Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Universidade Federal de São João del-Rei

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA-PPGEL

Marianna Aparecida de Sá Siqueira

Síntese de Controle Desacoplador Robusto de Sistemas Multivariáveis

Belo Horizonte

2014

Marianna Aparecida de Sá Siqueira

Síntese de Controle Desacoplador Robusto de Sistemas Multivariáveis

Dissertação de Mestrado submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Associação ampla entre a Universidade Federal de São João del-Rei e o Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Modelagem e Controle de Sistemas.
Linha de Pesquisa: Sistemas de Controle.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Nunes Gonçalves

Belo Horizonte
2014

Agradecimentos

Gostaria de agradecer, primeiramente a Deus por me mostrar que tudo é possível.

Quero também agradecer aos meus pais pelo apoio incondicional, à minha irmã pelas horas de descontração e força, ao meu noivo pela infinita paciência e perseverança.

Sou grata ao meu orientador, Prof. Eduardo Nunes Gonçalves por me aceitar e ser além de um orientador, um grande mestre, e me auxiliou em todas as etapas desse trabalho.

Aos meus amigos por sempre acreditarem em mim e pela compreensão nas horas que fui ausente.

Obrigada ao Departamento de Engenharia Elétrica do CEFET/MG, pelo apoio e recursos oferecidos para o pleno desenvolvimento e finalização desta dissertação.

Agradeço também a todo o corpo docente do CEFET/MG, em especial ao Prof. Giovani Guimarães Rodrigues que foi extremamente solícito em todos os momentos necessários.

Não menos importante gostaria de agradecer imensamente a todos os meus colegas do mestrado que seguiram comigo durante toda a realização desse trabalho.

Por fim agradeço ao apoio das agências CAPES, CNPq e FAPEMIG.

Resumo

O controle de processos industriais multivariáveis com base em configuração multi-malhas é muito popular devido à sua simplicidade. No caso de degradação do desempenho do sistema causado pela interação significativa entre as malhas de controle, uma estratégia comum é considerar um esquema de controle desacoplador que combina os controladores multi-malhas PID com um pré-compensador desacoplador robusto. Esse trabalho apresenta um novo procedimento de síntese de controle desacoplador que pretende desacoplar os diferentes canais do sistema multivariável e garantir o desempenho da resposta de rastreamento e da rejeição de distúrbios. O problema de síntese do controle desacoplador robusto é formulado como um problema de otimização multiobjetivo não-convexo no espaço de parâmetros dos controladores PID e do desacoplador. As vantagens do procedimento proposto são calcular o controle desacoplador robusto com qualquer estrutura desejada e considerar modelos politópicos para representar a incerteza do sistema, além de realizar o cálculo do controlador junto com o desacoplador. Dois sistemas multivariáveis considerado em vários trabalhos são utilizados para demonstrar a eficácia do procedimento de síntese proposto.

Palavras-chave— Controle desacoplador, controle PID multi-malhas, incerteza politópica.

Abstract

The control of multivariable industrial processes based on multiloop configuration is very popular due to its simplicity. In case of poor system performance because of significant interaction between the control loops, a common strategy is to consider a decoupling control scheme that combines the multiloop PID controllers with a decoupling precompensator. This work presents a new robust decoupling control synthesis procedure which aims to decouple different channels of the multivariable system, to guarantee the tracking response performance and disturbance rejection. A robust decoupling control synthesis problem is stated as a non-convex multiobjective optimization problem in the space of the PID controllers and decoupler parameters. Advantages of the proposed procedure are computation of suboptimal robust decoupling control with any desired structure and to consider polytopic models to represent the system uncertainty, in addition performs the controller calculus along with the decoupler. Benchmark multivariable systems considered in various previous works are considered to demonstrate the effectiveness of the proposed synthesis procedure.

Keywords— Decoupling control, multiloop PID control, polytopic uncertainty

Sumário

Lista de Figuras vi

Tabela viii

Acrônimos ix

Lista de Símbolos x

Capítulo 1 - Introdução 1

1.1 Caracterização da Pesquisa 1

1.2 Objetivo 10

1.3 Estrutura da Dissertação 11

Capítulo 2 - Formulação do Problema 12

2.1 Introdução 12

2.2 Norma $\mathcal{H}_\infty$ 12

2.3 Estrutura do Controlador Descetralizado 14

2.4 Formulação do Problema de Síntese do Controle Desacoplador 22

Capítulo 3 - Procedimento de Síntese do Controlador Desacoplador Robusto 25

3.1 Introdução 25

3.2. Procedimento de Síntese do Controle Desacoplador Robusto 26

3.3 Etapa de Síntese 28

3.4 Etapa de Análise 32

3.4.1 Técnica de Partição do Politopo 34

3.4.2 Descrição do Algoritmo *Branch-and-Bound* 39

3.5 Considerações Finais Sobre o Procedimento de Síntese 39

Capítulo 4 - Exemplo Caso de Sistema Contínuo 40

4.1 Introdução 40

4.2 Coluna de Destilação Binária 40

4.3 Considerações Finais 59

Capítulo 5 – Exemplo Caso de Sistema Discreto..... 55

5.1 Introdução 55

5.2 Sistema de Controle de Nível de Quatro Tanques 55

5.3 Considerações Finais 74

Capítulo 6 - Conclusões Finais 69

6.1 Sumário das Contribuições da Dissertação de Mestrado 69

6.2 Perspectivas Futuras 70

6.3 Trabalhos com Co-autorias em Eventos Científicos..... 70

Referências Bibliográficas 71

Lista de Figuras

Figura 1.1: Controle multivariável 1
Figura 1.2: Controle descentralizado 2
Figura 1.3: Controle desacoplador 3
Figura 1.4: Sistema de controle desacoplado para um processo TITO. 8
Figura 1.5: Sistema com desacoplador invertido 10

Figura 2.1: Diagrama do controlador PID com dois graus de liberdade 15
Figura 2.2: Diagrama do controlador PID 16
Figura 2.3: Controlador PI 18
Figura 2.4: Sistema de Controle Generalizado 19
Figura 2.5: Controlador desacoplador 20

Figura 3.1: Algoritmo Elipsoidal 31
Figura 3.2: Divisão orientada pelas arestas para d=2. 35
Figura 3.3: Divisão orientada pelas arestas para d=3. 35
Figura 3.4: Simulação do algoritmo BnB – Iteração 0. 37
Figura 3.5: Simulação do algoritmo BnB – Iteração 1. 38
Figura 3.6: Simulação do algoritmo BnB – Iteração 2. 38
Figura 3.7: Simulação do algoritmo BnB – Iteração 3. 39

Figura 4.1: Diagrama esquemático da coluna binária de Wood e Berry 41
Figura 4.2: Respostas transitórias das saídas com controlador I-P – Wood e Berry 45
Figura 4.3: Respostas transitórias das variáveis manipuladas com controlador I-P – Wood e Berry 45
Figura 4.4: Respostas transitórias das saídas com controlador I-P 2 – Wood e Berry 47
Figura 4.5: Respostas transitórias das variáveis manipuladas com controlador I-P 2 – Wood e Berry 48
Figura 4.6: Respostas transitórias das saídas com controlador I-P para $\boldsymbol{\epsilon m = 0,25}$ – Wood e Berry 50
Figura 4.7: Respostas transitórias das variáveis manipuladas com controlador I-P para $\boldsymbol{\epsilon m = 0,25}$ – Wood e Berry 50
Figura 4.8: Respostas transitórias das saídas do processo comparando o controle desacoplador para minimizar o erro de aproximação e para minimizar a rejeição de distúrbio 51
Figura 4.9: Respostas transitórias das variáveis manipuladas comparando o controle desacoplador para minimizar o erro de aproximação e para minimizar a rejeição de distúrbio 52

Figura 5.1: Processo de quatro tanques 56
Figura 5.2: Resposta transitória das saídas controladas para o sistema 4 tanques considerando o controlador I-P 61
Figura 5.3: Resposta transitória da tensão das bombas para o sistema 4 tanques considerando o controlador I-P 62
Figura 5.4: Resposta transitória das saídas controladas para o sistema 4 tanques considerando o controlador I-P sem desacoplador 63
Figura 5.5: Resposta transitória das saídas para o sistema 4 tanques considerando o controlador PID..... 66
Figura 5.6: Resposta transitória da tensão das bombas para o sistema 4 tanques considerando o controlador PID..... 67

Tabela

Tabela 5. 1: Parâmetros do tanque para os pontos de operação..... 57

Acrônimos

1DOF	-	"One-Degree-Of-Freedom"- Um Grau de Liberdade
2DOF	-	"Two-Degree-Of_Freedom"- Dois Graus de Liberdade
BLT	-	"Biggest Long-modulus Tuning"
BMI	-	"Bilinear Matrix Inequality"- Desigualde Matrcial Bilinear
BnB	-	"Algoritmo Branch And Bound"
CEA	-	"Cone Ellipsoidal Algorithm"- Algoritmo Cone Elipsoidal
CLP	-	"Controlador Lógico Programável"
CPs	-	"Controladores Programáveis"
DRG	-	"Decentralized Relative Gain"- Ganho Relativo Descentralizado
DRGA	-	"Dynamic Relative Gain Array"- Arranjo de Ganhos Relativos Dinâmico
ERGA	-	"Effective Retative Gain Array"- Arranjo de Ganhos Reltivos Efetivos
GA	-	"Genetic Algorithm"- Algoritmo Genético
HIIA	-	"Hankel Interaction Index Array"- Arranjo de Índice de Interação de Hankel
IAE	-	"Integral of the Absolute Magnitude of the Error"- Integral do Valor Absoluto do Erro
ICC	-	"Interative Continuous Cycling"
IM	-	"Interaction Measure"- Medidas de Interação
IMC	-	"Internal Model Control"- Controle por Modelo Interno
ISE	-	"Integral of the Square of the Error"- Integral do Quadrado do Erro
ITAE	-	"Integral of Time Multiplied Absolute of the Error"- Integral do Tempo Multiplicado pelo Valor Absoluto do Erro
ITSE	-	"Integral of Time Mulplied by the Squared Error"- Integral do Tempo Multiplicado pelo Quadrado do Erro
LMI	-	"Linear Matrix Inequality"- Desigualdade Matricial Linear
LQG	-	"Linear Quadratic Gaussian"- Linear Quadrático Gaussiano
MIMO	-	"Multiple-Input, Multiple-Output"- Múltiplas Entradas, Múltiplas Saídas
MPC	-	"Model Predictive Control"- Controle Preditivo Baseado em Modelo
PI	-	"Controlador Proporcional-Integral"
PID	-	"Controlador Proporciona-Integral-Derivativo"
PM	-	"Participation Matrix"- Matriz de Participação
PRGA	-	"Performance Relative Gain Array" - Arranjo de Ganho Relativo de Desempenho
RGA	-	"Relative Gain Array"- Arranjo de Ganhos Relativos
RNGA	-	"Relative Normalized Gain Array"- Arranjo de Ganhos Normalizados Relativos
SDP	-	"Semidefinitive Programming"- Programação Semidefinida
SeDuMi	-	"Self-Dual-Minimization”
SISO	-	"Single-Input, Single-Output"- Uma Entrada, Uma Saída
TITO	-	"Two-Input, Two-Output"- Duas Entradas, Duas Saídas

Lista de Símbolos

$\mathcal{L}_2[0,\infty)$	-	Espaço dos sinais contínuos de energia limitada
$\in$	-	Pertence a
$\mathbb{R}$	-	Corpo dos números reais
$\mathbb{Q}$	-	Corpo dos números racionais
$Tr(A)$	-	Traço da matriz A
$E(.)$	-	Esperança matemática do argumento
$\|T\|_2$	-	Norma $\mathcal{H}_2$ da matriz de transferência T
$\|T\|_\infty$	-	Norma $\mathcal{H}_\infty$ da matriz de transferência T
$\triangleq$	-	Igual por definição
$\bar{\sigma}(A)$	-	Valor singular máximo da matriz A
$\left[\begin{array}{c\|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$	-	Realização da matriz de transferência $T = C(sI - A)^{-1}B + D$
Ω	-	Domínio politópico de incerteza
α	-	Vetor de coeficientes da combinação convexa que parametriza o politopo
$\tilde{\Omega}$	-	Conjunto finito de pontos do politopo
T_{cd}	-	Matriz de transferência relacionando as saídas da planta e os distúrbios
E	-	Matriz de transferência do erro da aproximação do modelo
$\supset$	-	Está contido
$v(.)$	-	Conjunto de vértices do argumento (politopo)
α_u	-	$\alpha \in \Omega$ onde ocorre instabilidade do sistema em malha fechada
α_∞	-	$\alpha \in \Omega$ onde ocorre o valor máximo de $\|T_{cd}\|_\infty$
α_m	-	$\alpha \in \Omega$ onde ocorre o valor máximo de $\|E\|_\infty$
ξ	-	Precisão relativa usada no critério de parada do procedimento geral de projeto
$\exists$	-	Existe
$A \leftarrow B$	-	Atribui o valor de B a variável A
∇_f	-	Gradiente (ou subgradiente) da função f
ε	-	Precisão relativa usada como critério de parada no algoritmo elipsoidal
N_ε	-	Número de iterações observado no critério de parada do algoritmo elipsoidal
I, I_d	-	Matriz identidade, matriz identidade de ordem $d\ x\ d$
γ_c	-	Custo garantido ε-garantido $\mathcal{H}_\infty$
$*$	-	Em matrizes simétricas, corresponde a termos simétricos em relação à diagonal
$A \succ 0$	-	Matriz A é definida positiva
$A \succeq 0$	-	Matriz A é semi-definida positiva
$A \prec 0$	-	Matriz A é definida negativa
$A \preceq 0$	-	Matriz A é semi-definida negativa
χ	-	Vetor de variáveis de otimização

Capítulo 1 - Introdução

1.1 Caracterização da Pesquisa

O controle multivariável é amplamente utilizado no setor industrial devido à complexidade existente nos processos. Esse controle é denominado assim porque envolve várias variáveis de entrada que controlam várias variáveis de saída.

As técnicas de controle multivariável, denominado MIMO (*Multiple-Input, Multiple- Output*), são temas constantes de pesquisas (Skogestad & Postlethwaite, 1996). Diferente do controle SISO (*Single-Input, Single-Output*), o controle MIMO é de difícil de projetar, pois envolve inúmeras variáveis de controle e saídas do processo conforme mostrado na figura 1.1, e estas podem estar correlacionadas, ou seja, quando manipulamos uma variável, esta interfere diretamente no resultado de outra variável controlada do sistema.

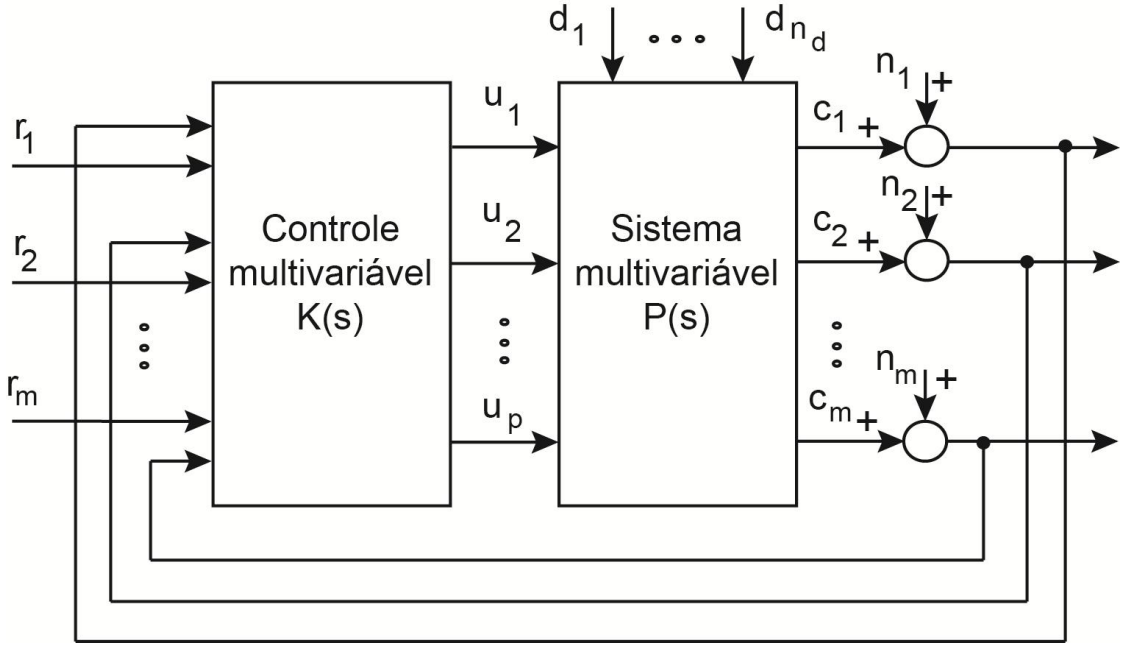


Figura 1.1: Controle multivariável

Para a realização do controle de sistemas na indústria, os controladores proporcional-integral-derivativo (PID, *Proportional-Integral-Derivative*) são amplamente utilizados devido a fácil

compreensão, implementação e sintonia pelos operadores. O projeto de um sistema MIMO é muito mais complexo devido a existência de interações entre as malhas. Atualmente o controle preditivo baseado no modelo (MPC, *Model Predictive Control*) é amplamente utilizado na indústria como técnica padrão para resolver problemas de controle multivariável. Praticamente todos os sistemas MPC operam em um nível mais alto, ou modo de supervisão, com controladores PID em um nível inferior. Uma importante parte da melhoria de desempenho obtida pela técnica MPC é devido a melhorias em malhas PID do nível inferior. Tratar interações em um nível mais alto (MPC), quando as malhas do nível mais baixo são fechadas, tende a ser mais complexo. Dessa forma, é de grande interesse estudar maneiras de trabalhar com as interações no nível das malhas (Aströn, et al., 2002).

A relativa simplicidade, facilidade de implementação e sintonia e a tolerância a falhas, são algumas das vantagens da utilização dos controladores PID multi-malhas (Dittmar, et al., 2012). Mas o projeto de um controlador PID para um sistema multivariável não é uma tarefa simples se considerar que as malhas de controle podem possuir parâmetros dependentes entre si. O controle PID pode geralmente ser classificado em dois grupos principais: controle descentralizado (figura 1.2) e controle desacoplador (figura 1.3) (Shen, et al., 2010).

Para o projeto de um controlador multi-malhas é necessário seguir os seguintes passos:

- Definir qual variável manipulada irá controlar qual saída da planta (*pairs*) através das medidas de interação, como por exemplo, *Relative Gain Array* (RGA), *Dynamic Relative Gain Array* (DRGA) etc;
- Sintonizar os controladores PID;

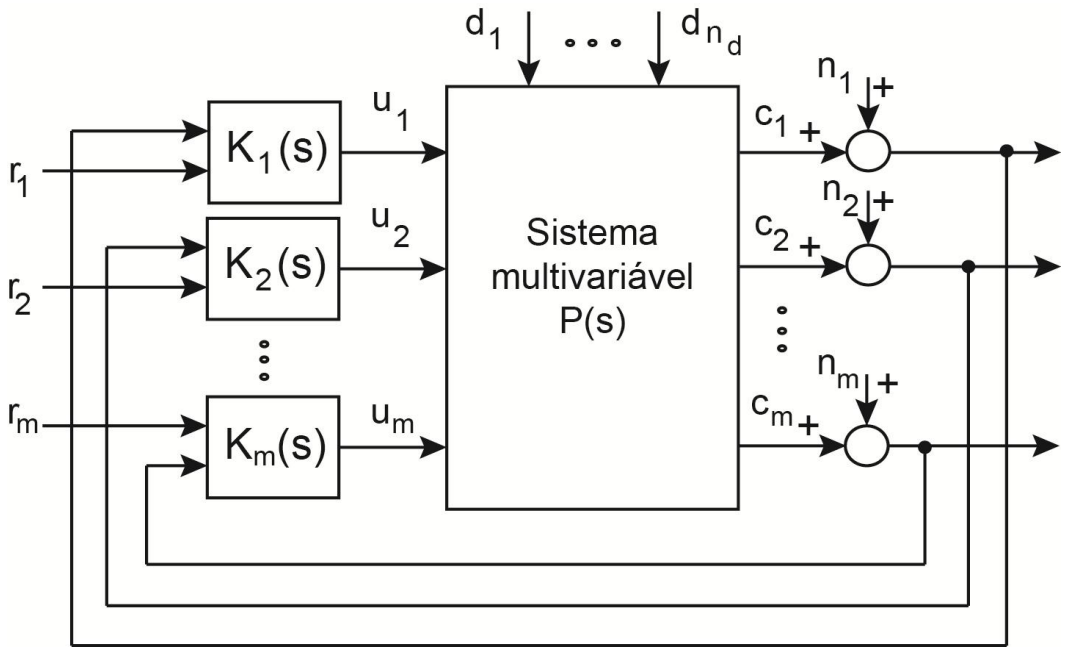


Figura 1.2: Controle descentralizado

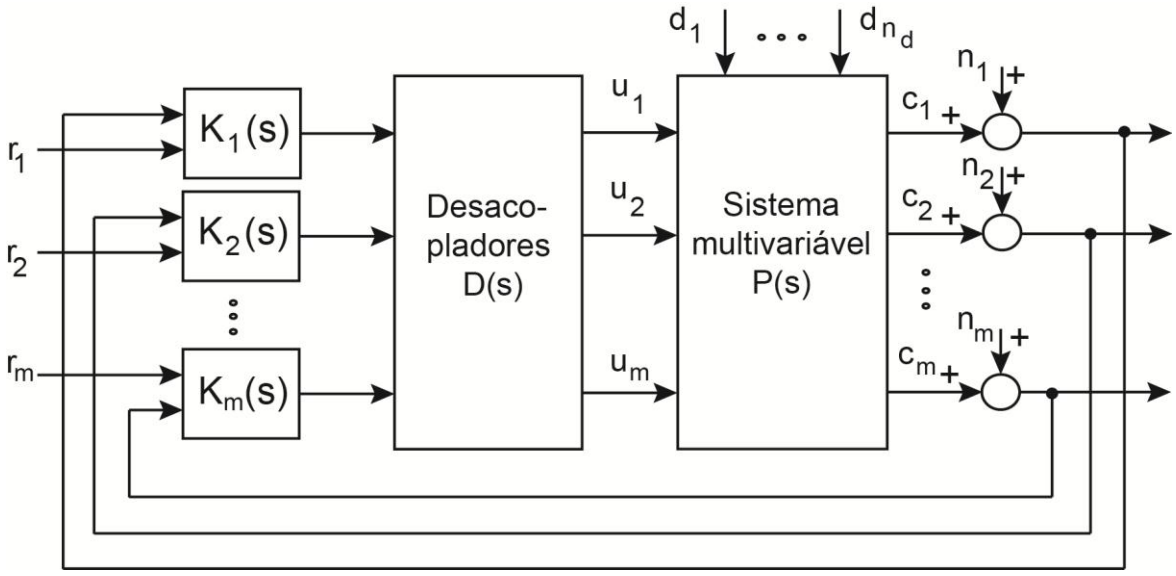


Figura 1.3: Controle desacoplador

Considerando a facilidade de implantação e robustez, muitas vezes somente o controlador PID é utilizado para desacoplar sistemas, esse processo só é bem sucedido se o sistema for pouco acoplado. Em um controle multi-malhas, um processo multivariável com *n* variáveis de entrada e *n* variáveis de saída é decomposto em um conjunto de *n* sistemas SISO. Nesse caso, múltiplos controladores PID podem ser projetados para cada malha individualmente. O controle descentralizado apresenta as seguintes vantagens:

- Projeto e Sintonia do controlador de maneira simples. Os controladores PID possuem um número relativamente menor de parâmetros de ajuste o que facilita na implementação e no dimensionamento do controlador se comparado com o controlador centralizado.
- A compreensão e a implantação de controle em malhas separadas é mais fácil na prática, e grande parte dos controladores programáveis (CLP's) já possuem esse ajuste de maneira simples.
- A malha de controle é mais tolerante às falhas do sistema de controle. A estrutura descentralizada é tolerante a falha de um sensor ou atuador, uma vez que somente uma malha de controle fica comprometida por essa falha e não o sistema todo.

Entretanto, quando o controle PID descentralizado é empregado para controlar sistemas multivariáveis com malhas altamente acopladas, o projeto de controle pode se tornar difícil, sendo inevitável que ocorra uma degradação de desempenho em comparação com os sistemas de controle multivariáveis completos mais complexos (Figura 1.1). A tarefa de desenvolver um procedimento satisfatório de sintonia de controladores PID para processos multi-malhas, considerando um compromisso entre o desempenho do sistema e a redução dos efeitos das interações, constituiu objetos de grande interesse atualmente.

Atualmente várias técnicas de desacoplamento são utilizadas para tentar anular as interações entre as malhas dos sistemas multivariáveis como: controle descentralizado, controle desacoplador e controle esparso (Shen, et al., 2010). Para o projeto de controladores de sistemas MIMO extremamente acoplados, é necessário a elaboração de um sistema mais complexo de

controladores PID com desacopladores figura 1.3. O desacoplamento é uma ferramenta amplamente utilizada em controle multivariável, onde o principal objetivo é minimizar, ou até mesmo zerar, o efeito entre malhas.

O processo de controle com desacopladores normalmente é tratado em duas etapas: primeiro o sistema é desacoplado através de uma rede de desacopladores estáticos ou dinâmicos, e depois o controlador é sintonizado para múltiplos sistemas SISO. Esses procedimentos utilizados para o desacoplamento geram normalmente dois problemas: ou tem-se um desacoplador muito complexo, ou tem-se um sistema muito complexo, ambos dificultam a sintonia do controlador.

No desacoplamento dinâmico, os elementos são projetados de modo a eliminar a interação entre todas as malhas para todas as frequências. Já o desacoplamento estático elimina apenas as interações existentes em regime permanente. Apesar de ser mais fácil de implementar, o desacoplador estático não oferece um desempenho satisfatório para os sistemas em malha fechada, por isso é pouco utilizado (Shen, et al., 2012).

Antes de abordar o desenvolvimento dos desacopladores, é necessário avaliar as medidas de interação (IM, *Interaction Measure*) que podem ser utilizadas. Um grupo de medidas de interação normalmente empregado é o arranjo de ganhos relativos (RGA, *Relative Gain Array*) (Bristol, 1966). O RGA considera as propriedades do estado estacionário da planta e sugere como resolver o problema de determinação dos pares de entrada/saída. O RGA também indica quais pares devem ser evitados devido a problemas de desempenho e estabilidade.

O RGA serve para verificar o efeito de u_j sobre c_i (u_j e $c_j$definidos na figura 1.2 e 1.3) comparando os ganhos em duas situações extremas:

- Malha aberta:

$$u_k = 0,\ \forall k\ \neq j\ \Rightarrow p_{ij} = \frac{\partial c_i}{\partial u_j} \tag{1.1}$$

- Malha fechada:

$$c_k = 0,\ \forall k\ \neq i\ \Rightarrow \hat{p}_{ij} = \frac{\partial c_i}{\partial u_j} \tag{1.2}$$

A medida de interação de u_j sobre c_i é dada por:

$$\lambda_{ij} \triangleq \frac{p_{ij}}{\widehat{p_{ij}}} = [P]_{ij}[P^{-1}]_{ji} \tag{1.3}$$

O RGA é calculado como:

$$\Lambda = P \otimes (P^{-1})^T \tag{1.4}$$

E possui as seguintes propriedades:

- Os elementos do RGA não possuem dimensão, sendo o RGA independente da dimensão (escala) das variáveis de entrada e de saída.
- O RGA é normalizado (soma de colunas ou linhas igual a 1):

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} = 1 \tag{1.5}$$

- O RGA é uma matriz identidade (sistema desacoplado) se P é uma matriz triangular superior ou inferior.

O RGA é uma medida de interação em regime estacionário para o controle descentralizado, e também é útil para frequências próximas da frequência de cruzamento de ganho (Bristol, 1966).

Inúmeros autores como Seborg et al. (2010) e Skogestad et al. (1990), demonstraram várias aplicações práticas do RGA. Ao longo dos anos várias outras medidas de interação foram estudadas e propostas, no RGA dinâmico por exemplo (DRGA, *Dynamic Relative Gain Array*), os ganhos em regime estacionário são substituídos por funções racionais e os termos passam a ser dependentes da frequência (Witcher & J.McAvoy, 1977). Em Skogestad & Postlethwaite (1996) é proposto o emprego do RGA como uma ferramenta de triagem para plantas não quadradas para obter uma sugestão de qual saída deve ser removida no caso de haver mais saídas que entradas. O RGA fornece apenas uma informação limitada sobre quando usar controladores multivariáveis e não dá nenhuma indicação de como escolher estruturas de controladores multivariáveis.

