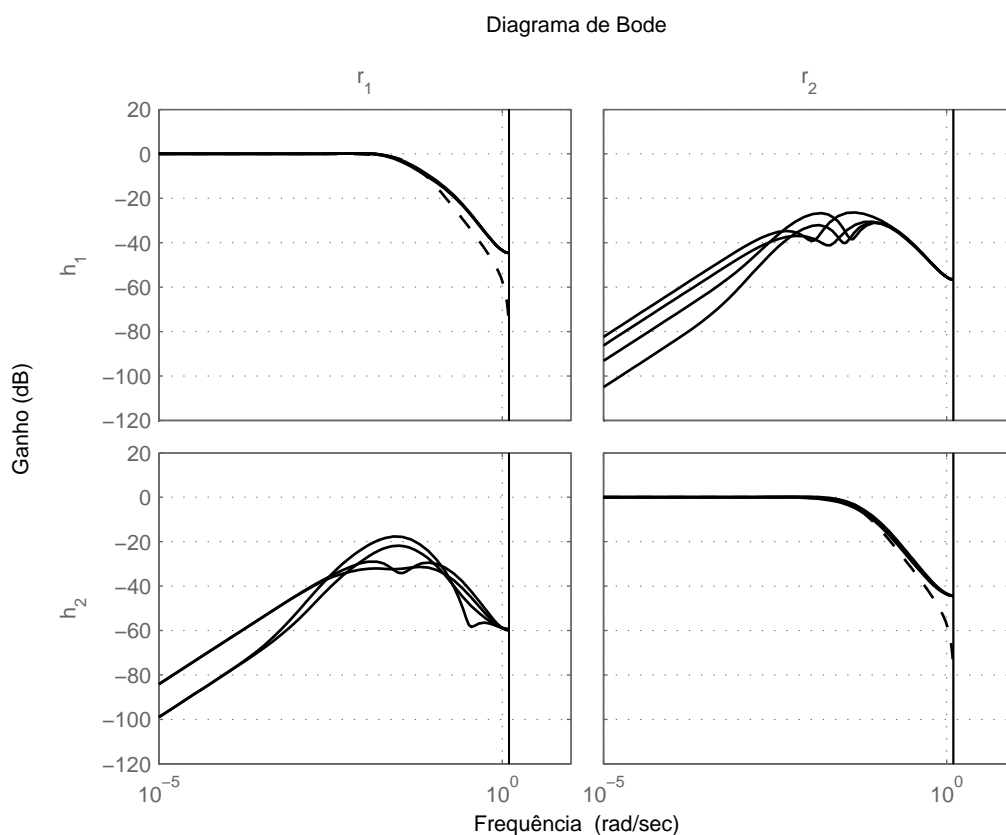


Figura 6.3: Resposta em frequência dos quatro vértices do sistema com o pré-filtro (linhas sólidas) comparada com a resposta do modelo de referência (linha tracejada).

As malhas de controle a planta dos dois tanques em malha-fechada com o pré-filtro é simulada mediante variações nas entradas de referência do pré-filtro,  $\hat{r}_i$ ,  $i = 1, 2$ . O gráfico da fig. 6.4 apresenta em linha tracejada as entradas de referência do pré-filtro,  $\hat{r}_1$  passa de zero para  $-0,1$  e permanece neste valor até o final da simulação,  $\hat{r}_2$  mantém seu valor em zero e passa a ser  $0,1$  durante o intervalo de 1000 a 2000 segundos. Os dois sinais de saída do filtro evoluem de acordo com as curvas sólidas referenciadas no gráfico. Isso significa que é desejado que o tanque 1 esvazie de  $h_1(t) = -0,1m$  a partir do ponto de operação  $\bar{H}_1 = 2m$  e atinja o nível de  $\bar{H}_1 + h_1(t) = 2 - 0,1 = 1,9m$  em regime permanente e o tanque 2 encha para o nível de  $\bar{H}_2 + h_2(t) = 1 + 0,1 = 1,1m$ .

