CEFET-MG e UFSJ
Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Programa de Mestrado em Engenharia Elétrica
Modelagem e Controle de Sistemas - Sistemas de Controle

Ariany Carolina de Oliveira

Realimentação Estática de Saída Aplicada a Sistemas Lineares Incertos Discretos no Tempo com Atraso nos Estados

Belo Horizonte
2015

Ariany Carolina de Oliveira

Realimentação Estática de Saída Aplicada a Sistemas Lineares Incertos Discretos no Tempo com Atraso nos Estados

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, associação ampla entre CEFET-MG e UFSJ como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Modelagem e Controle de Sistemas - MCS. Linha de pesquisa: Sistemas de Controle - SC.

Orientador: Prof. Dr. Valter J. S. Leite

Belo Horizonte
2015

Ariany Carolina de Oliveira
Engenheiro Mecatrônico – CEFET-MG

Realimentação Estática de Saída Aplicada a Sistemas Lineares Incertos Discretos no Tempo com Atraso nos Estados

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, associação ampla entre CEFET-MG e UFSJ como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Modelagem e Controle de Sistemas - MCS. Linha de pesquisa: Sistemas de Controle - SC.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Giovani Guimarães Rodrigues
PPGEL/CEFET-MG

Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Junior
UFRGS

Prof. Dr. Márcio Falcão Santos Barroso
PPGEL/UFSJ

Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite
PPGEL/CEFET-MG

Belo Horizonte
2015

Para meus pais, Osmar e Sônia.

Agradecimentos

Esta seção ficou um pouco extensa demais. Mas, vai ter que ser assim. Tenho muitas pessoas para agradecer, algumas que contribuíram diretamente para a finalização desse trabalho e outras que, apesar de não entenderem nem um pouco o que que quero dizer com "minha LMI não dá resultado factível" também me ajudaram, e muito, no decorrer desse mestrado.

Antes de tudo, devo agradecer ao meu pai e minha mãe, por tornarem tudo isso possível e por me apoiarem a fazer o mestrado. Mesmo não sendo o caminho que vocês esperavam que eu seguisse, vocês sempre estiveram me incentivando a fazer o melhor de mim, a ter o melhor resultado. Vocês são, sem dúvidas, o melhor controlador que eu posso ter. Muito obrigado por nunca deixarem o meu sistema instável.

Ao meu irmão Breno, pelo exemplo diário de dedicação ao trabalho. E, principalmente, por me aturar ao longo de toda a vida.
Tenho também que agradecer aos meus meninos Lucas, Luís, Ângelo, Tiago, Igor e Jônathas.

Ao meu amigo Igor, por entre tantas coisas valiosas, ter me ensinado a olhar sempre para cima e para frente e que a vida é curta demais para ser pequena. Muito obrigada pelo seu apoio e compreensão.

Ao meu amigo Jônathas, vulgo Pit, pelo seu exemplo diário de dedicação e empenho. Aprendi muito com você, vendo a intensidade que você corre atrás dos seus sonhos.

Ao meu amigo Lucas, meu parceiro. Muito obrigada por cada conversa, por cada dica, cada incentivo, por cada puxão de orelha. Seja sobre o mestrado ou sobre projetos de vida. Obrigada pelo carinho e pela preocupação comigo ao longo dessa caminhada. Tenho certeza que o caminho teria sido mais duro se não tivéssemos trilhado juntos. Muito obrigada pela amizade.

Ao meu amigo Luís Felipe, meu Dr. Muito obrigada por todas as conversas, todos os almoços, todos os cafés e todos os conselhos. Sejam eles sobre LMIs ou sobre qualquer outra coisa. Devo muito à finalização desse trabalho a você. Muito obrigada por ter sido sempre tão atencioso e paciente com as minhas dúvidas.

Ao amigo Ângelo que tem cara fechada e o coração aberto, sempre disposto a ajudar. Muito obrigada pela presença sempre gentil no laboratório e também pela ajuda com as aulas na fase final do mestrado.

Ao amigo Tiago, sempre gentil , alegre e disposto a colaborar. Muito obrigada pela agradável convivência e pela amizade que mantemos até hoje.

E também as minhas meninas: Amanda, Michelle, Tabitha, Juliana, Bianca e Dani.

A minha grande amiga Michelle. Você foi, sem sombra de dúvidas, a pessoa que mais me cobrou a finalização do mestrado. Era todo dia um "E aí Gorda, já terminou o mestrado?", "e aí, já marcou a defesa?" ou "você não acaba isso mais não?". Muito obrigada por estar sempre presente mesmo estando longe. Obrigada por todas as vezes que você me escutou. Obrigada por cada "relaxa que vai dar certo". Obrigada pela revisão do texto. E muito obrigada por fazer eu perceber que sempre devemos arrumar tempo para os amigos. ♯ AgoraAcabou, ♯ PodeComemorar, ♯ EnfimMestre, ♯MuitoObrigadaFiote. ♯ContoComVocêNoDoutorado.

A minha amiga e parceira Tábitha. Por cada momento agradável que você me proporcionou, dentro e fora do laboratório. Obrigada por cada riso compartilhado e por me ensinar a levar a vida com mais leveza. Seu espírito sempre alegre e tranquilo tornou mais alegre nossos dias no Laboratório 315.

A minha amiga Amanda. Você sempre esteve ao meu lado dizendo que tudo daria certo quando eu acreditava que tudo daria errado. Obrigada pela paciência e pelo carinho com que você sempre escutou eu falar dos meus controladores. Obrigada pela presença constante em minha vida. Obrigada por sempre me apoiar, sejam em assuntos relacionados ao mestrado ou não. E saiba que enquanto houver você de um lado, aqui do outro eu consigo me orientar.

A minha amiga Bianca, por sempre vir quando eu mais precisava. Muito obrigada por suas palavras de incentivo e pela amizade ao longo de todos esses anos.

A Juliana, que me ajudou não só a desvendar os mistério da língua do Tio Sam, como me ajudou também com seus conselhos e suas palavras de incentivo.

A minha amiga Dani por toda paciência e companheirismo na fase de mestrado. Por toda compreensão no período em que eu precisei ficar ausente.

A toda galera que passou pelo Laboratório 315 ao longo desses dois anos, ao Gabriel, ao Adriano, ao André, a Carla, a Mariella, muito obrigada pela convivência agradável.

Os professores Ricardo Coração de Leão, Pedro Peres, Daniel Coutinho, Reinaldo Palhares, Maurício de Oliveira e Carsten Scherer pela qualidade do material disponibilizado online e que muitas vezes foram meu guia durante o andamento deste trabalho.

A Xiao-Hang Chang pela qualidade do trabalho que motivou essa dissertação e pela gentileza em esclarecer as dúvidas.

A Lucas Prates, pela ajuda com as figuras.

Aos professores Marlon, Rodrigo, Ralney e Sandra e funcionários do Cefet Divinópolis, César,

Sr. Luís, Henrique, Sr. José Maria e Magali e todas as outras meninas da Conservo. Obrigada pelo carinho de sempre tirarem um tempinho para perguntar como estava indo o mestrado.

Aos membros da minha banca examinadora, pela disponibilidade em contribuir com este trabalho.

Devo agradecer também, ao sujeito responsável por tornar este trabalho possível. Antes mesmo de ouvir falar do CEFET pela sua excelência de ensino, eu já escutava , e muito, falar de um sujeito que lá trabalha e que é simplesmente o cara. Isso foi lá em 2004. Cansei de escutar minha prima e seus amigos sempre falarem com carinho desse sujeito. Em 2005 entrei no CEFET, fiz 3 anos de ensino médio e sempre escutei a mesma coisa das pessoas que conviviam com essa figura. Dava uma vontade enorme de ter aula com ele. Quando ingressei no Curso de Engenharia Mecatrônica pude enfim ter aula com esse professor. Admirei de longe o seu trabalho e novamente vi o carinho e admiração com que cada um de seus orientados se referia a ele. Dava uma vontade danada de trabalhar com ele. De fazer parte do seu grupo. Acho que eu simplesmente não poderia sair do CEFET sem trabalhar diretamente com você Valter. Seria injusto diante de todas as coisas que já ouvia e sabia a seu respeito. Obrigada por me orientar ao longo desse trabalho. Obrigada por sua constante dedicação. Obrigada por me receber em sua casa em sábados de manhã. É uma honra fazer parte do grupo de pessoas que tiveram o Sr. como orientador. E, principalmente, obrigada pelo brilho nos seus olhos cada vez que você se sentava junto a mim para me explicar as loucuras desse mundo do Controle.

A todos vocês, também peço desculpa pela ausência nesses últimos dias. No período de finalização do mestrado, foi um pouco difícil conciliar todas as coisas que que tinha para fazer. Demorei para responder algumas mensagens, me esqueci de responder outras. Respondi outras com poucas palavras.

A Deus, sempre, por tudo, por todos.

"Sonhar, nunca desistir
Ter fé, pois fácil não é, nem vai ser
Tentar até esgotar as forças"

Resumo

Neste trabalho, são propostas condições para a síntese de controladores robustos para a estabilização de sistemas lineares discretos no tempo com estados atrasados, utilizando realimentação estática de saída (SOF, do inglês *Static Output Feedback*). São investigados os sistemas com atraso invariante e variante no tempo presente nos estados. As condições são propostas tanto para sistemas livres de incerteza quanto para sistemas sujeitos a incertezas. São propostas condições para a estabilização desses sistemas utilizando uma lei de controle que permite realimentar a saída atual e a saída atrasada quando o valor do atraso está disponível em tempo real. As condições são desenvolvidas utilizando candidatas a função de Lyapunov-Krasovskii (L-K) que, no caso incerto, são dependentes de parâmetros. As incertezas são descritas na forma politópica e, portanto, os modelos desses sistemas pertencem a politopos cujos vértices são conhecidos. A técnica utilizada permite projetar um único controlador válido para todo o domínio de incertezas. As condições obtidas são estendidas para o projeto de controladores que asseguram um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$. Em todos os casos, as formulações dependem de parâmetros que, uma vez conhecidos, resultam em um problema convexo formulado em termos de desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*). Por meio de uma busca linear nesses parâmetros é possível encontrar controladores que reduzem ainda mais o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, reduzindo o conservadorismo das estimativas. Exemplos numéricos são utilizados para ilustrar o uso das condições desenvolvidas.

Palavras-chave: Sistemas discretos no tempo com atraso nos estados. Realimentação estática de saída. Controle Robusto $\mathcal{H}_\infty$. Atraso invariante no tempo. Atraso variante no tempo. Incertezas politópicas. Funções de Lyapunov-Krasovskii dependente de parâmetros. Otimização.

Abstract

Conditions for the synthesis of robust controllers stabilizing discrete time systems with delayed states are proposed in this work by using static output feedback (SOF). The systems with time invariant delay as well as those with time varying delay are investigated. The proposed stabilizing conditions for both precisely known systems and uncertain ones. These conditions employ a control law that allows to feedback the current output and the delayed output whenever the delay value is available on real time. The conditions are developed by using Lyapunov-Krasovskii function candidates that are parameter dependents in the uncertain case. The uncertainties are described in polytopic form, and therefore, belong to a polytope whose vertices are known. The technique develops allows only one controller that is valid for all uncertain domains. The conditions obtained are extended to the design of controllers that ensure $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed cost. In all cases, the formulations depend on parameters that, once they are known, yield a convex optimization problem formulated in terms of Linear Matrix Inequalities (LMIs). By means of a linear search on such a parameters, it is possible to find controllers that reduce the $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed cost and the conservatism of the $\mathcal{H}_\infty$ estimates. Numerical examples are provided to illustrate the usefulness of the proposed approach.

Key-words: Discrete-time systems with delayed states. Static output feedback. Robust $\mathcal{H}_\infty$ Control. Time-invariant delay. Time-varying delay. Polytopic Uncertainties. Parameter-Dependent Lyapunov-Krasovskii Functions. Optimization.

Sumário

Lista de Tabelas

Acrônimos

SISO	Single Input - Single Output (uma entrada e uma saída)
MIMO	Multiple input - Multiple output (múltiplas entradas e múltiplas saídas)
SOF	Static Output Feedback (realimentação estática de saída)
DOF	Dynamic Output Feedback (realimentação dinâmica de saída)
BMI	Bilinear Matrix Inequality (desigualdade matricial bilinear)
LMI	Linear Matrix Inequality (desigualdade matricial linear)
L-K	Lyapunov-Krasovskii

Notação

$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
n	representa a ordem de sistemas
$\mathbb{R}^n$	espaço de vetores com n entradas
$\mathbb{R}^{n\times m}$	espaço das matrizes reais com dimensões $n \times m$
$\mathbf{I}$	matriz Identidade de dimensões adequadas. Se é incluído um sub-índice, esse representa as dimensões da matriz
$\mathbf{0}$	matriz de zeros de dimensões adequadas. Se é incluído um sub-índice, esse representa as dimensões da matriz
M^T	transposto de M
M^{-1}	inversa de M
N	representa o número de vértices de um politopo
θ	representa as incertezas de um sistema
$M > 0 (M < 0)$	indica que M é simétrica e definida positiva (negativa)
$M \geq 0 (M \leq 0)$	indica que M é simétrica e semidefinida positiva (negativa)
x_k	representa $x(k)$, o vetor de estados sistema
z_k	representa $z(k)$, a saída ponderada de um sistema
w_k	representa $w(k)$, entrada exógena de um sistema
y_k	representa $y(k)$, a saída de um sistema
d_k	representa o valor do atraso no instante de amostragem k
$\overline{d}$	representa atraso máximo
$\underline{d}$	representa o atraso mínimo
δ	$\delta = \overline{d} - \underline{d}$, representa o intervalo de variação do atraso
η	$\eta = k - d$ representa um sistema com atraso invariante nos estados $\eta = k - d_k$, representa um sistema com atraso variante nos estados
$\star$	representa elementos ou blocos simétricos em relação à diagonal principal em matrizes simétricas
$\bullet$	representa um bloco matricial cujo o valor é irrelevante
$\doteq$	equivalência
$\in$	pertence a
γ	custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ da relação entre a entrada de pertubação, w_k, e a saída de ponderação, z_k. Quando apresenta subíndice, indica o valor do atraso para o qual foi calculado
$\bar{\sigma}$	valor singular máximo

sup	representa o valor supremo de um função
$\|\cdot\|$	representa a norma euclidiana de um vetor no $\mathbb{R}^n$
μ	$\mu = \gamma^2$, representa uma mudança de variável
$V(x_k)$	representa a função de energia do sistema
$\Delta V(x_k)$	representa a variação de $V(x_k)$ em relação a k ao longo das trajetórias do sistema

Capítulo 1

Introdução geral

1.1 Introdução

Os sistemas de controle constituem elementos fundamentais para assegurar desempenho e segurança em importantes atividades industriais da sociedade. Várias situações comuns do dia a dia dependem de sistemas de controle como por exemplo, processos econômicos, sistemas de transporte, sistemas robóticos, sistemas de manufatura e quaisquer operações industriais que envolvam o controle de temperatura, pressão, nível, vazão, viscosidade, umidade, entre outras [Nis12, DB09]. Essas situações são caracterizadas por apresentarem especificações e objetivos diversificados [Oga10, DB09, ÅH01]. No controle do nível em um tanque, por exemplo, é desejado que o controlador mantenha o nível em um valor de operação pré-estabelecido. Em situações similares a essa, abordagens clássicas para o projeto de controladores utilizam métodos baseados em ferramentas gráficas, como os métodos da resposta em frequência (diagramas de Bode, Nyquist e Nichols) e o método do lugar geométrico das raízes possibilitam o projeto de sistemas estáveis e que satisfazem um conjunto aceitável de especificações de desempenho [Oga10, DB09, Gon06, Tak98, ÅH01, BG05].

No entanto, existem situações em que o sistema real apresenta mudanças significativas em sua estrutura ao longo do processo. É o caso, por exemplo, do controle de temperatura em um reator usado para a fabricação de polímeros. Nesse processo, a qualidade e a quantidade do produto final obtido dependem diretamente do controle eficiente da temperatura [DvHK$^+$05, HKNC13]. Porém, esse processo industrial, assim como outros em geral, estão sujeitos a mudanças provocadas por variação nos parâmetros, mudanças no ponto operacional, ruídos de sensor, dinâmicas não modeladas, entre outras. Logo, sempre existem diferenças entre o sistema real e o modelo utilizado para representá-lo. Essas diferenças ou erros, chamadas de incerteza, precisam ser consideradas no projeto dos controladores, já que é preciso garantir o desempenho do sistema em malha fechada frente a essas variações, obtendo-se assim um sistema de controle robusto [LMP04, ZGD96].

Para tratar a presença de incertezas, é preciso definir o modelo matemático que represente o comportamento nominal do sistema e seus desvios, ou seja, as incertezas associadas. Quanto ao modelo matemático, os sistemas lineares incertos podem ser representados de várias maneiras, através de modelos linguísticos, gráficos, estatísticos, baseado na relação de entrada-saída e por equações em espaço de estados, sendo que as duas últimas abordagens sãos as mais comuns. [Ama06]. Nos sistemas descritos por funções de transferência as incertezas aparecem na função de transferência e são utilizadas técnicas clássicas de controle, geralmente no domínio da frequência, para análise da estabilidade e síntese de controladores, como por exemplo margem de ganho e fase no critério de Nyquist. Nesse contexto, o problema de analisar a estabilidade do sistema e projetar um controlador que o mantenha estável em malha fechada fechada e, ao mesmo tempo, garanta certo desempenho na presença de incertezas, tem sido muito estudado, e muitas soluções estão disponíveis na literatura, como por exemplo as técnicas de *loop shaping* [FHM93] e análise μ [PDB93]. Entretanto, apesar de muito utilizada, a abordagem por função de transferência apresenta algumas desvantagens expressivas que limitam sua aplicação. É o caso por exemplo, de sistemas de alta complexidade nos quais é necessário uma redução de modelo como passo inicial de projeto, o que geralmente implica na negligência de dinâmicas de alta frequência. Além disso, a abordagem também tem a limitação de não poder ser aplicada a sistemas variantes no tempo [Ama06], como é o caso de reatores de polímeros, nos quais a incrustação de materiais nas paredes do tubo altera o coeficiente de transferência térmica entre casco e tubo, alterando as características do processo ao longo do tempo. Outra limitação importante é que para sistemas multivariáveis, nos quais pretende-se controlar diversas variáveis simultaneamente, os métodos de margem de ganho e fase utilizados para análise e síntese em sistemas SISO (do inglês, *Single Input − Single Output*) não conduzem a uma indicação correta de robustez quando o ganho e a fase do sistema variam simultaneamente [ZGD96]. Diante do que foi discutido, devido a características do processo, há situações em que a análise e síntese clássica de controladores não asseguram um bom desempenho. Quanto a forma de descrição das incertezas, elas podem ser representadas, por exemplo, como incertezas limitadas em norma, incertezas lineares fracionais ou incertezas politópicas, dentre outras [ZD98, GPK05]. A última é uma das maneiras mais utilizadas para descrever as variações dos parâmetros. Nessa representação, as matrizes do sistema incerto formam uma conjunto poliedral limitado convexo e com um número finito de vértices conhecidos. Todo elemento no politopo pode ser obtido por uma combinação convexa desses vértices. Nesse caso, a análise da estabilidade e do desempenho do sistema pode ser verificada utilizando-se somente os vértices do politopo [Gon06, PG07, KKL07].