Apesar de existir certa facilidade para o controle de sistemas SISO, realizar o controle muti-malhas não é uma tarefa tão simples, a não ser que o sistema seja transformado em vários sistemas desacoplados, para aplicar os métodos convencionais de sintonia de controladores PID para sistemas SISO. Caso o desacoplamento não seja realizado, esse controle torna-se ineficaz. A principal dificuldade num sistema MIMO é precisar a contribuição de cada variável manipulada em cada uma das variáveis de saída.

Modificar cada um dos parâmetros do controlador pode implicar no comprometimento do funcionamento total ou parcial de um sistema de controle (de Arruda, et al., 2008). Na indústria, a definição dos parâmetros muitas vezes é realizada através de tentativa e erro, um método pouco eficaz, e que muitas vezes pode não atingir critérios de desempenho especificados (Luyben, 1986). A situação fica mais agravante em processos cujas variáveis de entrada possuem grande interação com as variáveis de saída, como em processos da indústria química, o que leva o responsável pelo processo, necessitar de uma estratégia de sintonia simplificada e robusta (Aström & Hägglund, 2004).

Com o intuito de incluir de forma eficiente os efeitos das interações entre as malhas, muitos métodos de sintonia de controle multi-malhas têm sido propostos, que podem ser classificados em cinco tipos principais (Dittmar, et al., 2012):

1. Método de desintonia (*detuning methods*): o método mais popular BLT (*Biggest Log Modulus*) (Luyben, 1986).

2. Método de fechamento sequencial de malhas (*sequential loop closing methods*): as malhas são fechadas sequencialmente da mais rápida para a mais lenta (Mayne, 1973).
3. Métodos de projeto independente (*independent design mothods*): (Grosdidier & Morari, 1986) e (Skogestad & Morari, 1989).
4. Método de auto-sintonia por realimentação a relé (*relay-feedback auto-tuning methods*): (Loh, et al., 1993), (Shen & Yu, 1994) e (Halevi, et al., 1997).
5. Métodos baseados em otimização.

No método de desintonia, o controlador é projetado separadamente, considerando o elemento correspondente na diagonal da matriz de transferência em malha aberta ignorando as interações entre as malhas do processo. Os controladores são então desintonizados através da redução dos ganhos até que as interações sejam minimizadas satisfatoriamente fazendo com que o comportamento das malhas PID seja mais lento. O problema desse método consiste em não poder definir exatamente o desempenho e a estabilidade das malhas de controle.

O método de sintonia mais comum é o denominado BLT desenvolvido por Luyben (1986). Na sua versão original, cada malha PID, é primeiro sintonizada pelas regras de Ziegler-Nichols (ZN), depois para o ajuste multi-malhas, todos os ganhos dos controladores ZN são divididos por um fator comum.

O método do fechamento sequencial de malhas foi proposto a partir do início dos anos 70 por Mayne (1973). Nesse método as malhas são fechadas uma após a outra, com o objetivo de garantir uma convergência mais rápida dos parâmetros, a sequência de fechamento das malhas geralmente começa pela malha de dinâmica mais rápida. As principais desvantagens são relacionadas com fato de que a definição final dos parâmetros é dependente da ordem que se fecham as malhas e que esse procedimento de interação pode alterar a resposta nos canais para os quais o controlador foi sintonizado anteriormente. Por outro lado, a principal vantagem desse método é que podem ser usadas as técnicas de sintonia SISO bem desenvolvidas e em geral apresentam resultados melhores que o método BLT.

Nos métodos de projeto independente o projeto das malhas é feito de maneira independente. Cada controlador é projetado com base no elemento diagonal correspondente do processo multivariável, enquanto as interações fora da diagonal devem ser tomadas em conta, considerando algumas restrições no processo. Uma vez que esses controladores não usam informações detalhadas a respeito do efeito da dinâmica do controlador nas outras malhas, os resultados obtidos, na maioria das vezes, são muito pobres em termos de desempenho. Esse método de projeto é eficaz quando as funções de transferência da diagonal determinam o comportamento do sistema. O método é conservador, considerando que durante o projeto de um controlador específico as informações sobre os outros controladores não são consideradas (Skogestad & Morari, 1989). As restrições impostas a cada malha são resultados de critérios como a medida μ-interação (Grosdidier & Morari, 1986; Skogestad & Morari, 1989; Hovd e Skogestad, 1993) e as bandas de Gershgorin (Chen & Seborg, 2001; Ho et al., 1997). O método IMC (*Internal Model Control*) foi proposto por Hovd & Skogestad (1993) para tentar melhorar o desempenho de cada malha. Algumas fórmulas analíticas foram desenvolvidas para o ganho final e a frequência final baseada na resposta em frequência do sistema e nas bandas de Gershgorin.

As técnicas de auto-sintonia utilizando realimentação a relé são baseadas em ensaios simples para identificar o ganho crítico e o período crítico do processo para sistemas SISO (Aström & Hägglund, 1984). Em vez de considerar a margem da instabilidade, o ponto crítico é identificado a partir de um ciclo limite estável gerado usando relés. A extensão da auto-sintonia utilizando o método de realimentação a relé combinado diretamente com a sintonia sequencial, para determinar os parâmetros do controlador PID descentralizado conforme Loh et al. (1993) e Shen & Yu (1994) onde os testes sequenciais com realimentação a relé são usados para localizar os pontos críticos de um sistema MIMO. Depois de obter as informações de resposta em frequência, pode-se aplicar os métodos de sintonia já conhecido como ZN e suas variações para ajuste dos controladores PID. Considerando que a execução dos experimentos por realimentação a relé simultâneo ou sequencial em condições industriais é um procedimento difícil, devido a ruídos e atrasos, esta abordagem possui aplicação limitada.

A sintonia ótima de controladores PID é um problema de otimização de difícil solução. Ao longo dos anos, diversas soluções para esse problema de otimização vem sendo desenvolvidas. Sourlas & Manousiouthakis (1995) desenvolveram uma parametrização dos controladores descentralizados que estabilizam o sistema e propôs um algoritmo de otimização global para determinar o controlador com melhor desempenho. Trierweiler et al. (2000) e Pegel & Engell (2001) descreveram a generalização do método de síntese direta para sistemas multivariáveis. Primeiro é determinado o controlador ideal, normalmente muito complexo para a aplicação prática, e depois o controlador ideal é aproximado por um mais simples, por exemplo o controlador PID. A aproximação é definida pela resolução de um problema de otimização convexa. Os parâmetros do controlador mais simples são as variáveis resultantes do problema de otimização. Em Bao et al. (1999), o problema de sintonia é formulado como um controle robusto $\mathcal{H}_\infty$, e um procedimento de otimização numérico é proposto para resolver o problema de projeto. As restrições da estrutura (por exemplo, o uso de controladores PID descentralizados) são convertidas em inequações matriciais.

O que diferencia os métodos de projeto de sistemas de controle baseados em problemas de otimização dos demais é que eles proporcionam ao projetista especificar os diversos objetivos de desempenho desejados para o sistema. Estas especificações podem variar desde a resposta transitória do sistema até a atenuação do ruído de medição. O projetista fica livre para escolher os critérios que mais se adequam ao seu sistema e desenvolver um controlador com os requisitos necessários para o seu sistema. Mas se por um lado esses métodos dão mais confiabilidade e melhores resultados, por outro, o projeto de controladores PID multi-malhas possuem uma grande complexidade computacional de implementação, o que exige a resolução de um problema de otimização em grande escala, e assim muitas vezes são rejeitados pelos operadores.

Quando o controle descentralizado baseado em controladores PID não são suficientes para atender aos critérios de desempenho é necessária uma estrutura de controle mais complexa. O controle desacoplador, apresentado na figura 1.3, é uma solução intermediária entre o controle descentralizado e o controle multivariável. O projeto de desacopladores para os sistemas multi-malhas, tornou-se objeto de estudo frequente entre pesquisadores. O sistema de controle desacoplador (*decoupling control*) combina controladores PID multi-malhas com um pré-compensador, ou desacoplador. Geralmente o desacoplador é projetado de tal forma que o produto $\mathrm{P}(s)\mathrm{D}(s)$ seja aproximadamente uma matriz diagonal de tal forma que o controle descentralizado possa ser projetado como vários sistemas SISO independente.

Vários esquemas de desacoplamento foram desenvolvidos ao longo dos anos dentre eles, os que estão listados possuem maior relevância:

- Desacoplador Ideal;
- Desacoplador Simplificado;
- Desacoplador Invertido;
- Desacoplador Normalizado.

Para comparar os métodos citados, é descrito um problema TITO (*Two-input, Two-output*) que requer o design apresentado na figura 1.4 (Gagnon, et al., 1998).

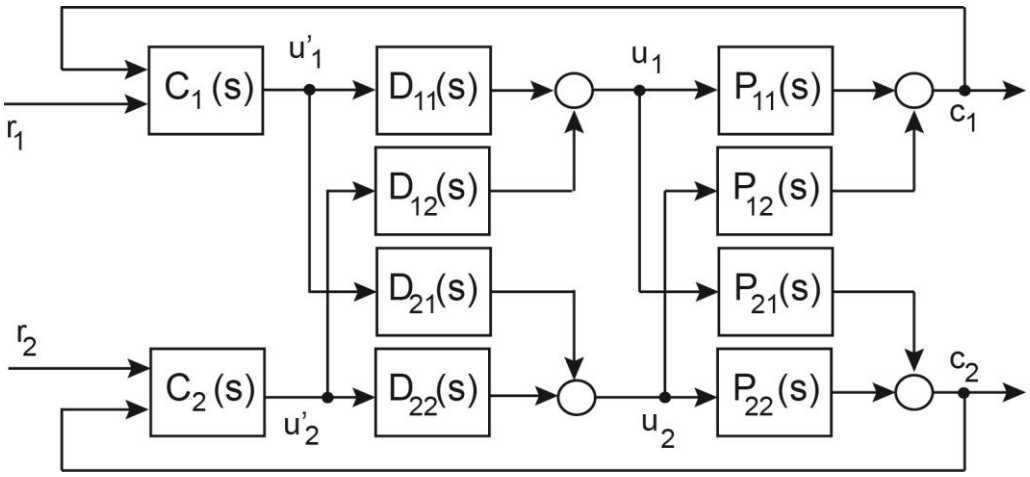


Figura 1.4: Sistema de controle desacoplado para um processo TITO

O processo $P(s)$ requer um projeto de uma matriz $D(s)$, tal que o produto $P(s)D(s)$ resulte na matriz diagonal $T(s)$:

$$D(s) = \begin{bmatrix} D_{11}(s) & D_{12}(s) \\ D_{21}(s) & D_{22}(s) \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

$$T(s) = \begin{bmatrix} T_{11}(s) & 0 \\ 0 & T_{22}(s) \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

$$P(s)D(s) = T(s) \tag{1.9}$$

As variáveis r_1 e r_2 são os pontos de operação, u'_1 e u'_2 são as saídas do controlador descentralizado, u_1 e u_2 são as variáveis manipuladas e c_1 e c_2 são as saídas do processo. A matriz de transferência do controlador é definida pela matriz diagonal $C(s)$.

$$C(s) = \begin{bmatrix} C_1(s) & 0 \\ 0 & C_2(s) \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

Então substituindo as equações (1.6), (1.7) e (1.8) em (1.9), resulta em:

$$D(s) = P(s)^{-1}T(s) = \frac{1}{P_{11}(s)P_{22}(s) - P_{12}(s)P_{21}(s)}\begin{bmatrix} P_{22}(s)T_{11}(s) & -P_{12}(s)T_{22}(s) \\ -P_{21}(s)T_{11}(s) & P_{11}(s)T_{22}(s) \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

Para compreender os diferentes projetos de desacopladores, é importante ressaltar que os elementos $P_{11}(s)$, $P_{12}(s)$, $P_{21}(s)$ e $P_{22}(s)$ da equação (1.11) representam as funções de transferência do processo, que supostamente são conhecidas. Os únicos elementos desconhecidos são $T_{11}(s)$ e $T_{22}(s)$, que representam a dinâmica desejada para o produto entre o desacoplador e o processo.

O desacoplador ideal (Luyben, 1970), consiste em selecionar as funções de transferência $T_{11}(s)$ e $T_{22}(s)$. A matriz diagonal do controlador $C(s)$ é projetada baseada na matriz $T(s)$. A lógica da escolha é fazer $T(s) = diag(P(s))$. Nesse formato, a sintonia do controlador é mais simples, mas o desacoplador pode ficar bastante complexo, podendo até mesmo ser instável ou não realizável.

O desacoplador simplificado (Luyben, 1970) possui os elementos da diagonal fixos e iguais a 1, os demais elementos são funções das frações dos elementos $P(s)$.

$$D(s) = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{P_{12}(s)}{P_{11}(s)} \\ -\dfrac{P_{21}(s)}{P_{22}(s)} & 1 \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

O resultado da matriz de transferência $T(s)$ é então:

$$T(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) - \dfrac{P_{12}(s)P_{21}(s)}{P_{22}(s)} & 0 \\ 0 & P_{22}(s) - \dfrac{P_{12}(s)P_{21}(s)}{P_{11}(s)} \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

Nesse caso o desacoplador $D(s)$ é mais simples, mas o sistema resultante $T(s)$ fica bastante complexo já que seus elementos são somas de funções de transferência, tornando assim o ajuste do controlador mais difícil.

O desacoplador invertido (Wade, 1997) modifica a estrutura do desacoplador simplificado, como apresentado na figura 1.5.

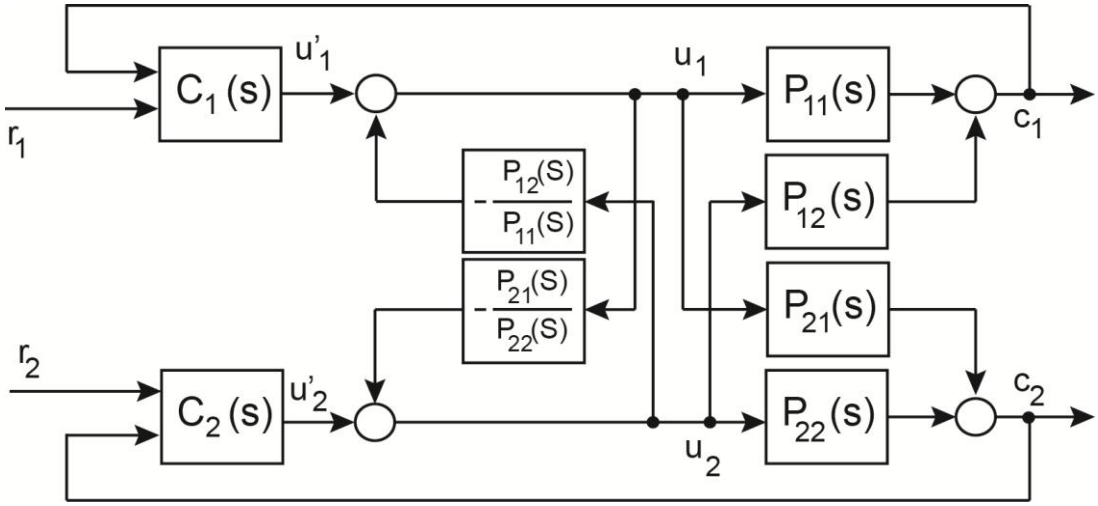


Figura 1.5: Sistema com desacoplador invertido

Conforme a figura 1.5 as variáveis manipuladas são:

$$u_1(s) = c_1(s)\left[\frac{P_{11}(s)P_{22}(s)}{P_{11}(s)P_{22}(s) - P_{12}(s)P_{21}(s)}\right] - c_2\left[\frac{P_{12}(s)P_{22}(s)}{P_{11}(s)P_{22}(s) - P_{12}(s)P_{21}(s)}\right] \tag{1.14}$$

$$u_2(s) = -c_1(s)\left[\frac{P_{21}(s)P_{11}(s)}{P_{11}(s)P_{22}(s) - P_{12}(s)P_{21}(s)}\right] + c_2(s)\left[\frac{P_{11}(s)P_{22}(s)}{P_{11}(s)P_{22}(s) - P_{12}(s)P_{21}(s)}\right] \tag{1.15}$$

Nota-se que nesta representação as funções de transferência do desacoplador é a mesma da utilizada no desacoplador simplificado. Portanto, oferece ao mesmo tempo a facilidade de realização dos elementos do desacoplador simplificado e a matriz de transferência diagonal $T(s)$ mais apropriada do desacoplador ideal, ou seja, esse método une o que há de melhor nos dois métodos apresentados anteriormente.

Todas as técnicas mencionadas para sintonia de controladores PID multi-malhas ou projeto de compensadores desacopladores não consideram incertezas no modelo do processo a ser controlado. Incertezas nos parâmetros do sistema, não-linearidades inerentes do sistemas reais e dinâmicas não modeladas são exemplos de fontes de incertezas na representação de sistemas. Não considerar tais incertezas na síntese de sistemas de controle pode resultar em um desempenho não satisfatório do sistema. Desse modo, o foco deste trabalho é o desenvolvimento de técnicas de projeto de sistemas de controle multivariáveis que tratem não somente o problema de acoplamento entre as malhas de controle, mas que também considerem as incertezas inerentes das representações de seus vários componentes.

1.2 Objetivo

O principal objetivo desse trabalho é o de estender resultados obtidos em Gonçalves, et al. (2012) para síntese de controladores descentralizados robustos por realimentação dinâmica de

saída baseada em modelo de referência, de modo a desenvolver um novo procedimento de síntese de controladores desacopladores robustos, para aplicação a sistemas dinâmicos incertos lineares invariantes no tempo, contínuos ou discretos no tempo, multivariáveis, representados por modelo de incerteza politópico. O procedimento será baseado em um problema de otimização multi-objetivo não convexo considerando os parâmetros dos controladores PID e do desacoplador como variáveis de otimização. Os objetivos de controle serão: atendimento as especificações da resposta de rastreamento, desacoplamento do sistema e rejeição de perturbações.

Serão realizadas comparações dos resultados obtidos pelo procedimento de síntese proposto com outros resultados da literatura considerando os objetivos de controle mencionados. Serão considerados dois problemas amplamente utilizados na literatura:

- Um problema de controle de níveis de um sistema de quatro tanques controlados por duas bombas que apresenta características interessantes do ponto de vista de controle de sistemas multivariáveis (Johansson, 2000).
- Um problema de controle de uma coluna de destilação binária em escala piloto aplicada para separar uma mistura de metanol-água (Wood & Berry, 1973).

1.3 Estrutura da Dissertação

O **capítulo 2** apresenta a definição de norma de sinais e sistemas $\mathcal{H}_\infty$ e o método utilizado para os cálculos. Depois é apresentada a formulação em espaço de estados, do controlador descentralizado PID com dois graus de liberdade e a estrutura do controlador para sistemas multivariáveis e a diferença de formulação entre várias estruturas. Por fim apresenta a formulação do problema e como é realizado o dimensionamento.

O **capítulo 3** apresenta como é realizado o procedimento de sintonia dos controladores PID para sistemas multivariáveis. Apresenta a formulação desenvolvida em (Gonçalves, 2006), e como ela é utilizada para tratar problemas de otimização não convexa, para a sintonia dos controladores.

O **capítulo 4** apresenta os resultados obtidos com a realização dos estudos para problemas com formulação para sistemas contínuos no tempo. Através de resultados de problemas de controle já conhecidos, para comprovar a eficácia do método de sintonia de controle desacoplador PID para sistemas multivariáveis.

O **capítulo 5** apresenta os resultados obtidos com a realização dos estudos para problemas com formulação para sistemas no tempo discreto. Apresenta a eficácia do método estudado através de resultados e comparações com sistemas já vistos antes na literatura.

Finalmente o último capítulo, apresenta as conclusões gerais do trabalho e dos resultados obtidos, além de apresentar perspectivas futuras para a realização de estudos. Apresenta também a relação de artigos aprovados em congresso com co-autoria do mestrado.

Capítulo 2 - Formulação do Problema

2.1 Introdução

A sintonia de controladores PID com desacopladores para sistemas MIMO proposta nesse trabalho utiliza um método pouco comum para a formulação do problema, que será feita juntamente com a síntese do desacoplador num único projeto, a fim de facilitar e melhorar os métodos de projetos já existentes. Esse trabalho utiliza as normas $\mathcal{H}_\infty$ para quantificar a influência das perturbações externas sobre as saídas de interesse e também utiliza aproximação de modelo $\mathcal{H}_\infty$ para obter o desacoplamento e atender às especificações da resposta transitória de rastreamento. Para uma melhor compreensão do que foi desenvolvido, nesse capítulo é descrito a norma utilizada, a estrutura do controlador e desacoplador e a formulação do problema de síntese do controle desacoplador.

2.2 Norma $\mathcal{H}_\infty$

Um dos objetivos mais importantes para um sistema de controle, além de garantir a estabilidade do sistema é atender as especificações de desempenho. Uma forma de descrever especificações de desempenho de um sistema de controle é em termos das dimensões dos sinais de interesse. As normas são utilizadas para dimensionar os sinais, ou seja, são formas de medição. O tipo de norma adotada depende do problema tratado.

Definição: Norma de e (sendo e vetor, matriz, sinal ou sistema) é um número real, representado por $\|e\|$, que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\|e\| \geq 0, \|e\| = 0 \Leftrightarrow e = 0$
2. $\|\alpha . e\| = |\alpha| . \|e\|$, para todo escalar $\alpha \in \mathbb{C}$
3. Desigualdade triangular: $\|e_1 + e_2\| \leq \|e_1\| + \|e_2\|$

Considerando o sistema com a seguinte função de transferência:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{2.1}$$

Para sistemas SISO a norma $\mathcal{H}_\infty$ é definida como o maior ganho da resposta em frequência:

$$\|H(s)\|_\infty = \max_{\omega\epsilon[0,\infty)} |H(j\omega)| \tag{2.2}$$

Para sistemas MIMO a norma $\mathcal{H}_\infty$ é definida como o maior valor singular de $H(s)$:

$$\|H(s)\|_\infty = \sup_{\omega\epsilon[0,\infty)} \max_{i=1,\dots,n_u} \sigma_i(H(j\omega)) \tag{2.3}$$

A norma infinita de um sistema representa o maior ganho de sua resposta em frequência e pode ser definida como o maior ganho entre as energias de entrada e saída, utilizando o teorema de Parseval:

$$\|z(t)\|_2^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty Z(j\omega)^* Z(j\omega) d\omega \tag{2.4}$$

$$\|w(t)\|_2^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty W(j\omega)^* W(j\omega) d\omega \tag{2.5}$$

sendo $Z(j\omega)$ e $W(j\omega)$ as transformadas de Fourier de $z(t)$ e $w(t)$.

A norma $\mathcal{H}_\infty$ satisfaz:

$$\|z(t)\|_2 \leq \|H_{wz}\|_\infty \|w(t)\|_2 \tag{2.6}$$

A norma $\mathcal{H}_\infty$ no domínio do tempo pode ser definida como:

$$\|H(s)\|_\infty = \sup_{w\neq 0} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} \tag{2.7}$$

A norma $\mathcal{H}_\infty$ pode ser vista como o maior ganho em termos de energia que o sistema pode oferecer a um sinal de entrada. O ganho $\mathcal{L}_2$ ou RMS de um sistema estável linear invariante no tempo, correspondendo ao maior ganho entre a entrada e a saída sobre os sinais de entrada limitados $w(t) \in \mathcal{L}_2$.

A norma $\mathcal{H}_\infty$ pode ser calculada de maneira precisa através de métodos iterativos conforme Boyd, et al. (1989). A norma $\mathcal{H}_\infty$ pode ser calculada pela busca linear do valor mínimo de γ tal que a matriz Hamiltoniana não possui autovalores sobre o eixo imaginário (Zhou & Doyle, 1998):

$$H = \begin{bmatrix} A + BR^{-1}D^TC & BR^{-1}B^T \\ -C^T(I + DR^{-1}D^T)C & -(A + BR^{-1}D^TC)^T \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

sendo $R \triangleq \gamma^2 - D^TD$.

2.3 Estrutura do Controlador Descentralizado

Existem várias estruturas de controle PID propostas a fim de melhorar o desempenho de sistemas em malha fechada. Uma das mais utilizadas e aceitas é o denominado PID com ponderação de *set-point* ou, como mais comumente é chamado, PID com dois graus de liberdade (2DOF, *Two-Degree-Of-Freedom*). O denominado grau de liberdade do controlador significa a quantidade de funções de transferência em malha fechada que podem ser ajustadas independentemente. Para um problema mono-objetivo, isto é, com somente um critério de desempenho, o controlador com um grau de liberdade (1DOF, *One-Degree-Of-Freedom*) se adequa perfeitamente ao problema. Já quando se trata de problemas multi-objetivo, um sistema de controle com dois graus de liberdade possui vantagens sobre o controle com um grau de liberdade, pois permite uma forma de controle mais independente entre os diferentes critérios de desempenho. Os critérios de desempenho estão relacionados com: boa resposta de rastreamento, rejeição de distúrbios, atenuação de ruídos de medição sobre os demais sinais do sistema, sinais de controle com amplitudes e taxas de variações limitadas e robustez em relação às incertezas do modelo. Seja um sistema multivariável descrito por:

$$C(s) = P(s)U(s) \tag{2.9}$$

$$\begin{bmatrix} C_1(s) \\ C_2(s) \\ \vdots \\ C_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1,1}(s) & p_{1,2}(s) & \dots & p_{1,m}(s) \\ p_{2,1}(s) & p_{2,2}(s) & \dots & p_{2,m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m,1}(s) & p_{m,2}(s) & \dots & p_{m,m}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

sendo $P(s)$ a representação da planta, uma matriz de dimensão $m\ x\ m$; $U(s)$ o vetor de sinais de entrada, de dimensão $m\ x\ 1$, e $C(s)$ o vetor de saídas da planta, de dimensão $m\ x\ 1$. Considere que o controlador multi-malhas descentralizado que atua na planta $P(s)$ possui uma matriz de transferência $K(s)$ composta por m controladores mono-variáveis independentes, divididos em dois blocos $(K_1(s)\ e\ K_2(s))$. O primeiro bloco pode ser projetado para atuar sobre a resposta de rastreamento, e o segundo bloco pode ser projetado para obter um compromisso entre rejeição de distúrbios e atenuação de ruídos de medição. Sendo assim, a equação dos sinais de entrada fica organizada da seguinte forma:

$$U = [K_1(s) \quad K_2(s)][R(s) \quad C(s) + N(s)]^T \tag{2.11}$$

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1,1}(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_{1,2}(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_{1,m}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{2,1}(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_{2,2}(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_{2,m}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s) \\ R_2(s) \\ \vdots \\ R_m(s) \\ C_1(s) + N_1(s) \\ C_2(s) + N_2(s) \\ \vdots \\ C_m(s) + N_m(s) \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

No controlador multi-malhas representado na equação (2.12), cada bloco é um controlador PID com dois graus de liberdade, cuja lei de controle é dada por:

$$\begin{aligned} U_j(s) = k_{pj}\left((1 - a_j) + \frac{1}{T_{ij}s} + (1 - b_j)\frac{T_{dj}s}{\rho T_{dj}s + 1}\right)R_j(s) \\ - k_{pj}\left(1 + \frac{1}{T_{ij}s} + 1\frac{T_{dj}s}{\rho T_{dj}s + 1}\right)[C_j(s) + N_j(s)] \end{aligned} \tag{2.13}$$

O parâmetro ρ ou $\mathcal{N} = 1/\rho$ é a constante do filtro de ruído usado para limitar o ganho em altas frequências, o que faz a imunidade ao ruído do controlador melhorar consideravelmente (Aström & Hägglund, 1995). Já os parâmetros a_j e b_j são parâmetros ajustáveis do controlador que permitem variações da estrutura, a partir do deslocamento de parte dos componentes proporcional e derivativo para a malha de realimentação. A representação desse controlador é conforme a figura 2.1:

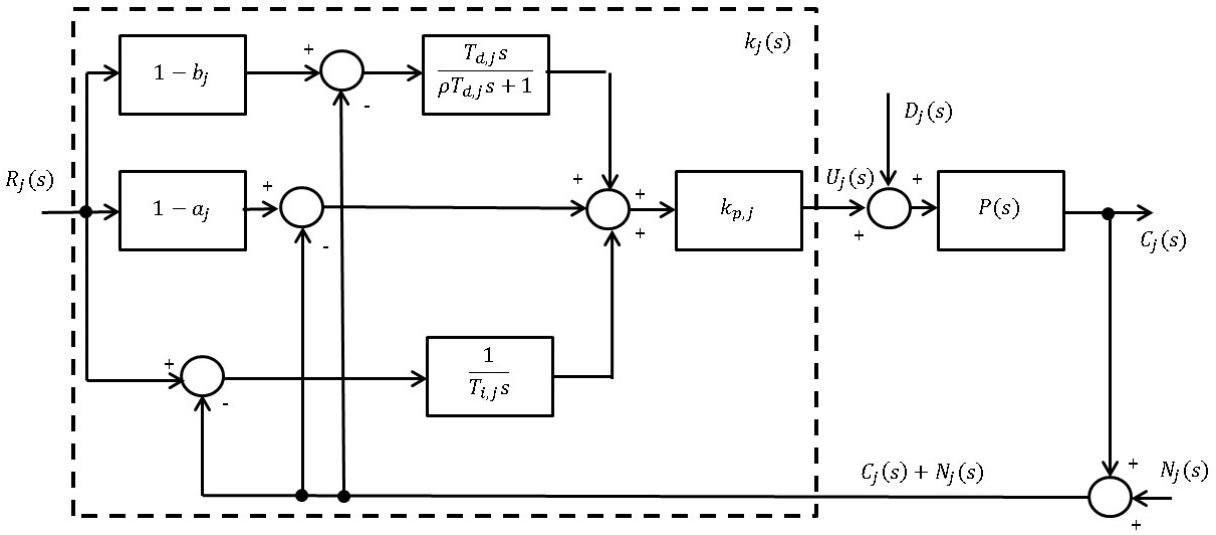


Figura 2.1: Diagrama do controlador PID com dois graus de liberdade

Os parâmetros a_j e b_j podem assumir quaisquer valores dentro da faixa $0 \leq a_j \leq 1$ e $0 \leq b_j \leq 1$. Quando $a_j = 0$ e $b_j = 1$, o controlador é denominado PI-D, nesse controlador a ação

proporcional e integral é aplicada sobre o erro de rastreamento e a ação derivativa é aplicada sobre a saída medida da planta com o ruído de medição. Quando $a_j = b_j = 1$, obtém-se o controlador denominado I-PD, nesse controlador a ação integral é aplicada sobre o erro de rastreamento e as ações proporcional e derivativa são aplicadas sobre a saída medida da planta com o ruído de medição.