A figura 6.5 apresenta a evolução nos níveis dos tanques resultados da variação das entradas de referência de acordo com os sinais da figura 6.4. A simulação é realizada para os quatro pontos de operação extremos, segundo a configuração assumida pelo sistema dada pelos quatro vértices do polítopo de incertezas. A resposta transitória das saídas controladas, para o projeto somente do controlador em malha-fechada apresenta grande acoplamento entre as malhas de controle durante as variações do sinal de referência nos tempos zero e 1000 segundos da simulação. Já a resposta transi-

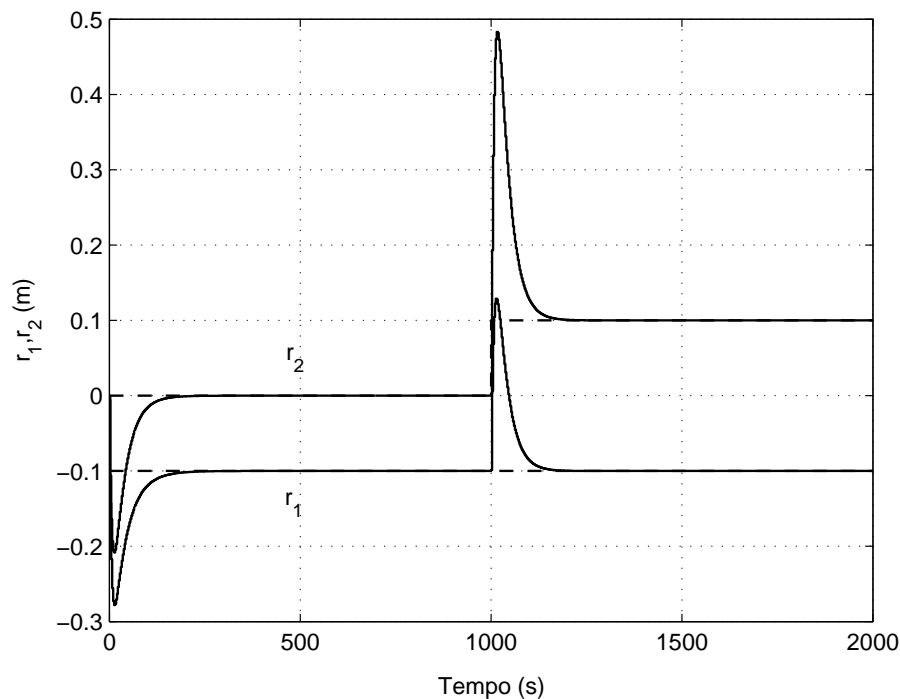


Figura 6.4: Sinais de simulação de referência  $\hat{r}_1$  e  $\hat{r}_2(t)$  (linha tracejada) e da saída do pré-filtro  $r_1$  e  $r_2$  (linha sólida).

tória para o projeto com a inclusão do pré-filtro apresenta um bom desacoplamento e segue o modelo de referência proposto que possui dinâmica mais rápida, com menor tempo de acomodação das saídas em relação ao projeto somente do controlador por realimentação de estados. A boa aproximação do sistema em malha fechada com o pré-filtro ao modelo de referência é evidenciada no gráfico da figura 6.5 pela sobreposição das linhas da simulação das respostas do projeto com o pré-filtro para os quatro vértices e a linha, que é pontilhada, do modelo.

Pode ser observado pela figura 6.6 que a ação de controle foi visivelmente diferente para cada vértice do polítopo, evidenciando o impacto da variação de parâmetros sobre o comportamento do sistema. Como tanto o controlador por realimentação de estados, como o pré-filtro, são robustos, isto é, são projetados para garantir o desempenho do sistema mesmo na presença de incertezas, o importante é que, como visto na figura 6.5, as saídas do sistema apresentaram comportamentos similares para os quatro vértices distintos.