Por causa das limitações descritas anteriormente, comumente utiliza-se a representação dos sistemas por equações diferenciais, representadas no espaços de estados. Essa abordagem baseada na análise no domínio do tempo, pode ser usada em sistemas não-lineares, invariantes ou

variantes no tempo e pode tratar sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO, do inglês *Multiple input − Multiple output*) [Oga10].

Dentre as abordagens baseadas em espaço de estados, uma solução comum para o controle de sistemas é a obtenção de uma lei de controle por realimentação estática de estados que garanta a estabilidade em malha fechada do sistema incerto [BPG89]. Porém, essa abordagem é bastante restritiva do ponto de vista prático, já que, devido a dificuldades técnicas e/ou econômicas, o vetor de estados nem sempre é completamente acessível. Um exemplo são sistemas de ordem elevada, nos quais o grande número de variáveis de estados exigem um grande número de sensores e atuadores para a implementação do controlador, o que encarece o projeto [Sou94]. Para esses problemas, duas soluções podem ser utilizadas, controlador baseado em observador ou controlador por realimentação estática ou dinâmica (DOF, do inglês *dynamic output feedback*) de saída [MBB04]. A primeira tem desvantagens que inviabilizam sua aplicação: o sistema deve ser observável e como o observador é baseado no modelo da planta, para um boa estimação dos estados, o observador deve ser mais rápido que o sistema em malha fechada para garantir que o erro de estimação convirja rapidamente para zero. Porém, isso implica em uma banda de passagem grande, que transmite ruídos de alta frequência oriundos da medição. Além do mais, a adição do observador reduz a margem de estabilidade e eleva a ordem do sistema resultante [Oga10]. Já a segunda tem a vantagem de ser simples de implementar, necessitando para isso apenas medir as variáveis de saída da planta em tempo real. Porém, mesmo com uma quantidade expressiva de trabalhos sobre o assunto e estratégias diferentes para resolvê-lo, como, por exemplo, técnicas de atribuição de estrutura de autovalores, técnicas baseadas em otimização, propriedades da estrutura do sistema em malha aberta, entre outras [MBB04], a realimentação estática de saída ainda é uma questão aberta na Teoria de Controle devido à dificuldade de se resolver o problema analiticamente e/ou numericamente. Essa dificuldade é resultado da natureza não convexa do problema [SADG97, BB05]. Geralmente, esse problema é descrito como uma desigualdade matricial bilinear (BMI, do inglês *Bilinear Matrix Inequality*), que é uma formulação não convexa e tem um algoritmo de solução *NP-hard*, o que significa um tempo computacional necessário para resolver esse tipo de problema que cresce exponencialmente em função do tamanho da entrada de dados. Portanto, problemas de grandes dimensões podem não ter solução computacional. Maiores detalhes sobre a dificuldade computacional em resolver o problema SOF podem ser visto em [SADG97].

Outro fator que dificulta o projeto de síntese de controladores por realimentação estática de saída é a imposição de índices de desempenho em malha fechada, como por exemplo, assegurar um custo $\mathcal{H}_\infty$ entre uma entrada de perturbação e uma saída de interesse do sistema.

Além disso, sistemas físicos geralmente apresentam atrasos na entrada ou saída e/ou nos estados. Como é bem conhecido, o atraso introduz uma defasagem nos sistemas, fazendo com

que esses sejam de fase não-mínima. Normalmente as consequências do atraso são a perda de desempenho e até mesmo da estabilidade [Nic01].

Em relação aos problemas mencionados, a abordagem por realimentação estática de saída é uma boa alternativa para a síntese de controladores, pois permite que os sistemas controlados sejam incertos e contenham atrasos, podendo ser facilmente implementada na prática. Além do mais, a SOF é um problema fundamental da Teoria de Controle, uma vez que a síntese de controladores dinâmicos pode ser tratada coma a síntese de controladores dinâmicos utilizando-se um sistema aumentado [SADG97].

1.1.1 Problema básico

Seja o sistema linear discreto no tempo, livre de atrasos, dado por:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_u u_k \\ y_k &= Cx_k \end{aligned} \tag{1.1}$$

em que k corresponde à k-ésima amostragem, $x_k = x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados no instante k, $u_k = u(k) \in \mathbb{R}^m$ é o sinal de controle e $y_k = y(k) \in \mathbb{R}^f$ é a saída do sistema. Seja a lei de controle por realimentação estática de saída dada por:

$$u_k = Ky_k \tag{1.2}$$

O sistema em malha fechada, obtido aplicando-se (1.2) em (1.1), é dado por:

$$x_{k+1} = (A + B_u KC)x_k \tag{1.3}$$

Formalmente, o problema de realimentação estática de saída pode ser estabelecido como:

Problema 1.1 (Problema de estabilização)**.** *Determinar uma matriz de ganho $K \in \mathbb{R}^{m\times f}$ tal que a lei de controle linear (1.2) aplicada em (1.1) resulte em um sistema de malha fechada (1.3) que seja assintoticamente estável.*

Utilizando o Segundo Método de Lyapunov (veja no Capítulo 2), o sistema é assintoticamente estável se e somente se existir uma matriz simétrica $W = P^{-1} > 0$ tal que:

$$\begin{bmatrix} W & \star \\ AW + B_u KCW & W \end{bmatrix} > 0 \tag{1.4}$$

em que $\star$ representa blocos simétricos em relação a diagonal principal. Veja que a desigualdade obtida não é convexa devido ao termo $BKCW$ que apresenta o produto entre as matrizes desconhecidas K e W. Na verdade, esse termo representa uma BMI. Portanto, embora a realimentação estática de saída tenha a vantagem de ser facilmente empregada na prática, já

que necessita apenas da medida das variáveis de saída em tempo real do sistema para construir a lei de controle, o que diminui custos, por exemplo, ela tem a desvantagem de gerar uma formulação matemática de difícil solução. Note que se em (1.1) $C = I$, (1.2) recupera a lei de controle por realimentação de estados. Nesse caso, a desigualdade (1.4) é dada por

$$\begin{bmatrix} W & \star \\ AW + B_u KW & W \end{bmatrix} > 0 \tag{1.5}$$

Fazendo a mudança de variável dada por $Z = KW$, a desigualdade (1.5) torna-se convexa e pode, portanto ser resolvida por pacotes computacionais especializados em LMIs, e o ganho K é dado por $K = ZW^{-1}$.

1.1.2 Problemas estudados

Neste trabalho, além da dificuldade de se resolver o problema básico de realimentação estática de saída, são explorados outros aspectos de interesse prático que potencializam a dificuldade de solução do problema. O primeiro deles é considerar que o sistema possui atraso em seus estados. Será trabalhado dois tipos de atraso, o atraso fixo no tempo, portanto os estados discretos estão atrasados de d amostragens. Isso significa o sistema real possui atrasos e que esse é constante em tudo o processo, mesmo que não seja conhecido. É considerada também uma situação mais abrangente, que é atraso variante no tempo, portanto os estados estão atrasados de d_k amostragens, o que significa pensar que o atraso presente no sistema muda a cada instante durante o processo. Sendo assim, o sistema discreto dado por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + A_d x_\eta + Bu \\ y_k &= Cx_k + C_d x_\eta \end{aligned} \tag{1.6}$$

em que $\eta = k - d$ representa um sistema com atraso invariante nos estados e $\eta = k - d_k$, um sistema com atraso variante nos estados. Outro aspecto considerado nesse trabalho será a presença de incertezas no sistema, as quais serão assumidas como incertezas politópicas. Isto é, as matrizes do sistema dependem de forma afim de um vetor de parâmetros $\theta \in \mathbb{R}^N$ que pertence a um politopo convexo. Seguindo o que normalmente é feito na área de controle robusto, inicialmente, trabalharemos apenas com a estabilização desses sistemas, ou seja, pretende-se desenvolver condições para o projeto de controladores para sistemas incertos com atraso fixo e variantes no tempo de forma que o sistema em malha fechada resultante seja assintoticamente estável.

Porém, um outro aspecto importante a ser considerado é a imposição de critérios que avaliem o desempenho desses sistema. Neste trabalho, usaremos como critério de desempenho a norma $\mathcal{H}_\infty$, que tem sido utilizada para avaliar a energia da saída do sistema na presença de entrada de pertubações. Sendo assim, pretende-se desenvolver condições para o projeto de controladores

para sistemas incertos discretos no tempo com atraso fixo ou variante no tempo que garanta um desempenho especificado.

Várias abordagens presentes na literatura tentam resolver problemas relacionados a realimentação estática de saída, semelhantes aos abordados nesse trabalho. A síntese de controladores para sistemas discretos no tempo livre de atraso foi estudada por exemplo em [CT99]. Nesse trabalho as condições apresentadas são apenas suficientes, já que dependem de uma representação particular do espaço de estados utilizado para descrever o sistema e, encontrar essa representação de estados ainda é um problema em aberto. A abordagem é baseada em uma condição de igualdade matricial sobre a matriz de Lyapunov e os resultados obtidos também abrangem sistemas com incertezas e controle $\mathcal{H}_\infty$. Em [SGC97] são utilizadas transformações de variáveis para contornar o problema de não-convexidade que aparece na síntese de controladores via SOF. A técnica tem a desvantagem de não poder ser aplicada a sistemas com incerteza, pois nesse caso, é impossível recuperar as matrizes de busca. Outra abordagem é apresentada em [PA01]. Nesse artigo é estudado a síntese de controladores robustos $\mathcal{H}_2$ via realimentação estática de saída para sistemas contínuos no tempo utilizando um processo iterativo de dois passos, baseado na introdução de variáveis de folga e na síntese de um ganho inicial de realimentação de estados. Essa mesma abordagem é estudada em [MBB04]. Nesse artigo é desenvolvida uma formulação LMI para sistemas discretos no tempo livre de atrasos e sujeito a incertezas. A formulação também é baseada em uma técnica de dois passos e na introdução de variáveis de folga. No primeiro passo é resolvido um problema de realimentação de estados. O ganho obtido é usado como um dos parâmetros de entrada para o segundo passo, que é a síntese do controladores via SOF. Uma estratégia similar a apresentada em [MBB04] foi investigada em [MOP09] para a síntese de controladores robustos via SOF para sistemas discretos no tempo. Em relação a condição desenvolvida em [MBB04], a técnica tem a vantagem de não ser necessário que o sistema seja estabilizável por um controlador de estados robusto. Já, em relação a outras técnicas apresentadas na literatura, a técnica tem como vantagem a possibilidade de projetar ganhos robustos de saída a partir de ganhos de estado dependentes de parâmetros. Em [HRMP09] é feita uma extensão da abordagem anterior em que segundo estágio da síntese é projetado um controlador robusto com custo garantido $\mathcal{H}_2$. Outra técnica de dois passos para a síntese de controladores via SOF com custo garantido é apresentada em [BB05]. Nesse trabalho foi feito uma extensão para o caso discreto dos resultados apresentados em [PP01]. Em [PP01] a condição é expressa como uma desigualdade matricial que é não linear nas variáveis desconhecidas e uma condição linear é obtida quando é fixada uma estrutura da matriz de Lyapunov. Já, em [BB05] o problema de não-convexidade é resolvido sem fixar a estrutura da matriz de Lyapunov. Para isso, é utilizada a técnica de dois passos, sendo que no primeiro passo é calculada a matriz de Lyapunov que é utilizada no segundo passo para calcular o ganho SOF. Por meio de uma

transformação de similaridade do sistema e uma transformação de congruência na matriz de Lyapunov, são obtidas condições necessárias e suficientes via LMI. A técnica não é desenvolvida para sistemas com incertezas, porém, a extensão é imediata.

Uma abordagem que tem encontrado ressonância na comunidade de Teoria de Controle é baseada numa aproximação interna, considerando apenas um subconjunto das soluções possíveis, do domínio de soluções. Nesse contexto encontram-se os trabalhos [KKL07, KS13, EPA14], nos quais a ideia principal é encontrar uma aproximação interior convexa dentro do conjunto não-convexo de soluções. [CY14] desenvolveram condições para a projeto de controladores SOF com minimização do custo $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas discretos livres de incertezas. Nesse trabalho condições convexas são obtidas através da fixação de variáveis escalares, as quais são otimizadas por um processo iterativo que em cada iteração é resolvido um problema LMI.

Em relação a estabilização de sistemas com atraso nos estados, soluções podem ser encontradas por exemplo em [GLWW04, HWLS08] para a síntese do ganho SOF. Em [GLWW04] são projetados controladores SOF e DOF para sistemas discretos com atraso variante nos estados. O procedimento de síntese utiliza uma formulação não-convexa resolvida com o auxílio do algoritmo do cone complementar [GOA97]. Esse algoritmo de otimização é utilizado em [HWLS08] para a síntese de controladores dinâmicos e estáticos via realimentação de saída, porém, foi utilizada a técnica da matriz de peso livre para reduzir o conservadorismo da solução.

A minimização do custo garantido é explorada em [SKYK99, GT15]. Em [SKYK99] é utilizado um sistema auxiliar sem atrasos para a síntese de controladores por realimentação de estados com custo $\mathcal{H}_\infty$ garantido. O atraso é considerado uma pertubação limitada em norma do sistema. Em [GT15] são propostas condições para síntese de controladores dinâmicos com custo garantido para sistemas discretos incertos com atraso variante no vetor de estados. A técnica é baseada em um procedimento iterativo que a cada passo resolve uma LMI.

1.2 Proposta de trabalho

1.2.1 Objetivos

Neste trabalho é investigada a classe de sistemas lineares incertos discretos no tempo com atraso no vetor de estados (1.6). O objetivo é desenvolver condições na forma de desigualdades matriciais baseadas nos resultados de [CY14] para o projeto de controladores estabilizantes robustos e controladores robustos $\mathcal{H}_\infty$.

1.2.2 Metodologia

O projeto desenvolvido foi baseado em estudos teóricos. Primeiramente, foi realizada uma revisão bibliográfica sobre o problema de realimentação estática de saída e as abordagens dispo-

níveis para resolvê-lo já que trata-se, ainda, de um problema aberto. A revisão foi acompanhada de simulações e testes computacionais sobre os métodos estudados, bem como comparações e análise de resultados. Para isso foi necessário o entendimento e utilização de ferramentas da álgebra linear como Lema de Finsler, complemento de Schur, *bounded real lemma* entre outras, bem como conceitos da Teoria de Controle. Utilizamos as técnicas de controle robusto para análise da estabilidade e para a síntese de controladores via LMIs. O trabalho desenvolvido foi baseado em [CY14]. Após a revisão bibliográfica, a fim de testar a potencialidade da técnica desenvolvida em [CY14], o termo com atraso foi incorporado a equação dinâmica do sistema, e uma função de Lyapunov-Krasovskii (L-K) simplificada foi utilizada para obter condições independentes do atraso para a síntese de controladores estabilizantes para sistemas com atraso constante e incerto. Como os resultados apresentados foram satisfatórios, foi desenvolvida uma nova condição, utilizando uma L-K mais completa, obtendo-se condições dependentes do atraso para a síntese de controladores para sistemas com atraso variante. Todas as condições desenvolvidas foram implementadas computacionalmente utilizando-se o *software MATLAB®*, o *parser YALMIP* [Löf04] e o *toolbox SeDuMi* [Stu99] e testadas em exemplos pertencentes a classe de problemas estudados. Os resultados obtidos foram avaliados e, sempre que possível, comparados a outros disponíveis na literatura.

1.3 Comentários gerais

São supostos que todos sistemas incertos abordados neste trabalho possuem matrizes incertas que pertencem a politopos convexos com número de vértices finitos e conhecidos. Assim, se $M(\theta)$ $\in \mathcal{M}$ então verifica-se

$$\mathcal{M} = \left\{ \mathcal{M}(\theta) \in \mathbb{R}^{n_l \times n_c} \mid M(\theta) = \sum_{i=1}^{N} \theta_i M_i, \theta \in \Theta \right\}$$

em que n_l e n_c correspondem ao número de linhas e número de colunas da matriz, respectivamente. E $\theta \in \Theta$ dado por

$$\Theta = \left\{ \theta : \sum_{i=1}^{N} \theta_i = 1,\ \theta_i \geq 0,\ i \in \mathcal{I}[1, N] \right\}$$

M é qualquer matriz associada ao modelo do sistema a ser controlado. Os resultados dos exemplos numéricos apresentados neste trabalho foram obtidos a partir da programação das desigualdades matriciais, utilizando-se o *software MATLAB®*, o *parser YALMIP* e o *toolbox SeDuMi*.