O controlador apresentado na figura 2.1, também pode ser representado de acordo com a figura 2.2 como uma representação do controlador em espaço de estados.

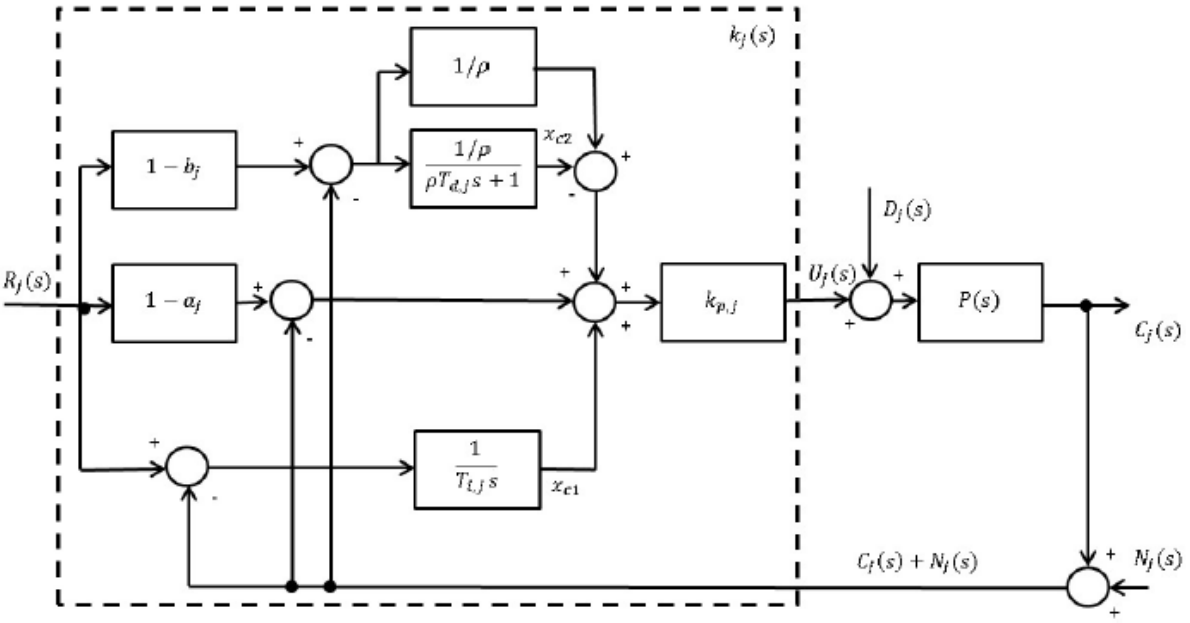


Figura 2.2: Diagrama do controlador PID

Considerando o vetor de entradas como $[r_j(t) \quad c_j(t) \ + n_j(t)]^T$, a saída $u_j(t)$, as variáveis de estado $[x_{c1}(t) \quad x_{c2}(t)]^T$, indicadas na figura 2.2, o controlador $k_j(t)$ pode ser descrito como:

$$k_j(t) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A_{c,j} & B_{c,j} \\ \hline C_{c,j} & D_{c,j} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & \frac{1}{T_{ij}} & -\frac{1}{T_{ij}} \\ 0 & -\frac{\mathcal{N}}{T_{dj}} & (1-b_j)\frac{\mathcal{N}^2}{T_{dj}} & -\frac{\mathcal{N}^2}{T_{dj}} \\ \hline k_{pj} & k_{pj} & k_{pj}[\mathcal{N}(1-b_j)+(1-a_j)] & -k_{pj}(\mathcal{N}+1) \end{array}\right] \tag{2.14}$$

sendo $A_{c,j}$ uma matriz 2x2, $B_{c,j}$ uma matriz 2x2, $C_{c,j}$ uma matriz 1x2 e $D_{c,j}$ uma matriz 1x2.

O controlador descentralizado multivariável por realimentação de saída:

$$K(s) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array}\right] \tag{2.15}$$

terá as suas matrizes compostas pelos blocos dos controladores individuais conforme equação (2.14) resultando em:

$$A_c = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\mathcal{N}_1}{T_{d,1}} \end{bmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\mathcal{N}_2}{T_{d,2}} \end{bmatrix} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\mathcal{N}_m}{T_{d,m}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{T_{i,1}} \\ (1-b_1)\dfrac{\mathcal{N}_1^2}{T_{d,1}} \end{bmatrix} & 0 & \dots & 0 & \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{T_{i,1}} \\ -\dfrac{\mathcal{N}_1^2}{T_{d,1}} \end{bmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \dfrac{1}{T_{i,2}} \\ (1-b_2)\dfrac{\mathcal{N}_2^2}{T_{d,2}} \end{bmatrix} & \dots & 0 & 0 & \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{T_{i,2}} \\ -\dfrac{\mathcal{N}_2^2}{T_{d,2}} \end{bmatrix} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \begin{bmatrix} \dfrac{1}{T_{i,m}} \\ (1-b_m)\dfrac{\mathcal{N}_m^2}{T_{d,m}} \end{bmatrix} & 0 & 0 & \dots & \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{T_{i,m}} \\ -\dfrac{\mathcal{N}_m^2}{T_{d,m}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} [k_{p,1} \quad k_{p,1}] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [k_{p,2} \quad k_{p,2}] & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & [k_{p,m} \quad k_{p,m}] \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} k_{p,1}[\mathcal{N}_1(1-b_1)+(1-a_1)] & 0 & \dots & 0 & -k_{p,1}(\mathcal{N}_1+1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_{p,2}[\mathcal{N}_2(1-b_2)+(1-a_2)] & \dots & 0 & 0 & -k_{p,2}(\mathcal{N}_2+1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{p,m}[\mathcal{N}_m(1-b_m)+(1-a_m)] & 0 & 0 & \dots & -k_{p,m}(\mathcal{N}_m+1) \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

Se for considerado um controlador PI, com o diagrama de blocos apresentado na figura 2.3, a lei de controle é representada por:

$$U_j(s) = -k_{p,j}\left(1 + \frac{1}{T_{i,j}s}\right)\left[C_j(s) + N_j(s)\right] + k_{p,j}\left((1 - a_j) + \frac{1}{T_{i,j}s}\right)R_j(s)$$

(2.20)

sendo k_p e T_i o ganho proporcional e o tempo de ação integral respectivamente.

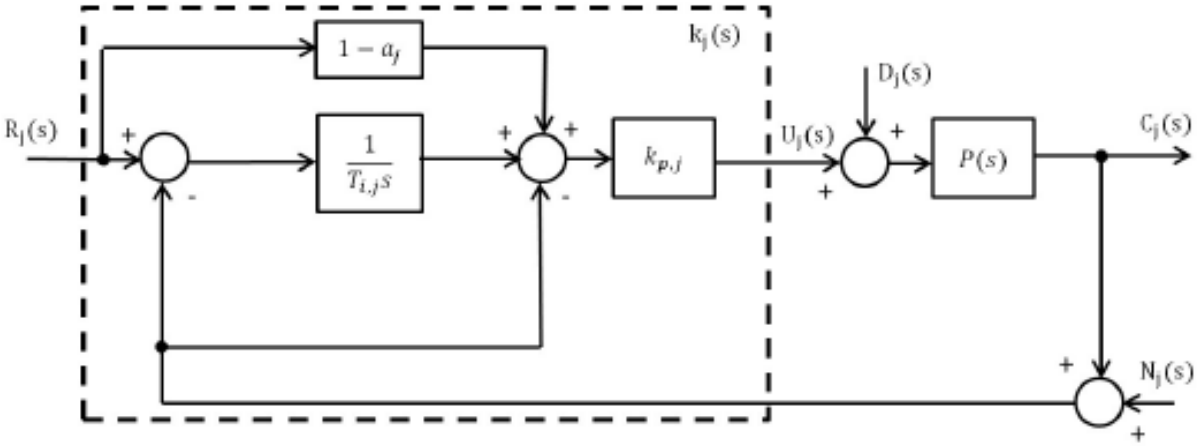


Figura 2.3: Controlador PI

Considerando $a_j = 1$ a configuração do controlador PI com dois graus de liberdade é a denominada I-P, onde a ação integral é aplicada sobre o erro de rastreamento e a ação proporcional é aplicada sobre a saída medida juntamente com o ruído de medição existente. Agora se considerar $a_j = 0$, a configuração é de um controlador PI com um grau de liberdade, e pode ser descrito pela equação (2.21).

$$k_j(t) = \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & \frac{1}{T_{i,j}} & -\frac{1}{T_{i,j}} \\ \hline k_{p,j} & k_{p,j}(1 - a_j) & -k_{p,j} \end{array}\right]$$

(2.21)

Dessa forma o sistema multivariável por realimentação dinâmica de saída pode ser descrito conforme as equações (2.22), (2.23), (2.24), (2.25) e (2.26). Para um sistema de controle descentralizado PI no espaço de estados representado por $K(s)$.

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array}\right]$$

(2.22)

Considerando a equação (2.21) as matrizes resultantes do controlador multi-malhas são:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

(2.23)

$$B_c = \left[\begin{array}{cccc|cccc} \frac{1}{T_{i,1}} & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{T_{i,1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_{i,2}} & \dots & 0 & 0 & -\frac{1}{T_{i,2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{T_{i,m}} & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{T_{i,m}} \end{array}\right] \tag{2.24}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} k_{p,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_{p,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{p,m} \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

$$D_c = \left[\begin{array}{cccc|cccc} k_{p,1}(1-a_1) & 0 & \dots & 0 & -k_{p,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_{p,2}(1-a_2) & \dots & 0 & 0 & -k_{p,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{p,m}(1-a_m) & 0 & 0 & \dots & -k_{p,m} \end{array}\right] \tag{2.26}$$

2.4 Formulação do Problema de Síntese do Controle Desacoplador

O sistema de controle multivariável apresentado na figura 1.2 pode ser representado também pelo diagrama de configuração de um sistema de controle generalizado apresentado pela figura 2.4, sendo P a planta a ser controlada e K o controlador a ser projetado.

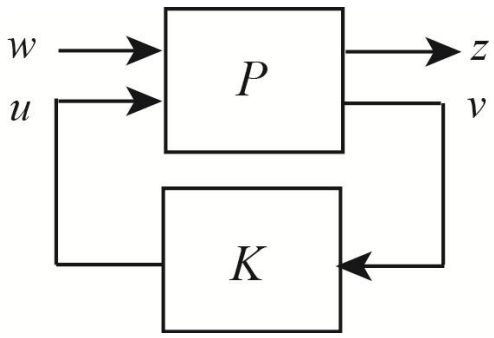


Figura 2. 4: Sistema de Controle Generalizado

A planta P no pode ser descrita como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{zw} w(t) + D_{zu} u(t) \\ y(t) &= C_y x(t) + D_{yw} w(t) + D_{yu} u(t) \end{aligned} \tag{2.27}$$

sendo $x(t)$ o vetor de estados, $u(t)$ o vetor de variáveis manipuladas, $w(t)$ o vetor de variáveis exógenas (sinais de referência $r(t)$, distúrbios $d(t)$ e ruídos de medição $n(t)$), $z(t)$ o vetor de variáveis controladas e $y(t)$ o vetor de variáveis medidas. Os vetores w e y podem ser definidos como:

$$w(t) = \begin{bmatrix} r(t) \\ d(t) \\ n(t) \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} r(t) \\ c(t) + n(t) \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

Para simplificar, o sistema apresentado pela equação (2.27) pode ser representado na forma:

$$P \triangleq \left[\begin{array}{c|cc} A & B_u & B_w \\ \hline C_z & D_{zu} & D_{zw} \\ C_y & 0 & D_{yw} \end{array}\right] \tag{2.30}$$

O sistema pode conter parâmetros incertos, pertencendo a um conjunto compacto convexo, ou politopo, definido como sendo a combinação convexa de seus vértices:

$$\mathcal{P}(\alpha) \triangleq \left\{ P : P = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i P_i; \qquad \alpha \in \Omega \right\} \tag{2.31}$$

$$\Omega \triangleq \left\{ \alpha : \ \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1 \right\} \tag{2.32}$$

sendo P_i os vértices do politopo e $\alpha = [\alpha_1 \ \dots \ \alpha_N]'$ o vetor que realiza a parametrização do politopo. A dependência em α das matrizes do sistema será omitida para simplificar a representação.

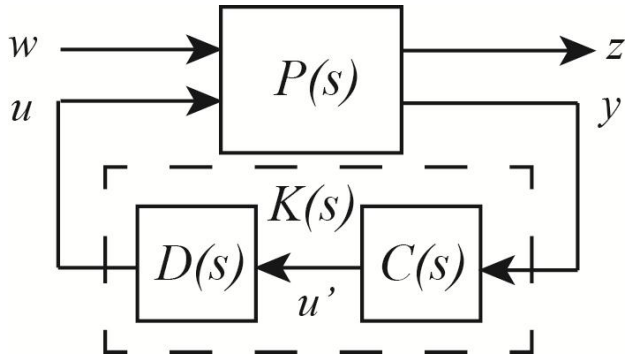


Figura 2. 5: Controlador desacoplador

Conforme a figura 2.5, o controlador por realimentação dinâmica de saída será o produto:

$$K(s) = D(s)C(s) \tag{2.33}$$

Considere o bloco do controlador descentralizado representado por:

$$C(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array}\right] \tag{2.34}$$

Considere o pré-compensador, ou desacoplador, representado por:

$$D(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_d & B_d \\ \hline C_d & D_d \end{array}\right] \tag{2.35}$$

O controlador por realimentação dinâmica de saída representado por:

$$K(s) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A_k & B_k \\ \hline C_k & D_k \end{array}\right] \tag{2.36}$$

É determinado como sendo a combinação do desacoplado e do controlador PID:

$$A_k = \begin{bmatrix} A_d & B_d C_c \\ 0 & A_c \end{bmatrix}$$

$$B_k = \begin{bmatrix} B_d D_c \\ B_c \end{bmatrix}$$

$$C_k = [C_d \quad D_d C_c] \tag{2.37}$$

$$D_k = [D_d D_c]$$

A função de transferência em malha fechada do sistema de controle por realimentação dinâmica de saída é representada por:

$$T_{zw}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array}\right] \tag{2.38}$$

sendo suas matrizes calculadas como:

$$A_f = \begin{bmatrix} A + B_u D_k C_y & B_u C_k \\ B_u C_y & A_k \end{bmatrix}$$

$$B_f = \begin{bmatrix} B_w + B_u D_k D_{yw} \\ C_k D_{yw} \end{bmatrix}$$

$$C_f = [C_z + D_{zu} D_k C_y \quad D_{zu} C_k] \tag{2.39}$$

$$D_f = \left[D_{zw} + D_{zu} D_k D_{yw}\right]$$

O sistema representado por $T_{zw}(s)$ apresentado pela equação (2.38) pode ser dividido em três blocos de funções de transferência relacionados com a resposta de rastreamento, a rejeição de distúrbio e a atenuação de ruído de medição:

$$T_{zw}(s) = [T_{cr}(s) \quad T_{cd}(s) \quad T_{cn}(s)] \begin{bmatrix} R(s) \\ D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

sendo : T_{cr} - resposta de rastreamento
T_{cd} - rejeição de distúrbio
T_{cn} - atenuação do ruído

Na sintonia dos controladores PID, deve-se buscar obter um sistema resultante com pequena interação entre as malhas de controle do sistema, rejeição de perturbações consideradas aceitáveis, bom rastreamento de *set point*, mínimo esforço de controle, pouca interferência do ruído de medição e uma robustez às incertezas do modelo da planta. Existem várias maneiras distintas de atender os requisitos. A rejeição à perturbações pode ser alcançada minimizando a norma de função de transferência em malha fechada apropriada e requisitos para as respostas no tempo discreto podem ser alcançados por restrições na região de alocação de polos ou utilizando modelos de referência onde o objetivo é reduzir a diferença entre a matriz de transferência de malha fechada e o modelo de referência. Para um controlador robusto PID, a abordagem de sintonia pode considerar sistemas representados por modelos politópicos ou dependentes de maneira afim de parâmetros.

Considerando o modelo de referência bloco diagonal que desacopla o sistema e cujas funções de transferência na diagonal atendem às especificações da resposta transitória de rastreamento (*overshoot*, tempo de estabilização etc) para cada saída controlada:

$$T_m(s) = \begin{bmatrix} T_{m,1}(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & T_{m,m}(s) \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

Seja:

$$T_m(s) = \begin{bmatrix} A_m & B_m \\ C_m & D_m \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

$$T_{cr}(s) = \begin{bmatrix} A_{cr} & B_{cr} \\ C_{cr} & D_{cr} \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

sendo $T_{cr}(s)$ a função de transferência em malha fechada que relaciona os sinais de referência e os sinais de saída da planta, um dos blocos de $T_{zw}(s)$. O erro de aproximação entre o modelo de referência e a função de transferência em malha fechada, $E(s) \triangleq T_m(s) - T_{cr}(s)$, pode ser representado no espaço de estados como:

$$E(s) = \left[\begin{array}{cc|cc} A_m & 0 & & B_m \\ 0 & A_{cr} & & B_{cr} \\ \hline C_m & -C_{cr} & D_m & -D_{cr} \end{array}\right] \tag{2.44}$$

Dado um problema multiobjetivo de síntese do controlador desacoplador, $K(s) = D(s)C(s)$, que minimiza o máximo da norma $\mathcal{H}_\infty$ do erro entre o modelo de referência e a função de transferência em malha fechada (erro de aproximação), $E(s)$, a norma $\mathcal{H}_\infty$ da matriz de transferência relacionando com as saídas da planta e os distúrbios, $T_{cd}(s)$.

$$K^*(s) = \arg\min_{K(s)} \begin{bmatrix} \max\limits_{\alpha\in\Omega} \|T_{cd}(s,\alpha,K)\|_\infty \\ \max\limits_{\alpha\in\Omega} \|E(s,\alpha,K)\|_\infty \end{bmatrix}$$
$$sujeito\ a: K \in \mathcal{F} \tag{2.45}$$

sendo $\mathcal{F}$ o conjunto de controladores desacoplador, com a estrutura especificada, que resulta em sistemas em malha fechada robustamente estáveis.

Para trabalhar com problemas de otimização multiobjetivo, uma estratégia utilizada, é transformar esse mesmo problema em um problema escalar e aplicar técnicas de otimização escalar. Uma combinação de duas técnicas de escalarização será considerada nesse trabalho, para transformar o problema multiobjetivo original (equação 2.45) em um problema de otimização escalar, o problema-λ (ou problema ponderado) e o problema-ϵ (ou problema ϵ-restrito). No primeiro problema, o vetor das funções objetivo é transformado em uma função escalar como uma soma ponderada e o objetivo é minimizar a soma ponderada das funções objetivo. No segundo problema, apenas uma função objetivo é minimizada de cada vez, e as demais funções objetivo são tratadas como restrições.

Definição do problema escalar: dada a estrutura do controlador, o modelo de referência $T_m(s)$, os escalares $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0,\ \epsilon_1 \geq 0, \epsilon_2 \geq 0$ determinar os parâmetros do controlador $K^*(s)$, tal que:

$$
\begin{aligned}
K^*(s) = \arg\min_{K(s)} & \begin{bmatrix} +\lambda_1 \max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cd}(s,\alpha,K)\|_\infty \\ +\lambda_2 \max_{\alpha\in\Omega} \|E(s,\alpha,K)\|_\infty \end{bmatrix} \\
sujeito\ a: \ & \max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cd}(s,\alpha,K)\|_\infty \leq \epsilon_1, \\
& \max_{\alpha\in\Omega} \|E(s,\alpha,K)\|_\infty \leq \epsilon_2, \\
& K(s) \in \mathcal{F}
\end{aligned} \tag{2.46}
$$

No problema escalar (2.46), uma determinada função objetivo é minimizada a partir de uma soma ponderada ou exclusivamente tratada como restrição. Soluções distintas podem ser alcançadas variando os fatores de poderação λ_i das diferentes funções objetivo e/ou restringindo-as definindo.

Capítulo 3 - Procedimento de Síntese do Controlador Desacoplador Robusto

3.1 Introdução

Uma das alternativas para tratar o problema de otimização multiobjetivo aplicado à sintonia robusta de controladores PID multi-malhas considerando modelo com incertezas politópicas seria o desenvolvimento de caracterizações em termos de desigualdades matriciais lineares (LMI, *Linear Matrix Inequality*). Entretanto o controlador PID multi-malhas é um controlador por realimentação dinâmica de saída com restrição de estrutura para a qual não existe ainda uma formulação LMI que possa ser aplicada para resolver esse problema, ou seja, não existe um algoritmo que garanta a convergência para o ponto ótimo global que resolva essa classe de problemas. Tratando o problema de controle robusto PID descentralizado a partir de um problema de otimização simples não convexo, obtém-se apenas uma solução a qual não pode ser considerada como ótima já que para isso seria necessário restringir o pior caso das funções objetivo em um conjunto Ω de infinitos pontos pertencentes ao domínio de incerteza. Dessa forma, é necessário buscar novos métodos para sanar o problema.

Quando o problema de otimização não tem garantia de ser convexo, ele se torna mais difícil computacionalmente, uma vez que é necessário verificar as funções objetivo e as restrições em um conjunto infinito de pontos. Obter um procedimento eficiente para lidar com esse tipo de problema não é uma tarefa fácil, não existindo uma solução simples. O projeto de síntese de controle desacoplador robusto desenvolvido nesse trabalho apresenta uma maneira de trabalhar com problemas não convexos.

Nesse capítulo o procedimento de sintonia de controladores robustos para sistemas multivariáveis, apresentado em Gonçalves et al. (2012) é estendido para a inclusão do projeto de um desacoplador em conjunto com o controlador para melhorar o desacoplamento entre as malhas de controle e atender as especificações da resposta transitória de rastreamento

(Gonçalves, et al. 2011). O procedimento proposto para tratar o problema de otimização é iterativo baseado em duas etapas: síntese e análise. No passo de síntese é aplicado um algoritmo de otimização não linear para calcular os parâmetros do controlador PID multi-malhas e do desacoplador a partir do problema de otimização escalar da equação (2.46) com o conjunto infinito Ω substituído por um conjunto finito de pontos $\tilde{\Omega} \subset \Omega$. Este conjunto finito é inicialmente o conjunto dos vértices do politopo como considerado nas formulações convexas. Considerar apenas os vértices do politopo nem sempre é suficiente para garantir a estabilidade robusta do sistema em malha fechada e a minimização das funções objetivo para todos os $a \in \Omega$. Na etapa de análise o controlador obtido na etapa de síntese é verificado para todo o politopo através de um procedimento que combina o algoritmo *branch-and-bound* e formulações de análise LMI (Gonçalves et al., 2007), que determina a necessidade de incluir ou não novos pontos no conjunto finito de pontos considerado na etapa de síntese. Se o procedimento de análise encontrar um sistema instável no domínio de incerteza ou se for verificado que os valores máximos das funções objetivo ou de restrição não ocorrerem em um ponto pertencente a $\tilde{\Omega}_k$, então esses pontos são incluídos no conjunto $\tilde{\Omega}_{k+1}$ existente retornando assim a execução dos dois passos do procedimento. Para evitar iterações desnecessárias, na minimização da função objetivo, a inclusão de novos pontos é feita apenas quando a diferença relativa entre o pior caso de norma no politopo e o pior caso no conjunto finito $\tilde{\Omega}_k$ for maior que a tolerância especificada. O procedimento termina quando o sistema em malha fechada é robustamente estável e os valores máximos das funções objetivo e de restrição ocorrem em pontos que pertence a $\tilde{\Omega}_k$ (ou pontos que estão bem próximos desse conjunto, conforme a precisão especificada no problema).

3.2 Procedimento de Síntese do Controle Desacoplador Robusto

Conforme apresentado no capítulo 2, uma forma de resolver um problema de otimização multiobjetivo definido pela equação (2.46) é necessário transformá-lo num problema escalar e aplicar as técnicas de otimização escalar.

Baseado nestas técnicas de escalarização, o problema de otimização escalar é definido considerando $\lambda_1 = 0$ e $\epsilon_1 = \infty$ na equação (2.46). O primeiro é o cálculo de um controlador desacoplador robusto ótimo, $K_m^*(s)$, com o objetivo de desacoplar o sistema e garantir as especificações das respostas transitórias de rastreamento, dessa forma, o problema escalar pode ser definido como:

$$K_m^*(s) = \arg\min_{K(s)} \max_{\alpha \in \Omega} \|\lambda_2 E(s, \alpha, K)\|_\infty$$
$$sujeito\ a: K \in \mathcal{F} \tag{3.1}$$

sendo $\mathcal{F}$ o conjunto de controladores com parâmetros dentro dos limites aceitáveis que garantem a estabilidade robusta do sistema em malha fechada. Dado a estrutura do controlador $T_m(s)$, e o escalar $\lambda_2 \geq 0$, determinar os parâmetros de $k_{p,j}$, $T_{i,j}$ e $T_{d,j}$, $j = 1, \ldots n$, do controlador $K^*(s)$.

O segundo problema de otimização escalar é o cálculo de um controlador ótimo, $K^*(s)$, para a rejeição de distúrbios, que garante um erro de aproximação especificado, considerando a escalar $\lambda_1 \geq 0$:

$$K^*(s) = \arg\min_{K(s)} \max_{\alpha\in\Omega} \|\lambda_1 T_{cd}(s,\alpha,K)\|_\infty$$
$$sujeito\ a\colon \max_{\alpha\in\Omega} \|E(s,\alpha,K)\|_\infty \le \epsilon_m$$
$$K(s) \in \mathcal{F} \tag{3.2}$$

sendo $\epsilon_m > \max_{\alpha\in\Omega} \|E(s,\alpha,K_m^*)\|_\infty$.

A idéia por trás da proposta da formulação do problema do controle desacoplador é simples. Com um modelo de referência diagonal, se o pior caso do erro de aproximação é baixo isso significa que o ganho das funções de transferência dos elementos fora da diagonal da matriz de transferência em malha fechada, $T_{cr}(s)$, estará próximo do zero para todas as frequências, assegurando o desacoplamento entre as malhas de controle. Além disso, os elementos da diagonal de $T_{cr}(s)$ serão aproximados da resposta em frequência específicada garantindo indiretamente as respostas transitórias de rastreamento desejadas.

O controlador é calculado como a solução do problema de otimização das equações (3.1) e (3.2) conforme discutido na introdução do capítulo. O procedimento geral de projeto proposto nesse trabalho é descrito a seguir, para o caso do problema dado pela equação (3.2):

Procedimento de Síntese do Controle Desacoplador Robusto

Passo 0: Inicializar o conjunto finito com os vértices do politopo: $\tilde{\Omega} = vértices(\Omega)$.