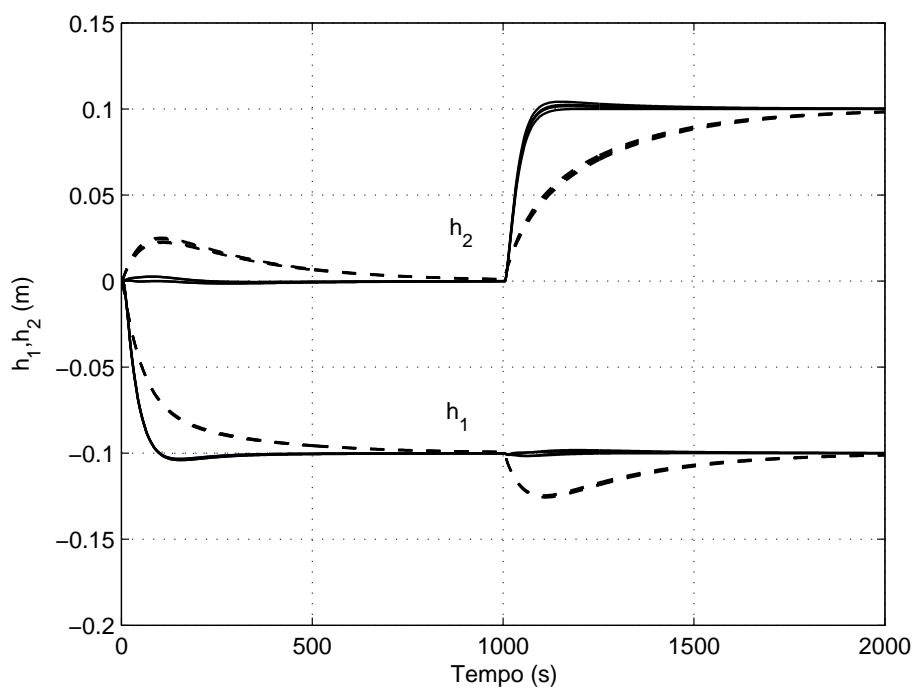


Figura 6.5: Resposta transitória de  $h_1$  e  $h_2(t)$  dos quatro vértices (linha contínua) para a planta com o pré-filtro em comparação ao projeto somente do controlador em malha-fechada (linha tracejada) e modelo (linha pontilhada).

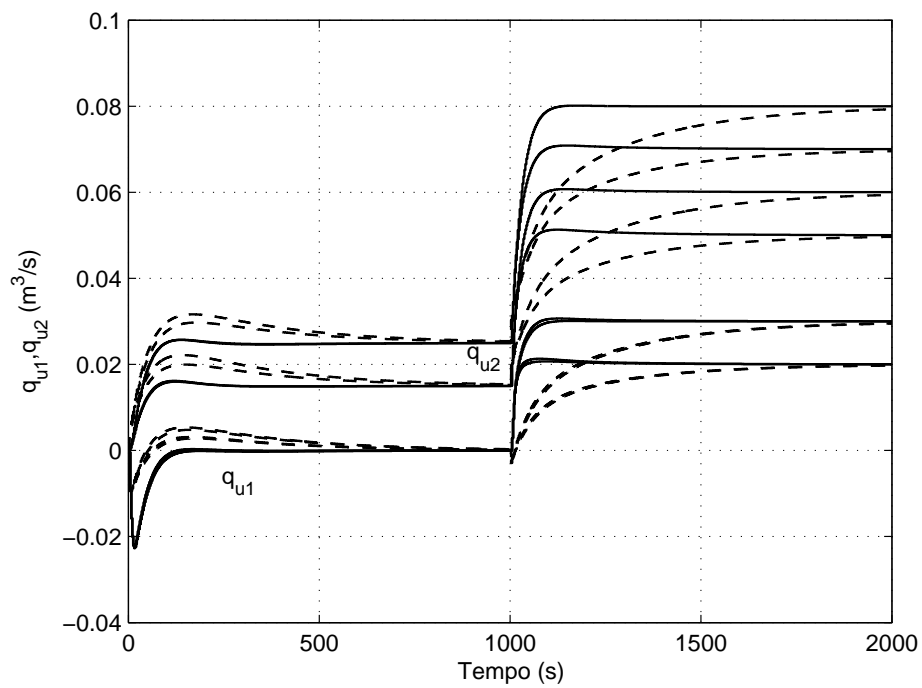


Figura 6.6: Resposta transitória dos sinais de controle  $q_{u1}(t)$  e  $q_{u2}(t)$  para os quatro vértices sem o pré-filtro (linha tracejada) e com o pré-filtro (linha contínua).