1.4 Organização do documento

Esta dissertação foi organizada de forma a reproduzir, de certa maneira, o percurso feito no desenvolvimento do projeto. Sendo assim, este documento encontra-se organizado da seguinte maneira: No Capítulo 2 são apresentados as principais ferramentas matemáticas utilizadas nesta dissertação e os principais conceitos relacionados os problemas abordados, como estabilidade, controle $\mathcal{H}_\infty$, sistemas com incertezas e sistemas com atraso nos estados. No Capítulo 3 são desenvolvidas condições para a estabilização de sistemas discretos com atraso invariante no vetor de estados utilizando uma função de Lyapunov-Krasovskii simplificada. Também são incluídas condições para a estabilização robusta, controle $\mathcal{H}_\infty$ e controle $\mathcal{H}_\infty$ robusto para a mesma classe de sistemas. As condições propostas são independentes do atraso. Exemplos numéricos ilustram a aplicabilidade das condições propostas. No Capítulo 4 são desenvolvidas condições para a estabilização e síntese de controladores $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas discretos com atraso variante no vetor de estados utilizando uma função de Lyapunov-Krasovskii mais completa.Em ambos os casos, é abordado o controle robusto. As condições desenvolvidas são dependentes da faixa de variação do atraso. São utilizados exemplos para mostrar a utilização dos métodos desenvolvidos. No Capítulo 5 são apresentados comentários sobre o trabalho desenvolvido bem como a proposta de continuidade para o mesmo. No Apêndice A são apresentadas as provas de algumas ferramentas matemáticas utilizadas no desenvolvimento dos métodos propostos neste trabalho.

Capítulo 2

Preliminares e definições

Neste capítulo são apresentadas as principais ferramentas matemáticas utilizadas no desenvolvimento das condições propostas nesse trabalho. A partir dessas ferramentas é possível contornar alguns problemas de não-convexidade que aparecem naturalmente no desenvolvimento de condições de síntese de controladores via realimentação estática de saída. Também é apresentada uma breve revisão dos principais conceitos da Teoria de Controle explorados nesta dissertação. Observe que o escopo desse trabalho são sistemas discretos e, portanto, as preliminares e definições são apresentadas apenas no domínio discreto.

2.1 Principais ferramentas matemáticas

Transformações de congruência são ferramentas utilizadas para converter desigualdades matriciais não convexas em LMIs. A prova da Transformação de Congruência está no Apêndice A.1.

Lema 2.1 (Transformação de Congruência)**.** *Duas matrizes simétricas $X, Y \in \mathbb{R}^n$ são congruentes se existe uma matriz não-singular $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $Y = G^T XG$. Para essas matrizes, se X e Y são congruentes então $Y > 0$ se e somente se $X > 0$.*

Lema 2.2 (Complemento de Schur [BEGFB94])**.** *O conjunto de desigualdades não lineares dadas por*

$$R(x) > 0, \quad Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0 \tag{2.1}$$

é equivalente a

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0 \tag{2.2}$$

em que $Q(x) = Q(x)^T$, $R(x) = R(x)^T$ e $S(x)$ dependem do parâmetro afim x. Em outras palavras, o conjunto de desigualdades não lineares (2.1) pode ser representado como a LMI (2.2).

O Complemento de Schur é uma ferramenta matemática que possibilita converter desigualdades matriciais não lineares (convexas) para a forma de LMIs (ou vice-versa). A prova do Complemento de Schur pode ser encontrada no Apêndice A.2.

Lema 2.3. *[ZK88] Para matrizes X, Y e $J > \mathbf{0}$, com dimensões apropriadas, é verificado que*

$$XY + Y^T X^T \leq XJX^T + Y^T J^{-1} Y. \tag{2.3}$$

Lema 2.4. *[CY14] Para matrizes $\mathbb{T}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{L}$, $\mathbb{M}$, com dimensões apropriadas e um escalar β, se*

$$\begin{bmatrix} \mathbb{T} & \star \\ \mathbb{L}\mathbb{M} & -\beta\mathbb{L} - \beta\mathbb{L}^T + \beta^2\mathbb{P} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \tag{2.4a}$$

então, tem-se que

$$\mathbb{T} + \mathbb{M}^T\mathbb{P}\mathbb{M} < \mathbf{0}. \tag{2.4b}$$

Veja a prova desse Lema no Apêndice A.3.

Lema 2.5. *[CY14] Para matrizes $\mathbb{V}$, $\mathbb{Q} > \mathbf{0}$ com dimensões apropriadas e um escalar α, se*

$$-(\mathbb{V} - \alpha\mathbb{Q})\mathbb{Q}^{-1}(\mathbb{V} - \alpha\mathbb{Q})^T \leq \mathbf{0}, \tag{2.5a}$$

então,

$$-\mathbb{V}\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{V}^T \leq -\alpha\mathbb{V} - \alpha\mathbb{V}^T + \alpha^2\mathbb{Q}. \tag{2.5b}$$

A prova é mostrada no Apêndice (A.4).

2.2 Desigualdades matriciais lineares

Uma desigualdade matricial linear (LMI) é uma expressão da forma [BEGFB94]:

$$F(x) := F_0 + x_1 F_1 + \ldots x_m F_m > 0. \tag{2.6}$$

em que $x = (x_1, \ldots, x_m)$ é uma vetor de m números reais chamados de variáveis de decisão. $F_0, \ldots, F_m$ são matrizes simétricas reais, ou seja, $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i = 0 \ldots m$ para algum $n \in \mathbb{Z}_+$. A notação $>$ é utilizada para indicar sinais de matrizes, portanto significa que $F(x)$ em (2.6) é definida positiva, ou seja $u^T F(x) u > 0$ para todo $u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0$. De forma equivalente, dizemos que todos os autovalores de $F(x)$ são positivos.

Definição 2.1 (Desigualdade Linear Matricial [SW99])**.** *Uma desigualdade linear matricial (estrita) é uma desigualdade*

$$F(x) > 0. \tag{2.7}$$

em que F é uma função em afim em x mapeando uma espaço vetorial de dimensão finita $\mathbb{V}$ para o conjunto $\mathbb{S}^n = \{M \mid \exists n > 0 \text{ tal que } M = M^T \in \mathbb{R}^{n\times n}\}$, de matrizes simétricas reais.

A desigualdade dada em (2.7) pode ser também não-estrita, isto é $F(x) \geq 0$, o que indica uma matriz semidefinida positiva, sendo os seus autovalores não-negativos. De modo semelhante, para $F(x) < 0$ a matriz é definida negativa com autovalores negativos; $F(x) \leq 0$ a matriz é semidefinida negativa sendo os seus autovalores não-positivos.

A LMI dada em (2.7) é interessante por definir uma restrição convexa em x. Isto é, o conjunto dado por $\mathcal{X} := \{x \in \mathbb{R}^m | \, F(x) > 0\}$ é convexo. Essa propriedade é importante porque problemas de otimização envolvendo minimização (ou maximização) de funções convexas possuem apenas um mínimo (ou máximo) global. Esses problemas de otimização são do tipo convexo e incluem problemas de programação linear e mínimos quadrados. Esses problemas têm uma teoria bem desenvolvida, aparecem em uma variedade de aplicações e podem ser resolvidos numericamente de forma eficiente [BV04]. Existem dois problemas genéricos relacionados ao estudo de LMIs. O primeiro é chamado de Problema de Factibilidade e consiste em determinar se, dado um vetor $x \in \mathcal{X}$ a desigualdade $F(x) > \mathbf{0}$ é satisfeita. Se existe x que satisfaça $F(x) > \mathbf{0}$, isto é $x \in \mathcal{X}$, então o problema é dito factível, caso contrário, é dito infactível. O segundo é o problema de otimização e consiste em determinar o valor ótimo para uma função objetivo sujeita a restrições LMIs. Esses problemas podem ser resolvidos com eficientes procedimentos numéricos implementados nos chamados *LMIs-solvers*. Hoje existe uma grande quantidade de pacotes computacionais especializados na solução desse tipo de problema, são programas de características próprias e de fácil utilização [PG07], como por exemplo, o *LMILAB* [GNLC94], *SeDuMi* [Stu99] e *SDPT3* [TTT08]. A grande vantagem da formulação de problemas em LMIs, é que a solução sempre pode ser obtida com aceitável precisão e em tempo polinomial, devida a existência de algoritmos eficientes. Conforme estabelecido em [BEGFB94, pág.12], resolver o problema significa determinar se o problema é factível ou não.

2.3 Estabilidade

A estabilidade é um dos temas mais antigos nas ciências básicas e aplicadas [Bha07]. Ela é o desempenho mínimo de todo sistema de controle. Por essa razão, a análise da estabilidade é o ponto inicial dos projetos de controle. Antes de definir o conceito de estabilidade, é preciso definir o conceito de ponto de equilíbrio. Para isso, considere o sistema linear discreto no tempo descrito por

$$x(k+1) = f(x(k), k), \quad x(k_0) = x_0, \tag{2.8}$$

em que k é o período de amostragem, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado e $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ uma função assumindo valores vetoriais, com componentes

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, k) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad i \in \mathcal{I}[1, n].$$

Um ponto de equilíbrio ou estado de equilíbrio é um vetor constante x_{eq} tal que

$$x_{eq} = f(x_{eq}, k) \forall k.$$

Portanto, $x = x_{eq}$ é uma solução constante, também denominada de solução de equilíbrio da equação a diferenças (2.8). É possível considerar, sem perda de generalidade, que o ponto de equilíbrio sempre ocorre na origem, através da mudança de variável

$$z_k \doteq x_k - x_{eq}.$$

Logo, reescrevendo (2.8)

$$z(k+1) = f(z_k + x_{eq}, k) - x_{eq} = g(z_k, k),$$

com $z = 0$ e $x = x_{eq}$, temos

$$f(0, k) = 0, \forall k.$$

A partir dessa mudança, são definidos os seguintes conceitos [Bha07]:

Definição 2.2. *Um estado de equilíbrio x_{eq} é estável se, para qualquer k_0 e qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(k_0, \epsilon)$ positivo tal que, se $\|x_0 - x_{eq}\| < \delta$, então $\|(x_0, k) - x_{eq}\| < \epsilon$ para todo $k \geq k_0$.*

Definição 2.3. *Um estado de equilíbrio x_{eq} é convergente ou atrativo, se, para qualquer k_0, existe $\delta_1 = \delta_1(k_0)$ tal que se $\|x_0 - x_{eq}\| < \delta_1$, então*

$$\lim_{k \to \infty} x(x_0, k) = x_{eq}.$$

Definição 2.4. *Um estado de equilíbrio x_{eq} é denominado assintoticamente estável se for estável e atrativo.*

Definição 2.5. *Um estado de equilíbrio x_{eq} é instável se existe $\epsilon > 0$ tal que para qualquer $\delta > 0$, existe x_0 tal que se $\|x_0 - x_{eq}\| < \delta$, então $\|x_{k_1} - x_{eq}\| \geq \epsilon$ para algum $k_1 > k_0$.*

Essas definições podem ser interpretadas geometricamente pelas ilustrações mostradas na Figura (2.1). Em A, a origem é estável, em B a origem é assintoticamente estável e em C, instável.

2.3.1 Estabilidade no sentido de Lyapunov

Seja o sistema linear discreto no tempo dado por:

$$x_{k+1} = Ax_k \tag{2.9}$$

Uma forma de verificar a estabilidade assintótica desse sistema é utilizar o Segundo Método de Lyapunov enunciado no Teorema a seguir

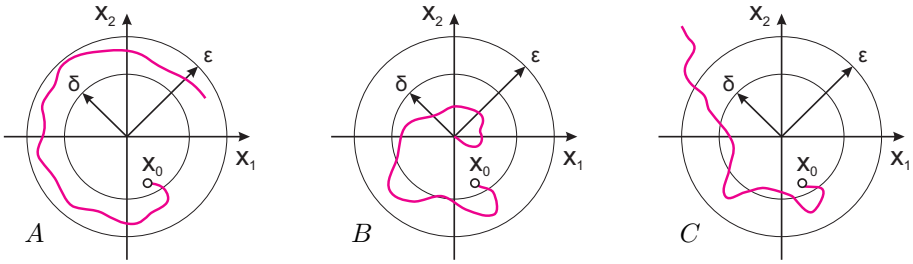


Figura 2.1: Ilustração dos conceitos de estabilidade. Adaptado de [Bha07].

Teorema 2.1 (Teorema de Lyapunov). *O sistema (2.9) é globalmente assintoticamente estável em torno da origem (ponto de equilíbrio do sistema) se existir uma função de valores reais $V(x_k)$, chamada de função de Lyapunov, tal que:*

i) $V(\boldsymbol{0}) = 0$, $\forall k \geq 0$,

ii) $V(x_k) \to \infty$ *quando* $\|x_\| \to \infty$,

iii) $V(x_k) > 0$, $\forall x_k \neq 0$, $\forall k \geq 0$,

iv) $\Delta V(x_k) < 0$, $\forall x_k \neq 0$, $\forall x_k \geq 0$, $\Delta V(x_k) = 0 \Longleftrightarrow x_k = 0$

em que $\Delta V(x_k)$ é a variação de $V(x_k)$ em relação a k ao longo das trajetórias do sistema.

O Teorema de Lyapunov associa a estabilidade com a energia do sistema. Logo, um sistema é estável quando sua energia total decresce ao longo do tempo, até atingir a origem, quando o sistema tem $\Delta V(x_k)$ nula. Isso significa que as variáveis de estado vão convergir para um ponto de equilíbrio. Logo $V(x_k)$ é uma função que representa a energia total do sistema. Geralmente, é muito difícil obter uma expressão analítica para energia do sistema, portanto, é difícil determinar uma função de Lyapunov. Uma escolha possível de candidata a função de Lyapunov é a forma quadrática dada por:

$$V(x(k)) = x^T(k)Px(k) > 0, \quad P = P^T > 0, \; P \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{2.10}$$

Observe que a escolha de função de Lyapunov quadrática atende aos três primeiros itens do Teorema de Lyapunov. Impondo-se o último item, ou seja, impondo-se que a diferença ao longo das trajetórias de x_k seja negativa, tem-se que

$$\begin{aligned} \Delta V(x(k)) &\doteq V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0 \\ &= x(k)^T A^T P A x(k) - x(k)^T P x(k) < 0 \\ &= x(k)^T [A^T P A - P] x(k) < 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Portanto, para a estabilidade de um sistema autônomo discreto é necessário que

$$A^T P A - P < 0, \quad P > 0$$

Manipulando as desigualdades acima, podemos escrever $P - A^T P P^{-1} P A > 0$ e utilizando o Complemento de Schur, Lema 2.2, com $Q(x) = P$, $S(x) = A^T P$ e $R(x) = P$, obtém-se a condição LMI dada por

$$\begin{bmatrix} P & A^T P \\ PA & P \end{bmatrix} > 0.$$

Esse desenvolvimento está por trás do Teorema a seguir.

Teorema 2.2 (Teorema de Lyapunov - Tempo discreto)**.** *O sistema linear discreto no tempo dado em (2.9) é (globalmente) assintoticamente estável se e somente se existe uma matriz simétrica $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que satisfaz a desigualdade matricial linear de Lyapunov*

$$\begin{bmatrix} P & A^T P \\ PA & P \end{bmatrix} > 0.$$

Portanto, para resolver um problema de análise utilizando o critério de Lyapunov, é preciso resolver um problema de otimização encontrando alguma matriz $P = P^T > \mathbf{0}$ que satisfaça uma restrição formulada em termos de uma LMI, como indicado pela desigualdade de Lyapunov.

2.3.2 Extensão para sistemas com incertezas politópicas

A partir do critério de estabilidade de Lyapunov por LMIs, é possível introduzir a ideia de controle robusto, que é verificar a estabilidade de uma família de sistemas ou um sistema incerto. Para discutir essa questão, considere primeiramente as definições

Definição 2.6 (Conjunto Poliedral)**.** *Intersecção de um número finito de subespaços fechados. Os conjuntos poliedrais são convexos e fechados.*

Definição 2.7 (Politopo)**.** *É um conjunto poliedral limitado. Pode ser visto como uma casca convexa de um conjunto finito de vértices, em que todo elemento do politopo pode ser gerado como uma combinação convexa dos seus vértices.*

Como exemplo, considere o sistema dado por (2.9) em que A é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto A é uma matriz incerta, em que os parâmetros incertos, a_1 e a_2, variam entre valores máximos e mínimos. A matriz A pode ser escrita como uma combinação convexa de 2^p vértices, em que p é a quantidade de entradas incerteza na matriz sistema

$$A(\theta) = A_1\theta_1 + A_2\theta_2 + A_3\theta_3 + A_4\theta_4$$

em que $\sum_{i=1}^{4} \theta_i = 1$ e $\theta_i \geq 0$. Essa matriz $A(\theta)$ pertence ao politopo mostrado na Figura 2.2. É a propriedade da convexidade que torna possível formular o problema da estabilidade de

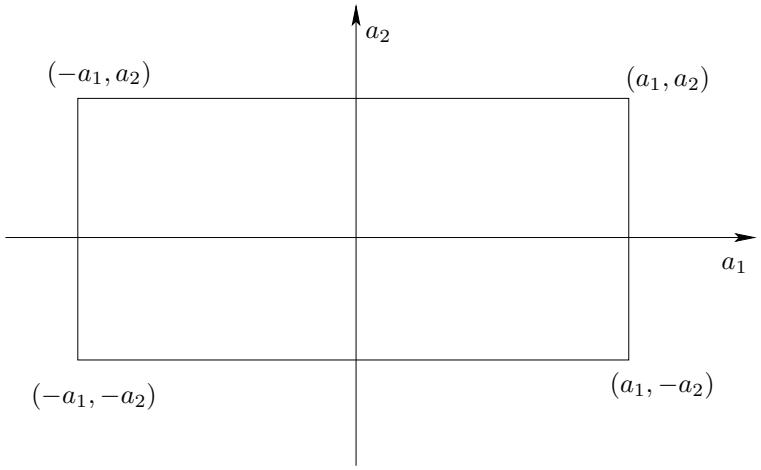


Figura 2.2: Exemplo de politopo com 4 vértices

sistemas incertos verificando a estabilidade de politopos e usando a Teoria de Lyapunov. Isto é, considere o sistema (2.9) com 4 vértices, com A pertencendo ao politopo $\mathcal{P}$, dado por

$$\mathcal{P} = \left\{ A(\theta) \mid A(\theta) = \sum_{i=1}^{N} \theta_i A_i, \theta_i \geq 0, \sum_{i=1}^{N} \theta_i = 1 \right\} \tag{2.12}$$

em que N é o número de vértices do politopo, $N = 2^p$. O sistema incerto (2.9) é dito quadraticamente estável se existe uma matriz $P = P^T > \mathbf{0}$ tal que

$$A^T P A - P < \mathbf{0}, \quad \forall A \in \mathcal{P}. \tag{2.13}$$

A definição de estabilidade quadrática impõe fixar uma única matriz de Lyapunov que satisfaz, de forma simultânea, todos os sistemas descrito pelo politopo, isto é, todas as matrizes $A(\theta) \in \mathcal{P}$. A formulação por estabilidade quadrática tem a vantagem de ser necessário verificar a estabilidade apenas dos N vértices do politopo, porém, tem a desvantagem de levar a resultados conservadores.