Passo 1: Síntese – O problema (3.2) é resolvido para encontrar o controlador K_m^* onde Ω é substiuído por $\tilde{\Omega}$:

$$K^*(s) = \arg\min_{K(s)} \max_{\alpha\in\tilde{\Omega}} \|\lambda_1 T_{cd}(s,\alpha,K)\|_\infty$$
$$sujeito\ a\colon \max_{\alpha\in\tilde{\Omega}} \|E(s,\alpha,K)\|_\infty \le \epsilon_m$$
$$K(s) \in \mathcal{F} \tag{3.3}$$

Considerando que a equação (3.3) trata-se de problema de otimização não convexo, a solução obtida considerando apenas um número finito de pontos do politopo não é o suficiente para garantir a estabilidade robusta do sistema em malha fechada e a minimização da função objetivo $\|T_{cd}(s,a)\|_\infty$ para todos os $\alpha \in \Omega$.

Passo 2: esse passo é realizado para verificar o controlador obtido no passo anterior. Para determinar $\alpha \in \Omega$ que corresponde ao máximo da função objetivo e da restrição, ou $\alpha_u \in \Omega$ correspondente a um sistema instável:

$$\alpha_\infty \triangleq \max_{\alpha\in\Omega} \|T_{cd}(s,\alpha,K^*)\|_\infty \tag{3.4}$$

$$\alpha_m \triangleq \max_{\alpha\in\Omega} \|E(s,\alpha,K_m^*)\|_\infty \tag{3.5}$$

Se for encontrado a_u que corresponde a um sistema instável, acrescentar esse ponto ao conjunto finito, $\tilde{\Omega}_{k+1} = \{\tilde{\Omega}_k, \alpha_u\}$, senão, se $\|T_{cd}(s,\alpha_\infty,K^*)\|_\infty - max_{\alpha\in\tilde{\Omega}} \|T_{cd}(s,\alpha,K^*)\|_\infty > \varepsilon$, então acrescentar esse ponto ao conjunto finito, $\tilde{\Omega}_{k+1} = \{\tilde{\Omega}_k, \alpha_\infty\}$ e se $\|E(s,\alpha_m,K^*)\|_\infty > \epsilon_m$, então acrescentar esse ponto ao conjunto finito, $\tilde{\Omega}_{k+1} = \{\tilde{\Omega}_k, \alpha_m\}$.

Passo 3: Se o sistema é robustamente estável, $\|T_{cd}(s,\alpha_\infty,K^*)\|_\infty - max_{\alpha\in\tilde{\Omega}}\|T_{cd}(s,\alpha,K^*)\|_\infty \leq \varepsilon$ e $\|E(s,\alpha_m,K^*)\|_\infty \leq \epsilon_m$, então finalize, caso contrário, volte para o passo 1 considerando o novo conjunto finito, $\tilde{\Omega}$, alterado no passo 2.

Simultaneamente com o cálculo dos valores máximos no passo 2, pela solução dos problemas (3.4) e (3.5), é verificado se existe um a_u que corresponde a um sistema instável. Se existe um sistema instável, isto significa que o controle desacoplador obtido no passo 1 não resulta em um sistema robustamente estável. Desse modo, o ponto a_u é acrescentado ao conjunto finito de pontos do politopo, $\tilde{\Omega}$. Quando o sistema é robustamente estável mas o valor máximo da função objetivo para o conjunto infinito, Ω, calculado no passo 2, é maior que o valor para o conjunto finito, $\tilde{\Omega}$, obtido no passo 1, considerando uma determinada precisão, ε, isto é, a_∞ não pertence ao conjunto finito de pontos, $\tilde{\Omega}$, então a_∞ deve ser incluído em $\tilde{\Omega}$. Da mesma forma, se é verificado que a restrição estabelecida não é atendida por algum ponto do domínio de incerteza, Ω, então o ponto a_m também deve ser inserido no conjunto de pontos finito, $\tilde{\Omega}$. Se for incluído qualquer ponto novo, a_u, a_∞ ou a_m, no conjunto finito $\tilde{\Omega}$, então o procedimento deve retornar ao passo 1 para considerar o novo conjunto $\tilde{\Omega}$. O procedimento finaliza quando todas as restrições são atendidas para todos os pontos no politopo Ω e não há possibilidade de minimizar a função objetivo significativamente, de acordo com a tolerância ε.

O problema (3.1) pode ser tratado da mesma forma descrita para o problema (3.2) considerando como função objetivo a minimização do erro de aproximação.

As próximas seções descrevem em mais detalhes os passos 1 e 2 do procedimento de síntese.

3.3 Etapa de Síntese

Conforme descrito na seção anterior, o passo 1 requer a solução de um problema de otimização escalar, restrito, possivelmente não convexo e multimodal, isto é, pode apresentar diferentes mínimos localizados em diferentes bacias de atração. A diferença entre o problema de otimização original (3.2) e o problema (3.3) considerado no passo 1, é que o conjunto infinito de pontos, Ω, é substituído pelo conjunto finito, $\tilde{\Omega}$.

Não existem algoritmos de otimização fáceis de serem implementados que garantam a convergência para o ótimo global de problemas multimodais. Apesar disso, existem algoritmos de uso geral que podem ser aplicados satisfatoriamente na solução desses problemas. Os algoritmos geralmente utilizados são os da família de métodos evolucionários, sendo o mais conhecido o algoritmo genético (GA, *Genetic Algorithm*), a desvantagem desses métodos são o alto custo computacional. Os algoritmos GA normalmente são utilizados para calcular os parâmetros do controlador PID em procedimentos de sintonia baseados na otimização numérica devido à grande possibilidade dos problemas serem não convexo e multimodal (possuírem vários mínimos locais) e devido à pequena quantidade de números de parâmetros a serem otimizados. Nesse trabalho utiliza-se o algoritmo cone elipsoidal (CEA, *Cone Ellipsoidal Algorithm*) (Takahashi, et al., 2003), quando comparado com o algoritmo elipsoidal original, que garante a obtenção da solução ótima somente para problemas convexos, o algoritmo CEA apresenta uma convergência mais rápida

para o mínimo local com resultados bastante semelhantes aos obtidos pelos algoritmos GA, com uma capacidade de tratar restrições de forma bastante eficiente apresentando custo computacional muito menor. O algoritmo cone elipsoidal é descrito na sequência.

Dado o elipsoide ε:

$$\varepsilon(x) = (x - \chi)^T Q^{-1}(x - \chi) \leq 1 \tag{3.6}$$

sendo: χ o vetor que define o centro do elipsoide
$Q = Q^T > 0$ uma matriz simétrica definida positiva.

Considerando o vetor $\chi \in \mathbb{R}^d$, correspondente aos parâmetros de otimização, no caso os parâmetros dos controladores PID e do desacoplador. A função a ser minimizada é a função objetivo $f(\chi): \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ e $g(\chi): \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^r$ o vetor de restrições. O algoritmo elipsoidal inicia com um elipsoide ε_0, que contém o ponto de solução ótima caracterizada pela matriz Q_0 e pela solução inicial χ_0, que é o centro do elipsoide. O algoritmo é descrito pelas equações recursivas (Boyd, et al., 1994) :

$$\chi_{k+1} = \chi_k - \frac{1}{d+1} Q_k \tilde{m} \tag{3.7}$$

$$Q_{k+1} = \frac{d^2}{d^2 - 1}\left(Q_k - \frac{2}{d+1} Q_k \tilde{m} \tilde{m}^T Q_k\right) \tag{3.8}$$

sendo:

$$\tilde{m} = \frac{m_k}{\sqrt{m_k^T Q_k m_k}} \tag{3.9}$$

Quando χ_k é uma solução não factível, o vetor m_k é o vetor normalizado $m_k = m/\|m\|$ calculado como a soma dos gradientes, ou sub-gradientes, das restrições ativas. Quando χ_k é uma solução factível, o vetor m_k é calculado como o gradiente, ou sub-gradiente, da função objetivo $f(\chi)$. O cálculo do vetor m baseado no algoritmo cone-elipsoidal, é formulado da seguinte forma:

$$m = \begin{cases} \nabla f(\chi) & se\ g_j(\chi) < 0, \forall\ j = 1, \dots, r \\ \sum_{j=1}^{r} s_j(\chi) & se\ \exists j | g_i(\chi) \geq 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

com

$$s_j(\chi) = \begin{cases} 0 & se\ g_j(\chi) < 0 \\ \nabla g_j(\chi) & se\ g_j(\chi) \geq 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

sendo ∇ o operador gradiente (ou sub-gradiente) calculado numericamente pelo método de diferenças finitas:

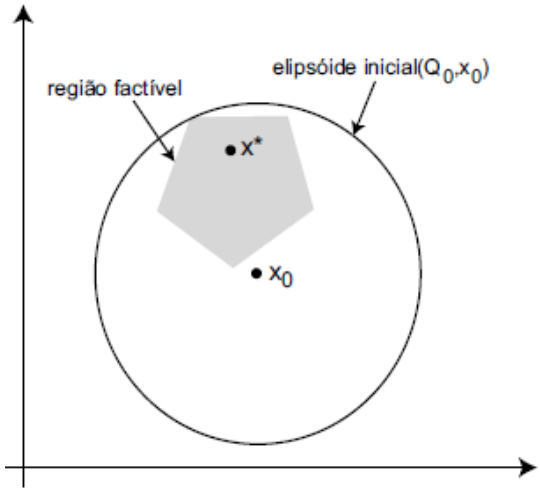
$$v_i = \frac{f(\chi+\delta e^i)-f(\chi)}{\delta}, \;\; i = 1,2,\dots,d \tag{3.12}$$

$$\nabla f \triangleq [v_1, v_2, \dots, v_d]^T \tag{3.13}$$

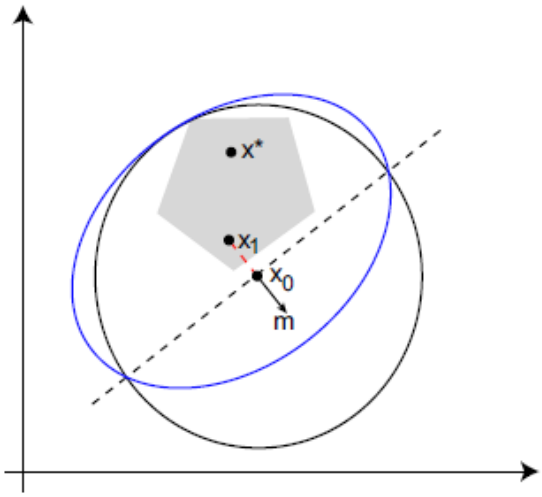
sendo e^i a i –ésima coluna da matriz identidade de dimensão d, e δ um escalar tal que $\delta \to 0$ (com valores típicos na faixa $10^{-8}\ a\ 10^{-3}$).

O algoritmo de otimização finaliza quando $(f_{máx} - f_{mín})/f_{mín} \leq \epsilon$, sendo $f_{máx}$ e $f_{mín}$ são os valores máximo e mínimo da função objetivo nas últimas N_ε iterações e ϵ a precisão relativa requerida.

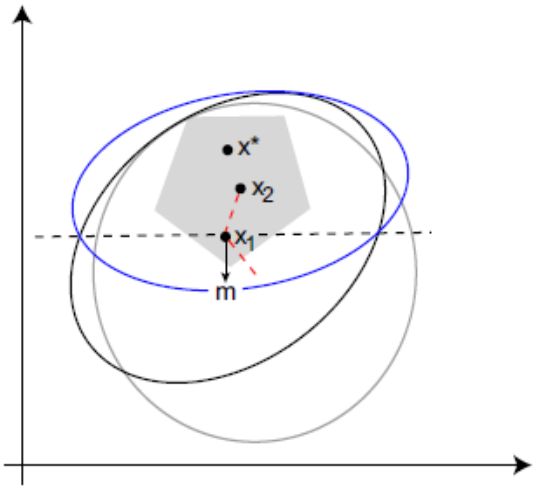
A figura 3.1 apresenta o comportamento do algoritmo elipsoidal tradicional, partindo de uma elipse inicial que contém uma solução ótima restrita (Gonçalves, 2006).



(a) Solução inicial não factível.



(b) Cálculo do vetor m com solução não factível.



(c) Cálculo do vetor m com solução factível.

Figura 3. 1: Algoritmo Elipsoidal

Conforme discutido anteriormente, o algoritmo elipsoidal inicia com um elipsóide, que contém o ponto de solução ótima restrita, na figura 3.1 (a). A cada iteração, o vetor m_k define um hiperplano de corte que passa no centro do elipsóide. O novo elipsóide calculado pelas equações (3.7) e (3.8) engloba a metade do elipsóide original que contém a solução ótima, como é apresentado na figura 3.1 (b). Quando a solução é não factível, m_k é calculado com base no gradiente da restrição mais violada, no algoritmo elipsoidal convencional, já no algoritmo cone-elipsoidal, o vetor m_k é normalizado como a soma dos gradientes, ou sub-gradientes, das restrições ativas. A figura 3.1 (c) apresenta o comportamento quando a solução é factível, nesse caso, o vetor m_k é calculado como o gradiente da função objetivo.

A cada iteração do algoritmo cone-elipsoidal, o volume do elipsóide diminui consideravelmente (Boyd, et al., 1994). A taxa de redução do elipsóide depende da dimensão do vetor de parâmetros de otimização, conforme apresentado:

$$vol(\varepsilon_k) \leq e^{-\frac{k}{2d}} vol(\varepsilon_0) \tag{3.14}$$

Quando o volume o do elipsóide tende a zero, a solução x_k tende para o valor ótimo x^*.

A definição dos parâmetros iniciais x_0, o centro do elipsóide, e Q_0, que define o formato e o tamanho do elipsóide inicial, influenciam diretamente na obtenção da solução ótima do problema de otimização estipulado. Deve ser considerado que a solução ótima desejada esteja dentro do elipsóide inicial apresentado na figura 3.1 (a), e que o problema seja convexo para garantir a convergência da solução.

Apesar do problema sendo tratado ser possivelmente não convexo, a experiência com a aplicação desse método na área de controle mostra que são obtidos resultados bastante satisfatórios.

3.4 Etapa de Análise

Na etapa de análise, é necessário encontrar a_∞ e a_m pertencente ao conjunto de infinito pontos, Ω, correspondentes aos máximos das funções objetivo e restrição em (3.2), ou encontrar um a_u que corresponde a um sistema instável. Esse é também um problema de otimização multimodal de difícil solução. Algoritmos *branch-and-bound* (BnB) são algoritmos de otimização global que podem ser utilizados para solução dos problemas (3.4) e (3.5) no passo 2. A estratégia básica do algoritmo *branch-and-bound* é particionar o domínio de incerteza, Ω, tais que funções limitantes inferior e superior convirjam para a valor máximo da norma em Ω. Esse algoritmo termina quando a diferença entre as funções limitantes é menor do que a precisão desejada. O algoritmo BnB é implementado nesta dissertação, para resolver (3.4) e (3.5), aplicando a técnica de partição com base em malhas simpliciais (Gonçalves et al., 2004), descrita na próxima seção. Esta técnica de partição permite que o algoritmo BnB seja aplicado aos modelos politópicos com maior eficiência. Cada simplex, que é o politopo com menor número de vértices em um espaço, é subdividido em novos simplexos (mais de um simplex), com o mesmo número de vértices. É considerado como função limite inferior o valor máximo da norma $\mathcal{H}_\infty$ calculado nos vértices dos

simplexos. A função limite superior é escolhida como sendo o valor máximo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ calculado para cada simplex por meio de formulações LMI (Gonçalves et al., 2007). Se o sistema não é robustamente estável, o algoritmo localiza um sistema instável no politopo durante o cálculo do valor máximo de norma. Nesta dissertação, no caso de sistemas contínuos no tempo, o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ é calculado com base no Lema 1 apresentado em Oliveira et al. (2004).

Seja $T(s,\alpha) = C(\alpha)[sI - A(\alpha)]^{-1}B(\alpha) + D(\alpha)$, $\alpha \in \Omega$, se existe matrizes simétricas definida positivas $P_i \in \mathbb{R}^{nxn}, i = 1, \dots, N$, sendo N o número de vértices do politopo, Ω, tal que o problema de otimização:

$$\mu^* = \min_{\mu, P_i} \mu$$

$$Sujeito\ a: M_i = \begin{bmatrix} A_i^T P_i + P_i A_i & P_i B_i & C_i^T \\ * & -I & D_i^T \\ * & * & -\mu I \end{bmatrix} < 0, \qquad i = 1, \dots, N$$

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j & P_i B_j + P_j B_i & C_i^T + C_j^T \\ * & -I & D_i^T + D_j^T \\ * & * & -2\mu I \end{bmatrix} < 0, \begin{matrix} i = 1, \dots, N-1 \\ j = i+1, \dots, N \end{matrix}$$

(3.15)

tenha solução, então o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ de $T(s,\alpha)$ é $max_{\alpha \in \Omega} \|T(s,\alpha)\|_\infty \leq \sqrt{\mu^*}$.

Os símbolos ´*´ nas matrizes acima representam os termos simétricos à diagonal principal.

No caso de sistemas discretos, o cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ utiliza a formulação baseada no Teorema 4 apresentado em de Oliveira, et al. (2002): se existe $G \in \mathbb{R}^{n\,x\,n}$, $P_i = P_i^T \in \mathbb{R}^{nxn}, i = 1, \dots, N$, tal que o problema de otimização:

$$\gamma_c^2 = \min_{G, P_i} \mu$$

$$\text{sujeito a:} \quad P_i \succ 0, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i G & B_i & 0 \\ * & G + G^T - P_i & 0 & G^T C_i^T \\ * & * & I & D_i^T \\ * & * & * & \mu I \end{bmatrix} \succ 0, \quad i = 1, \dots, N$$

(3.16)

tenha solução, então o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ de $T(z,\alpha)$ é $max_{\alpha \in \Omega} \|T(z,\alpha)\|_\infty \leq \sqrt{\mu^*}$.

Os símbolos ´*´ nas matrizes acima representam os termos simétricos à diagonal principal.

A implementação desse algoritmo BnB para o cálculo do custo ε-garantido $\mathcal{H}_\infty$, γ_c, está disponível para download em Gonçalves et al. (2012). O termo custo ε-garantido $\mathcal{H}_\infty$ vem do fato de que:

$$\max_{\alpha\in\Omega}\|T_{zw}(s,\alpha)\|_\infty \leq \gamma_c \leq (1+\varepsilon)\max_{\alpha\in\Omega}\|T_{zw}(s,\alpha)\|_\infty$$

(3.17)

3.4.1 Técnica de Partição do Politopo

O domínio de incerteza na forma de politopo, com N vértices, pode ser tratado como um simplex no espaço d –dimensional, com $d = N - 1$, sendo o último elemento do vetor $\alpha\in\Omega$ calculado em função dos anteriores:

$$a_N = 1 - \sum_{i=1}^{N-1} a_i$$

(3.18)

Um simplex é o politopo com menor número de vértices em uma determinada dimensão (reta para $d = 1$; triangulo para $d = 2$, tetraedro para $d = 3$), o que é uma vantagem do ponto de vista computacional importante ao se analisar condições LMI. Para implementação do algoritmo BnB, considerando malhas simpliciais, é necessária uma técnica eficiente de divisão de simplexos. Em Gonçalves et al., (2006), é proposto um algoritmo de divisão de simplex orientado pelas arestas. A técnica de divisão orientada pelas arestas é fácil de ser implementada e possui a vantagem de permitir que o cálculo dos parâmetros de sintonia dos controladores baseados no algoritmo *banch-and-bound* possa ser aplicado a modelos com incertezas politópicas, onde os vértices estão em quaisquer pontos do espaço de parâmetros.

Para implementação da divisão orientada pelas arestas é necessário criar um vértice novo sobre o ponto médio de cada aresta do simplex, como mostrado na figura 3.2, para $d = 2$, e figura 3.3, para $d = 3$. Seja $a(i), i = 1,\ldots,N$, os vértices do politopo no espaço de coordenadas $\alpha\in\Omega$, a geração dos vértices sobre os pontos médios das arestas pode ser feita pelo algoritmo:

K = N
para i = 1 até N-1
  para j = i+1 até N
    k = k + 1
    $a_{(k)} = \frac{1}{2}(a_{(i)} + a_{(j)})$
  fim para
fim para

Por exemplo, para $N = 3$, figura 3.2, os vértices originais são dados por $a_{(1)} = [0 \quad 0 \quad 1]^T$, $a_{(2)} = [1 \quad 0 \quad 0]^T$ e $a_{(3)} = [0 \quad 1 \quad 0]^T$. Os novos vértices sobre as arestas são calculados como sendo: $a_{(4)} = \frac{1}{2}(a_{(1)} + a_{(2)})$, $a_{(5)} = \frac{1}{2}(a_{(1)} + a_{(3)})$ e $a_{(6)} = \frac{1}{2}(a_{(2)} + a_{(3)})$.

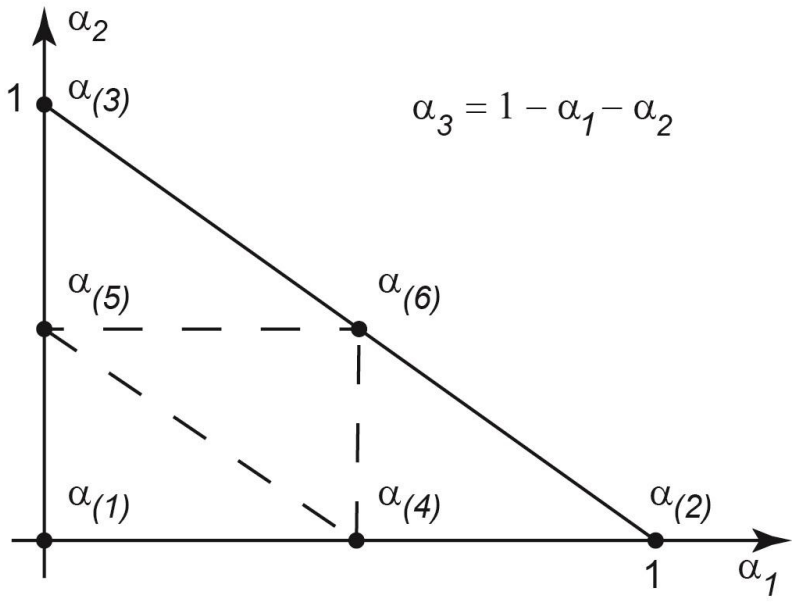


Figura 3. 2: Divisão orientada pelas arestas para d=2

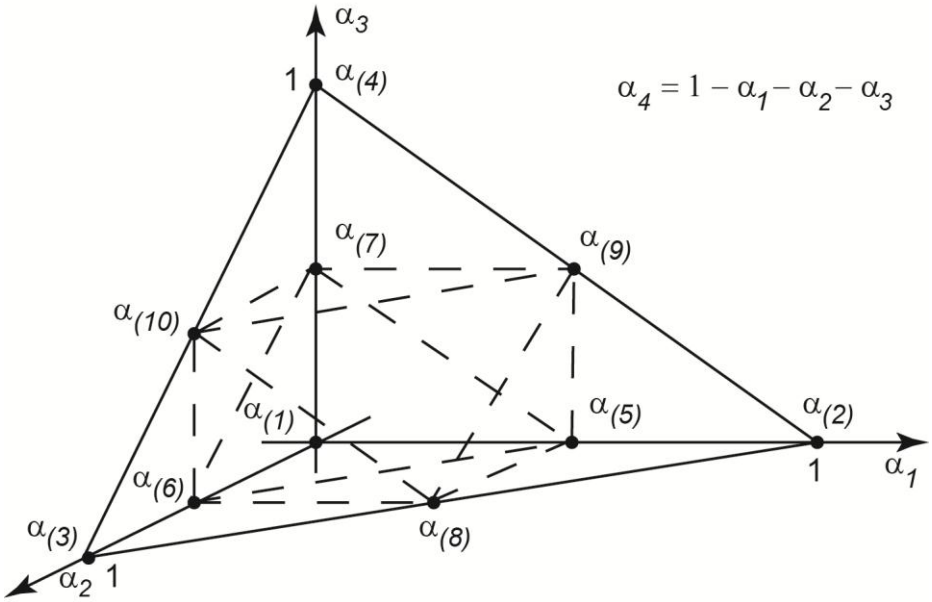


Figura 3. 3: Divisão orientada pelas arestas para d=3

A implementação do procedimento de divisão de simplex orientada pelas arestas em 2^d simplexos retorna uma matriz T onde a i –ésima linha contém os índices dos vértices que formam o i –ésimo simplex da subdivisão (Gonçalves et al., 2006). Para $d = 2$, a matriz é gerada como sendo:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

Para $N = 4$, $d = N - 1 = 3$, são criados 6 vértices sobre as arestas, mostrados na figura 3.3, e a matriz é dada por:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 8 & 9 \\ 6 & 8 & 3 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \\ 6 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 7 & 9 & 10 \\ 7 & 9 & 10 & 4 \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

A implementação para o MATLAB® do algoritmo de cálculo da matriz T, descrito em Gonçalves et al. (2006), dada a dimensão d, é:

```
M=diag(1:d+1);
v=d+1;
for i=1:d
  for j=i+1:d+1
    v=v+1;
    M(i,j)=v;
  end
end
for i=0:(2^d)-1
  c=1;
  cs = c;
  for j=0:d-1
    if bitand(i,2^j)
      c=c+1;
    end
    cs(1,j+2)=c;
  end
  cs(2,1) = c;
  for j=0:d-1
    if ~bitand(i,2^j)
      c=c+1;
    end
    cs(2,j+2)=c;
  end
  for j=1:d+1
    T(i+1,j)=M(cs(1,j),cs(2,j));
  end
end
```

3.4.2 Descrição do Algoritmo *Branch-and-Bound*

Considere um sistema incerto representado por um modelo politópico com três vértices ($N = 3$):

$$P(s) = \alpha_1 P_1(s) + \alpha_2 P_2(s) + \alpha_3 P_3(s) \tag{3.21}$$

O espaço de incerteza pode ser tratado como um simplex no espaço de duas dimensões, $d = 2$, desde que $a_3 = 1 - a_1 - a_2$. O primeiro passo do algoritmo BnB é calcular o valor das normas nos três vértices e o custo garantido para o politopo, como mostrado na figura 3.4. O custo garantido, apresentado em negrito-itálico, é igual a 40 e o máximo valor da norma nos vértices é igual a 10. Se a diferença for maior do que a precisão especificada, é necessário fazer a subdivisão do simplex utilizando a técnica de divisão orientada pelas arestas.

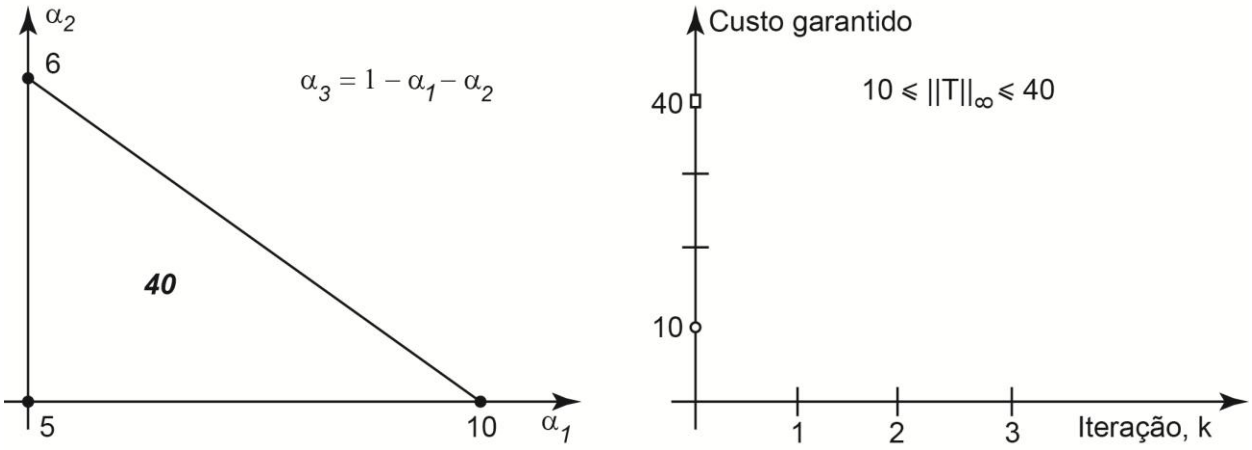


Figura 3. 4: Simulação do algoritmo BnB – Iteração 0

Para o caso $d = 2$ sendo analisado, o algoritmo BnB calcula a norma nos 3 novos vértices e o custo garantido nos 4 novos simplexos obtidos, como mostrado na figura 3.5. O maior valor de custo garantido é igual a 30 e o maior valor de norma é igual a 15. O simplex cujo custo garantido é igual a 10, menor que o valor máximo de norma, pode ser excluído da busca, sendo demarcado em cinza. Se a precisão especificada não é atingida, o simplex com maior valor de custo garantido, 30, deve ser subdividido.