### 6.1.4 Considerações da formulação BMI para sistemas incertos

Para o sistema mais simples analisado neste capítulo, a formulação BMI para síntese do pré-filtro aplicado à sistemas incertos apresentou bons resultados. Entretanto, devido à maior complexidade do procedimento de solução da formulação BMI, é de se esperar um alto custo computacional para sistemas de ordem mais elevadas. Em relação à formulação LMI para sistemas precisamente conhecidos, em que podemos quantificar a norma  $H_\infty$  do erro de aproximação com valor exato, na formulação apresentada no capítulo anterior, a representação BMI calcula, com certo conservadorismo, um limitante superior para o valor da norma no espaço de incerteza. Outra desvantagem em relação à formulação LMI é que a formulação BMI pode apresentar problemas numéricos durante a sua solução, não existindo a garantia da convergência, que também é influenciada pelas condições iniciais.



# Capítulo 7

## Conclusão deste trabalho

### 7.1 Conclusões

O objetivo desse trabalho foi o de investigar o uso de pré-filtros em sistemas multivariáveis, lineares, invariantes no tempo, discretos no tempo, com o objetivo de realizar o desacoplamento das malhas de controle e também atuar na resposta transitória de rastreamento. A idéia é utilizar o pré-filtro para melhorar um sistema de controle já existente sem afetar as suas características em relação a rejeição de distúrbios e atenuação de ruídos de medição. Para isso, são contribuições desse trabalho:

- Uma formulação LMI para síntese do pré-filtro para sistemas precisamente conhecidos;
- uma formulação BMI para síntese do pré-filtro robusto para sistemas incertos representados por modelo politópicos.

Para formulação do problema de síntese do pré-filtro para atender aos objetivos mencionados, foi proposto utilizar a metodologia de aproximação de modelo de referência com base na norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Com a escolha de um modelo de referência diagonal, é possível não somente atuar sobre a resposta transitória de rastreamento, como também aprimorar o desacoplamento das malhas de controle. Foi comprovado pelos estudos realizados que esta metodologia se adequa perfeitamente para a formulação do problema de síntese do pré-filtro.

A vantagem da formulação LMI é que o problema de síntese do pré-filtro pode ser facilmente solucionado por software já existentes, de comum utilização na área de controle robusto. No caso da formulação BMI, o problema é mais complexo de ser solucionado. Foi proposto neste trabalho adaptar um procedimento para solução da formulação BMI composto por dois passos iterativos, onde cada passo é necessário a solução de uma formulação LMI. A vantagem deste procedimento é que novamente podem ser utilizados software já existentes. Por outro lado, o custo computacional pode

ser bem elevado de acordo com a ordem do sistema sendo tratado, do número de vértices do politopo que representa o espaço de incerteza e pela possibilidade de convergência lenta deste procedimento. Apesar de não existir uma prova formal da garantia de convergência deste procedimento, o mesmo tem apresentado resultados adequados para o caso em estudo e em outros problemas em que foi aplicado.

A formulação LMI de síntese do pré-filtro foi testada em três problemas bem conhecidos da literatura tendo apresentado um desempenho melhor do que o sistema de controle original, sem o pré-filtro. Uma dificuldade encontrada, principalmente no caso do sistema  $3 \times 3$ , é a determinação do modelo de referência mais adequado. Foi observado que um erro de aproximação elevado resulta em um desacoplamento ruim. Obter o modelo de referência com menor erro de aproximação necessita um ajuste do mesmo através de um procedimento de tentativa e erro que procura adequar o modelo de referência à resposta de rastreamento que está sendo obtida com o modelo atual. Isso significa que deve ser procurado um compromisso entre as características da resposta de rastreamento e o nível de desacoplamento.