2.4 Controle $\mathcal{H}_\infty$

Sistemas de controle frequentemente estão sujeitos a perturbações tais como distúrbios externos, modificação da temperatura ambiente, rajadas de vento ou ruídos de medição entre outras. Esses distúrbios podem prejudicar o seu desempenho e até mesmo levá-los a instabilidade. Uma forma de avaliar o efeitos das perturbações nos sistemas é através da medida da relação de energia entre um sinal de entrada e uma saída do sistema. Assim podemos avaliar se uma variável de desempenho (sinal de erro, sinal de controle) se mantém pequena mesmo na presença de perturbações [Tro00]. Nesta seção utilizaremos a norma $\mathcal{H}_\infty$, que é uma medida de energia, para formular condições matemáticas relacionadas a análise de desempenho do sistemas lineares e síntese de controladores.

Conforme discutido por [COR] e [TIS07] [1], a partir do início da década de 1980, foram realizados diversos trabalhos sobre problemas de otimização e viabilidade baseados na norma $\mathcal{H}_\infty$. Em 1981, a publicação do artigo de George Zames, *Feedback and Optmal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative, Seminorms, and Approximate Inverse*[Zam81], foi um marco importante e estabeleceu um novo paradigma na Teoria de Controle de Sistemas. Na literatura podem ser identificadas duas fases, cada uma concentrada em abordagens distintas para realizar o Controle $\mathcal{H}_\infty$. A primeira foi desenvolvida para sistemas lineares invariantes no tempo, no domínio da frequência. Essa abordagem tem dois objetivos: projetar um controlador que atenue ao máximo os efeitos dos distúrbios na saída mesmo na presença de incertezas. Na segunda fase destacam-se as técnicas no domínio do tempo, formuladas em termos de equações de estado, possibilitando a generalização de sistemas invariantes no tempo para sistemas variantes no tempo e de sistemas lineares para sistemas não lineares. Uma referência importante para essa formulação foi o artigo publicado por John C. Doyle e colaboradores, em 1989, *State space solutions to standard $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ control problems*, no periódico *IEEE Transactions on Automatic Control* [DGKF89]. Projetos de controladores $\mathcal{H}_\infty$ tem sido desenvolvidos para resolver os mais diversos tipos de problema, entre eles, aplicações em em automóveis [MS08, LLGS12, HJK14], aviões [TKL07, ZQCY13], robótica [ZLFW12, GMP15] e sistemas elétricos de potência [Sou10, HZ11, ZH13].

2.4.1 Controle $\mathcal{H}_\infty$ e LMIs

Considere o diagrama de blocos mostrado na Figura 2.3, o qual mostra um sistema linear e invariante no tempo, livre de atraso. Nesse diagrama são considerados um sinal de distúrbio w

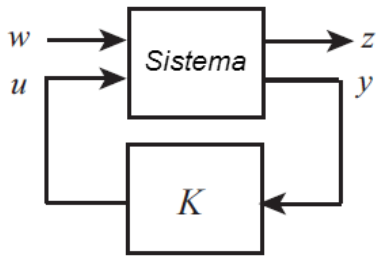


Figura 2.3: Diagrama de blocos para o controle $\mathcal{H}_\infty$. Adaptado de [TIS07].

que atua diretamente no sistema a ser controlado, um sinal de controle u gerado pelo controlador K, a saída do sistema y, utilizada para gerar u, e a saída controlada z do sistema. O sistema

[1] A presente seção foi fundamentada principalmente em [COR] e [TIS07].

pode ser matematicamente descrito por uma equação de estados com coeficientes constantes:

$$G : \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + B_u u_k + B_w w_k \\ z_k = C_1 x_k + D_u u_k + D_w w_k \\ y_k = C_2 x_k + H w_k \end{cases} \tag{2.14}$$

em que $x_k = x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u_k = u(k) \in \mathbb{R}^m$, $w_k = w_k \in \mathbb{R}^v$, $z_k = z_k \in \mathbb{R}^p$ e $y_k = y(k) \in \mathbb{R}^q$. As matrizes A, B_u, B_w, C_1, D_u, D_w e C_2 são reais e possuem dimensões apropriadas. O sistema em malha fechada, considerando uma lei de controle dada por $u_k = Ky_k$, é dado por:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \bar{A}x_k + \bar{B}w_k \\ z_k &= \bar{C}x_k + \bar{D}w_k \end{aligned} \tag{2.15}$$

em que

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A + B_u K C_2, \quad \bar{B} = B_w + B_u K H, \\ \bar{C} &= C_1 + D_u K C_2, \quad \bar{D} = D_w + D_u K H. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Para o sistema em malha fechada (2.15), a matriz de transferência G_{zw} é dada por:

$$G_{zw} = C(zI - A)^{-1}B + D \tag{2.17}$$

Um dos objetivos da malha de controle mostrada na Figura 2.3 é projetar um ganho K que minimize o efeito de w_k em z_k. Para isso, definimos o conceito de custo $\mathcal{H}_\infty$ que será importante para o entendimento do restante desta seção.

Definição 2.8 (Norma $\mathcal{H}_\infty$ [Tro00])**.** *Seja o sistema (2.15). A norma $\mathcal{H}_\infty$ do operador entrada/saída G_{zw} é o valor supremo entre a energia dos sinais de saída e entrada, para todo w_k de energia limitada*

$$\|G_{zw}\|_\infty = \underset{\|w\|_2 \neq \mathbf{0}}{sup} \frac{\|w\|_2}{\|z\|_2} \tag{2.18}$$

em que o supremo é calculado para todas as trajetórias não nulas do sistema com $x(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Percebe-se que da definição que a norma $\mathcal{H}_\infty$ está relacionada ao maior ganho que pode existir entre as entradas exógenas e as saídas do sistema, ao longo de todo o espectro de sinais. Ou seja, ela quantifica o maior acréscimo de energia que pode ocorrer entre as entradas e saídas de um determinado sistema [Tro00]. Como o operador G é uma função de transferência, então a seguinte definição pode ser empregada.

$$\|G_{zw}\|_\infty = \sup_{\|w\|_2 \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}\{G_{zw}(e^{j\omega T})\} \tag{2.19}$$

em que $\bar{\sigma}\{G_{zw}(e^{j\omega T})\}$ é o máximo valor singular de $\{G_{zw}(e^{j\omega T})\}$, dado por

$$\overline{\sigma}(\omega) = \underset{i \in [i,b]}{max} \sqrt{\lambda_i(G_{zw}(j\omega)G_{zw}(j\omega)^H)} \tag{2.20}$$

em que M^H é a matriz transposta conjugada de M, $\lambda_i(M)$ é o i-ésimo autovalor de M, w é a frequência angular calculada no intervalo de $[0, \frac{\pi}{T_s}]$, T_s é o período de amostragem e G é a função de transferência. Se $G_{zw}(e^{j\omega T})$ é SISO, então $\bar{\sigma}\{G_{zw}(e^{j\omega T})\} = |G_{zw}(e^{j\omega T})|$ e a norma $\mathcal{H}_\infty$ corresponde ao valor máximo do módulo no diagrama de Bode. Para sistemas MIMO, a norma $\mathcal{H}_\infty$ é o máximo valor atingido pelo diagrama de valores singulares.

Para facilitar a manipulação da norma $\mathcal{H}_\infty$ pode-se aplicar a definição do ganho induzido de um operador G para sistemas lineares e invariantes no tempo. O ganho induzido guarda uma relação de medida para um operador sistema entre sinais de entrada versus sinais de saída com propriedades possivelmente diferentes. De fato, o ganho induzido ℓ_2 é equivalente à norma $\mathcal{H}_\infty$, de forma que pode-se estabelecer a seguinte relação, considerando $\|G\|_\infty \leq \gamma$, com $\gamma \in \mathbb{R}$ dado [PG07] :

$$\|z_k\|_2 \leq \gamma \|w_k\|_2, \quad \forall w_k \in \ell_2 \tag{2.21}$$

em ℓ_2 denota o espaço de sinais quadraticamente somáveis, isto é, $\sum_{k=0}^{\infty} w_k^T w_k < \infty$. Essa descrição permite caracterizar a norma $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas precisamente conhecidos e incertos, nos quais uma descrição explícita para a matriz de transferência não é obtida, porém, é possível definir um limitante γ para o ganho induzido ℓ_2. A consequência direta dessa relação é que minimizar o limitante γ implica em minimizar a relação entrada-saída em norma $\mathcal{H}_\infty$[PG07]. Considere que para z_k, $w_k \in \ell_2$ que (2.21) é igual a

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k^T z_k < \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} w_k^T w_k,$$

ou, definindo-se o índice de desempenho $\mathcal{J}$:

$$\mathcal{J} \doteq \sum_{k=0}^{\infty} [z_k^T z_k - \gamma^2 w_k^T w_k] < 0.$$

Para adicionar quesitos de estabilidade relativos à dinâmica do sistema em malha fechada (2.15), utiliza-se uma função de Lyapunov dada por (2.10), a partir da qual é assegurada a estabilidade de (2.18) para $w_k = 0$. Assim, assumindo que (2.15) é estável e possui condições iniciais nulas, portanto, $V(0) = 0$ e $V(k)|_{k\to\infty} \to \epsilon$ com $\epsilon \to 0$ se $w_k = \mathbf{0}$ ou $\epsilon \to \bar{\epsilon} < \infty$ se w_k é constante. Desse forma, índice de desempenho $\mathcal{J}$ pode ser reescrito acionando-se $\Delta V(x(k))$ como

$$\mathcal{J} < \sum_{k=0}^{\infty} [z_k^T z_k - \gamma^2 w_k^T w_k + \Delta V(x(k))] \tag{2.22}$$

Substituindo z_k dada em (2.16) em (2.22) e adotando o mesmo procedimento realizado em (2.11), porém, considerando o sistema dado em (2.15), obtemos

$$\mathcal{J} < \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{A}^T P \bar{A} + \bar{C}^T \bar{C} - P & \bar{A}^T P \bar{B}_w + \bar{C}^T \bar{D}_w \\ \bar{B}_w^T P \bar{A} + \bar{D}_w^T \bar{C} & \bar{B}_w^T P \bar{B}_w + \bar{D}_w^T \bar{D}_w - \gamma^2 \mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}. \tag{2.23}$$

Como o lado direito de (2.23) é negativo, temos:

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^T P \bar{A} + \bar{C}^T \bar{C} - P & \bar{A}^T P \bar{B}_w + \bar{C}^T \bar{D}_w \\ \bar{B}_w^T P \bar{A} + \bar{D}_w^T \bar{C} & \bar{B}_w^T P \bar{B}_w + \bar{D}_w^T \bar{D}_w - \gamma^2 \mathcal{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{2.24}$$

para $P > \mathbf{0}$. Note que a LMI (2.24) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} -P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{A}^T \\ \bar{B}_w^T \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B}_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{C}^T \\ \bar{D}_w^T \end{bmatrix} I \begin{bmatrix} \bar{C} & \bar{D}_w \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \tag{2.25}$$

Aplicando o Complemento de Schur em (2.25)

$$\begin{bmatrix} -P & \star & \star & \star \\ \mathbf{0} & -\gamma^2 \mathbf{I} & \star & \star \\ P\bar{A} & P\bar{B}_w & -P & \star \\ \bar{C} & \bar{D}_w & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \tag{2.26}$$

De (2.26) concluímos que $\|G_{zw}\|_\infty < \gamma$ se e somente se existir $P = P^T > \mathbf{0}$, satisfaz o que equivale a (2.24). Esse resultado é chamado de *Bounded-real lemma*. Diante da discussão apresentada, podemos definir dois problemas diferentes. O primeiro diz respeito à análise: determinar, para uma dada matriz de ganho K, valor do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ do sistema (2.15). Para o cálculo do valor exato para a norma $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas precisamente conhecidos, é necessário encontrar a solução para o problema de otimização semi-definida associado ao *Bounded-real lemma*, descrito abaixo, em que é feita a mudança de variável $\mu \doteq \gamma^2$:

$$\begin{aligned} &\min_{\mu, P=P^T} \quad \mu \\ &\text{sujeito a} \quad \begin{bmatrix} -P & \star & \star & \star \\ \mathbf{0} & -\mu \mathbf{I} & \star & \star \\ P\bar{A} & P\bar{B}_w & -P & \star \\ \bar{C} & \bar{D}_w & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \end{aligned}$$

O valor da norma $\mathcal{H}_\infty$ é dada por $\|G_{zw}\| = \gamma = \sqrt{\mu}$.

O segundo problema diz respeito à síntese: projetar a matriz de ganho K de forma que o sistema em malha fechada (2.15) seja assintoticamente estável e satisfaça (2.21). Substituindo as matrizes de malha fechada pelos valores dados em (2.16), é obtido o problema de otimização.

$$\begin{aligned} &\min_{K, \mu, P=P^T} \quad \mu \\ &\text{sujeito a} \quad \begin{bmatrix} -P & \star & \star & \star \\ \mathbf{0} & -\mu \mathbf{I} & \star & \star \\ P(A + B_u K C_2) & P(B_w + B_u K H) & -P & \star \\ C_1 + D_u K C_2 & D_w + D_u K H & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \end{aligned}$$

que resulta no ganho K e $\|G_{zw}\| = \gamma = \sqrt{\mu}$. Note que os dois problemas de otimização apresentados são não-convexos, portanto, são necessárias manipulações matemáticas para que seja possível

a solução computacional. Neste trabalho, apenas o problema de síntese é considerado e são incluídas incertezas e atraso no sistema. Na literatura, para sistemas livres de atraso e incertezas, diversos trabalhos apresentam soluções para esses problemas [SGC97, PP01, BB05, LLK06, CY14]. Ao se considerar as incertezas, as formulações por LMI tem o benefício dos resultados poderem ser estendidos para sistemas incertos, com incertezas descritas por um politopo. Para isso, é necessário considerar que as matrizes do sistema dinâmico pertencem a um politopo convexo com N vértices, de forma que para cada vértice será acrescida uma restrição a ser tratada pelo problema de otimização. Nesse caso, o valor obtido para γ não é, em geral, exato, mas sim um limitante superior para cada norma $\mathcal{H}_\infty$ calculada para cada um dos infinitos sistemas incertos, chamado de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$. Geralmente para o cálculo desse limitante são utilizadas abordagens baseadas em funções de Lyapunov quadráticas (considera uma matriz P fixa para todo o domínio de incertezas), o que pode levar a resultados mais conservadores [Bar85, MP96, XLY01]. Para reduzir esse conservadorismo, neste trabalho são utilizadas candidatas a funções de Lyapunov-Krasovskii dependente de parâmetros.

2.5 Sistemas com atraso nos estados

O atraso[1] no tempo existe comumente na maioria dos sistemas físicos, tais como a epidemia da AIDS, estabilização do *aircraft*, sistemas biológicos, sistemas de engenharia química, sistemas econômicos, mecânicos e elétricos [Che07, SNA+11]. Além disso, o atraso tem sido considerado como a principal fonte de instabilidade ou mau desempenho desses sistemas [GLWW04, LMWT06]. Portanto, nos últimos anos é observado um crescente interesse em estudos que envolvam a análise da estabilidade e síntese de controladores para sistemas com atraso e muitos resultados tem sido relatados na literatura, veja por [Ric03, Nic01] e referências internas. Geralmente são identificadas três fontes causadoras de atraso. Na primeira delas, o atraso é uma característica inerente ao sistema, aparecendo explicitamente nas equações que descrevem o comportamento do mesmo. A segunda fonte que causa o atraso é a utilização da realimentação para controlar uma variável. Devido ao transporte de informações, podem haver atrasos no envio de informações sobre a variável medida ao controlador e do sinal de controle do controlador a entrada do sistema. Por fim, o atraso pode ser intencionalmente introduzido ao sistema de controle como forma de melhorar o desempenho do sistema, para maiores detalhes sobre sistemas com atraso e fontes causadoras, veja [SNA+11]. Nos sistemas, o atraso pode estar presente nos estados, na entrada (aplicação do sinal de controle) ou na saída (medição das variáveis controladas). Os atrasos podem ser classificados como concentrados, os quais correspondem a atrasos discretos ou como distribuídos, que correspondem a atrasos associados a uma

[1] Esta seção foi baseada, principalmente, em [GL07].

integral distribuída no tempo. No caso de sistemas com atraso discreto, eles ainda podem ser subdivididos em sistema com atraso simples, nos quais $k = 1$, ou múltiplos, nos quais $k > 1$. No último caso, eles podem ser comensurados, se são múltiplos inteiros de um fator comum, ou incomensurados, caso contrário. Em muitos sistemas, o atraso pode variar ao longo do tempo. Para esses casos, para fins de análise da estabilidade, é considerada que a variação do atraso ocorre dentro de um intervalo, por exemplo, caso o atraso variante seja descrito pela variável d_k, então $d_k \in \mathcal{I}[\underline{d}, \overline{d}]$, com $0 < \underline{d} \leq d_k \leq \overline{d} < \infty$. Em que $\underline{d}$ e $\overline{d}$ são o atraso máximo e mínimo, respectivamente. O atraso pode também ser invariante no tempo, mas, incertos, ou seja, assume um valor constante, porém desconhecido, dentro de um certo intervalo. Neste trabalho, são investigados os atrasos discretos, invariante e variantes no tempo, presentes nos estados do sistema.