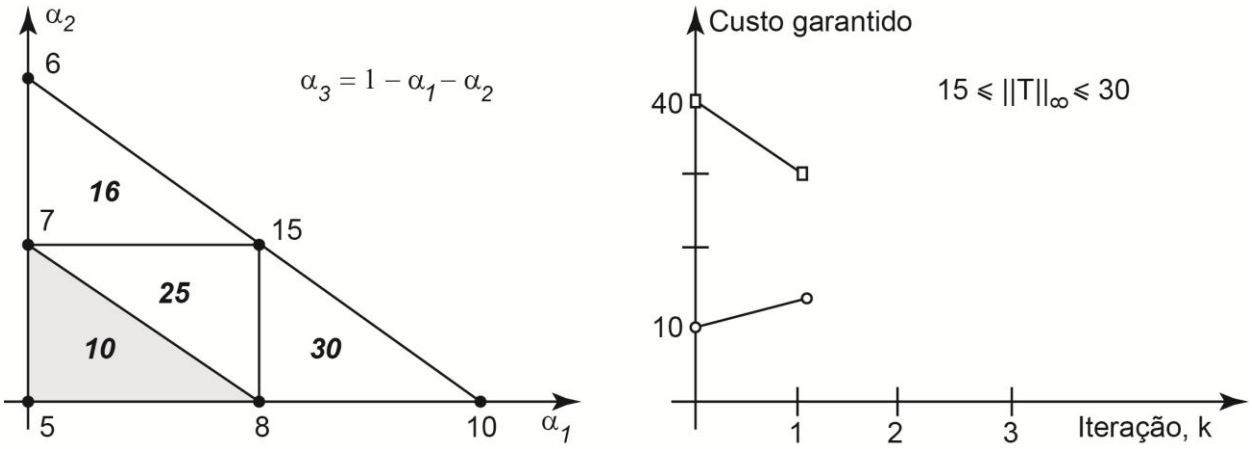


Figura 3. 5: Simulação do algoritmo BnB – Iteração 1

O resultado com a subdivisão do simplex com custo igual a 30 é apresentado na Figura 3.6. São calculadas as normas nos 3 novos vértices e os 4 custos garantidos. O maior valor de custo garantido passa a ser igual a 25 e o maior valor de norma passa a ser igual a 20.

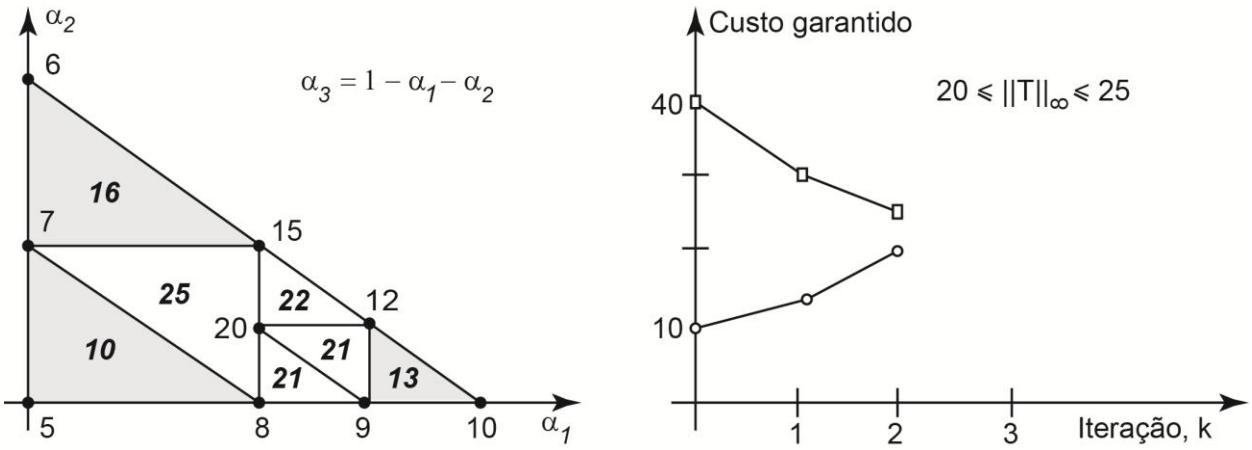


Figura 3. 6: Simulação do algoritmo BnB – Iteração 2

O resultado da subdivisão do simplex com custo garantido 25 é apresentado na figura 3.7. Considerando que a diferença entre o máximo valor de custo garantido para os simplexos e a máximo valor de norma nos vértices atingiu a precisão desejada, o algoritmo BnB é finalizado informando a coordenada do ponto de valor máximo de norma, nesse exemplo, $a^* = [0{,}5 \quad 0{,}25 \quad 0{,}25]^T$. A cada cálculo de norma, é verificado se sistema correspondente ao vértice é um sistema estável, e, em caso contrário, o algoritmo BnB é interrompido informado a coordenada correspondente ao sistema instável para ser acrescentado ao conjunto finito $\tilde{\Omega}$.

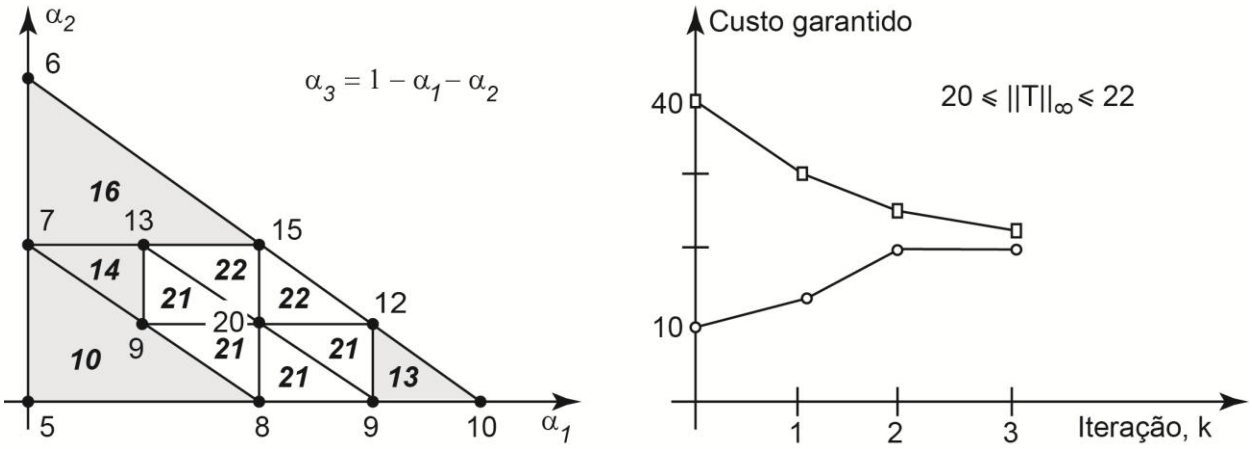


Figura 3. 7: Simulação do algoritmo BnB – Iteração 3.

A necessidade de se dividir o domínio de incerteza na forma de um simplex se deve ao conservadorismo das condições LMI para o cálculo do custo garantido. A condição LMI calcula o valor da norma, com precisão aceitável, apenas para sistemas precisamente conhecidos. É normal o valor do custo garantido ser muito maior que o valor máximo da norma do domínio de incerteza e, em alguns casos, a condição LMI pode não ser factível. A medida que a condição LMI é aplicada para simplexos cada vez menores, ou condições LMI não factíveis passam a ser factíveis, ou os custos garantidos calculados tornam-se cada vez mais precisos considerando que os simplexos tendendo para um ponto fazem com que o custo garantido calculado convirja para o valor da norma nesse ponto. As divisões do simplex continuam a cada iteração até que a diferença relativa entre os limites superior e inferior atinja a precisão desejada.

3.5 Considerações Finais Sobre o Procedimento de Síntese

O procedimento de síntese de controle desacoplador robusto apresentado nesse capítulo, baseado em duas etapas, é difícil de ser implementado, principalmente a etapa de análise, envolvendo conhecimentos em diferentes áreas. Tal dificuldade é devida à complexidade do problema sendo tratado, especialmente com relação ao tratamento de sistemas incertos com modelo politópico, não sendo conhecidas outras soluções que sejam mais simples e eficientes. No caso de sistemas precisamente conhecidos, é necessária somente a primeira etapa que envolve a solução de um problema de otimização não-linear, possivelmente não-convexo, para os quais existem diferentes algoritmos de otimização que podem ser aplicados. Apesar de sua complexidade, tal procedimento tem sido aplicado com sucesso em vários problemas na área de controle robusto.

No próximo capítulo, o procedimento de síntese de controle desacoplador robusto apresentado nesse capítulo é aplicado em exemplos ilustrativos de sistemas multivariáveis, com significativo acoplamento entre as malhas de controle, amplamente considerados na literatura, para demonstrar a eficiência do mesmo.

Capítulo 4 - Exemplo Caso de Sistema Contínuo

4.1 Introdução

O objetivo desse capítulo é aplicar o procedimento de síntese de controle desacoplador, descrito no capítulo 3, a um sistema MIMO contínuo no tempo, bastante estudado na literatura, com o objetivo de investigar a eficiência do mesmo.

4.2 Coluna de Destilação Binária

O processo apresentado na figura 4.1 apresenta o diagrama esquemático de uma coluna de destilação binária usada para separar uma mistura de metanol-água (Wood & Berry, 1973). O refluxo no topo e o fluxo de vapor são as variáveis manipuladas e as composições (percentual de metanol) do topo e da base são as variáveis controladas. O objetivo de controle é manter a composição de metanol em uma dada referência na presença de variações da alimentação de entrada. Esse processo tem sido amplamente considerado para estudos de estratégia de controle PID multi-malhas e controle desacoplador (Aströn, et al., 2002, Zhanga, et al., 2002, Huang, et al., 2003, Lee & Edgar, 2006, Campestrini, et al., 2009, Shen, et al., 2010, Vu & Lee, 2010a, Vu & Lee, 2010b, Kumar, et al., 2012).

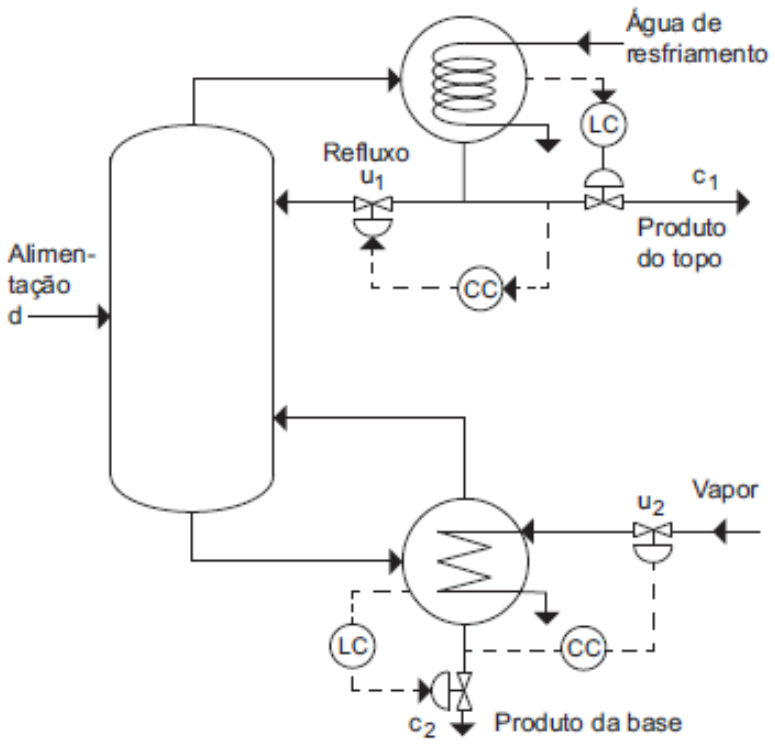


Figura 4. 1: Diagrama esquemático da coluna binária de Wood e Berry

Em Wood and Berry (1973) e Zhanga, et al. (2002), é apresentado um modelo dinâmico simplificado desse processo, considerando variações em torno de um ponto de operação:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{12{,}8e^{-1s}}{\gamma_1 16{,}7s+1} & \dfrac{-18{,}9e^{-3s}}{21{,}0s+1} \\ \dfrac{6{,}6e^{-7s}}{10{,}9s+1} & \dfrac{-19{,}4e^{-3s}}{\gamma_2 14{,}4s+1} \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

$$G_d(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{3{,}8e^{-8s}}{14{,}9s+1} \\ \dfrac{4{,}9e^{-3s}}{13{,}2s+1} \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Sendo $G(s)$ a matriz de transferência relacionando as entradas e as saídas do processo e $G_d(s)$ a matriz de transferência relacionando a perturbação com as saídas da planta. Nesse estudo, é considerado como perturbação a taxa de fluxo de alimentação representado por d na figura 4.1.

Os parâmetros $\gamma_1 \in [0{,}9; 1{,}1]$ e $\gamma_2 \in [0{,}9; 1{,}1]$ na equação (4.1) foram incluídos para representar as incertezas nas constantes de tempo das funções de transferência na diagonal. O domínio de incerteza corresponde a um politopo com quatro vértices. Foi considerada uma realização no espaço de estados de 24ª ordem considerando aproximações de Padé de 3ª ordem dos atrasos:

$$[G(s) \quad G_d(s)] = \begin{bmatrix} A & B_u & B_2 \\ C_z & 0_{2x3} & \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

Na equação (4.3) B_u está relacionado com as entradas do processo e B_2 com a perturbação. É considerado $w = [r_1 \quad r_2 \quad d]^T$, sendo d o distúrbio (fluxo de alimentação), $z = [c_1 \quad c_2]^T$, sendo c_1 e c_2 as composições de topo e fundo, respectivamente e $y = [r_1 \quad r_2 \quad c_1 \quad c_2]^T$, as entradas do controlador desacoplador. As demais matrizes do modelo dinâmico são definidas como $B_w = [0_{nx2} \quad B_2]^T$, $D_{zu} = 0_{2x2}$, $D_{zw} = 0_{2x3}$, $C_y = \begin{bmatrix} 0_{2xn} \\ C_z \end{bmatrix}$, $D_{yw} = \begin{bmatrix} I_2 & 0_{2x1} \\ 0_{2x2} & 0_{2x1} \end{bmatrix}$.

A razão da escolha da aproximação de Padé de 3ª ordem dos atrasos foi a comparação dos resultados de simulação do modelo no espaço de estados e do modelo original.

Os sinais de controle são a vazão de refluxo e a vazão de vapor expressas em lb/min, $u = [u_1 \quad u_2]^T$, é necessário considerar como unidade de tempo padrão o minuto.

A matriz RGA para o processo é calculada como:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 2{,}0094 & -1{,}0094 \\ -1{,}0094 & 2{,}0094 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

Esta matriz RGA indica que a melhor ação de controle é a vazão do refluxo, $u_1(t)$, controlando a composição do produto do topo, $c_1(t)$, e a vazão de vapor, $u_2(t)$, controlando a composição do produto do fundo, $c_2(t)$.

Para o procedimento de síntese, foram adotados os seguintes parâmetros para o algoritmo cone elipsoidal:

$\chi_0 = rand(n, 1)$, sendo n o número de variáveis → variáveis de otimização iniciais
$Q_0 = 10^5 \times I_4$ → elipsóide inicial
$N_\varepsilon = 10$ e $\varepsilon = 0{,}01$ → critérios de parada
$\delta = 1 \times 10^{-8}$ → escalar do método das diferenças finitas (cálculo do gradiente)

As variáveis iniciais de otimização são definidas aleatoriamente, e são diferentes a cada vez que o programa é rodado e os demais parâmetros foram definidos através do método de tentativa e erro.

Caso 1: Controlador I-P

Considere o controlador I-P apresentado pelas matrizes:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 1/T_{i1} & 0 & -1/T_{i1} & 0 \\ 0 & 1/T_{i2} & 0 & -1/T_{i2} \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} K_{p1} & 0 \\ 0 & K_{p2} \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -K_{p1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_{p2} \end{bmatrix}$$

As primeiras quatro variáveis de otimização são definidas como sendo $\chi_1 = k_{p,1}$, $\chi_2 = T_{i,1}$, $\chi_3 = k_{p,2}$ e $\chi_4 = T_{i,2}$. As demais variáveis de otimização serão os elementos do desacoplador com a seguinte estrutura:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \chi_5 & \chi_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_7 & \chi_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_9 & \chi_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_{11} & \chi_{12} \end{bmatrix}$$

$$B_d^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_d = \begin{bmatrix} \chi_{13} & \chi_{14} & \chi_{15} & \chi_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_{17} & \chi_{18} & \chi_{19} & \chi_{20} \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

$$D_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Será considerado inicialmente o problema de otimização (3.1) cujo objetivo é minimizar o erro de aproximação do modelo referência. É considerado o seguinte formato para os elementos da diagonal do modelo de referência:

$$T_{m,i}(s) = \frac{\omega_{n,i}^2 \left(-\frac{\tau_i}{2s} + 1\right)}{\left(\frac{\tau_i}{2s} + 1\right)\left(s^2 + 2\zeta_i \omega_{n,i} s + \omega_{n,i}^2\right)} \tag{4.7}$$

Com $\tau_1 = 1$, $\omega_{n,1} = 0{,}2$, $\zeta_1 = 0{,}9$, $\tau_2 = 3$, $\omega_{n,2} = 0{,}3$ e $\zeta_2 = 0{,}9$, são obtidas as funções de transferência da diagonal do modelo de referência:

$$T_{m,1} = \frac{-0{,}02s + 0{,}04}{0{,}5s^3 1{,}18s^2 0{,}38s + 0{,}04} \tag{4.8}$$

$$T_{m,2} = \frac{-0{,}135s + 0{,}09}{1{,}5s^3 + 1{,}81s^2 + 0{,}675s + 0{,}09} \tag{4.9}$$

Com base nesse modelo de referência apresentado pelas equações (4.8) e (4.9), são obtidos os seguintes parâmetros dos controladores PID: $k_{p,1} = 0{,}9848$, $T_{i,1} = 5{,}2905$, $k_{p,2} = 1{,}2548$ e $T_{i,2} = 3{,}3331$. O desacoplador obtido é representado pelas funções de transferência:

$$\begin{aligned} D_{1,1}(s) &= \frac{6{,}9228(s + 4{,}908)}{(s^2 + 18{,}69s + 151)} \\ D_{1,2}(s) &= \frac{-15{,}848(s - 0{,}8635)}{(s + 326{,}3)(s + 0{,}4252)} \\ D_{2,1}(s) &= \frac{-39{,}793(s + 0{,}2056)}{(s + 652)(s + 0{,}1265)} \\ D_{2,2}(s) &= \frac{-18{,}178(s + 0{,}7186)}{(s^2 + 4{,}124s + 204{,}5)} \end{aligned} \tag{4.10}$$

que resulta no seguinte erro de aproximação: $\max_{\alpha \in \Omega} \|E\|_\infty \leq 0{,}1340$.

O controlador desacoplador obtido com o procedimento proposto é comparado com o controle PI com desacoplador apresentado por Shen et al. (2012). As respostas transitórias obtidas são apresentadas nas figuras 4.2 e 4.3, considerando os sinais de referência tipo degrau unitário, $r_1(t) = 1(t)$, $r_2(t) = 1(t - 150)$ e um sinal de distúrbio tipo pulso, $d(t) = 0{,}5 \times 1(t - 300) - 0{,}5 \times 1(t - 375)$. São apresentadas as respostas em relação aos quatro vértices do politopo.

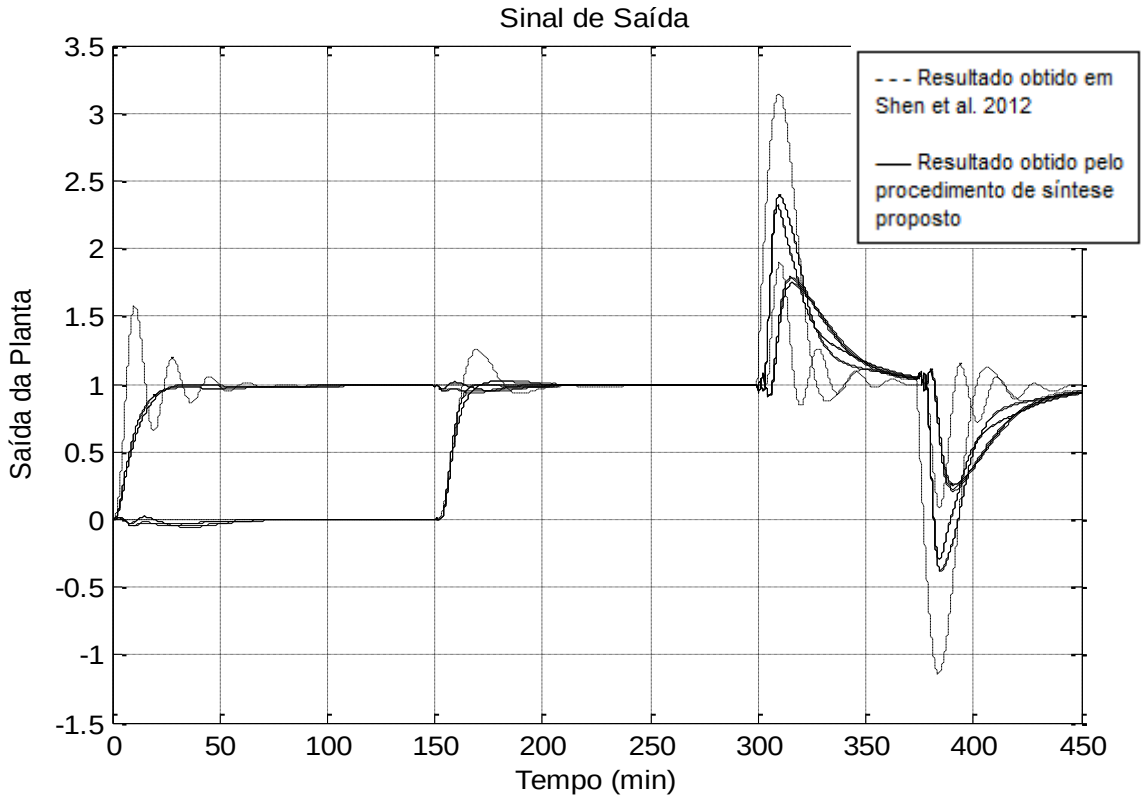


Figura 4. 2: Respostas transitórias das saídas com controlador I-P – Wood e Berry

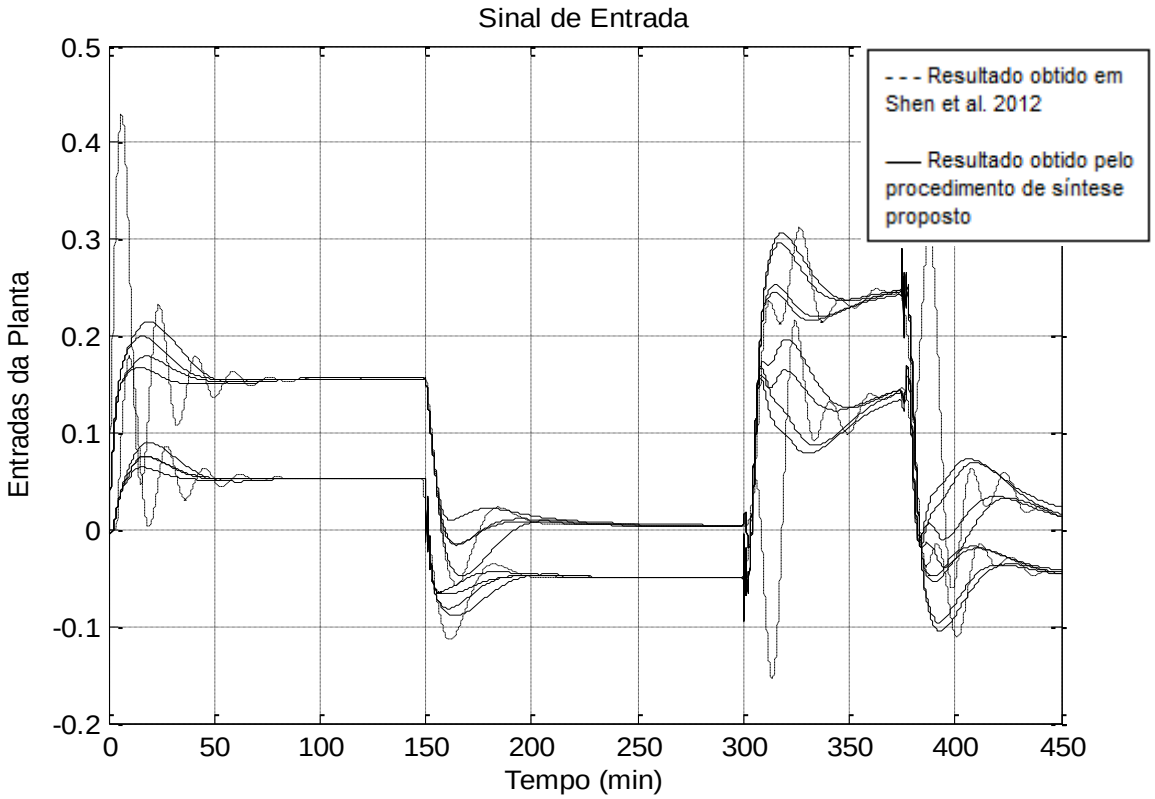


Figura 4. 3: Respostas transitórias das variáveis manipuladas com controlador I-P – Wood e Berry

O controle desacoplador apresentado em Shen, et al., (2012), apresenta um bom desacoplamento mas apresenta uma resposta transitória de rastreamento oscilatória. O controle desacoplador projetado através do procedimento proposto também apresenta um bom desacoplamento, além disso, possui uma resposta transitória mais amortecida, com um menor tempo de acomodação, e pode ser observado pelo gráfico 4.2 um melhor desempenho em relação a perturbação. Pode ser observado pela figura 4.3, que o controle desacoplador proposto apresenta menor esforço de controle do que o resultado em Shen, et al., (2012).

O modelo de referência apresentado em (4.8) e (4.9) é aperfeiçoado com base no modelo reduzido de 4ª ordem das funções de transferência da diagonal da matriz de transferência em malha fechada obtida, $T_{cr}(s)$, que resulta:

$$T_{m,1}(s) = \frac{0{,}006453(s^2 + 0{,}4704s + 0{,}221)(s^2 - 2{,}699s + 2{,}676)}{(s^2 + 0{,}225s + 0{,}01974)(s^2 + 0{,}3135s + 0{,}1934)} \tag{4.11}$$

$$T_{m,2}(s) = \frac{-0{,}010791(s - 1{,}591)(s + 0{,}04922)(s^2 - 2{,}16s + 1{,}951)}{(s + 0{,}1153)(s + 0{,}06029)(s^2 0{,}9405s + 0{,}2373)} \tag{4.12}$$

Com base nesse segundo modelo de referência, apresentado pelas equações (4.11) e (4.12), o procedimento de síntese proposto resultou nos seguintes parâmetros para os controladores PID: $k_{p,1} = 1{,}4247$, $T_{i,1} = 10{,}591$, $k_{p,2} = 1{,}3721$ e $T_{i,2} = 5{,}24$. O desacoplador obtido é representado pelas funções de transferência:

$$\begin{aligned} D_{1,1}(s) &= \frac{72{,}496(s + 0{,}3347)}{(s + 615{,}6)(s + 0{,}07144)} \\ D_{1,2}(s) &= \frac{-17{,}908(s - 0{,}606)}{(s + 553{,}8)(s + 0{,}1056)} \\ D_{2,1}(s) &= \frac{-45{,}126(s + 0{,}1635)}{(s + 749{,}7)(s + 0{,}09027)} \\ D_{2,2}(s) &= \frac{-6{,}0615(s + 1{,}927)}{(s^2 + 1{,}615s + 175{,}5)} \end{aligned} \tag{4.13}$$

garantindo $\max_{\alpha\in\Omega}\|E\|_\infty \leq 0{,}1143$, que é menor que $0{,}1340$ o resultado obtido anteriormente. E possui uma rejeição de distúrbio $\max_{\alpha\in\Omega}\|T_{cd}\|_\infty \leq 2{,}4077$.

As figuras 4.4 e 4.5 apresentam os resultados obtidos devido ao ajuste realizado. Para esse caso não foi observado uma melhoria significativa na tentativa de melhoria do modelo de referência obtido inicialmente por tentativa e erro.