A formulação BMI foi aplicada a um exemplo mais simples para facilitar o estudo devido ao seu alto custo computacional para sistemas de ordem mais elevadas, como aqueles analisados para formulação LMI. Tanto o comportamento do procedimento para a solução da formulação BMI, como o resultado obtido pelo mesmo, foram satisfatórios para este exemplo mais simples. Entretanto, é de se esperar uma dificuldade para o ajuste do modelo de referência por tentativa e erro, no caso de sistemas mais complexos, devido ao fato do alto custo computacional.

Uma dificuldade observada nas formulações de síntese propostas é que as mesmas são baseadas na representação no espaço de estados, ao passo que vários dos problemas de sistemas multivariáveis encontrados na literatura utilizam a representação por matriz de transferência. Ao se converter a matriz de transferência para a representação no espaço de estados é obtido um sistema de ordem elevada que demanda alto custo computacional na solução da formulação LMI. Outra dificuldade foi a representação dos atrasos no tempo, que aumentam ainda mais a ordem do sistema discreto. É importante salientar que este problema é ainda mais significativo no caso da formulação BMI, onde em cada iteração do procedimento demanda solução de dois problemas LMI.

## 7.2 Proposta de prosseguimento do trabalho

A principal dificuldade para aplicação dos formulações de síntese de pré-filtro propostas é a determinação do modelo de referência mais adequado para cada sistema. Seria interessante desenvolver um procedimento para o ajuste automático dos parâmetros do modelo de referência para tender ao compromisso entre o desacoplamento e as características da resposta transitória de rastreamento de-

sejada pelo projetista.

No caso de sistemas incertos representados por modelos politopicos, é interessante pesquisar e avaliar outros procedimentos para a solução do problema BMI. É possível também tratar o problema usando uma formulação direta no espaço dos parâmetros do pré-filtro que não resultam em uma formulação BMI. Neste caso, a formulação de síntese resulta em um problema de otimização possivelmente não convexo de difícil tratamento por se tratar de um problema de minimizar o pior caso em um espaço de infinitos pontos.

### 7.3 Publicações relacionadas a essa dissertação

Este trabalho possibilitou a publicação de um artigo no Congresso Brasileiro de Automática (CBA2012):

- Godinho, D. A., Gonçalves, E. N., Leite, V. J. S. e Palhares, R. M. (2012). Síntese de Pré-Filtro Discreto: Formulação LMI para aproximação de modelo  $\mathcal{H}_\infty$ , *XIX Congresso Brasileiro de Automatica*, Campina Grande, Paraíba. pp. 756-761.

# Referências Bibliográficas

- Alavi, S. M. M., Khaki-Sedigh, A., Labibi, B. e Hayes, M. J. (2007). Improved multivariable quantitative feedback design for tracking error specifications, *IET Control Theory & Applications* **1**(4): 1046–1053.
- Alipouri, Y. e Poshtan, J. (2013). Optimal controller design using discrete linear model for a four tank benchmark process, *ISA Transactions* **52**(5): 644–651.
- Åström, K., K.H.Johansson e Wang, Q.-G. (2002). Design of decoupled PI controllers for two-by-two systems, *IEE Proceedings on Control Theory and Applications* **149**(1): 74–81.
- Bernussou, J., Peres, P. L. D. e Geromel, J. C. (1989). A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems, *Systems & Control Letters* **13**: 65–72.
- Bianchi, F. D., Mantz, R. J. e Christiansen, C. F. (2008). Multivariable PID control with set-point weighting via BMI optimisation, *Automatica* **44**(2): 472–478.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. e Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM, Philadelphia, PA.
- Campestrini, L., Filho, L. C. S. e Bazanella, A. S. (2009). Tuning of multivariable decentralized controllers through the ultimate-point method, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **17**(6): 1270–1281.
- Cao, Y.-Y., Lam, J. e Sun, Y.-X. (1998b). Static output feedback stabilization: An ILMI approach, *Automatica* **34**(12): 1641–1645.
- Cao, Y.-Y., Sun, Y.-X. e Mao, W.-J. (1998). Output feedback decentralized stabilization: ILMI approach, *Systems & Control Letters* **35**(3): 183–194.
- Caponetton, R. e Dongola, G. (2013). A numerical approach for computing stability region of FO-PID controller, *Journal of the Franklin Institute* **350**: 871–889.