2.5.1 Estabilidade

As condições para a análise da estabilidade de sistemas com atraso podem ser classificadas basicamente em dois grupos. O primeiro diz respeito a condições que garantem a estabilidade dos sistemas não importando o tamanho dos atrasos. Essas são chamadas de condições independentes do atraso. O segundo grupo, considera condições em que há uma dependência do tamanho do atraso, e, por isso, são chamadas de condições dependentes do atraso. Geralmente, a análise da estabilidade pode ser feita utilizando-se duas abordagens diferentes, a abordagem frequencial, no qual os sistemas são modelados por funções de transferência, e a abordagem por variáveis de estado, nos quais os sistemas são modelados por equações diferenciais. A análise da estabilidade utilizando modelos por espaço de estados é obtida a partir da aplicação do segundo método de Lyapunov, e também pode ser realizada a partir de duas abordagens diferentes. A primeira é a abordagem de Krasovskii, na qual a evolução dos estados é analisada sobre um espaço de funções e considera um funcional de Lyapunov. A outra é a abordagem de Razumikin, pela qual a análise é feita considerando-se a evolução das trajetórias em um espaço Euclidiano. Neste trabalho, é utilizada a abordagem por espaço de estados, utilizando a abordagem de Krasovskii. A abordagem de Lyapunov-Krasovskii utiliza uma candidata a função de L-K que depende não somente dos estados do sistema, mas também de uma termo relacionado ao atraso e então, o Teorema 2.1 pode ser utilizado para a análise da estabilidade. Por exemplo, considere o sistema linear discreto com atraso nos estados dado por:

$$x_{k+1} = Ax_k + A_d x_{k-d} \tag{2.27}$$

Nesse sistema, o atraso no estado é fixo, porém incerto, isto é $d \in [1, \tau], \tau < \infty$. Considere também a candidata a função de Lyapunov-Krasovskii dada por

$$V(k) = x_k^T P x_k + \sum_{i=1}^{\tau} x_{k-i}^T S x_{k-i} \tag{2.28}$$

Note que a escolha dessa função já atende os dois primeiros ítens do Teorema de Lyapunov. O terceiro item é atendido impondo-se que $P = P^T > \mathbf{0}$ e $S = S^T > \mathbf{0}$. Aplicando-se o quarto item e desenvolvendo, temos que:

$$\Delta V(k) = x_{k+1}^T P x_{k+1} + x_k^T [S - P] x_k - x_{k-\tau}^T S x_{k-\tau} < \mathbf{0}. \tag{2.29}$$

Substituindo (2.27) em (2.29), o sistema será assintoticamente estável se for verificada a desigualdade matricial linear

$$\begin{bmatrix} A^T P A + S - P & A_d^T P A \\ A^T P A_d & A_d^T P A_d - S \end{bmatrix} < \mathbf{0} \tag{2.30}$$

independentemente do valor (invariante no tempo) do atraso d. Veja que a escolha da função de Lyapunov-Krasovskii resultou em uma condição independente do atraso. Na literatura, muitos dos resultados obtidos são baseados em abordagens independentes do atraso [LTP04], as quais podem levar a resultados conservadores [LMWT06]. Em geral, observa-se que condições dependentes do atraso geralmente levam a resultados conservadores quando aplicadas a sistemas cuja a estabilidade independe do valor do atraso. Por outro lado, o inverso também pode ocorrer [ML08]. Especificamente para sistemas discretos com atraso nos estados, uma abordagem possível para a análise da estabilidade é utilizar um vetor de estados aumentado, na qual é incluídos o vetor de estados atrasados do sistema, o qual resulta em um sistema livre de atraso. Para uma discussão sobre as limitações dessa abordagem, veja [Sil11, Tei13, HDI08]. Assim, análise da estabilidade pode ser feita por meio de ferramentas clássicas. Da forma como é construída, essa abordagem sempre resulta em condições dependentes do atraso. Devido a essa possibilidade, nos últimos anos, análise do sistemas contínuos com atraso nos estados recebeu mais atenção que a análise de sistemas discretos. Entretanto, a abordagem do sistema aumentado não pode ser aplicada a sistemas com incerteza, sistemas com grandes dimensões ou sistemas variantes no tempo [ML08].

Capítulo 3

Controle $\mathcal{H}_\infty$ com atraso invariante no tempo

Neste capítulo são desenvolvidas condições para a síntese de controladores estabilizantes via realimentação estática de saída para sistemas discretos com atraso constante e incerto no vetor de estados. Inicialmente as condições são desenvolvidas para a classe de sistemas livres de incertezas, o que equivale a dizer que as matrizes do sistema são precisamente conhecidas. Em seguida são apresentadas condições para estabilização de sistemas incertos. As incertezas são considerada na forma politópica. O problema de minimização do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ também é abordado. Para tratar o atraso, uma candidata a função de Lyapunov-Krasovskii (dependente de parâmetros, no caso incerto) simplificada é utilizada para a obtenção de condições independentes do atraso. Portanto, a estabilidade e o desempenho especificado são assegurados para qualquer valor finito de atraso. Por meio de exemplos numéricos é mostrada a aplicabilidade da condição obtida.

3.1 Estabilização

Seja o sistema linear discreto no tempo sujeito a atraso no vetor de estados dado por

$$\Omega : \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + A_d x_\eta + B_u u_k \\ y_k = Cx_k + C_d x_\eta \end{cases} \tag{3.1}$$

em que $\eta = k - d$, portanto, nesse capítulo são desenvolvidas condições para sistemas com atraso constante no vetor de estados. Nesse sistemas, também tem-se que $x_k = x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados no instante k, $x_\eta = x_{k-d} = x(k-d) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados atrasado de d amostras, $u_k = u(k) \in \mathbb{R}^m$ é o sinal de controle e $y_k = y(k) \in \mathbb{R}^q$ é a saída medida. As matrizes A, A_d, B_u, C, C_d, possuem dimensões apropriadas e, inicialmente, são supostas precisamente conhecidas. O atraso, d, é suposto invariante no tempo, porém incerto, e finito dado por

$$d \in \mathcal{I}[1, \tau], \tag{3.2}$$

em que $\tau \in \mathbb{N}^*$ é o valor máximo assumido pelo atraso. Neste capítulo, é suposto que o sistema Ω possui condições iniciais nulas, ou seja,

$$x_j = \mathbf{0}, \quad j \in \mathcal{I}[0, -\tau]. \tag{3.3}$$

Considere a lei de controle por realimentação estática de saída dada por

$$u_k = K y_k, \tag{3.4}$$

com $K \in \mathbb{R}^{m \times q}$. O sistema em malha fechada, obtido aplicando-se (3.4) em (3.1), é dado por

$$\bar{\Omega} : x_{k+1} = \bar{A} x_k + \bar{A}_d x_{k-d}, \tag{3.5}$$

em que

$$\bar{A} = A + B_u K C, \quad \bar{A}_d = A_d + B_u K C_d. \tag{3.6}$$

Visando separar a matrizes conhecidas das matrizes de busca, o sistema em malha fechada (3.5) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{A}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-d} \end{bmatrix}, \\
&= \begin{bmatrix} A + B_u K C & A_d + B_u K C_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-d} \end{bmatrix}, \\
&= \begin{bmatrix} A & A_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_u K C & B_u K C_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-d} \end{bmatrix}, \\
&= \begin{bmatrix} A & A_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-d} \end{bmatrix} + B_u K \begin{bmatrix} C & C_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-d} \end{bmatrix}, \\
&= (\hat{A} + \hat{B} \hat{K} \hat{C}) \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-d} \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{3.7}$$

em que

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & A_d \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = B, \quad \hat{K} = K, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} C & C_d \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

Assim, o seguinte problema é tratado nesta seção:

Problema 3.1 (Projeto do controlador)**.** *Dado o sistema (3.1) determinar, se possível, o ganho K de forma que o sistema (3.5) sujeito a (3.2)-(3.3) seja assintoticamente estável, independente do valor do atraso.*

Conforme desenvolvimento apresentado, determinar K em (3.4) é equivalente a determinar $\hat{K}$ em (3.7).

3.2 Resultados principais

Nesta seção são apresentados os principais resultados para a síntese do ganho de realimentação estática de saída de K (ou $\hat{K}$) de forma que o sistema em malha fechada (3.5) seja assintoticamente estável. O Lema apresentado a seguir é baseado no Segundo Método de Lyapunov para a análise da estabilidade. Ele será utilizado para desenvolver condições de síntese para o ganho da lei de controle (3.4).

Lema 3.1. *Considere o sistema em malha fechada dado em (3.5). Se existem matrizes* $\mathbf{0} < P = P^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < S = S^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\hat{K} \in \mathbb{R}^{m\times q}$ *tais que:*

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \star \\ \hat{A} + \hat{B}\hat{K}\hat{C} & -P^{-1} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{3.9}$$

com

$$\Xi_{11} = \begin{bmatrix} S - P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -S \end{bmatrix}, \tag{3.10}$$

então o sistema é assintoticamente estável quando realimentado pela lei de controle (3.4) e $K = \hat{K}$.

Prova: Se (3.9) é verificada então, $\mathbf{0} < S = S^T$ e $\mathbf{0} < P = P^T$. Logo, uma candidata a função de L-K dada por

$$V(k) = x_k^T P x_k + \sum_{i=1}^{d} x_{k-i}^T S x_{k-i} \tag{3.11}$$

é definida para todo $x_j \neq \mathbf{0}$. Aplicando o complemento de Schur em (3.9) obtém-se

$$\Xi_{11} + (\hat{A} + \hat{B}\hat{K}\hat{C})^T P (\hat{A} + \hat{B}\hat{K}\hat{C}) < \mathbf{0}. \tag{3.12}$$

De (3.7) e (3.8) tem-se que

$$\hat{A} + \hat{B}\hat{K}\hat{C} \equiv \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{A}_d \end{bmatrix}. \tag{3.13}$$

Portanto, substituindo-se (3.13) em (3.12) obtém-se

$$\begin{aligned} \Xi_{11} + \begin{bmatrix} \bar{A}^T \\ \bar{A}_d^T \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{A}_d \end{bmatrix} &< \mathbf{0}, \\ \Xi_{11} + \begin{bmatrix} \bar{A}^T P \bar{A} & \bar{A}_d^T P \bar{A} \\ \bar{A}^T P \bar{A}_d & \bar{A}_d^T P \bar{A}_d \end{bmatrix} &< \mathbf{0}, \\ \begin{bmatrix} \bar{A}^T P \bar{A} + S - P & \bar{A}_d^T P \bar{A} \\ \bar{A}^T P \bar{A}_d & \bar{A}_d^T P \bar{A}_d - S \end{bmatrix} &< \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Para que (3.11), seja uma função de L-K é necessário que adicionalmente a sua positividade seja verificado

$$\begin{aligned}
\Delta V(k) &= V(k+1) - V(k) < \mathbf{0}, \\
&= x_{k+1}^T P x_{k+1} + \sum_{i=1}^{d} x_{k-i+1}^T S x_{k-i+1} - x_k^T P x_k - \sum_{i=1}^{d} x_{k-i}^T S x_{k-i} < \mathbf{0}, \\
&\quad \text{realizando uma mudança de variável nos primeiros somatórios, com } j = i-1, \\
\Delta V(k) &= x_{k+1}^T P x_{k+1} + \sum_{j=0}^{d-1} x_{k+j}^T S x_{k+j} - x_k^T P x_k - \sum_{i=1}^{d} x_{k-i}^T S x_{k-i} < \mathbf{0}, \\
&= x_{k+1}^T P x_{k+1} + x_k^T S x_k + \sum_{j=1}^{d-1} x_{k+j}^T S x_{k+j} - x_k^T P x_k - x_{k-d}^T S x_{k-d} - \sum_{i=1}^{d} x_{k-i}^T S x_{k-i} < \mathbf{0}, \\
&= x_{k+1}^T P x_{k+1} + x_k^T S x_k - x_k^T P x_k - x_{k-d}^T S x_{k-d} < \mathbf{0}, \\
&= x_{k+1}^T P x_{k+1} + x_k^T (S-P) x_k - x_{k-d}^T S x_{k-d} < \mathbf{0}. \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Substituindo-se a expressão de x_{k+1} dada em (3.5) em (3.15) obtém-se

$$\Delta V = \begin{bmatrix} x_k^T & x_{k-d}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S - P + \bar{A}^T P \bar{A} & \star \\ \bar{A}^T P \bar{A}_d & \bar{A}_d^T P \bar{A}_d - S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-d} \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \qquad (3.16)$$

Como (3.14) e (3.16) são iguais, conclui-se a prova. ∎

Devido ao produto entre a variável desconhecida $\hat{K}$ e as matrizes do controlador $\hat{B}$ e $\hat{C}$, a condição apresentada em (3.1) não é uma LMI, pois não é possível linearizar diretamente esse produto. Diversas abordagens na literatura tentam resolver esse problema, dentre os métodos presentes, há abordagens baseadas em restrições de igualdade, em transformações do espaço de estados, em métodos iterativos, dentre outras.

A seguir é apresentada uma nova condição que desacopla os produtos entre matrizes do sistema matrizes e matrizes do controlador, presentes em (3.9), os quais não permitem que o problema seja resolvido por *softwares* de otimização conhecidos.

Teorema 3.1. *Considere o sistema em malha fechada (3.5). Para parâmetros escalares $\mu > 0$, α e β não nulos dados, se existem matrizes $\mathbf{0} < P = P^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < S = S^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < J = J^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $V \in \mathbb{R}^{m\times q}$, $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $\Delta \in \mathbb{R}^{m\times m}$ tais que*

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \star & \star & \star \\ G\hat{A} + \hat{B}V\hat{C} & \alpha G - \alpha G^T + \alpha^2 P + J & \star & \star \\ \beta^{-1}\Delta V \hat{C} & \mathbf{0} & -\beta^{-1}(\Delta U + U^T \Delta^T) & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & G\hat{B} - \hat{B}U & -J \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \qquad (3.17)$$

é verificada com Ξ_{11} dado em (3.10), então, o sistema é assintoticamente estável com a lei de controle (3.4) e ganho dados por $\hat{K} = U^{-1}V$.

Prova: A prova pode ser adaptada de [CY14, Teorema 1]. Se (3.17) é verificada, então é assegurada a regularidade de G devido à positividade de P e J, $\alpha \neq 0$ e $\alpha G - \alpha G^T + \alpha^2 P + J < \mathbf{0}$. Além disso, a regularidade de U pode ser verificada do bloco $(3,3)$ de (3.17), $-\beta^{-1}(\Delta U + U^T\Delta^T) < \mathbf{0}$. Aplicando o complemento de Schur em (3.17), obtém-se

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \star & \star \\ G\hat{A} + \hat{B}V\hat{C} & \alpha G - \alpha G^T + \alpha^2 P + J & \star \\ \beta^{-1}\Delta V\hat{C} & \mathbf{0} & -\beta^{-1}(\Delta U + U^T\Delta^T) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ (G\hat{B} - \hat{B}U)^T \end{bmatrix} J^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & (G\hat{B} - \hat{B}U) \end{bmatrix} < \mathbf{0},$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \star & \star \\ G\hat{A} + \hat{B}V\hat{C} & \alpha G - \alpha G^T + \alpha^2 P + J & \star \\ \beta^{-1}\Delta V\hat{C} & \mathbf{0} & -\beta^{-1}(\Delta U + U^T\Delta^T) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (G\hat{B} - \hat{B}U)^T J^{-1}(G\hat{B} - \hat{B}U) \end{bmatrix} < \mathbf{0},$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \star & \star \\ G\hat{A} + \hat{B}V\hat{C} & \alpha G - \alpha G^T + \alpha^2 P + J & \star \\ \beta^{-1}\Delta V\hat{C} & \mathbf{0} & -\beta^{-1}(\Delta U + U^T\Delta^T) + (G\hat{B} - \hat{B}U)^T J^{-1}(G\hat{B} - \hat{B}U) \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \tag{3.18}$$

Utilizando o Lema 2.4 com

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \star \\ G\hat{A} + \hat{B}V\hat{C} & \alpha G - \alpha G^T + \alpha^2 P + J \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{L} = \beta^{-1}\Delta U,$$

$$\mathbb{M} = U^{-1}V\hat{C}\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

e

$$\mathbb{P} = (G\hat{B} - \hat{B}U)^T J^{-1}(G\hat{B} - \hat{B}U),$$

pode-se escrever

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \star \\ G\hat{A} + \hat{B}V\hat{C} & \alpha G - \alpha G^T + \alpha^2 P + J \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \hat{C}^T V^T U^{-T}(G\hat{B} - \hat{B}U)^T J^{-1}(G\hat{B} - \hat{B}U)U^{-1}V\hat{C}\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \tag{3.19}$$

Separando a matriz J, obtêm-se

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \star \\ G\hat{A} + \hat{B}V\hat{C} & \alpha G - \alpha G^T + \alpha^2 P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} J \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \hat{C}^T V^T U^{-T} \times (G\hat{B} - \hat{B}U)^T J^{-1}(G\hat{B} - \hat{B}U)U^{-1}V\hat{C}\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \tag{3.20}$$

Por meio do Lema 2.3 pode-se majorar as duas últimas parcelas da soma de (3.20) e por meio do Lema 2.5, o termo $\alpha G - \alpha G^T + \alpha^2 P$ pode ser marjorado por $-GP^{-1}G^T$, resultando em

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \star \\ G\hat{A} + \hat{B}V\hat{C} & -GP^{-1}G^T \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} (G\hat{B} - \hat{B}U)U^{-1}V\hat{C}\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} < \mathbf{0},$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \star \\ G\hat{A} + \hat{B}V\hat{C} & -GP^{-1}G^T \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ G\hat{B}U^{-1}V\hat{C} - \hat{B}V\hat{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \tag{3.21}$$

Substituindo-se $\hat{K} = U^{-1}V$ em (3.21), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \star \\ G\hat{A} + \hat{B}V\hat{C} & -GP^{-1}G^T \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ G\hat{B}\hat{K}\hat{C} - \hat{B}V\hat{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} < \mathbf{0},$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \star \\ G\hat{A} + G\hat{B}\hat{K}\hat{C} & -GP^{-1}G^T \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \tag{3.22}$$

Pré- e pós-multiplicando (3.22) por $\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \star \\ \mathbf{0} & G^{-1} \end{bmatrix}$ e sua transposta, respectivamente, a desigualdade (3.9) pode ser obtida. Portanto, pelo Lema 3.1 assegura-se a estabilidade de (3.5), (3.7), completando a prova. ■

Note que para a solução da desigualdade (3.17) é preciso que sejam obtidos valores iniciais para as variáveis Δ, α e β, caso contrário, (3.17) não é convexa. Para a escolha de Δ, é necessário que a matriz tenha posto completo. Uma escolha possível é $\Delta = B^T B$, desde que B tenha posto completo de colunas. Uma alternativa para a escolha desses parâmetros é gerar matrizes Δ aleatórias (de posto completo) e fazer uma varredura de valores para os escalares α e β.