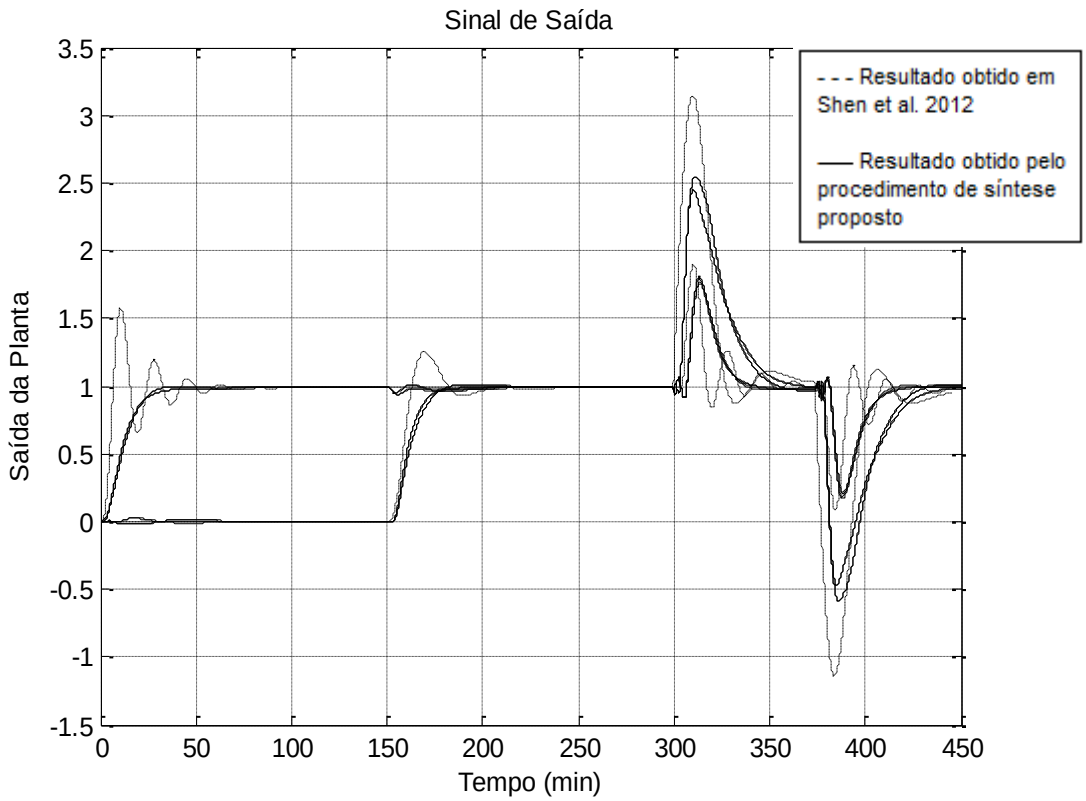


Figura 4. 4: Respostas transitórias das saídas com controlador I-P 2 – Wood e Berry

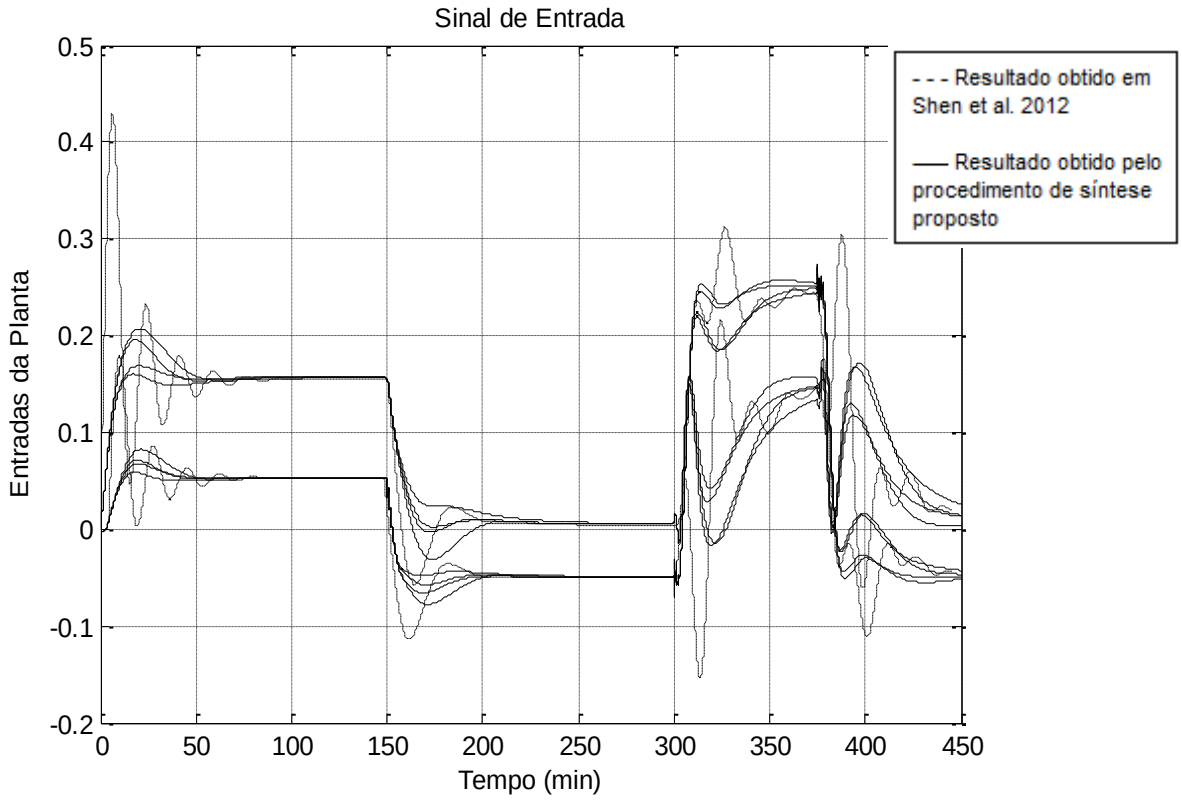


Figura 4. 5: Respostas transitórias das variáveis manipuladas com controlador I-P 2 – Wood e Berry

Foi realizado um novo teste na tentativa de diminuir o erro de aproximação redefinindo o modelo de referência, para alterar a resposta transitória da saída 1, com os valores: $\tau_1 = 1$, $\omega_{n,1} = 0{,}15$, $\zeta_1 = 0{,}8$, $\tau_2 = 3$, $\omega_{n,2} = 0{,}2$ e $\zeta_2 = 0{,}9$. A partir da função de transferência em malha fechada obtida, o modelo foi redefinido através de uma aproximação de 4ª ordem, sendo dado por:

$$T_{m,1} = \frac{0{,}006453s^4 - 0{,}01438s^3 + 0{,}0105s^2 + 0{,}004274s + 0{,}003816}{(s^4 + 0{,}5385s^3 + 0{,}2837s^2 + 0{,}0497s + 0{,}003818)} \tag{4.14}$$

$$T_{m,2} = \frac{-0{,}01079s^4 + 0{,}03995s^3 - 0{,}05614s^2 + 0{,}03063s + 0{,}001649}{(s^4 + 1{,}116s^3 + 0{,}4094s^2 + 0{,}04821s + 0{,}00165)} \tag{4.15}$$

O controlador obtido por esse sistema é definido por:

$$D_{1,1}(s) = \frac{71{,}877(s + 0{,}3384)}{(s + 588{,}3)(s + 0{,}07575)}$$

$$D_{1,2}(s) = \frac{-15{,}832(s - 0{,}7467)}{(s + 593)(s + 0{,}1036)}$$

$$D_{2,1}(s) = \frac{-42{,}44(s + 0{,}1899)}{(s + 698)(s + 0{,}105)} \tag{4.16}$$

$$D_{2,2}(s) = \frac{-8{,}1037(s + 1{,}627)}{(s^2 + 13{,}24s + 186{,}9)}$$

que garante $\max_{\alpha\in\Omega}\|E\|_\infty \leq 0{,}1144$. Como os valores obtidos por esse modelo de referência são similares aos valores anteriores, o comportamento gráfico é exatamente o mesmo, sendo desnecessária a representação.

Para melhorar a rejeição de distúrbio do sistema, é considerado agora o problema de otimização (3.2) cujo objetivo é minimizar o efeito da perturbação garantindo um erro mínimo de aproximação do modelo de referencia. Considerando o modelo de referência com as funções da diagonal (4.11) e (4.12) e a restrição no erro de aproximação dada por: $\epsilon_m = 0{,}25$, são obtidos os seguintes parâmetros dos controladores PID: $k_{p,1} = 1{,}3146$, $T_{i,1} = 8{,}4269$, $k_{p,2} = 1{,}8364$ e $T_{i,2} = 6{,}0298$. As funções de transferência do desacoplador encontrado são descritas :

$$D_{1,1}(s) = \frac{23{,}839(s + 1{,}823)}{(s^2 + 19{,}63s + 129{,}6)}$$

$$D_{1,2}(s) = \frac{-23{,}063(s - 0{,}7245)}{(s + 244{,}2)(s + 0{,}3743)}$$

$$D_{2,1}(s) = \frac{-12{,}256(s + 0{,}4618)}{(s + 353{,}5)(s + 0{,}1389)} \tag{4.17}$$

$$D_{2,2}(s) = \frac{-33{,}275(s + 0{,}492)}{(s^2 + 6{,}9s + 224{,}9)}$$

garantido $\max_{\alpha\in\Omega}\|E\|_\infty \leq 0{,}248$, que é bastante próximo ao valor especificado por ϵ_m. E uma rejeição de distúrbio $\max_{\alpha\in\Omega}\|T_{cd}\|_\infty \leq 1{,}2955$ que é um valor muito menor que o obtido pelo modelo (4.11) e (4.12).

As figuras 4.6 e 4.7 apresentam o desempenho do sistema.

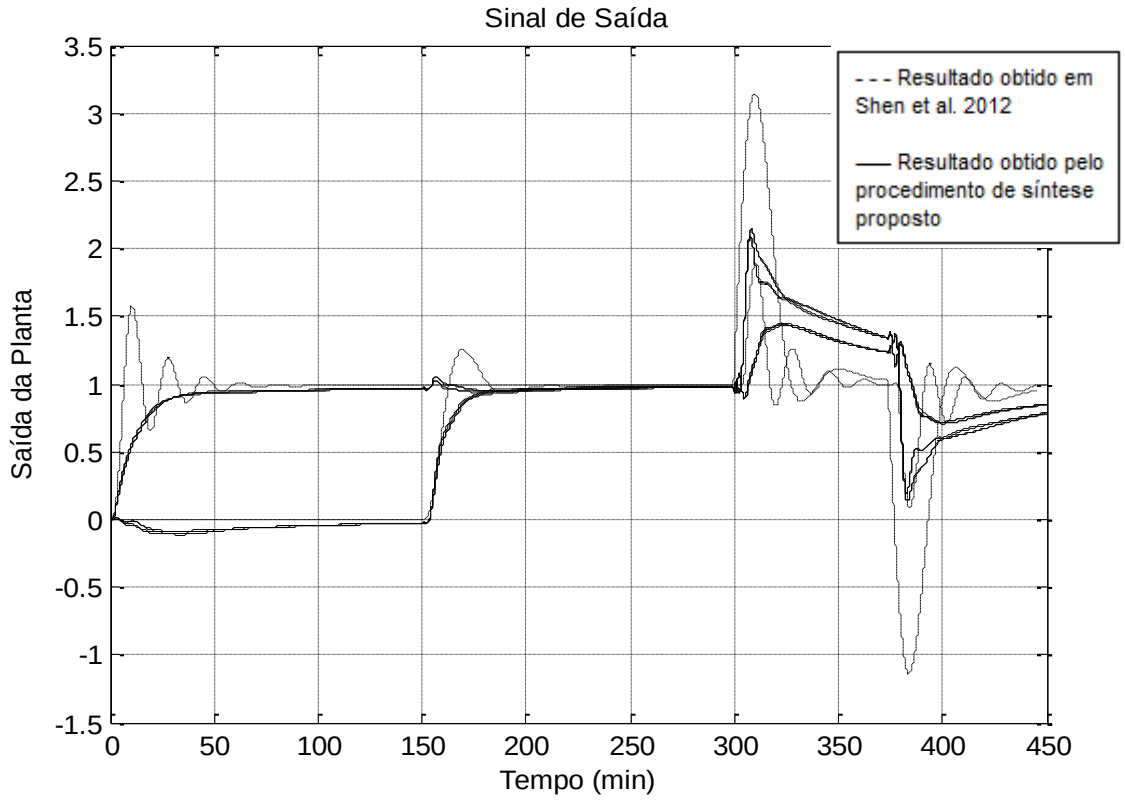


Figura 4. 6: Respostas transitórias das saídas com controlador I-P para $\epsilon_m = 0,25$ – Wood e Berry

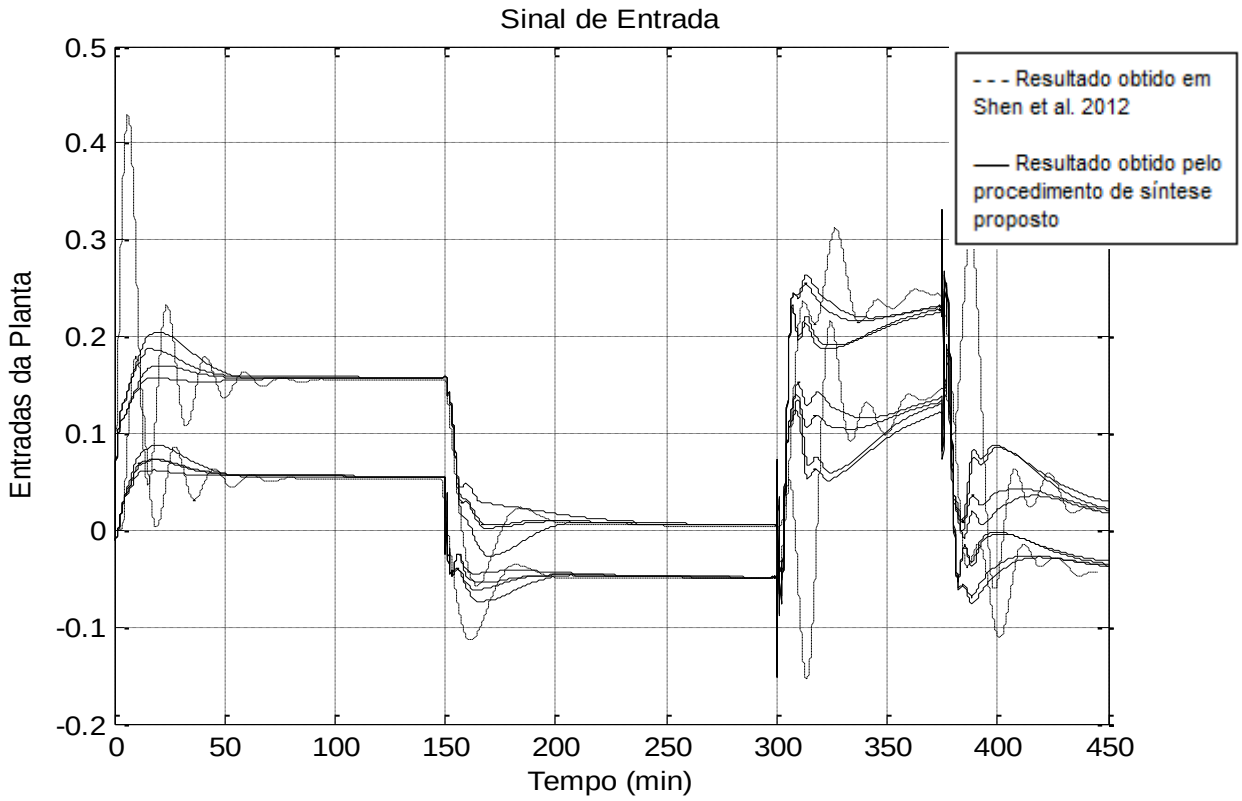


Figura 4. 7: Respostas transitórias das variáveis manipuladas com controlador I-P para $\epsilon_m = 0,25$ – Wood e Berry

As figuras 4.8 e 4.9 apresentam a comparação entre os resultados dos casos dos dois piores vértices dos politopo, comparando as duas formas de otimização propostas nesse capítulo.

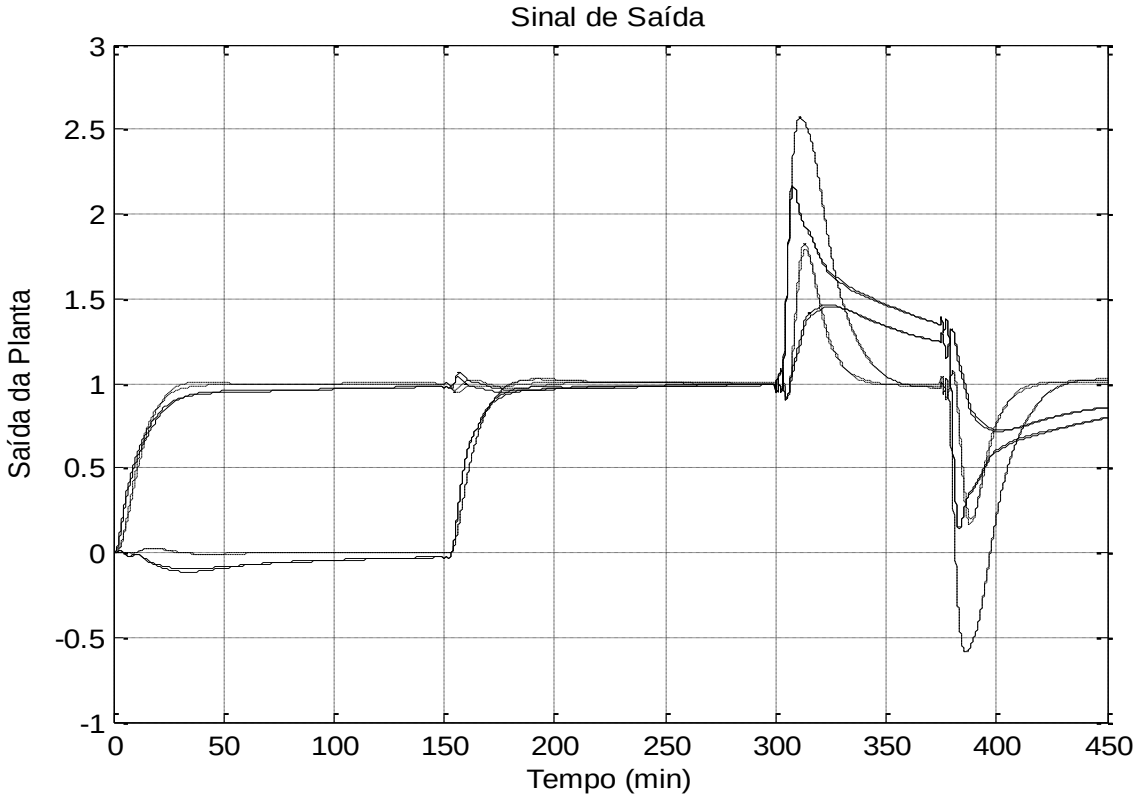


Figura 4. 8: Respostas transitórias das saídas do processo comparando o controle desacoplador para minimizar o erro de aproximação e para minimizar a rejeição de distúrbio

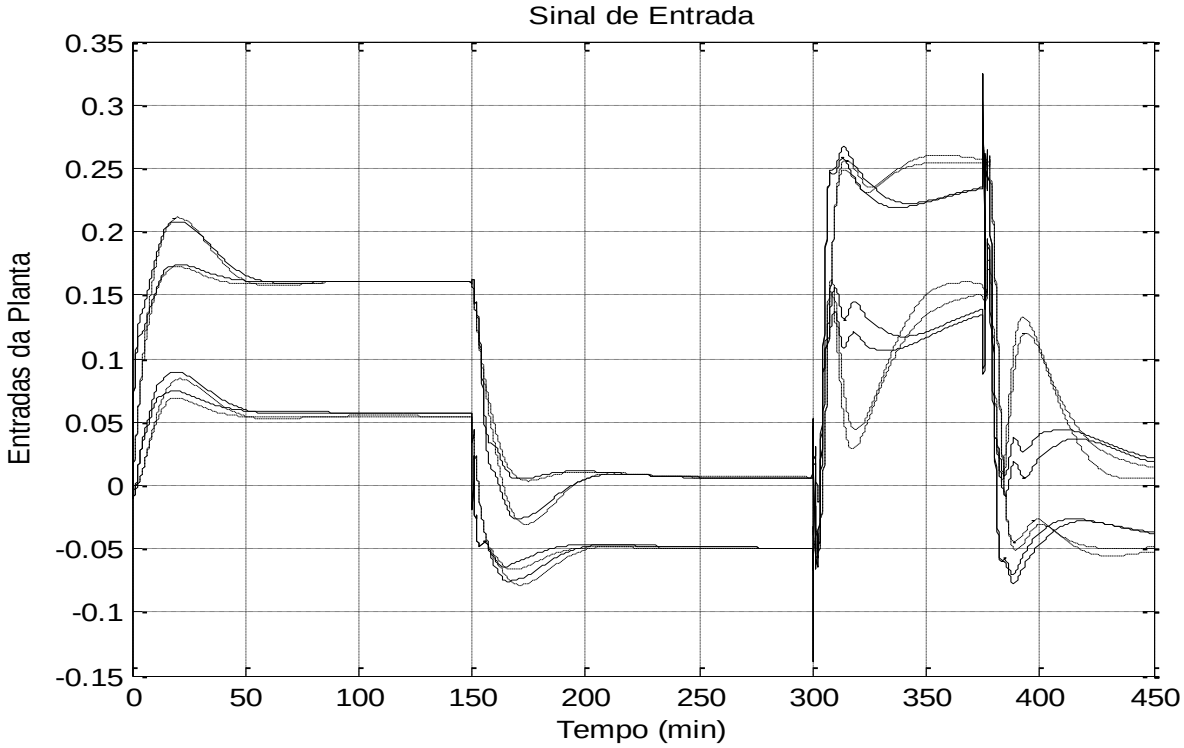


Figura 4. 9: Respostas transitórias das variáveis manipuladas comparando o controle desacoplador para minimizar o erro de aproximação e para minimizar a rejeição de distúrbio

Apesar de graficamente não ficar tão clara a diferença entre os dois meios de otimização utilizados, quando opta por minimizar a rejeição de distúrbio, o esforço de controle é pouco menor, visto que a variação do sinal entre $t = 300\,min$ e $t = 400\,min$ da figura 4.9 a linha contínua é menor que da linha pontilhada. O desacoplamento do sistema pode ser visto pela figura 4.8, em $t = 0\,min$ onde existe uma pequena variação do sinal do produto da base quando trabalha-se o com o produto do topo, e uma demora maior para estabilizar até o tempo $t = 150\,min$ onde é inserido um sinal de referência para o produto da base, e o produto do topo possui uma pequena reação. Cabe ao projetista do controlador avaliar o melhor caso para o desempenho desejado.

Caso 2: Controlador PID

Outro teste foi realizado considerando agora um controlador PID, conforme apresentado na equação:

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} \frac{T}{T_{i,1}} & 0 & -\frac{T}{T_{i,1}} & 0 \\ b\frac{T_{d,1}}{T} & 0 & -\frac{T_{d,1}}{T} & 0 \\ 0 & \frac{T}{T_{i,2}} & 0 & -\frac{T}{T_{i,2}} \\ b\frac{T_{d,2}}{T} & 0 & -b\frac{T_{d,2}}{T} & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} k_{p,1} & -k_{p,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{p,2} & -k_{p,2} \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} k_{p,1}\left(a + \frac{T}{2T_{i,1}} + b\frac{T_{d,1}}{T}\right) & 0 & -k_{p,1}\left(1 + \frac{T}{2T_{i,2}} + \frac{T_{d,1}}{T}\right) & 0 \\ 0 & k_{p,2}\left(a + \frac{T}{2T_{i,2}} + b\frac{T_{d,2}}{T}\right) & 0 & -k_{p,2}\left(1 + \frac{T}{2T_{i,2}} + \frac{T_{d,2}}{T}\right) \end{bmatrix}$$

Alguns modelos de desacoplador foram considerados para esse problema, mas nenhum dos testes resultou num sistema estável, dessa forma não foi possível realizar o cálculo do desacoplador considerando um controlador PID.

4.3 Considerações Finais

Nesse capítulo, o procedimento de síntese de controle desacoplador foi aplicado para um sistema MIMO contínuo no tempo. Foram realizados vários testes, e a metodologia de aproximação de modelo de referência para cálculo do controle desacoplador foi eficiente para atender aos objetivos de desacoplar as malhas de controle e determinar as características da resposta transitória de rastreamento. Considerando o teste realizado com o problema de otimização para minimizar a rejeição de distúrbio garantindo o valor máximo do erro de aproximação, foi verificado que tal formulação permite obter diferentes compromissos entre a resposta de rastreamento, o desacoplamento das malhas e a rejeição a distúrbios.

A vantagem do procedimento proposto quando comparado com o outro procedimento disponível na literatura considerado nesse estudo, é obter a resposta transitória desejada, com um esforço de controle consideravelmente menor e uma rejeição de distúrbio maior. Além disso, o procedimento de síntese proposto garante a estabilidade e o desempenho robusto para todos os sistemas no domínio de incertezas.

No próximo capítulo, o procedimento de síntese, apresentado no capítulo 3 para sistemas contínuos no tempo, será aplicado a um sistema discreto no tempo.

Capítulo 5 - Exemplo Caso de Sistema Discreto

5.1 Introdução

Apesar da descrição do procedimento de síntese de controle desacoplador robusto, apresentado no Capítulo 3, ter sido para sistemas contínuos no tempo, a adequação do mesmo para tratar sistemas discretos no tempo é direta. Basicamente o que é modificado é a representação no espaço de estados dos controladores PID como será visto no exemplo apresentado nesse capítulo. Conforme descrito na seção 3.4 também é necessário escolher as formulações de análise LMI adequadas para os sistemas discretos.

5.2 Sistema de Controle de Nível de Quatro Tanques

A proposta de síntese de controlador desacoplador robusto é avaliada considerando o processo de quatro tanques, apresentado pela figura 5.1. Esse é um processo desenvolvido num laboratório que possui um zero ajustável, descrito em Johansson (2000), onde é possível ter o sistema operando em fase mínima e fase não mínima. Esse processo é amplamente utilizado para ilustrar os problemas existentes nos sistemas de controle multivariável (Garelli, et al., 2006; Mahdi Alavi, et al., 2007; Moaveni & Khaki-Sedigh, 2008; Bianchi, et al., 2008; Gundes, et al., 2009; Jevtovíc & Matausek, 2010; Garrido, et al., 2011; Liu, et al., 2011; Alipouri & Poshtan, 2013; Caponetton & Dongola, 2013).

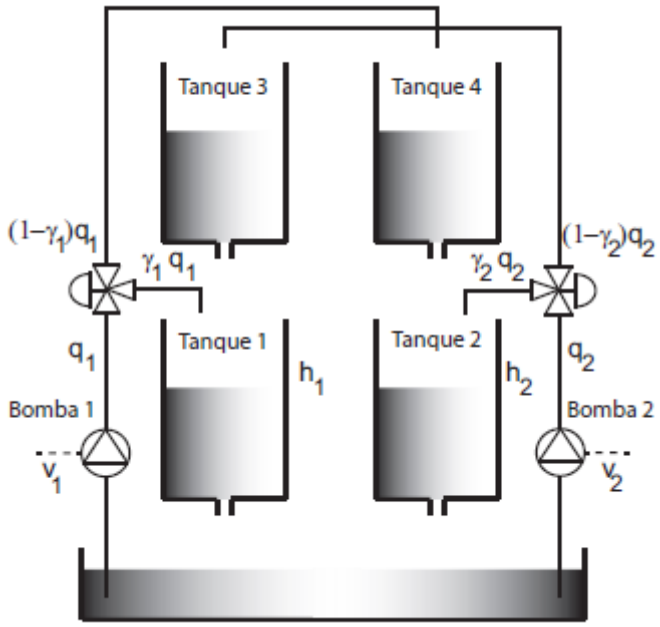


Figura 5. 1: Processo de quatro tanques

O processo de quatro tanques apresentado possui o seguinte funcionamento: os dois tanques inferiores possuem os níveis $(h_1\ e\ h_2)$ controlados por duas bombas. A configuração das válvulas de três vias estabelece a relação entre as malhas de controle existentes. A válvula de três vias 1 determina, pela configuração do parâmetro γ_1, qual o percentual de água da bomba 1 que vai para o tanque 1 e tanque 4. Da mesma forma, o parâmetro γ_2 determina a distribuição da água da bomba 2 pelos tanques 2 e 3. Considerando os desvios em torno de um ponto de operação, e que todas as entradas e saídas são sinais de tensão, o processo de quatro tanques pode ser representado pelo modelo em espaço de estados linearizado (Johansson, 2000):

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & \frac{A_3}{A_1 T_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & 0 & \frac{A_4}{A_2 T_4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_4} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} \\ \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} & 0 \\ \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3} & 0 \\ 0 & \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4} \end{bmatrix} u$$

$$z = \begin{bmatrix} k_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_c & 0 & 0 \end{bmatrix} x \tag{5.1}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_c & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w$$

sendo as variáveis de estado os desvios dos níveis dos quatro tanques, $x_i = h_i - h_i^0$, $i = 1{,}4$; o vetor de controle o desvio de tensão das duas bombas, $u \triangleq [v_2 - v_2^0 \quad v_1 - v_1^0]^T$; as entradas exógenas são os sinais de referência, $w = [r_1 \quad r_2]^T$; as variáveis controladas são os sinais de nível medidos nos tanques 1 e 2, $z_j = k_c(h_j - h_j^0)$, com $j = 1{,}2$, e k_c o ganho do sensor; as variáveis medidas os sinais de referência e os sinais dos níveis medidos, $y = [r_1 \quad r_2 \quad z_1 \quad z_2]^T$. As constantes de tempo de cada tanque são dadas por:

$$T_i \triangleq \frac{A_i}{a_i}\sqrt{\frac{2h_i^0}{g}}, \qquad i = 1, \dots, 4. \tag{5.2}$$

Os parâmetros do modelo linear são dados pelos valores (Johansson, 2000): seção transversal do tanque $A_1 = A_3 = 28cm^2$, $A_2 = A_4 = 32cm^2$; seção transversal dos orifícios de saída $a_1 = a_3 = 0{,}071cm^2$, $a_2 = a_4 = 0{,}057cm^2$; ganho do sensor $k_c = 0{,}50\, V/cm$; e aceleração da gravidade $g = 981\, cm/s^2$. São apresentados dois pontos de operação P- e P+, que representam características do sistema em fase mínima e fase não mínima conforme apresentado na tabela 5.1.