- Chen, D. e Seborg, D. (2003). Design of decentralized PI control systems based on nyquist stability analysis, *Journal of Process Control* **13**: 27–29.
- Chilali, M. e Gahinet, P. (1996).  $\mathcal{H}_\infty$  design with pole placement constraints: An LMI approach, *IEEE Transaction on Automatic Control* **41**(3): 358–367.
- de Oliveira, M. C., Geromel, J. C. e Bernussou, J. (2002). Extended  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems, *International Journal of Control* **75**(9): 666–679.
- Doyle, J. C., Francis, B. A. e Tannenbaum, A. R. (1990). *Feedback Control Theory*, Macmillan Publishing Co.
- Fujimori, A. (2004). Optimization of static output feedback using substitutive LMI formulation, *IEEE Transaction on Automatic Control* **49**(6): 995–999.
- Gagnon, E., Pomerleau, A. e Desbiens (1998). A. simplified, ideal or inverted decoupling?, *ISA Trans.* pp. 265–276.
- Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J. e Chilali, M. (1995). *LMI Control Toolbox: For Use with MATLAB<sup>®</sup>*, The MATH WORKS Inc., Natick.
- Garelli, F., Mantz, R. J. e Battista, H. D. (2006). Limiting interactions in decentralized control of MIMO systems, *Journal of Process Control* **16**(5): 473–482.
- Garrido, J., Vazquez, F. e Morilla, F. (2011). An extended approach of inverted decoupling, *Journal of Process Control* **21**(1): 55–69.
- Gonçalves, B. M., Gonçalves, E. N., Palhares, R. M. e Takahashi, R. H. C. (2012). Robust decoupling PI controllers for multi-loop control, *Proceedings of the 51st IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE, Maui, Hawaii, USA, pp. 1530–1535.
- Gundes, A. N., Mete, A. N. e Palazoglu, A. (2009). Reliable decentralized PID controller synthesis for two-channel MIMO processes, *Automatica* **2**(45): 353–363.
- Halevi, Y., Palmor, Z. J. e Efrati, T. (1997). Automatic tuning of decentralized PID controllers for mimo processes, *Jornal of Process Control* **7**: 119–128.
- He, Y. e Wang, Q.-G. (2006). An improved ILMI method for static output feedback control with application to multivariable pid control, *IEEE Transaction on Automatic Control* **51**(10): 1678–1683.

- Helmersson, A. (1994). Model reduction using LMIs, *Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control*, IEEE, Lake Buena Vista, FL, pp. 3217–3222.
- Hovd, M. e Skogestad, S. (1994). Sequential design of decentralized controllers, *Automatica*, Vol. 30, pp. 1601–1607.
- Huang, H.-P., Jeng, J.-C., Chiang, C.-H. e Pan, W. (2003). A direct method for multi-loop PI/PID controller design, *Journal of Process Control* **12**: 769–786.
- Jevtović, B. T. e Matausek, M. R. (2010). PID controller design of TITO system based on ideal decoupler, *Journal of Process Control* **20**(7): 869–876.
- Johansson, K. H. (2000). The quadruple-tank process: A multivariable laboratory process with an adjustable zero, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **8**(3): 456–465.
- Johansson, K. H. (2002). Interaction bounds in multivariable control systems, *Automatica* **38**(6): 1045–1051.
- Kumar, V. V., Rao, V. S. R. e Chidambaram, M. (2012). Centralized PI controllers for interacting multivariable processes by synthesis method, *ISA Transactions* **51**(3): 400–409.
- Lee, C., Salapaka, S. M. e Voulgaris, P. G. (2009). Two degree of freedom robust optimal control design using a linear matrix inequality optimization, *Proceedings of the Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference*, IEEE, Shanghai, P.R. China, pp. 714–719.
- Lee, J. e Edgar, T. F. (2006). Multiloop PI/PID control system improvement via adjusting the dominant pole or the peak amplitude ratio, *Chemical Engineering Science* **61**(5): 1658–1666.
- Lin, C., Wang, Q.-G. e Lee, T. H. (2004). An improvement on multivariable PID controller design via iterative LMI approach, *Automatica* **40**(3): 519–525.
- Liu, C., Huang, B. e Wang, Q. (2011). Control performance assessment subject to multi-objective user-specified performance characteristics, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **19**(3): 682–691.
- Loh, A. e Vasnani, V. (1994). Describing function matrix for multivariable systems and its use in multiloop PI design, *Journal of Process Control* **4**(3): 115–120.
- Luyben, W. (1970). Distillation decoupling, *AIChE J.* **16**: 198–203.