3.2.1 Estabilização robusta

Nesta seção assumimos que o sistema (3.1) é sujeito a incertezas politópicas, isto é, as matrizes do sistema dependem de forma afim de um vetor de parâmetros θ, de forma que

$$\Omega(\theta) : \begin{cases} x_{k+1} = A(\theta)x_k + A_d(\theta)x_{k-d} + B_u(\theta)u_k \\ y_k = C(\theta)x_k + C_d(\theta)x_{k-d} \end{cases} \tag{3.23}$$

As matrizes desse sistema podem ser descritas por um politopo $\mathcal{P}$ com vértices conhecidos, dado por:

$$\mathcal{P} = \left\{ \Omega(\theta) \in \mathbb{R}^{(n+q)\times(2n+m)} : \Omega(\theta) = \sum_{i=1}^{N} \theta_i \Omega_i,\ \theta \in \Upsilon \right\}, \tag{3.24}$$

em que

$$\Upsilon = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^{N} \theta_i = 1,\ \theta_i \geq 0,\ i \in \mathcal{I}[1, N] \right\} \tag{3.25}$$

e

$$\Omega_i = \left[\begin{array}{cc|c} A_i & A_{d_i} & B_{u_i} \\ \hline C_i & C_{d_i} & \mathbf{0} \end{array} \right],\ i \in \mathcal{I}[1, N], \tag{3.26}$$

com N representando o número de vértices do politopo. Considerando a lei de controle dada por (3.4) e aplicando essa lei em (3.23), tem-se o sistema em malha fechada dado por:

$$\bar{\Omega}(\theta) : x_{k+1} = \bar{A}(\theta)x_k + \bar{A}_d(\theta)x_{k-d}, \tag{3.27}$$

em que

$$\begin{aligned} \bar{A}(\theta) &= A(\theta) + B_u(\theta)KC(\theta), \\ \bar{A}_d(\theta) &= A_d(\theta) + B_u(\theta)KC_d(\theta). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Neste caso, pode-se estabelecer um resultado semelhante ao proposto no Teorema 3.1 de forma a assegurar a estabilização para todo o domínio de incertezas, $\theta \in \Upsilon$.

Teorema 3.2 (Controle Robusto)**.** *Seja o sistema discreto em malha fechada (3.27). Para parâmetros escalares $\mu > 0$, α e β dados, se existem matrizes $\mathbf{0} < P_i = P_i^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < S_i = S_i^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < J_i = J_i^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i \in \mathcal{I}[1, N]$, $V \in \mathbb{R}^{m\times q}$, $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $\Delta \in \mathbb{R}^{m\times m}$ tais que*

$$\begin{aligned} \Gamma_i < \mathbf{0}, \quad i \in \mathcal{I}[1, N], \\ \Gamma_{ij} < \mathbf{0}, \quad i \in \mathcal{I}[1, N-1], \ j \in \mathcal{I}[i+1, N], \end{aligned} \tag{3.29}$$

em que

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} \Xi_{11_i} & \star & \star & \star \\ G_i\hat{A}_i + \hat{B}_iV\hat{C}_i & -\alpha G_i - \alpha G_i^T + \alpha^2 P_i + J_i & \star & \star \\ \beta^{-1}\Delta V\hat{C}_i & \mathbf{0} & -\beta^{-1}(\Delta U + U^T\Delta^T) & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & G_i\hat{B}_i - \hat{B}_iU & -J_i \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{3.30}$$

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \Xi_{11_{ij}} & \star & \star & \star \\ G_iA_j + G_jA_i + \hat{B}_iV\hat{C}_j + \hat{B}_jV\hat{C}_i & -\alpha G_i - \alpha G_j + \alpha^2(P_i + P_j) + J_i + J_j & \star & \star \\ \beta^{-1}\Delta V(\hat{C}_i + \hat{C}_j) & \mathbf{0} & -2\beta^{-1}(\Delta U + U^T\Delta^T) & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & G_i\hat{B}_j + G_j\hat{B}_i - (\hat{B}_i + \hat{B}_j)U & -J_i - J_j \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{3.31}$$

com

$$\Xi_{11_i} = \begin{bmatrix} S_i - P_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -S_i \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

e

$$\Xi_{11_{ij}} = \begin{bmatrix} S_i + S_j - P_i - P_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -S_i - S_j \end{bmatrix}, \tag{3.33}$$

então, o sistema é robustamente assintoticamente estável com a lei de controle (3.4) e ganho dado por $\hat{K} = U^{-1}V$. Além disso,

$$V(k) = x_k^T P(\theta)x_k + \sum_{i=1}^{d} x_{k-i}^T S(\theta)x_{k-i}, \tag{3.34}$$

com $P(\theta) = \sum_{i=1}^{N} \theta_i P_i$, $S(\theta) = \sum_{i=1}^{N} \theta_i S_i$, $\theta_i \in \Upsilon$ *é uma função de L-K dependente de parâmetros que assegura a estabilidade robusta do sistema em malha fechada.*

Prova: A prova segue passos similares aos da prova do Teorema 3.1 e usa o fato de que os produtos de matrizes dependentes de forma afim no parâmetro θ — veja (3.24) — podem ser reescritos como [RP02]: $\Gamma(\theta) = \sum_{i=1}^{N} \theta_i^2 \Gamma_i + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \theta_i \theta_j \Gamma_{ij}$. Assim, (3.29) assegura $\Gamma(\theta) < \mathbf{0}$, em que $\Gamma(\theta)$ corresponde à matriz (3.17) com as matrizes P, S, J e G substituídas por suas versões dependentes de parâmetro com estruturas idênticas às das matrizes em (3.26). ■

Note que as condições propostas nos Teoremas 3.1 e 3.2 são do tipo independente do atraso. Isso é devido à escolha de uma função de L-K bastante simplificada. Dessa forma, os resultados obtidos com esses dois teoremas asseguram a estabilidade para qualquer atraso $d \in \mathcal{I}[1, \tau]$, $\tau < \infty$.

3.2.2 Exemplos

Nesta seção são apresentados exemplos para ilustrar a efetividade das condições propostas. Primeiramente são apresentados exemplos que ilustram a abordagem para o caso precisamente conhecido, utilizando o Teorema 3.1. Em seguida, são mostrados exemplos que consideram a estabilização robusta de sistemas sujeitos a incertezas nos parâmetros. Para resolver as condições, foi utilizado o *solver SeDuMi* e o *parser YALMIP*.

3.2.2.1 Exemplo 1

Neste exemplo, considere o sistema (3.1) com as matrizes retiradas de [GLWW04].

$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0.8 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Veja pela Figura (3.1) que esse sistema é instável em malha aberta, para $d = 5$. Para o projeto do ganho K que assintoticamente estabilize o sistema primeiramente foi realizada uma busca das variáveis Δ, α e β que gerassem uma solução factível. Para isso, foram obtidas matrizes Δ aleatórias, utilizando a função `randi()` garantindo que elas tivessem posto completo. Em sequência, para cada matriz Δ gerada foi realizada uma varredura para valores de α e $\beta \in [-10, 10]$ que pelo Teorema 3.1 gerassem valores factíveis da desigualdade (3.17). Assim, cada tripla (Δ, α, β) faz com que (3.17) seja resolvida como um problema convexo, pois nesse caso (3.17) é uma LMI. Os testes de factibilidade de 3.1 são ilustrados na Figura 3.2, em que foi utilizada a matriz Δ igual 1, $\Delta = 1$. Na Figura 3.2b é feita uma varredura semelhante em α e β, desta vez usando $\Delta = 2$, a qual é factível, por exemplo, para $\alpha = 1$ e $\beta = 5$. Nessa Figura, um valor do eixo z igual a 1 indica que (3.17) é factível e $z = 0$ indica que não foi possível

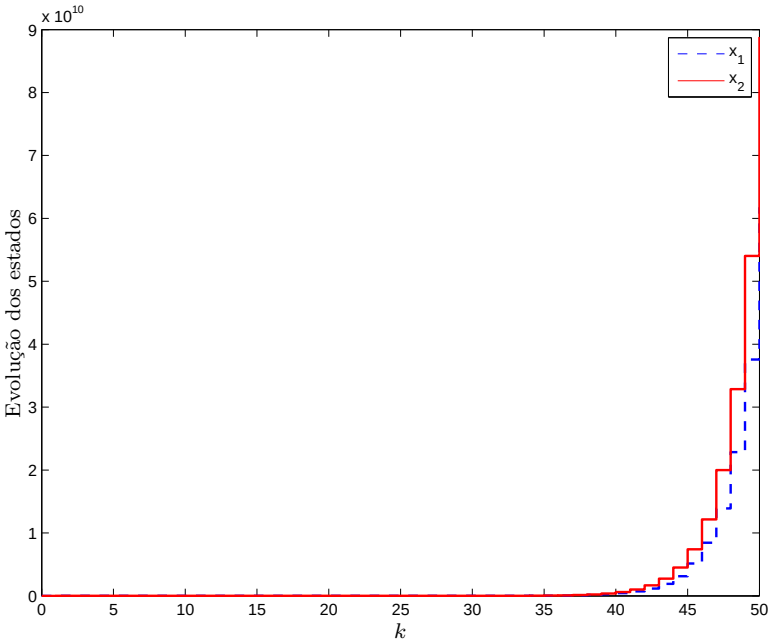
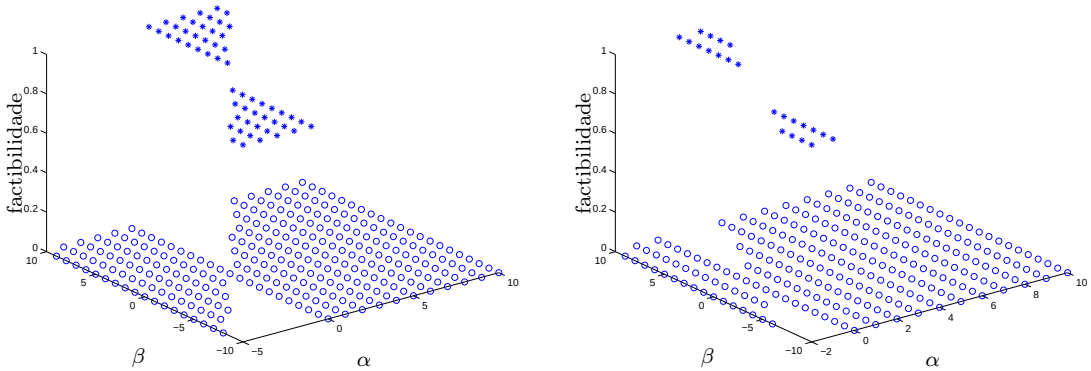


Figura 3.1: Evolução dos estados para o sistema (3.2.2.1) em malha aberta.

obter uma solução. Nesse exemplo, não foi difícil obter matrizes Δ que encontrem pares (α, β) que viabilizam soluções para (3.17). Por exemplo, os valores de $\Delta = 3$, $\Delta = 0.1$ e $\Delta = 0.01$ também geram valores factíveis na faixa de valores considerados. Para esse sistema, utilizando



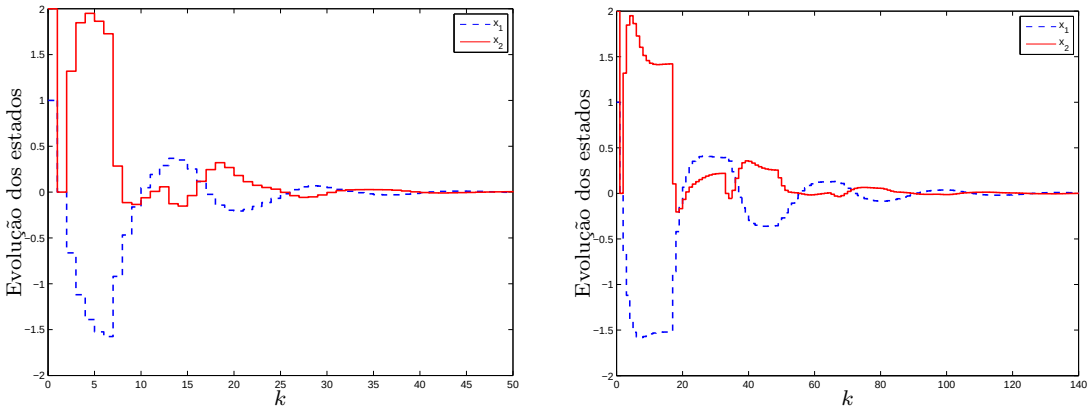
(a) Factibilidade em função de α e β - $\Delta = 1$. (b) Factibilidade em função de α e β - $\Delta = 2$.

Figura 3.2: Factibilidade de (3.17) em função de (α, β), para duas escolhas de Δ.

uma matriz $\Delta = 1$, $\alpha = 3$ e $\beta = 6$, o ganho K, dado em (3.4), calculado pelo Teorema 3.1 foi

$$K = \begin{bmatrix} -0.4456 & -0.1724 \end{bmatrix}.$$

Se usarmos $\Delta = 1$, $\alpha = \beta = 1$, o problema é infactível. A Figura 3.3 apresenta a evolução dos estados do sistema em malha fechada. Assume-se que a condição inicial é $x(k) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ para $k \leq 0$. Na Figura 3.3a o atraso foi escolhido como $d = 5$. É possível ver pela figura que o sistema é assintoticamente estável quando realimentado utilizado o ganho calculado. A Figura



(a) Estados para o sistema em malha fechada no Exemplo (3.2.2.1), para $d = 5$.

(b) Estados para o sistema em malha fechada no Exemplo (3.2.2.1), para $d = 15$.

Figura 3.3: Evolução dos estados - Exemplo 3.2.2.1

3.3b apresenta o mesmo exemplo, só que agora considerando que $d = 15$. Novamente, é possível ver que o sistema é assintoticamente estável para o ganho calculado, independente do valor do atraso.

3.2.2.2 Exemplo 2

Neste exemplo, considere o sistema (3.1) cujas as matrizes foram retiradas de [CCS+05].

$$A = \begin{bmatrix} 2.3734 & 1.2855 & -0.9864 \\ 1.2837 & 3.3126 & 0.8519 \\ -0.7837 & 1.4216 & 2.1370 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} -0.0734 & 0.0462 & -0.0536 \\ 0.0964 & -0.0702 & 0.0721 \\ 0.0439 & 0.0741 & -0.0862 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1.4331 & -0.0635 & 0.8695 \\ 1.0587 & -0.7687 & 1.3319 \\ 0.7563 & -0.9921 & 0.8915 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1.6552 & -0.8893 & 1.0342 \\ -1.7015 & -3.6654 & -1.8568 \end{bmatrix}, \quad C_d = \mathbf{0}.$$

Note pela Figura (3.4) que para $d = 20$, em malha aberta, esse sistema é instável. Para o cálculo do ganho K foi realizado um procedimento semelhante ao do exemplo anterior. Na Figura 3.5a são mostrados os pares (α, β) factíveis marcados com $*$ e os infactíveis com $\circ$, Δ igual a identidade de ordem 3, $\Delta = \mathbf{I}_3$. O mesmo procedimento é repetido e apresentado na Figura 3.5b, para $\Delta = \Delta_2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, a qual é factível, por exemplo, para $\alpha = -1$ e $\beta = -10$. Para esse sistema, utilizando uma matriz $\Delta = \mathbf{I}_3$ e $\alpha = 1$, $\beta = 7$, o ganho K, dado em (3.4), calculado pelo Teorema 3.1 foi

$$K = \begin{bmatrix} 0.8351 & -0.1734 \\ 0.8618 & -0.2103 \\ -0.1270 & 0.2212 \end{bmatrix}.$$

A Figura 3.6 apresenta a evolução dos estados do sistema em malha fechada. Foi assumida como condição inicial é $x(k) = \begin{bmatrix} -5 & -10 & 3 \end{bmatrix}^T$ para $k \leq 0$. Na Figura 3.6a o atraso foi escolhido

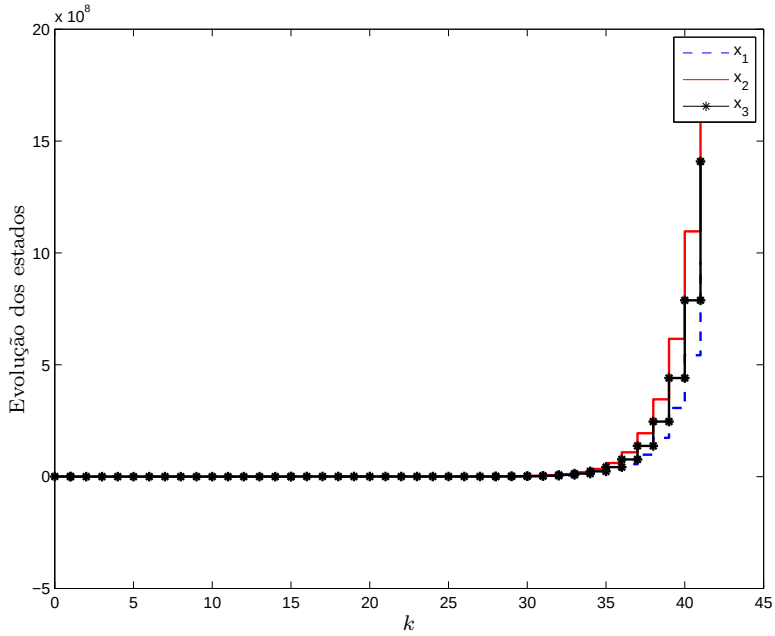
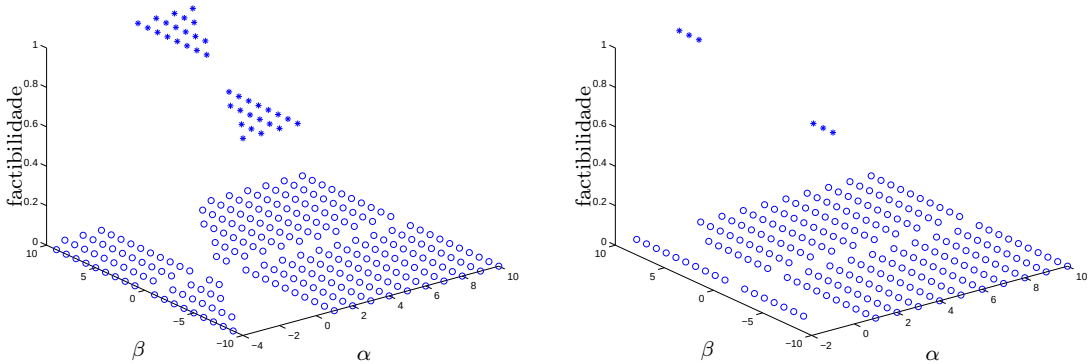


Figura 3.4: Evolução dos estados para o sistema (3.2.2.1) em malha aberta.