Tabela 5. 1: Parâmetros do tanque para os pontos de operação

		P_-	P_+
(h_1^0, h_2^0)	$[cm]$	$(12{,}4; 12{,}7)$	$(12{,}6; 13{,}0)$
(h_3^0, h_4^0)	$[cm]$	$(1{,}8; 1{,}4)$	$(4{,}8; 4{,}9)$
(v_1^0, v_2^0)	$[V]$	$(3{,}0; 3{,}0)$	$(3{,}15; 3{,}15)$
(k_1, k_2)	$[cm^3/Vs]$	$(3{,}33; 3{,}35)$	$(3{,}14; 3{,}29)$
(γ_1, γ_2)		$(0{,}70; 0{,}60)$	$(0{,}43; 0{,}34)$
(T_1, T_2)		$(62; 90)$	$63; 91$
(T_3, T_4)		$(23; 30)$	$(39; 56)$

Os fluxos de entrada dos tanques são estabelecidos em função dos coeficientes das bombas (k_1 e k_2) e dos coeficientes das válvulas de três vias (γ_1 e γ_2). Para trabalhar com o sistema no tempo discreto, como a equação original do problema é em tempo contínuo, foi utilizada a função $c2d$ do MATLAB®, que discretiza a função com um período T_s.

O sistema no ponto de operação de fase não mínima possui o controle mais difícil de ser realizado quando comparado ao sistema de fase mínima devido às limitações causadas pela a presença de zero no semi-plano direito, o que faz ser necessário a escolha de um modelo de referência que possua respostas transitórias mais lentas.

O ponto de operação de fase não mínima pode ser desacoplado satisfatoriamente pelo controlador PI descentralizado (Gonçalves, et al., 2012). O ponto de operação de fase não mínima é mais difícil de desacoplar, e esse que será considerado nesse trabalho, considerando o caso discreto e com incertezas.

A matriz RGA para o ponto de operação de fase não mínima do sistema é definida por:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -0{,}636 & 1{,}635 \\ 1{,}635 & -0{,}635 \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

No caso do ponto de operação de fase não mínima, é melhor aplicar o controle na bomba 1 para o controle do nível no tanque 2 e a bomba 2 para o controle do nível do tanque 1. O vetor do sinal de controle é alterado em relação ao apresentado por Johansson (2000) para obter um melhor emparelhamento.

É considerado como parâmetros incertos o inverso das constantes de tempo do sistema dadas por: T_1 e T_2, com uma variação $\pm 10\%$. O sistema será representado um modelo politópico com 4 vértices correspondentes à combinação dos valores superiores e inferiores dos 2 parâmetros incertos.

Para o procedimento de síntese, foram adotados os seguintes parâmetros para o algoritmo cone elipsoidal possui os parâmetros definidos conforme segue:

$\chi_0 = rand(n, 1)$, onde n é o número de variáveis → variáveis de otimização iniciais
$Q_0 = 10^5 \times I_4$ → elipsóide inicial
$N_\varepsilon = 10$ e $\varepsilon = 0{,}01$ → critérios de parada
$\delta = 1 \times 10^{-8}$ → escalar do método das diferenças finitas (cálculo do gradiente)

As variáveis iniciais de otimização (χ_0) são definidas aleatoriamente pela função $rand$ do MATLAB®, e são diferentes a cada vez que o programa é rodado, e os demais parâmetros foram definidos através do método de tentativa e erro.

A escolha do modelo de referência é realizada através do método de tentativa e erro, com o objetivo de obter um bom compromisso entre o desacoplamento e desempenho da resposta de rastreamento. Primeiro o modelo de referência é escolhido e ajustado para atingir o desempenho desejado da resposta de rastreamento. Se o pior caso do erro de aproximação, $\max_{\alpha \in \Omega} \|E(z)\|_\infty$, é alto, resultando em um desacoplamento não satisfatório, o modelo de referência deve ser ajustado para reduzir $\max_{\alpha \in \Omega} \|E(z)\|_\infty$, aumentando o desacoplamento. Para ajustar o modelo de referência

é necessário escolher os elementos da diagonal para reproduzir as respostas do transitório do sistema em malha fechada obtidas com o modelo de referência anterior. Nesse caso específico é interessante incluir uma aproximação de Padé de primeira ordem com atraso de tempo no modelo de referência final, para alcançar um melhor compromisso entre os objetivos:

$$T_{m,i}(s) = \frac{\omega_{n,i}^2(-\tau_i s + 1)}{(\tau_i s + 1)\left(s^2 + 2\zeta_i \omega_{n,i} s + \omega_{n,i}^2\right)}, \quad i = 1,2 \tag{5.4}$$

Caso 1: Controlador I-P

Considere $\tau_1 = 50$; $\omega_{n,1} = 0{,}02$; $\zeta_1 = 4$; $\tau_2 = 50$; $\omega_{n,2} = 0{,}01$ e $\zeta_2 = 3$. O tempo de amostragem $T_s = 2{,}5s$ tem-se então:

$$T_{m,1}(z) = \frac{-0{,}0001061z^2 + 0{,}0002172z + 0{,}0009445}{z^3 - 2{,}619z^2 + 2{,}257z - 0{,}6376}$$

$$T_{m,2} = \frac{-0{,}0002875z^2 + 3{,}775 \times 10^{-5}z + 0{,}0002781}{z^3 - 2{,}881z^2 + 2{,}63z - 0{,}8167} \tag{5.5}$$

Será considerado o problema de otimização (3.1) cujo objetivo é minimizar o erro de aproximação do modelo referência. O controlador multi-malhas I-P ($a = 0$), ação proporcional somente na realimentação, com duas malhas de controle, representado no espaço de estados por:

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} \frac{T}{T_{i,1}} & 0 & -\frac{T}{T_{i,1}} & 0 \\ 0 & \frac{T}{T_{i,2}} & 0 & -\frac{T}{T_{i,2}} \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} k_{p,1} & 0 \\ 0 & k_{p,2} \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} k_{p,1}\left(a + \frac{T}{2T_{i,1}}\right) & 0 & -k_{p,1}\left(1 + \frac{T}{2T_{i,2}}\right) & 0 \\ 0 & k_{p,2}\left(a + \frac{T}{2T_{i,2}}\right) & 0 & -k_{p,2}\left(1 + \frac{T}{2T_{i,2}}\right) \end{bmatrix}$$

Os parâmetros dos controladores I-P são os quatro primeiros elementos do vetor de otimização, $\chi_1 = k_{p,1}$, $\chi_2 = T/T_{i,1}$, $\chi_3 = k_{p,2}$ e $\chi_4 = T/T_{i,2}$, e a estrutura do desacoplador pré-compensador com os demais parâmetros de otimização, é dada por:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \chi_5 & \chi_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_7 & \chi_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_9 & \chi_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_{11} & \chi_{12} \end{bmatrix}$$

$$B_d^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_d = \begin{bmatrix} \chi_{13} & 0 & \chi_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_{15} & 0 & \chi_{16} & 0 \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

$$D_d = \begin{bmatrix} \chi_{17} & \chi_{18} \\ \chi_{19} & \chi_{20} \end{bmatrix}$$

Após a resolução do problema de otimização (3.1), são alcançados os seguintes valores: $k_{p,1} = 0{,}0075$, $T_{i,1} = 106{,}8922$, $k_{p,2} = 0{,}01$ e $T_{i,2} = 209{,}5709$, e o desacoplador pré-compensador, com a estrutura apresentada pela equação (5.7), com os valores:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}8344 & 1{,}3856 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}7463 & 1{,}3094 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}6625 & 1{,}1803 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}4123 & 0{,}975 \end{bmatrix}$$

$$B_d^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_d = \begin{bmatrix} -95{,}7776 & 0 & 142{,}3453 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 134{,}729 & 0 & -78{,}4152 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

$$D_d = \begin{bmatrix} 237{,}1099 & -342{,}4632 \\ -293{,}8029 & 206{,}3433 \end{bmatrix}$$

Que correspondem às funções de transferência:

$$D_{1,1}(z) = \frac{237{,}11(z-0{,}4703)(z-0{,}9152)}{(z^2-1{,}386z+0{,}8344)}$$

$$D_{1,2}(z) = \frac{-293{,}8(z-0{,}2102)(z-0{,}9701)}{(z^2-1{,}18z+0{,}6625)}$$

$$D_{2,1}(z) = \frac{-342{,}46(z-0{,}3416)(z-0{,}9979)}{(z^2-1{,}309z+0{,}7463)} \tag{5.9}$$

$$D_{2,2}(z) = \frac{206{,}34(z-0{,}03426)(z-0{,}9407)}{(z^2-0{,}975z+0{,}4123)}$$

Esse controle desacoplador resulta no erro de aproximação máximo de $\max_{\alpha\in\Omega}\|E(z)\|_\infty = 0{,}0561$.

Para verificar o desacoplamento do controle desacoplador robusto obtido, o sistema é simulado com mudanças a degrau dos sinais de referência para verificar o comportamento e a resposta do sistema, $r_1(t) = 1(t)$, $r_2(t) = 1(t-400)$, sendo $(t-\tau)$ a função degrau unitário deslocada por τ. A resposta transitória da saída da planta e as variáveis manipuladas são representadas nas figuras 5.2 e 5.3 respectivamente:

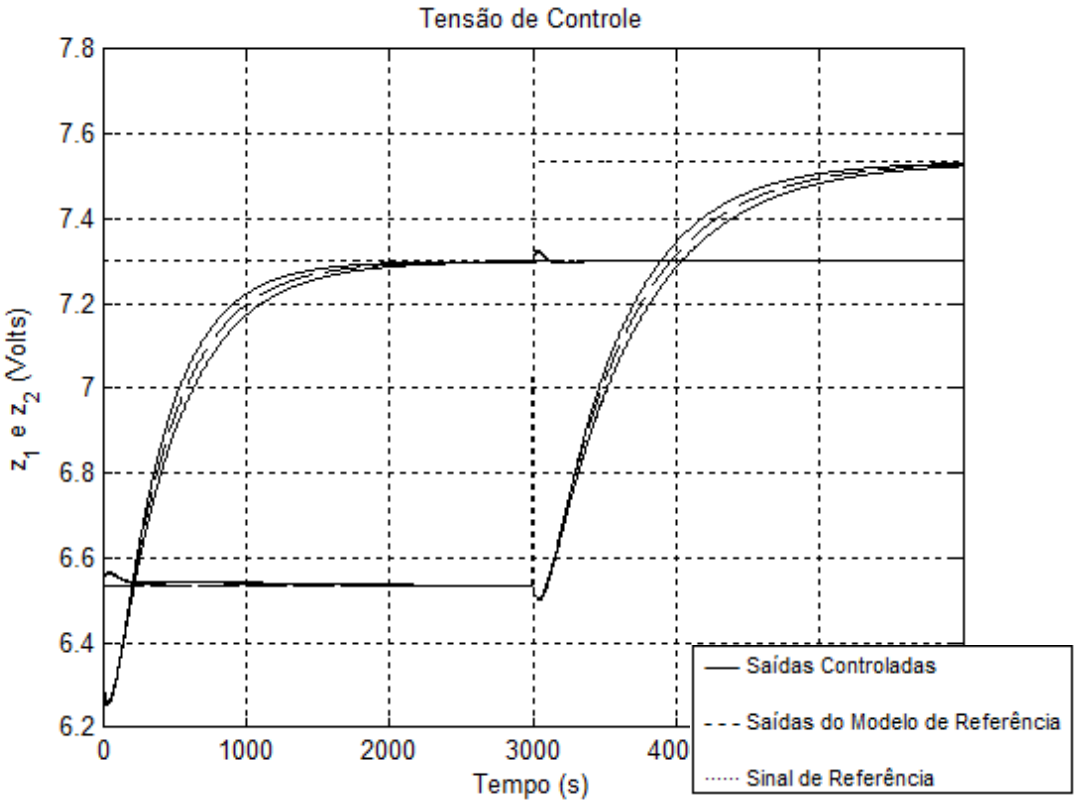


Figura 5. 2: Resposta transitória das saídas controladas para o sistema 4 tanques considerando o controlador I-P

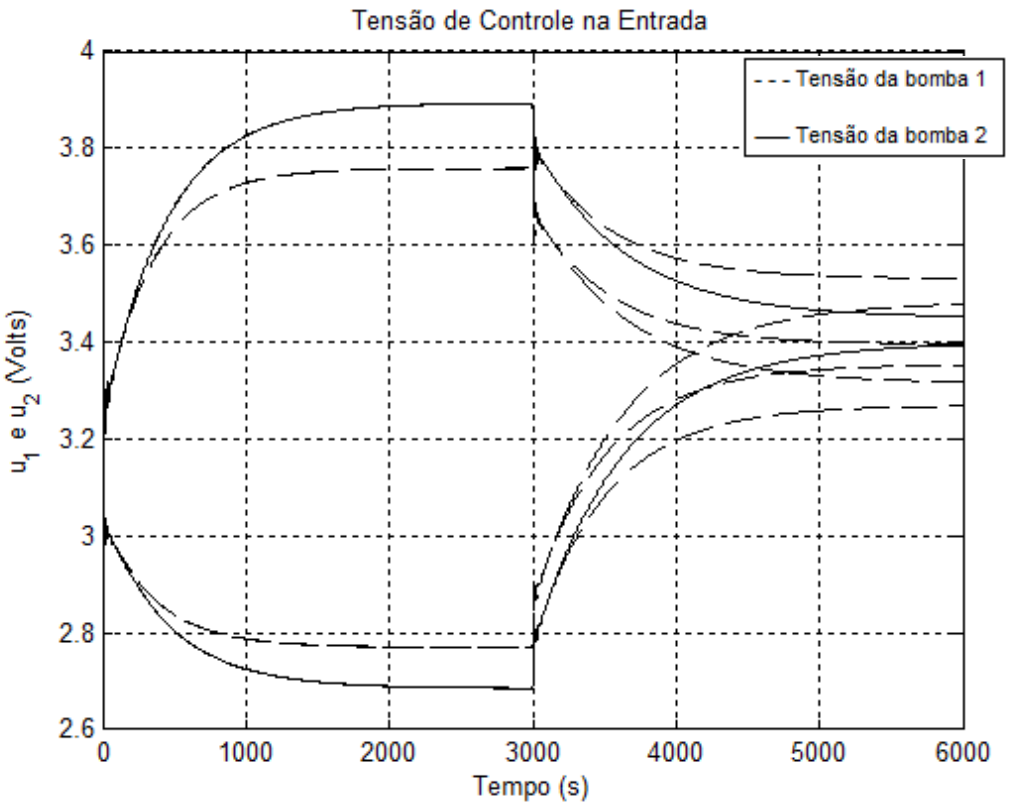


Figura 5. 3: Resposta transitória da tensão das bombas para o sistema 4 tanques considerando o controlador I-P

É perceptível na figura 5.2 que, devido à escolha do modelo de referência com a estrutura diagonal, o controlador robusto desacoplado melhora significativamente o desacoplamento entre as malhas de controle do sistema. Uma vez que o erro associado ao modelo é pequeno, ambas as respostas de rastreamento são similares às respostas do modelo de referência específico para os 4 vértices do politopo definido. Apesar do atraso no tempo introduzido na resposta transitória, podem ser consideradas que ambas as respostas de rastreamento são melhoradas quando comparadas aos resultados existentes na literatura (Johansson, 2002) e (Aström, et al., 2002). A figura 5.3 mostra que não é necessário um alto esforço de controle para alcançar a resposta de rastreamento melhorada. Existe um compromisso na escolha do modelo de referência. Os modelos de referência com resposta transitória rápida resultam em erros de aproximação mais elevados, e consequentemente, uma maior interação entre as malhas de controle. As interações podem ainda ser reduzidas com a escolha do modelo de referência que possuem respostas transitórias mais lentas.

A fim de demonstrar que o desacoplamento do pré-compensador é necessário para alcançar o nível de desacoplamento e o desempenho da resposta transitória desejados, o procedimento proposto é aplicado para calcular somente o controlador I-P multi-malhas sem o desacoplador pré-compensador. A figura 5.4 apresenta os resultados obtidos.

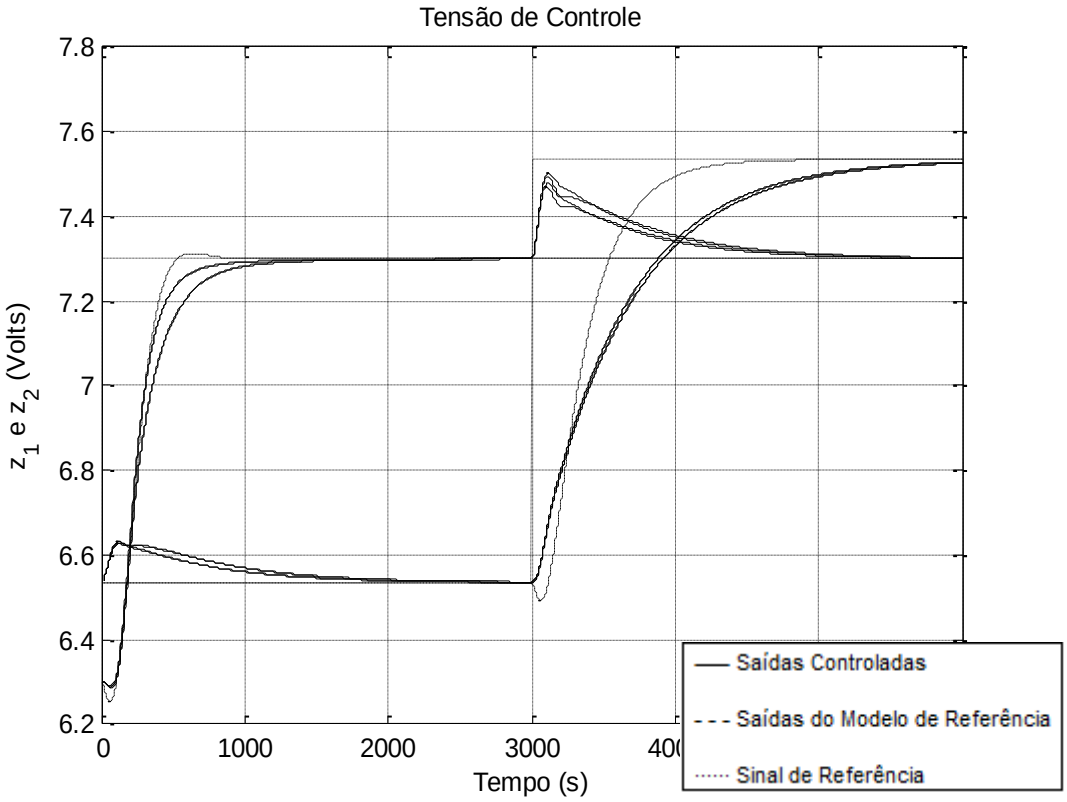


Figura 5. 4: Resposta transitória das saídas controladas para o sistema 4 tanques considerando o controlador I-P sem desacoplador

São obtidos os seguintes valores: $k_{p,1} = 0{,}2594$, $T_{i,1} = 0{,}0118$, $k_{p,2} = 2{,}7439$ e $T_{i,2} = 0{,}002$ com erro de aproximação de $\max_{\alpha\in\Omega}\|E(z)\|_\infty = 0{,}38379$. Apesar do resultado sem o desacoplador garantir um erro de aproximação baixo, existe uma diferença significativa quando comparado com o resultado obtido pelo controlador com desacoplador pré-compensador, justificando o uso do mesmo apesar da complexidade para implementação do sistema de controle.

Caso 2: Controlador PID

Para verificar qual tipo de controlador é mais adequado para o problema considerado, o segundo caso estudado considera a síntese de um controlador PID com desacoplador para o sistema com as mesmas características e o mesmo ponto de operação do apresentado no caso 1.

Seja um controlador multi-malhas PID $(a = 0 \; e \; b = 0)$, representado no espaço de estados por:

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} \frac{T}{T_{i,1}} & 0 & -\frac{T}{T_{i,1}} & 0 \\ b\frac{T_{d,1}}{T} & 0 & -\frac{T_{d,1}}{T} & 0 \\ 0 & \frac{T}{T_{i,2}} & 0 & -\frac{T}{T_{i,2}} \\ b\frac{T_{d,2}}{T} & 0 & -b\frac{T_{d,2}}{T} & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} k_{p,1} & -k_{p,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{p,2} & -k_{p,2} \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} k_{p,1}\left(a + \frac{T}{2T_{i,1}} + b\frac{T_{d,1}}{T}\right) & 0 & -k_{p,1}\left(1 + \frac{T}{2T_{i,2}} + \frac{T_{d,1}}{T}\right) & 0 \\ 0 & k_{p,2}\left(a + \frac{T}{2T_{i,2}} + b\frac{T_{d,2}}{T}\right) & 0 & -k_{p,2}\left(1 + \frac{T}{2T_{i,2}} + \frac{T_{d,2}}{T}\right) \end{bmatrix}$$

Aplicando o procedimento para calcular o controladores PID multi-malhas, $\chi_1 = k_{p,1}$, $\chi_2 = T/T_{i,1}$, $\chi_3 = T_{d,1}/T$ $\chi_4 = k_{p,2}$, $\chi_5 = T/T_{i,2}$ e $\chi_6 = T_{d,2}/T$ e a estrutura do desacoplador pré-compensador dada por:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \chi_7 & \chi_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_9 & \chi_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_{11} & \chi_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_{13} & \chi_{14} \end{bmatrix}$$

$$B_d^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_d = \begin{bmatrix} \chi_{15} & \chi_{16} & \chi_{17} & \chi_{18} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_{19} & \chi_{20} & \chi_{21} & \chi_{22} \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

$$D_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

É alcançado os seguintes valores, com a resolução do problema: $k_{p,1} = 0{,}0252$, $T_{i,1} = 1884241$, $T_{d,1} = 0{,}2028$ $k_{p,2} = 0{,}0087$, $T_{i,2} = 26{,}9635$ e $T_{d,2} = 0{,}4720$, com uma garantia do erro de aproximação de $\max_{\alpha \in \Omega} \|E(z)\|_\infty = 0{,}058$. O desacoplador pré-compensador possui os seguintes valores:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}9597 & 0{,}0812 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}8463 & -0{,}4479 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}8962 & 0{,}2023 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}9264 & -0{,}4061 \end{bmatrix}$$

$$B_d^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_d = \begin{bmatrix} 90{,}7402 & -58{,}0106 & 146{,}5426 & -151{,}7097 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 79{,}8239 & -101{,}7986 & -141{,}2787 & 149{,}9093 \end{bmatrix} \tag{5.12}$$

$$D_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Que resulta nas seguintes funções de transferência:

$$D_{1,1}(z) = \frac{-58{,}011(z - 1{,}564)}{(z^2 - 0{,}08123z + 0{,}9597)}$$

$$D_{1,2}(z) = \frac{-101{,}8(z - 0{,}7841)}{(z^2 - 0{,}2023z + 0{,}8962)}$$

$$D_{2,1}(z) = \frac{-151{,}71(z - 0{,}9659)}{(z^2 - 0{,}4479z + 0{,}8463)} \tag{5.13}$$

$$D_{2,2}(z) = \frac{149{,}91(z - 0{,}9424)}{(z^2 - 0{,}4061z + 0{,}9264)}$$

As figuras 5.5 e 5.6 apresentam os resultados obtidos utilizando o controlador PID juntamente com o pré-compensador desacoplador. Não é observada uma melhoria que justifique o uso do controlador PID ao invés do controlador PI quando comparado os valores obtidos pelo erro de aproximação.

Geralmente a ação derivativa é utilizada para atuar sobre a resposta transitória do sistema. Como a característica da resposta transitória é imposta pela escolha do modelo de referência. Como controlador PI é suficiente para obter a resposta transitória especificada pelo modelo de referência escolhido para este problema, não se justifica o uso da ação derivativa, como foi observado.

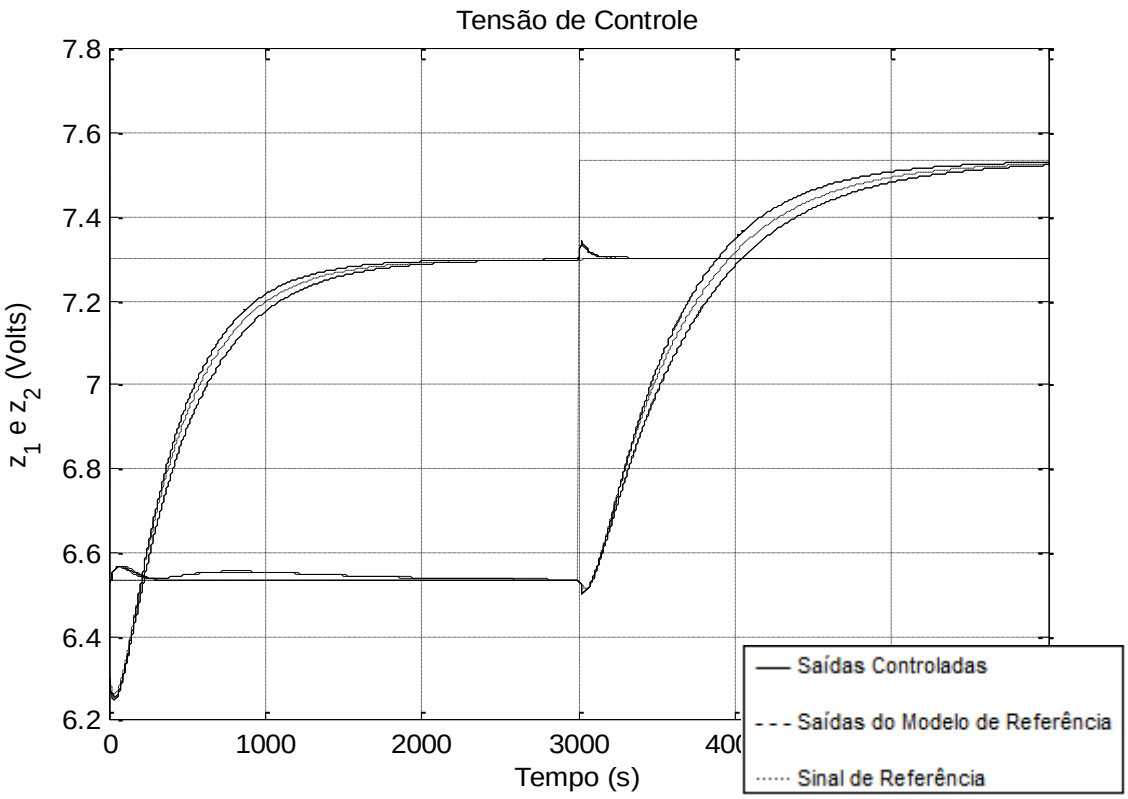


Figura 5. 5: Resposta transitória das saídas para o sistema 4 tanques considerando o controlador PID

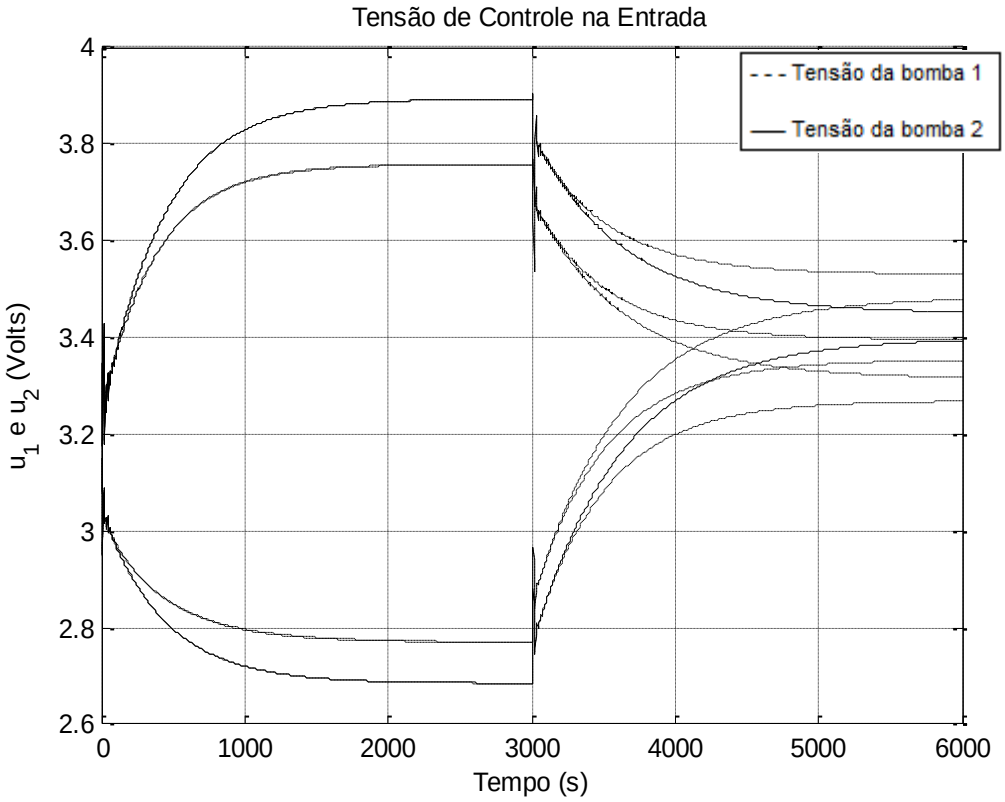


Figura 5. 6: Resposta transitória da tensão das bombas para o sistema 4 tanques considerando o controlador PID

5.3 Considerações finais

Com os resultados apresentados nesse capítulo é possível concluir que a técnica utilizada para a síntese do controlador apresenta um resultado bastante satisfatório em relação ao erro de aproximação, quando é inserido o cálculo do desacoplador pré-compensador. O custo computacional aumenta, mas os resultados obtidos são ainda melhores levando ao erro de aproximação a um valor extremamente baixo. Os controladores I-P e PID produzem resultados bastante semelhantes nos casos analisados, a escolha do controlador utilizado fica a cargo do projetista a escolha do tipo de controlador.