- Luyben, W. (1986). Simple method for tuning SISO controllers in multivariable systems, *Industrial Engineering Chemistry Product Research and Development* **25**: 654–660.
- Masubuchi, I., Ohara, A. e Suda, N. (1998). LMI-based controller synthesis: an unified formulation and solution, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **8**: 669–686.
- Moaveni, B. e Sedigh, A. K. (2008). Input-output pairing analysis for uncertain multivariable processes, *Journal of Process Control* **15**(6): 527–532.
- Ogunnaike, B. A., Lemaire, J. P., Morari, M. e Ray, W. (1983). Advanced multivariable control of a pilot-plant distillation column, *AIChE Journal* **29**(4): 632–640.
- Peaucelle, D., Henrion, D., Labit, Y. e Taitz, K. (2002). User's guide for sedumi interface 1.04. Version 1.04 available from <http://www.laas.fr/henrion/papers/sdmguide.pdf>.
- Quin, S. J. e Thomas, A. B. (2003). A survey of industrial model predictive control technology, *Control Engineering Practice* **11**: 733–764.
- Scherer, C., Gahinet, P. e Chilali, M. (1997). Multiobjective output-feedback control via LMI optimization, *IEEE Transactions on Automatic Control* **42**(7): 896–911.
- Shen, Y., Cai, W.-J. e Li, S. (2010). Multivariable process control: Decentralized, decoupling, or sparse?, *Industrial & Engineering Chemistry Research* **49**(2): 761–771.
- Shen, Y., S. e S., L. (2012). Adjoint transfer matrix based decoupling control for multivariable processes, *Industrial Engineering Chemistry Research* **51**: 16419–16426.
- Shinskey, F. G. (1988). *Process Control Systems: Application, Design and Adjustment*, McGraw-Hill: New York.
- Solimana, M., Elshafei, A., Bendarya, F. e Mansoura, W. (2010). Robust decentralized pid-based power system stabilizer design using an ilmi approach, *Electric Power Systems Research* **80**: 1488–1497.
- Sturm, J. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optimization Methods and Software* **11–12**: 625–653. Version 1.1 available at [sedumi.mcmaster.ca](http://sedumi.mcmaster.ca).
- Vu, T. e Lee, M. (2009). Multi-loop pi controller design based on the direct synthesis for interacting multi-time delay processes, *ISA Transaction* **49**: 79–86.

- Vu, T. N. L. e Lee, M. (2010). Independent design of multi-loop PI/PID controllers for interacting multivariable processes, *Journal of Process Control* **20**(8): 922–933.
- Wood, R. e M.W.Berry (1973). Terminal composition control of a binary distillation column, *Chemical Engineering Science* **28**: 1707–1717.
- Zhanga, Y., Wang, Q.-G. e Åström, K. (2002). Dominant pole placement for multi-loop control systems, *Automatica* **38**(7): 1213–1220.
- Zheng, F., Wang, Q.-G. e Lee, T. H. (2002). On the design of multivariable pid controllers via lmi approach, *Automatica* **38**(3): 517–526.