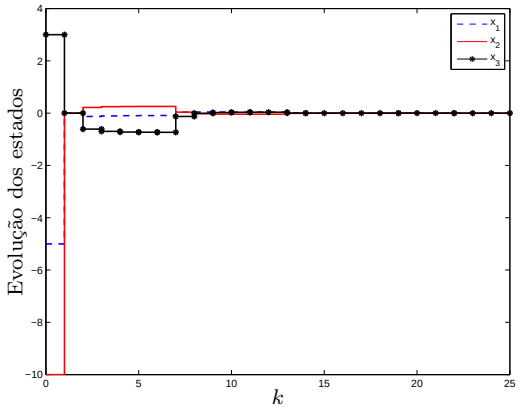
(a) Factibilidade em função de α e β - $\Delta = \mathbf{I}_3$. (b) Factibilidade em função de α e β - $\Delta = \Delta_2$.

Figura 3.5: Factibilidade de 3.1 em função de α e β para duas escolhas de Δ

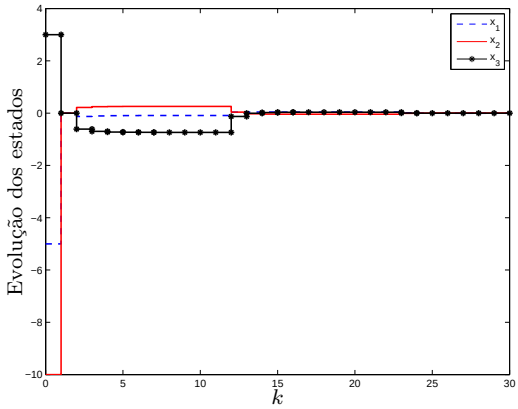
como $d = 5$. É possível ver pela Figura que o sistema é assintoticamente estável quando realimentado utilizado o ganho calculado. Na Figura 3.6b é apresentado o mesmo exemplo, porém considerando $d = 10$. É possível ver pela Figura que o sistema é assintoticamente estável para o ganho calculado, independente do valor do atraso.

3.2.2.3 Exemplo 3

Neste exemplo, considere novamente sistema (3.23), cujas as matrizes foram retiradas de [CCS+05]. Considere que esse sistema é incerto e pertence a um politopo de 2 vértices. O primeiro vértice do politopo é formado pelas matrizes dadas no Exemplo 3.2.2.1. O segundo vértice é obtido quando as matrizes do vértice 1 são multiplicadas por um fator $0 \leq f \leq 1.9$.



(a) Evolução dos estados para o sistema em malha fechada no Exemplo 1, para $d = 5$.



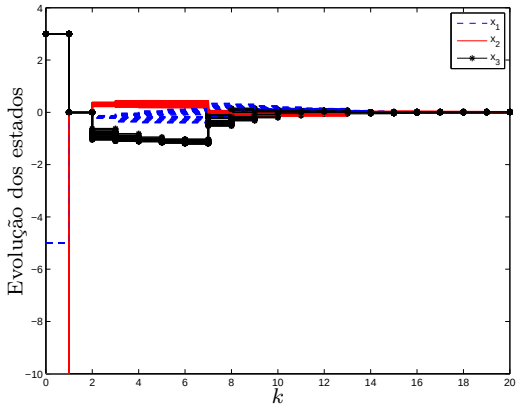
(b) Evolução dos estados para o sistema em malha fechada no Exemplo 1, para $d = 10$.

Figura 3.6: Evolução dos estados - Exemplo 3.2.2.2

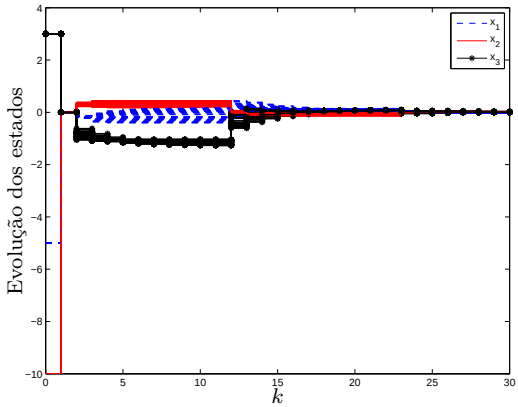
Para esse sistema incerto, utilizando os mesmos parâmetros Δ, α e β dados no Exemplo 3.2.2.2 foi possível calcular o ganho K, utilizando o Teorema 3.2, dado por:

$$K = \begin{bmatrix} 0.6129 & -0.1373 \\ 0.6998 & -0.1457 \\ -0.0491 & 0.1561 \end{bmatrix}.$$

A Figura 3.7 apresenta a evolução dos estados do sistema em malha fechada para o politopo de 2 vértices, com 30 sistemas gerados aleatoriamente. Foi assumida a mesma condição inicial utilizada no Exemplo 3.2.2.2. Na Figura 3.7a o atraso foi escolhido como $d = 5$ e na Figura 3.7b, $d = 10$. É possível ver pelas Figuras que mesmo que o sistema seja incerto, os estados ainda convergem para a origem.



(a) Evolução dos estados para o sistema em malha fechada no Exemplo 3.2.2.3, para $d = 5$.



(b) Evolução dos estados para o sistema em malha fechada no Exemplo 3.2.2.3, para $d = 10$.

Figura 3.7: Evolução dos estados - Exemplo 3.2.2.3

3.3 Controle $\mathcal{H}_\infty$ via SOF

Seja o sistema linear discreto no tempo sujeito a atraso no vetor de estados dado por

$$\Psi : \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + A_d x_\eta + B_u u_k + B_w w_k \\ z_k = C_1 x_k + C_{1_d} x_\eta + D_u u_k + D_w w_k \\ y_k = C_2 x_k \end{cases} \tag{3.35}$$

em que $x_k = x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados no instante k, $\eta = k-d$, $x_\eta = x(k-d) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados atrasado de d amostras, $u_k = u(k) \in \mathbb{R}^m$ é o sinal de controle, $w_k = w(k) \in \mathbb{R}^v$ é o vetor de entradas exógenas, $z_k = z(k) \in \mathbb{R}^p$ é a saída controlada, $y_k = y(k) \in \mathbb{R}^q$ é a saída medida. As matrizes A, A_d, B_u, B_w, C_1, C_{1d}, D_u, D_w e C_2 possuem dimensões apropriadas e, inicialmente, são supostas precisamente conhecidas. Considere a lei de controle por realimentação estática de saída dada por

$$u_k = Ky_k + K_d y_{k-d}, \tag{3.36}$$

com $[K|K_d] \in \mathbb{R}^{m\times 2q}$. O sistema em malha fechada, obtido aplicando-se (3.36) em (3.35), é dado por

$$\bar{\Psi} : \begin{cases} x_{k+1} = \bar{A}x_k + \bar{A}_d x_{k-d} + \bar{B}_w w_k \\ z_k = \bar{C}x_k + \bar{C}_d x_{k-d} + \bar{D}_w w_k \end{cases} \tag{3.37}$$

em que

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A + B_u K C_2, & \bar{A}_d &= A_d + B_u K_d C_2, \\ \bar{C} &= C_1 + D_u K C_2, & \bar{C}_d &= C_{1d} + D_u K_d C_2, \\ \bar{B}_w &= B_w, & \bar{D}_w &= D_w. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Observe que a lei de controle proposta utiliza a saída atual e a saída com atraso, portanto engloba como caso particular as leis de controle utilizadas em [SKYK99, GLWW04, HWLS08] que não levam em conta o termo $K_d y_{k-d}$. Para que a lei dada em (3.36) seja utilizada, é necessário o conhecimento do valor de d, que pode ser obtido, por exemplo, utilizando algum tipo de registro de tempo nas medidas ou estimativas dos valores dos estados. Quando o valor do atraso não está disponível, impõem-se $K_d = \mathbf{0}$ e a lei de controle recupera a forma mais frequente encontrada na literatura, dada por $u_k = Ky_k$ [CMLG11]. Novamente, de forma a separar as matrizes conhecidas das matrizes de busca, o sistema em malha fechada (3.37) pode

ser reescrito como

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{A}_d & \bar{B}_w \\ \bar{B}_u & \bar{C}_d & \bar{D}_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-d} \\ w_k \end{bmatrix}, \\
&= \begin{bmatrix} A + B_u K C_2 & A_d + B_u K_d C_2 & B_w \\ C_1 + D_u K C_2 & C_{1_d} + D_u K_d C_2 & D_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-d} \\ w_k \end{bmatrix}, \\
&= \begin{bmatrix} A & A_d & B_w \\ C_1 & C_{1_d} & D_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-d} \\ w_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_u K C_2 & B_u K_d C_2 & \mathbf{0} \\ D_u K C_2 & D_u K_d C_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-d} \\ w_k \end{bmatrix}, \\
&= \begin{bmatrix} A & A_d & B_w \\ C_1 & C_{1_d} & D_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-d} \\ w_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_u \\ D_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & Kd & \bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-d} \\ w_k \end{bmatrix}, \\
&= (\hat{A} + \hat{B}\hat{K}\hat{C}) \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-d} \\ w_k \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{3.39}
$$

em que

$$
\hat{A} = \begin{bmatrix} A & A_d & B_w \\ C_1 & C_{1d} & D_w \end{bmatrix}, \ \hat{B} = \begin{bmatrix} B_u \\ D_u \end{bmatrix}, \ \hat{K} = \begin{bmatrix} K & K_d & \bullet \end{bmatrix}, \ \hat{C} = \begin{bmatrix} C_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{3.40}
$$

e $\bullet$ denota um bloco cujo o valor é irrelevante.

Definição 3.1 (Custo $\mathcal{H}_\infty$). *Dado o sistema $\bar{\Psi}$, equação (3.39), sujeito a (3.2)–(3.3). O valor de $\gamma > 0$, tal que para qualquer entrada $w_k \in \ell_2$ exista um $z_k \in \ell_2$ que satisfaça $\|z_k\|_2 \leq \gamma\|w_k\|_2$, $\forall w_k \in \ell_2$ (veja (2.21)) é chamado de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para $\bar{\Psi}$. Além disso, o menor valor de γ que satisfaça (2.21) é denotado por γ^*, o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ ótimo.*

Observe que no caso do sistema (3.35) ser incerto, a definição de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dada acima pode ser estendida, considerando que (2.21) deve ser verificada em todo o domínio de incertezas ao qual o sistema está sujeito. Em qualquer caso, o valor $\gamma \geq \gamma^*$ será um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema.

Nesta seção propomos soluções para os seguintes problemas:

Problema 3.2 (Estimação $\mathcal{H}_\infty$). *Determinar, se possível, um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, $\gamma > 0$ que verifique (2.21), para o sistema (3.37) sujeito a (3.2)-(3.3).*

Problema 3.3 (Controle $\mathcal{H}_\infty$). *Determinar, se possível, ganhos por realimentação estática de saída, K e K_d tais que o sistema (3.35) sujeito a (3.2)-(3.3) sob ação da lei de controle (3.36) seja assintoticamente estável e para todo $w_k \in \ell_2$ exista $z_k \in \ell_2$ tal que $\gamma > 0$ seja um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para sistema em malha fechada resultante.*

3.4 Resultados principais

Nesta seção são apresentados os principais resultados para a síntese dos ganhos de realimentação estática de saída, K e K_d, de forma que o sistema em malha fechada (3.39) seja assintoticamente estável e tenha um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma = \sqrt{\mu}$. O lema seguinte funciona como um *bounded real lemma* [BEGFB94] para o caso do sistema com atraso. Esse lema será utilizado em seguida para a obtenção de condições de síntese para os ganhos da lei de controle dada em (3.36).

Lema 3.2. *Considere o sistema discreto em malha fechada dado em (3.37). Se existem matrizes* $\mathbf{0} < P = P^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < S = S^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\hat{K} \in \mathbb{R}^{m\times(2n+m)}$ *e um escalar* $\mu > 0$ *tais que*

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \star \\ \hat{A} + \hat{B}\hat{K}\hat{C} & -\begin{bmatrix} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{3.41}$$

com

$$\Phi_{11} = \begin{bmatrix} S-P & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{3.42}$$

então o sistema é assintoticamente estável e possui custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ *dado por* $\gamma = \sqrt{\mu}$.

Prova: Se (3.41) é verificada então, $\mathbf{0} < S = S^T$ e $\mathbf{0} < P = P^T$. Assim, uma candidata a função de L-K dada por (3.11) é definida positiva para todo $x_j \neq \mathbf{0}$. Aplicando o complemento de Schur em (3.41) obtém-se

$$\Phi_{11} + (\hat{A} + \hat{B}\hat{K}\hat{C})^T \begin{bmatrix} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} (\hat{A} + \hat{B}\hat{K}\hat{C}) < \mathbf{0}. \tag{3.43}$$

De (3.39) tem-se que

$$\hat{A} + \hat{B}\hat{K}\hat{C} \equiv \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{A}_d & \bar{B}_u \\ \bar{C} & \bar{C}_d & \bar{D}_w \end{bmatrix}. \tag{3.44}$$

Portanto, substituindo-se (3.44) em (3.43) obtém-se

$$\begin{aligned} \Phi_{11} + \begin{bmatrix} \bar{A}^T \\ \bar{A}_d^T \\ \bar{B}_u^T \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} \bar{A}^T \\ \bar{A}_d^T \\ \bar{B}_u^T \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \bar{C}^T \\ \bar{C}_d^T \\ \bar{D}_w^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}^T \\ \bar{C}_d^T \\ \bar{D}_w^T \end{bmatrix}^T = \\ = \Phi_{11} + \begin{bmatrix} \bar{A}^T P \bar{A} + \bar{C}^T \bar{C} & \star & \star \\ \bar{A}_d^T P \bar{A} + \bar{C}_d^T \bar{C} & \bar{A}_d^T P \bar{A}_d + \bar{C}_d^T \bar{C}_d & \star \\ \bar{B}_w^T P \bar{A} + \bar{D}_w^T \bar{C} & \bar{B}_w^T P \bar{A}_d + \bar{D}_w^T \bar{C}_d & \bar{B}_w^T P \bar{B}_w + \bar{D}_w^T \bar{D}_w \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} S - P + \bar{A}^T P \bar{A} + \bar{C}^T \bar{C} & \star & \star \\ \bar{A}_d^T P \bar{A} + \bar{C}_d^T \bar{C} & -S + \bar{A}_d^T P \bar{A}_d + \bar{C}_d^T \bar{C}_d & \star \\ \bar{B}_w^T P \bar{A} + \bar{D}_w^T \bar{C} & \bar{B}_w^T P \bar{A}_d + \bar{D}_w^T \bar{C}_d & -\mu\mathbf{I} + \bar{B}_w^T P \bar{B}_w + \bar{D}_w^T \bar{D}_w \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Para que (3.11), seja uma função de L-K é necessário que adicionalmente à sua positividade seja verificado (3.15). Substituindo-se a expressão de x_{k+1} dada em (3.37) em (3.15) obtém-se

$$\Delta V = \upsilon^T \begin{bmatrix} S - P + \bar{A}^T P \bar{A} & \star & \star \\ \bar{A}_d^T P \bar{A} & \bar{A}_d^T P \bar{A}_d - S & \star \\ \bar{B}_w^T P \bar{A} & \bar{B}_w^T P \bar{A}_d & \bar{B}_w^T P \bar{B}_w \end{bmatrix} \upsilon < 0, \quad \upsilon = \begin{bmatrix} x_k^T & x_{k-d}^T & w_k^T \end{bmatrix}^T.$$

Considere a função de custo dada por

$$\mathcal{J} = \sum_{k=0}^{\infty} [z_k^T z_k - \gamma^2 w_k^T w_k],$$

em que $\gamma = \sqrt{\mu}$ é um custo garantido para o sistema. Assuma, sem perda de generalidade, que (3.37) é estável e satisfaz (3.3). Portanto, $V(0) = 0$ e $V(k)|_{k\to\infty} \to \epsilon$ com $\epsilon \to 0$ se $w_k = \mathbf{0}$ ou $\epsilon \to \bar{\epsilon} < \infty$ se w_k é constante . Assim, pode-se afirmar que

$$\mathcal{J} \leq \sum_{k=0}^{\infty} [z_k^T z_k - \gamma^2 w_k^T w_k + \Delta V(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} [z_k^T z_k - \mu w_k^T w_k + \upsilon^T \vartheta_1 \upsilon] = \sum_{k=0}^{\infty} \upsilon^T \vartheta \upsilon$$

em que

$$\vartheta \doteq \begin{bmatrix} S - P + \bar{A}^T P \bar{A} & \star & \star \\ \bar{A}_d^T P \bar{A} & \bar{A}_d^T P \bar{A}_d - S & \star \\ \bar{B}_w^T P \bar{A} & \bar{B}_w^T P \bar{A}_d & \bar{B}_w^T P \bar{B}_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{C}^T \bar{C} & \star & \star \\ \bar{C}_d^T \bar{C} & \bar{C}_d^T \bar{C}_d & \star \\ \bar{D}_w^T \bar{C} & \bar{D}_w^T \bar{C}_d & \bar{D}_w^T \bar{D}_w + \mu \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (3.46)$$

Logo, basta fazer $\vartheta < \mathbf{0}$ para obter-se $\mathcal{J} < \mathbf{0}$. Considerando que a LMI (3.41) garante que $\vartheta < \mathbf{0}$, pode-se concluir que $\mathcal{J} < \mathbf{0}$ para todo $w_k \in \ell_2$ diferente de zero e o sistema (3.37) é estável com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, dado por $\gamma = \sqrt{\mu}$, para qualquer condição de atraso que satisfaça (3.2) e, como (3.46) é igual (3.45), conclui-se a prova. ∎

A seguir é apresentada uma nova condição que desacopla os produtos entre matrizes do sistema e matrizes do controlador, presentes em (3.41), os quais não permitem que o problema seja resolvido por *softwares* de otimização conhecidos.