Capítulo 6 - Conclusões Finais

6.1 Sumário das Contribuições da Dissertação de Mestrado

Foi proposto um novo procedimento de síntese de controle desacoplador robusto, que combina um bloco de controle descentralizado PID com um bloco pré-compensador, ou desacoplador, para sistemas lineares multivariáveis com modelo de incerteza politópico. Os objetivos de controle são o desacoplamento entre as malhas de controle, o desempenho da resposta de rastreamento e rejeição de distúrbios. Verificou-se que a estratégia de aproximação de modelo de referência pode garantir tanto um desacoplamento satisfatório como um bom desempenho da resposta de rastreamento.

O procedimento proposto foi aplicado a dois sistemas multivariáveis bastante estudados na literatura. O problema de controle foi formulado como um problema de otimização multiobjetivo, não convexo, cujos sistema e controle desacoplador são representados por modelos no espaço de estados. As variáveis de otimização são os parâmetros dos controladores PID e do desacoplador.

O procedimento de sintonia de controladores PID multi-malhas desenvolvido em Gonçalves, et al., (2012) é aplicado para a síntese do controle desacoplador cuja diferença é incluir o pré-compensador a fim de minimizar de forma satisfatória a interação entra as malhas de controle dos sistemas MIMO. O uso do desacoplador, apesar de aumentar a complexidade do sistema de controle, é necessário quando o controle PID descentralizado não é suficiente para eliminar as interações entre as malhas de controle.

Como o procedimento de síntese considera sistemas incertos com modelo politópico, o custo computacional para determinar o controle desacoplador robusto é bastante alto devido a complexidade do problema.

A dificuldade observada para aplicação do procedimento de síntese proposto é que grande parte dos sistemas MIMO apresentados na literatura são descritos por matrizes de transferência muitos deles incluindo atrasos. Esses modelos quando convertidos para o espaço de estados resultam numa representação de elevado número de variáveis de estado. O número de variáveis

de estado impacta no cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$ no passo de síntese do procedimento e também no cálculo dos custos garantidos no passo de análise. A solução dos problemas LMI para o cálculo do custo garantido apresenta alto custo computacional quando o sistema é de ordem elevada. O uso das formulações LMI é obrigatório para a verificação da estabilidade robusta do sistema. O custo computacional está também diretamente ligado ao número de variáveis otimizadas, dessa forma, desacopladores e controladores com mais parâmetros elevam bastante a complexidade, tornando assim o processamento mais lento.

Apesar do alto custo computacional, o método de síntese de controle desacoplador robusto apresentado possui várias vantagens quando comparado com outros métodos disponíveis na literatura. O mais importante deles é justamente garantir a estabilidade e o desempenho robusto de sistemas MIMO com incertezas politópicas. Não foi encontrado na literatura outro método de síntese de controlador PID multi-malhas que trate sistemas com incertezas politópicas, não existindo uma solução fácil para esse problema que é muito complexo. O uso da metodologia de aproximação do modelo de referência aplicada ao projeto de sistemas MIMO com o objetivo de desacoplar o sistema e obter a resposta de rastreamento desejado se mostrou bastante eficiente, sendo outra característica de destaque do procedimento proposto. É importante ressaltar que, diferente de outros métodos existentes, o controle descentralizado PID é calculado ao mesmo tempo que o desacoplador buscando otimizar o desempenho do sistema.

6.2 Perspectivas Futuras

O principal aspecto a ser melhorado no procedimento de síntese de controle desacoplador robusto proposto é a redução do esforço computacional. Para isso podem ser investigadas outras técnicas para implementação tanto do passo de síntese quanto de análise. Outra dificuldade da aplicação do procedimento proposto é a escolha do modelo de referência. Seria interessante que fosse desenvolvida uma metodologia para determinação do modelo de referência mais adequado para cada caso que não dependesse de um procedimento de tentativa e erro.

.

6.3 Trabalhos com Co-autorias em Eventos Científicos

1. Siqueira, M. A. S. ; Silva, L. F. G.; Gonçalves, E. N.; Palhares, R. M.; Takahashi, R. H. C., 2014 In: Proceedings of the 2014 American Control Conference – ACC, June, Portland, Oregon, USA.

2. Siqueira, M. A. S. .; Silva, L. F. G.; Gonçalves, E. N.; Palhares, R. M.; Takahashi, R. H. C., 2014 Em: Congresso Brasileiro de Automação – CBA, Setembro, Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil.

Referências Bibliográficas

Alipouri, Y. & Poshtan, J., 2013. Optimal controller design using discrete linear model for a four tank benchmark process. *ISA Transactions,* 52(5), pp. 644-651.

Araki, M. & Taguchi, H., 2003. Two-degree-of-freedom PID controllers. *International Journal of Control Automation and Systems,* Volume 1, pp. 401-411.

Araujo, M. R., Gonçalves, E. N., Leite, V. J. S. & Palhares, R. M., 2010. *Síntese de controladores robustos por realimentação dinâmica de saída considerando modelo de referência baseada em formulações LMI.* Bonito, MS, CBA, pp. 4056-4061.

Aström, K. & Hägglund, T., 1984. Automatic tinning of simple regulators with specifications on phase and amplitude margins. *Automatica,* 20(5), pp. 645-651.

Aström, K. & Hägglund, T., 1995. PID controllers: theory, design and tuning. *ISA: The Instrumentation, Systems and Automation Society, USA.*

Aström, K. & Hägglund, T., 2001. The future of PID control. *Control Engineering Practice,* 9(11), pp. 1163-1175.

Aström, K. & Hägglund, T., 2004. Revisiting the Ziegle-Nichols step response method for PID control. *Journal of Process Control,* Volume 14, pp. 635-650.

Aström, K. J., Johansson, K. H. & Wang, Q. G., 2002. Design of decoupled PI controllers for two-by-two systems. *IEE Proceedings on Control Theory and Applications,* 149(1), pp. 74-81.

Bachur, W. E. G., Gonçalves, E. N., Leite, V. J. & Palhares, R. M., 2011. *Multiobjective robust discrete dynamic output-feedback control synthesis based on closed-loop reference model.* Denver, CO, USA, IEEE.

Bachur, W. E. G., Gonçalves, E. N., Palhares, R. M. & Takahashi, R. H. C., 2010. *Multiobjective robust dynamic output-feedback control synthesis based on reference model.* Atlanta, IEEE, pp. 2330-2335.

Bao, J., Forbes, J. F. & McLellan, P. J., 1999. Robust Multiloop PID controller design: a successive semidefinitive programming approach. *Industrial & Engineering Chemistry Research,* Volume 38, pp. 3407-3419.

Beck, C. L., Doyle, J. & Glover, K., 1996. Model reduction of multidimensional and uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control,* 41(10), pp. 1466-1477.

Bey, J. & Aachen, R., 1998. Simplicial grid refinement: On freudenthal´s algorithm and the optimal number of congruence classes. *Numer. Math,* 85(1), pp. 1-29.

Bianchi, F. D., Mantz2, R. J. & Christiansen, C. F., 2008. Multivariable PID control with set-point weighting via BMI optimisation. *Automatica,* 44(2), pp. 472-478.

Birk, W. & Medvedev, A., 2003. *A note on gramian-based interaction measures,* University of Cambridge, UK: Proceedings of the European Control Conference.

Boyd, S., Balakrishnan, K. & Kabamba, P., 1989. A bisection method for computing $\mathcal{H}_\infty$ norm of a transfer matrix and related problems. *Mathematics of Control, Signals, and Systems,* 2(3), pp. 207-219.

Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. & Balakrishnan, V., 1994. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory.* Philadelphia, PA, SIAM.

Bristol, E. H., 1966. On a new measure of inter-action for multivariable process control. *IEEE Transactions on Automatic Control,* 11(1), pp. 133-134.

Campestrini, L., Filho, L. C. S. & Bazanella, A. S., 2009. Tuning of multivariable decentralized controllers through the ultimatepoint method. *IEEE Transactions on Control Systems Technology,* 17(6), pp. 1270-1281.

Caponetton, R. & Dongola, G., 2013. A numerical approach for computing stability region of FO-PID controller. *Journal of the Franklin Institute,* Volume 350, pp. 871-889.

Chen, D. & Seborg, D., 2001. Multiloop PI/PID controller design based on Gershgorin bands. *American Control Conference, 2001. Proceedings of the 2001,* Volume 5, pp. 4122-4127.

Chien, I. -L., Huang, H. -P. & Yang, J. -C., 1999. A simple multiloop tining method for PID controllers with no proportional kick. *Industrial & Engineering Chemistry Reseach,* 38(4), pp. 1456-1468.

Chilali, M. & Gahinet, P., 1996. $\mathcal{H}_\infty$ design with pole placement constrains: An LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic COntrol,* 41(3), pp. 358-367.

Chiu, M. -S. & Arkun, Y., 1992. A methodology for sequential design of robust decentralized control systems. *Automatica,* 28(5), pp. 997-1001.

Cominos, P. & Munro, N., 2002. PID Controllers: recent tuning methods and design to specification. *IEE Proceedings - Control Theory & Applications,* 149(1), pp. 46-53.

de Arruda, L. V. R., Swiech, M. C. S., Neves-Jr, F. & Delgado, M. R., 2008. Um método evolucionário para sintonia de controladores PI/PID em processos multivariáveis. *Revista Controle & Automação ,* 19(1), pp. 1-17.

de Arruda, L. V. R., Swiech, M. C. S., Neves-Jr, F. & Delgado, M. R., 2008. Um método evolucionário para sintonia de controladores PI/PID em processos multivariáveis. *Revista Controle & Automação,* 19(1), pp. 1-17.

de Oliveira, M. C., Geromel, J. C. & Bernussou, J., 2002. Extended $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems. *International Journal of Control,* 75(9), pp. 666-679.

de Oliveira, P. J. et al., 2004a. $\mathcal{H}_2$ guaranteed cost computation by means of parameter-dependent Lyapunov functions. *International Journal of Systems Science,* 35(5), pp. 305-315.

de Oliveira, P. J. et al., 2004b. $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed cost computation by means of parameter-dependent Lyapunov functions. *Automatica,* Volume 40, pp. 1053-1061.

Dittmar, R., Gill, S., Singh, H. & Darby, M., 2012. Robust optimization-based multi-loop PID controller tuning: A new tool and its industrial application. *Control Engineering Practice,* 20(4), pp. 355-370.

Doyle, J. C., 1978. Guaranteed margins for LQG regulators. *IEEE Transactions on Automatic Control AC,* 23(4), pp. 756-757.

Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, P. P. & Francis, B. A., 1989. Space-state solutions to standard $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control problems. *IEEE Transactions in Automatic Control,* 4(8), pp. 831-847.

Edelsbrunner, H. & Grayson, D. R., 2000. Edgewise subdivision of a simplex. *Discrete & Computational Geometry,* Volume 24, pp. 707-719.

Farag, A. & Werner, H., 2006. Structure selection and tuning of multi-variable PID controllers for an industrial benchmark problem. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications,* 153(3), pp. 262-267.

Gagnon, E., Pomerleau, A. & Desbiens, A., 1998. Simplified, ideal or inverted decoupling?. *ISA Transactions,* 37(4), pp. 265-276.

Garelli, F., Mantz, R. J. & De Batista, H., 2006. Limiting interactions in decentralized control of MIMO systems. *Journal of Process Control,* 16(5), pp. 473-482.

Garrido, J., Vaìzquez, F. & Morilla, F., 2013. Centralized Inverted Decoupling Control. *Industrial & Engineering Chemistry Research,* 52(23), pp. 7854-7866.

Garrido, J., Vazqueza, F. & Morilla, F., 2011. An extended approach of inverted decoupling. *Journal of Process Control,* 21(1), pp. 55-69.

Gonçalves, B. M., Gonçalves, E. N., Palhares, R. M. & Takahashi, R. H. C., 2012. *Robust decoupling PI controllers for multi-loop control.* Maui, Hawaii, USA, IEEE, pp. 1530 - 1535.

Gonçalves, E. N., 2006. *Análise e Síntese de Controladores e Filtros Robustos para Sistemas com Domínios Politópicos de Incerteza.* Belo Horizonte(MG): Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, UFMG.

Gonçalves, E. N., Bachur, W. E. G., Palhares, R. M. & Takahashi, R. H. C., 2011. Robust $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ /reference model dynamic output-feedback control synthesis. *International Journal of Control,* 84(12), pp. 2067 - 2080.

Gonçalves, E. N., Palhares, R. M. & Takahashi, R. H. C., 2005a. Improved optimisation approach to robust $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control problem for linear systems. *IEE Proceedings - Control Theory & Applications ,* 152(2), pp. 171-176.

Gonçalves, E. N., Palhares, R. M. & Takahashi, R. H. C., 2005b. *Robust $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ dynamic output feedback control synthesis for systems with polytopic uncertainty.* Prague, Czech Republic, Preprints of the 16th IFAC World Congress, IFAC.

Gonçalves, E. N., Palhares, R. M. & Takahashi, R. H. C., 2006. $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ filter design for systems with polytope-bounded uncertainly. *IEEE Transactions on Signal Processing,* 24(9), pp. 3620-3626.

Gonçalves, E. N., Palhares, R. M. & Takahashi, R. H. C., 2006. $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ filter design for systems with potytope-bounded uncertainty. *IEEE Transactions on Signal Processing,* 54(9), pp. 3620 - 3626.

Gonçalves, E. N., Palhares, R. M. & Takahashi, R. H. C., 2008. A novel approach for $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ robust PID synthesis for uncertains systems. *Jorunal of Process Control,* January, 18(1), pp. 19-26.

Gonçalves, E. N., Palhares, R. M., Takahashi, R. H. C. & Chasin, A. N. V., 2009. Robust model reduction of uncertain systems maintaining uncertainty structure. *International Journal of Control,* 82(11), pp. 2158-2168.

Gonçalves, E. N., Palhares, R. M., Takahashi, R. H. C. & Mesquita, R. C., 2006. Algorithm 860: SimpleS - an extension of Freudenthal's simplex subdivision. *ACM Transactions on Mathematical Software,* 32(4), pp. 609 - 621.

Gonçalves, E. N., Palhares, R. M., Takahashi, R. H. & Mesquita, R. C., 2007. $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ e-garanteed cost computation of uncertain linear systems. *IET Control Theory and Applications,* 1(1), pp. 201 - 209.

Goodwin, G., Graebe, S. & Salgado, M., 2001. *Control system design.* s.l.:Prentice Hall New Jersey.

Grosdidier, P. & Morari, M., 1986. Interaction measures for systems under descentralized control. *Automatica,* 22(3), pp. 309-319.

Grosdidier, P. & Morari, M., 1987. The u-interaction measure. *Industrial & Engineering Chemistry Research,* 26(6), pp. 1193-1201.

Gundes, A. N., Mete, A. N. & Palazoglu, A., 2009. Reliable decentralized PID controller synthesis for two-channel MIMO processes. *Automatica,* 2(45), pp. 353-363.

Haggblom, K., 1997. Control structure analysis by partial relative gains, Decision and Control. *Proceedings of the 36th IEEE Conference on,* Volume vol.3, pp. 2623-2624.

Halevi, Y., Palmor, Z. J. & Efrati, T., 1997. Automatic tuning of decentralized PID controllers for MIMO process. *Journal of Process Control,* 7(2), pp. 119-128.

Hang, C. C., Aström, K. J. & Ho, W. K., 1991. Refinaments of the Ziegler-Nichols tuning formula. *IEE Proceedings D Control Theory & Applications,* 138(2), pp. 111-118.

He, M. -J., Cai, W. -J., Ni, W. & Xie, L. -H., 2009. RNGA based control system configuration for multivariable processes. *Journal of Process Control,* 19(6), pp. 1036-1042.

Hovd, K. & Skogestad, S., 1994. Sequential Design of Decentralized Controlles. *Automatica,* October, 30(10), pp. 1601-1607.

Hovd, M. & Skogestad, S., 1992. Simple frequency-dependent tools for control system analysis, structure selection and design. *Automatica,* 28(5), pp. 989-996.

Hovd, M. & Skogestad, S., 1993. Improved independent design of robust decentralized controllers. *Journal of Process Control,* 3(1), pp. 43-51.

Ho, W., Lee, T. & Gan, O., 1997. Tuning of multiloop proportional-integral-derivative controllers based on gain and phase margin specifications. *Industrial & Engineering Chemistry Research,* 36(6), pp. 2231-2238.

Huang, H. -P., Jeng, J. -C., Chiang, C. -H. & Pan, W., 2003. A direct method for multi-loop PI/PID controller design. *Journal of Process Control,* Volume 12, pp. 769-786.

Jevtovíc, B. T. & Matausek, M. R., 2010. PID controller design of TITO system based on ideal decoupler. *Journal of Process Control,* 20(7), pp. 869-876.

Ji, B., Lee, E., Han, Y. & Lee, J., 2007. Computation of multiloop controllers having desired closed-loop responses. *Korean Journal of Chemical Engineering ,* 24(4), pp. 562-566.

Johansson, K. H., 2000. The quadruple-tank process: A multivariable laboratory process with an ajustable zero. *IEEE Transactions on Control System Technology,* 8(3), pp. 456-465.

Johansson, K. H., 2002. Interaction bounds in multivariable control systems. *Automatica,* June, 38(6), pp. 1045-1051.

Kinnaert, M., 1995. Interaction measures and pairing of controlled and manipulated variables for multiple-input multiple-output systems: A survey. *Journal A,* 36(4), pp. 15-23.

Kumar, V. V., Rao, V. S. R. & Chidambaram, M., 2012. Centralized PI controllers for interacting multivariable processes by synthesis method. *ISA Transactions ,* 51(3), pp. 400-409.

Lee, J., Cho, W. & Edgar, T., 1998. Multiloop PI controller tuning for interacting multivariable processes. *Computers & Chemical Engineering,* 22(11), pp. 1711-1723.

Lee, J. & Edgar, T. F., 2005. Continuation method for the modified ziegle-nichols tuning of multiloop control systems. *Industrial & Engineering Chemistry Research,* 44(19), pp. 7428-7434.

Lee, J. & Edgar, T. F., 2006. Multiloop PI/PID control system improvement via adjusting the dominant pole or the peak amplitude ratio. *Chemical Engineering Science,* 61(5), pp. 1658-1666.

Liu, C., Huang, B. & Wang, Q., 2011. Control Performance Assessment Subject to Multi-Objective User-Specified Performance Characteristics. *IEEE Transactions on Control Systems Technology,* May, 19(3), pp. 682-691.

Loh, A., Hang, C., Quek, C. & Vasnani, V., 1993. Autotuning of multiloop proportional-integral controllers using relay feedback. *Industrial & Engineereing Chemistry Research,* 32(6), pp. 1102-1107.

Loh, A. & Vasnani, V., 1994. Describing function matrix for multivariable systems and its use in multiloop PI design. *Journal of Process Control,* 4(3), pp. 115-120.

Luyben, W. L., 1970. Distillation decoupling. *AIChE Journal,* 16(2), pp. 198-203.

Luyben, W. L., 1986. Simple method for tuning SISO Controllers in multivariable systems. *Industrial & Engineering Chemistry Process and Development,* 25(3), pp. 654-660.

Mahdi Alavi, S. M., Khaki-Sedingh, A., Labibi, B. & Hayes, M. J., 2007. Improved multivariable quantitative feedback design for tracking error specifications. *IET Control Theory & Applications,* 1(4), pp. 1046-1053.

Mayne, D. Q., 1973. The design of linear multivariable systems. *Automatica,* 9(2), pp. 201-207.

Moaveni, B. & Khaki-Sedigh, A., 2008. Input–output pairing analysis for uncertain multivariable processes. *Journal of Process Control,* 15(6), pp. 527-532.

Monica, T. J., Yu, C. C. & Luyben, W. L., 1988. Improoved multiloop single-input/single-output (SISO) controllers for multivariable processes. *Industrial & Engineering Chemistry Research,* 17(6), pp. 969-973.

Niederlinski, A., 1971. A heuristic approach to design of linear multivariable interacting control systems. *Automatica,* 7(6), pp. 691-701.

Pegel, S. & Engell, S., 2001. Multivariable PID controller design via approximation of the attainable performance. *In Proceedings of the IEEE IECON'01, Denver,* pp. 724-730.

Pradhan, J. K. & Ghosh, A., 2013. Design and implementation of decoupled compensation for a twin rotor multiple-input and multiple-output system. *IET Control Theory and Applications ,* 7(2), pp. 282-289.

Rajapandiyan, C. & Chidambaram, M., 2012. Controller design for MIMO processes based on simple decoupled equivalent transfer functions and simplified decoupler. *Industrial & Engineering Chemistry Research,* 51(38), pp. 12389-12410.

Rodrigues, L. A., Gonçalves, E. N., Leite, V. J. S. & Palhares, R. M., 2009. *Robust reference model control with LMI formulation.* Cambridge, UK, Proceedings of the IASTED International Conference on Control and Applications.

Rosenbrock, H., 1970. *State-space and multivariable theory.* Studies in Dynamical Systems Series, Wiley Interscience Division, s.n.

Salgado, M. E. & Conley, A., 2004. MIMO interaction measure and controller structure selection. *International Journal of Control,* 77(4), pp. 367-383.

Scherer, C., Gahinet, P. & Chilali, M., 1997. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Transaction Automatic Control,* 42(7), pp. 896-911.

Schmidt, H. & Jacobsen, E. W., 2003. Selecting control configuration for performance with independent design, Computers & amp. *Chemical Engineering,* 27(1), pp. 101-109.

Seborg, D., Mellichamp, D., Edgar, T. & Francis J.Doyle, I., 2010. *Process Dynamics and Control.* s.l., John Wiley & Sons.

Shen, S. & Yu, C., 1994. Use of relay-feedback test for automatic tuning of multivariable systems. *AIChE Journal,* 40(4), pp. 627-646.

Shen, Y., Cai, W.-J. & Li, S., 2010. Multivariable Process Control: Decentralized, Decoupling, or Sparse?. *Industrial & Engineering Chemistry Research,* 49(2), pp. 761-771.

Shen, Y., Sun, Y. & Li, S., 2012. Adjoint transfer matrix based decoupling control for mulvariable processes. *Industrial & Engineering Chemistry Research,* 51(50), pp. 16 419-16 426.

Shinskey, F. G., 1988. *Process Control Systems: Application, Design and Adjustment.* New York: McGraw-Hill.

Skogestad, S., Lundström, P. & Jacobsen, E. W., 1990. Selecting the best distillation control configuration. *AIChE Journal,* 36(5), pp. 753-764.

Skogestad, S. & Morari, M., 1989. Robust performance of decentralized control systems by independent designs. *Automatica,* 25(1), pp. 119-125.

Skogestad, S. & Morari, M., 1992. Variable selection for decetralized control. *Modeling Identification and Control,* Volume 13, pp. 113-125.

Skogestad, S. & Postlethwaite, I., 1996. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design.* West Sussex, England, John Wiley & Sons.

Sourlas, D. D. & Manousiouthakis, V., 1995. Best achievable decentralized performance. *IEEE Transactions Automatic Control,* 40(11), pp. 1858-1871.

Sumana, C. & Venkateswarlu, C., 2010. Genetically tuned decentralized proportional-integral controllers for composition control of reactive destillation. *Industrial and Engineering Chemistry Research,* 49(3), pp. 1297-1311.

Takahashi, R. H., Saldanha, R. R., Dias-Filho, W. & Ramírez, J. A., 2003. A New Constrained Ellipsoidal Algorithm for Nonlinear Optimization With Equality Constraints. *IEEE Transactions on Magnetics,* 39(3), pp. 1289-1292.

Trierweiler, J. O., Müller, R. & Engell, S., 2000. Multivarialble low order structured-controller design by frequency response appoxiamtion. *Braz Journal of Chemical Engineering,* 17(4-7), pp. 793-807.

Vendenbergue, L. & Boyd, S., 1996. Semidefinitive programming. *SIAM Review,* 38(1), pp. 49-95.

Vlachos, C., Williams, D. & Gomm, J. B., 1999. Genetic approach to decentralised PI controller tunnig for multivariable processes. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications,* 146(1), pp. 58-64.

Vu, T. N. L. & Lee, M., 2010a. Independent design of multi-loop PI/PID controllers for interacting multivariable processes. *Journal of Process Control,* 20(8), pp. 922-933.

Vu, T. N. L. & Lee, M., 2010b. Multi-loop PI controller design based on the direct synthesis for interacting. *ISA Transactions,* Volume 49, pp. 79-86.

Vu, T. N. L. & Lee, M., 2013. An extended method of simplified decoupling for multivariable processes with multiple time delays. *Journal of Chemical Engineering of Japan,* 46(4), pp. 279-293.

Wade, H. L., 1997. Inverted decoupling: a neglected technique. *ISA Transactions,* 36(1), pp. 3-10.

Wang, Q. -G., Lee, T. -H. & Zhang, Y., 1998. Multiloop vertion of the modified ziegler-nichols method for two input two output processes. *Industraial and Engineering Chemistry Research,* Volume 37, pp. 4725-4733.

Witcher, M. F. & J.McAvoy, T., 1977. Interacting control systems: Steady state and dynamic measurement of interaction. *ISA Transactions,* 16(3), pp. 35-41.

Wittenmark, B. & Salgado, M. E., 2002. *Hankel-norm based interaction measure for input-outputpairing.* Barcelona, Spain, Proceedings of the 2002 IFAC World Congress, IFAC.

Wood, R. K. & Berry, M. W., 1973. Terminal composition control of a binary destillation column. *Chemical Engineering Science,* Volume 28, pp. 1707-1212.

Xiong, Q., Cai, W. -J. & He, M. -J., 2005. A practical loop paring criterion for multivariable processes. *Journal of Process Control,* 15(7), pp. 741-747.

Xiong, Q., Cai, W. & He, M., 2007. Equivalente transfer function method for PI/PIDcontroller design of mimo processes. *Journal of Process Control,* 17(8), pp. 665-673.

Zames, G., 1981. Feedback and optimal sensitivity: Model references transformations, multiplicative seminorms, and appoximate inverses. *IEEE Transaction on Automatic Control ,* AC-26(2), pp. 301-320.

Zhanga, Y., Wang, Q. -G. & Aström, K., 2002. Dominant pole placement for multi-loop control systems. *Automatica,* 38(7), pp. 1213-1220.

Zhou, K. & Doyle, J. C., 1998. Essentials of Robust Control. In:: New Jersey: Prentince-Hall Inc.

Ziegler, J. G. & Nichols, N. B., 1942. Optimum settings for automatic controllers. *Trans of the A.S.M.E.,* Volume 64, pp. 759-768.