Teorema 3.3. *Seja o sistema linear discreto com atraso nos estados (3.37). Para parâmetros escalares $\mu > 0$, α e β dados, se existem matrizes $\mathbf{0} < P = P^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < S = S^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < J = J^T \in \mathbb{R}^{(n+p)\times(n+p)}$, $G \in \mathbb{R}^{(n+p)\times(n+p)}$, $V \in \mathbb{R}^{m\times 3q}$, $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $\Delta \in \mathbb{R}^{m\times m}$ tais que*

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \star & \star & \star \\ G\hat{A} + \hat{B}V\hat{C} & -\alpha G - \alpha G^T + \alpha^2 \begin{bmatrix} P & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} + J & \star & \star \\ \beta^{-1}\Delta V \hat{C} & \mathbf{0} & -\beta^{-1}(\Delta U + U^T \Delta^T) & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & G\hat{B} - \hat{B}U & -J \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (3.47)$$

é verificada com Φ_{11} dado em (3.42), então, o sistema é assintoticamente estável com a lei de controle (3.36) e ganhos dados por (3.40), com $\hat{K} = U^{-1}V$ possui custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma = \sqrt{\mu}$.

Prova: A prova segue os mesmo passos realizadas no Teorema (3.1). Se (3.47) é verificada, G e U são regulares devido a $-\alpha G - \alpha G^T + \alpha^2 \begin{bmatrix} P & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}$ e $-\beta^{-1}(\Delta U + U^T \Delta^T) < \mathbf{0}$, respectivamente. Aplicando o complemento de Schur em (3.47), obtém-se

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \star \\ G\hat{A} + \hat{B}V\hat{C} & \alpha G - \alpha G^T + \alpha^2 \begin{bmatrix} P & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} + J \end{bmatrix} & \star \\ \beta^{-1}\Delta V\hat{C} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} & \chi \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{3.48}$$

com $\chi = -\beta^{-1}(\Delta U + U^T \Delta^T) + (G\hat{B} - \hat{B}U)^T J^{-1}(G\hat{B} - \hat{B}U)$. Aplicando o Lema 2.4 com

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \star \\ G\hat{A} + \hat{B}V\hat{C} & \alpha G - \alpha G^T + \alpha^2 \begin{bmatrix} P & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} + J \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{L} = \beta^{-1}\Delta U,$$

$$\mathbb{N} = U^{-1}V\hat{C} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbb{P} = (G\hat{B} - \hat{B}U)^T J^{-1}(G\hat{B} - \hat{B}U)$$

a partir do qual é possível reescrever (3.48) como

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \star \\ G\hat{A} + \hat{B}V\hat{C} & \alpha G - \alpha G^T + \alpha^2 \begin{bmatrix} P & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} J \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \hat{C}^T V^T U^{-T}$$
$$\times (G\hat{B} - \hat{B}U)^T J^{-1}(G\hat{B} - \hat{B}U)U^{-1}V\hat{C} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \tag{3.49}$$

Utilizando o Lema 2.3 pode-se majorar as últimas parcelas da soma de (3.49) e por meio do Lema 2.5, o termo $-\alpha G - \alpha G^T + \alpha^2 \begin{bmatrix} P & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$, resultando em

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \star \\ G\hat{A} + \hat{B}V\hat{C} & -G \begin{bmatrix} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} G^T \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} (G\hat{B} - \hat{B}U)U^{-1}V\hat{C} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \tag{3.50}$$

Substituindo-se $\hat{K} = U^{-1}V$ em (3.50), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \star \\ G\hat{A} + G\hat{B}\hat{K}\hat{C} & -G \begin{bmatrix} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} G^T \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \tag{3.51}$$

Pré- e pós-multiplicando (3.51) por $\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \star \\ \mathbf{0} & G^{-1} \end{bmatrix}$ e sua transposta, respectivamente, a desigualdade (3.41) pode ser obtida, completando a prova. ∎

Note novamente que para a solução da desigualdade (3.47), é necessário que as variáveis Δ, α e β sejam especificadas. Diferentes escolhas de Δ resultam em estimativas diferentes para o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$. A escolha de $\Delta = B^T B$ no Teorema 3.3 recupera uma condição equivalente à proposta na formulação de [CY14] se diretamente aplicada a um sistema com atrasos nos estados. Utilizando algoritmos de otimização numérica, como o *fminsearch()* do *Matlab*, é possível minimizar o valor de μ, e portanto o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, por meio da busca nos valores dos parâmetros escalares α e β para uma dada Δ.

3.5 Extensão para o controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ via SOF

O resultado obtido na seção anterior pode ser estendido para sistemas com incertezas, ou seja, para sistemas cujas as matrizes contém parâmetros incertos. Nesta seção é assumido que o sistema (3.35) é sujeito a incertezas politópicas, logo as matrizes do sistema dependem de forma afim de um vetor de parâmetros θ

$$\Psi(\alpha) : \begin{cases} x_{k+1} = A(\theta)x_k + A_d(\theta)x_{k-d} + B_u(\theta)u_k + B_w(\theta)w_k \\ z_k = C_1(\theta)x_k + C_{1_d}(\theta)x_{k-d} + D_u(\theta)u_k + D_w(\theta)w_k \\ y_k = C_2(\theta)x_k \end{cases} \tag{3.52}$$

Essas matrizes podem ser descritas por um politopo $\mathcal{P}$ com vértices conhecidos:

$$\mathcal{P} = \left\{ \Psi(\theta) \in \mathbb{R}^{(n+p+q)\times(2n+m+v)} : \Psi(\theta) = \sum_{i=1}^{N} \theta_i \Psi_i,\ \theta \in \Upsilon \right\}, \tag{3.53}$$

em que Υ é dado em (3.25) e

$$\Psi_i = \left[\begin{array}{cc|c|c} A_i & A_{d_i} & B_{u_i} & B_{w_i} \\ \hline C_{1_i} & C_{1_{di}} & D_{u_i} & D_{w_i} \\ \hline C_{2_i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right],\ i \in \mathcal{I}[1, N]. \tag{3.54}$$

Considerando a mesma lei de controle dada em (3.36), o sistema em malha fechada, obtido aplicando-se (3.36) em (3.52), é dado por

$$\bar{\Psi}(\theta) : \begin{cases} x_{k+1} = \bar{A}(\theta)x_k + \bar{A}_d(\theta)x_{k-d} + \bar{B}_w(\theta)w_k \\ z_k = \bar{C}(\theta)x_k + \bar{C}_d(\theta)x_{k-d} + \bar{D}_w(\theta)w_k \end{cases} \tag{3.55}$$

em que

$$\begin{aligned} \bar{A}(\theta) &= A(\theta) + B_u(\theta)KC_2(\theta), & \bar{A}_d(\theta) &= A_d(\theta) + B_u(\theta)K_dC_2(\theta), \\ \bar{C}(\theta) &= C_1(\theta) + D_u(\theta)KC_2(\theta), & \bar{C}_d(\theta) &= C_{1d}(\theta) + D_u(\theta)K_dC_2(\theta), \\ \bar{B}_w(\theta) &= B_w(\theta), & \bar{D}_w(\theta) &= D_w(\theta). \end{aligned} \tag{3.56}$$

Conforme realizado na seção 3.3, de forma a separar a matrizes conhecidas das matrizes de busca, o sistema em malha fechada (3.37) pode ser reescrito como

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_k \end{bmatrix} = (\hat{A}(\theta) + \hat{B}(\theta)\hat{K}\hat{C}(\theta)) \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-d} \\ w_k \end{bmatrix}, \tag{3.57}$$

em que

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A(\theta) & A_d(\theta) & B_w(\theta) \\ C_1(\theta) & C_{1d}(\theta) & D_w(\theta) \end{bmatrix}, \ \hat{B} = \begin{bmatrix} B_u(\theta) \\ D_u(\theta) \end{bmatrix}, \ \hat{K} = \begin{bmatrix} K & K_d & \bullet \end{bmatrix}, \ \hat{C} = \begin{bmatrix} C_2(\theta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_2(\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{3.58}$$

Neste caso, é estabelecido um resultado semelhante ao proposto no Teorema 3.3 de forma a assegurar o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para todo o domínio de incertezas.

Teorema 3.4 (Controle Robusto)**.** *Seja o sistema linear discreto com atraso nos estados (3.55) com matrizes incertas descritas por (3.54). Para parâmetros escalares $\mu > 0$, α e β dados, se existem matrizes $\mathbf{0} < P_i = P_i^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < S_i = S_i^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < J_i = J_i^T \in \mathbb{R}^{(n+p)\times(n+p)}$, $G_i \in \mathbb{R}^{(n+p)\times(n+p)}$, $i \in \mathcal{I}[1,N]$, $V \in \mathbb{R}^{m\times 3q}$, $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $\Delta \in \mathbb{R}^{m\times m}$ tais que*

$$\begin{gathered} \Lambda_i < \mathbf{0}, \quad i \in \mathcal{I}[1,N], \\ \Lambda_{ij} < \mathbf{0}, \quad i \in \mathcal{I}[1,N-1], \ j \in \mathcal{I}[i+1,N], \end{gathered} \tag{3.59}$$

em que

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} \Phi_{11i} & \star & \star & \star \\ G_i\hat{A}_i + \hat{B}_iV\hat{C}_i & -2\alpha G_i + \alpha^2 \begin{bmatrix} P_i & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} + J_i & \star & \star \\ \beta^{-1}\Delta V\hat{C}_i & \mathbf{0} & -\beta^{-1}(\Delta U + U^T\Delta^T) & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & G_i\hat{B}_i - \hat{B}_iU & -J_i \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{3.60}$$

$$\Lambda_{ij} = \begin{bmatrix} \Phi_{11ij} & \star & \star & \star \\ G_iA_j + G_jA_i + \hat{B}_iVhC_j + \hat{B}_jV\hat{C}_i & -2\alpha G_i - 2\alpha G_j + \alpha^2 \begin{bmatrix} P_i + P_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{I} \end{bmatrix} + J_i + J_j & \star & \star \\ \frac{\Delta}{\beta}V\hat{C}_i + \frac{\Delta}{\beta}V\hat{C}_j & \mathbf{0} & -2\beta^{-1}(\Delta U + U^T\Delta^T) & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & G_i\hat{B}_j + G_j\hat{B}_i - (\hat{B}_i + \hat{B}_j)U & -J_i - J_j \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{3.61}$$

com

$$\Phi_{11i} = \begin{bmatrix} S_i - P_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -S_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{3.62}$$

,

$$\Phi_{11ij} = \begin{bmatrix} S_i + S_j - P_i - P_j & \mathbf{0} & \\ \mathbf{0} & -S_i - S_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -2\gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{3.63}$$

então o sistema é robustamente assintoticamente estável com a lei de controle (3.36) e ganhos dados por $\hat{K} = U^{-1}V$ *(veja estrutura (3.58)). Além disso, o sistema resultante possui custo garantido* $\mathcal{H}_\infty$ *dado por* $\gamma = \sqrt{\mu}$ *e (3.34) é uma função de L-K dependente de parâmetros que assegura a estabilidade robusta do sistema em malha fechada para* $d \in [1, \tau], \tau < \infty$.

Prova: A prova segue passos similares aos da prova do Teorema 3.2. ∎

Note que novamente que as condições propostas nos teoremas 3.3 e 3.4 são independentes do atraso, de forma que os resultados obtidos com esses dois teoremas asseguram a estabilidade e o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para qualquer atraso $d \in \mathcal{I}[1, \tau]$, $\tau < \infty$.

3.5.1 Exemplos

São apresentados dois exemplos que ilustram o uso das condições propostas. No Exemplo 3.5.1.1 é obtido um controlador dado pela lei 3.36 que garante um custo γ para um sistema discreto precisamente conhecido. No Exemplo 3.5.1.2 é tratado o caso de sistema que sujeito a incertezas. Em ambos os exemplos, os resultados foram obtidos utilizando-se o *toolbox SeDuMi* e a função *fminsearch()* do *MatLab*.

3.5.1.1 Exemplo 1

Considere o sistema descrito por (3.35) com matrizes retiradas de [CY14, Exemplo 1]:

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.8 & -0.4 \\ -0.5 & 0.4 & 0.5 \\ 1.2 & 1.1 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2.0 & -1 \\ 0 & 1.3 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.4 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$
$$C_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = 0, \quad D_w = 0.30, \quad C_2 = \begin{bmatrix} -1.0 & 1.2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

e A_d e C_{1d}, referentes ao atraso nos estados, escolhidas aleatoriamente como $A_d = 0.1A$, $C_{1d} = 0.3C_1$. Primeiramente, diferente do que foi realizado nos exemplos anteriores, foi realizada uma busca da matriz Δ que gerasse não somente uma solução factível, mas também um menor custo garantido inicial. Para isso, foram obtidas matrizes Δ aleatórias, garantindo-se que elas tivessem posto completo. Em sequência, para cada matriz gerada foi feita uma varredura espaçada para valores de α,$\beta \in \mathcal{I}[-10, 10]$ que pelo Teorema 3.3 gerassem valores factíveis. Na Tabela 3.1 são mostrados alguns dos resultados obtidos pela varredura de valores do par (α, β) para diferentes matrizes Δ. O símbolo $-$ indica parâmetros que não resultaram em soluções factíveis. Observando os resultados mostrados na Tabela 3.1 percebe-se claramente que a escolha da matriz Δ interfere no valor do custo obtido pelo sistema. Por meio da análise do resultados mostrados na Tabela 3.1 é possível perceber que a matriz Δ que gerou o menor custo foi $\Delta = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$,

Tabela 3.1: Busca da matriz Δ e parâmetros α e β

Matriz	α	β	$\mathcal{H}_\infty$
$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$	2	8	22.3704
$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	-2	-10	11.6210
$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	-1	-4	12.3422
$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	-2	-8	28.9561
$\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$	1	10	25.2291
$\begin{bmatrix} -9 & 7 \\ -3 & -10 \end{bmatrix}$	1	-10	15.3215
$\begin{bmatrix} -8 & -6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$	-	-	-
$\begin{bmatrix} -5 & -10 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$	-	-	-
$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	**1**	**10**	**10.4234**

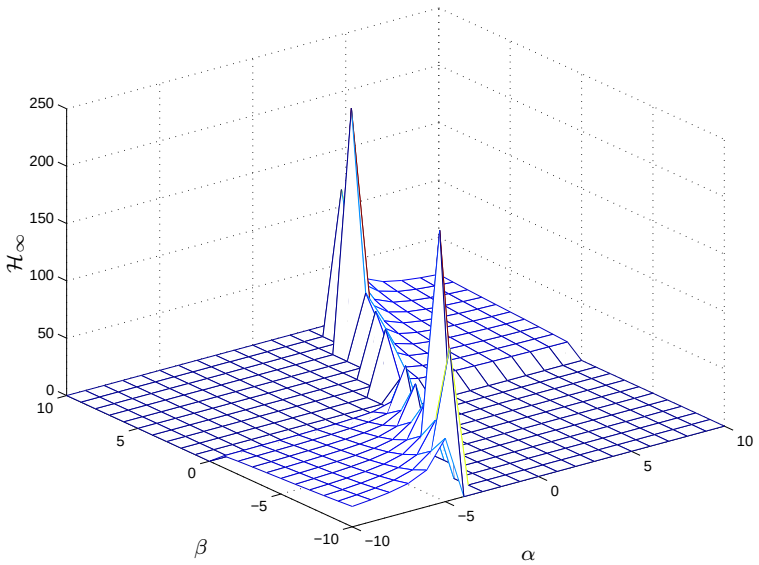


Figura 3.8: Custo $\mathcal{H}_\infty$ em relação a α e β.

com $\mathcal{H}_\infty = 10.4234$, para $\alpha = 1$ e $\beta = 10$. A Figura 3.8 mostra o valor do custo obtido em relação aos valores de α e β para $\Delta = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Por fim, após a varredura espaçada de valores α e β, utilizado o Teorema 3.3, é possível otimizar esses valores por meio da função *fminsearch()*. Nesse exemplo, para valores iniciais de $\alpha = 1$, $\beta = 10$ e $\Delta = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ foi obtido $\gamma = 10.4234$. Por meio da função *fminsearch()*, esses

valores foram otimizados resultando em $\alpha = -0.0608$ e $\beta = -1.9029$, ganhos

$$[K|K_d] = \left[\begin{array}{cc|cc} -0.0356 & -0.3680 & -0.0030 & -0.0378 \\ 0.4208 & -0.8132 & 0.0439 & -0.0831 \end{array}\right]$$

e $\gamma = 9.8581$. Para $\Delta = B^T B$, conforme feito em [CY14], o custo garantido obtido também com a busca de α e β é de $\mathcal{H}_\infty = 9.8764$, ligeiramente superior ao obtido anteriormente. Na Figura 3.9 são mostrados os valores singulares para o sistema em malha fechada utilizando os ganhos aqui calculados e para valores de atraso $d \in \mathcal{I}[1, 10]$. Também é mostrado o valor ótimo encontrado com a proposta deste trabalho (linha pontilhada). Note a proximidade do valor estimado com o valor ótimo obtido pela varredura da função de transferência da malha fechada $\gamma^* = 9.5183$.

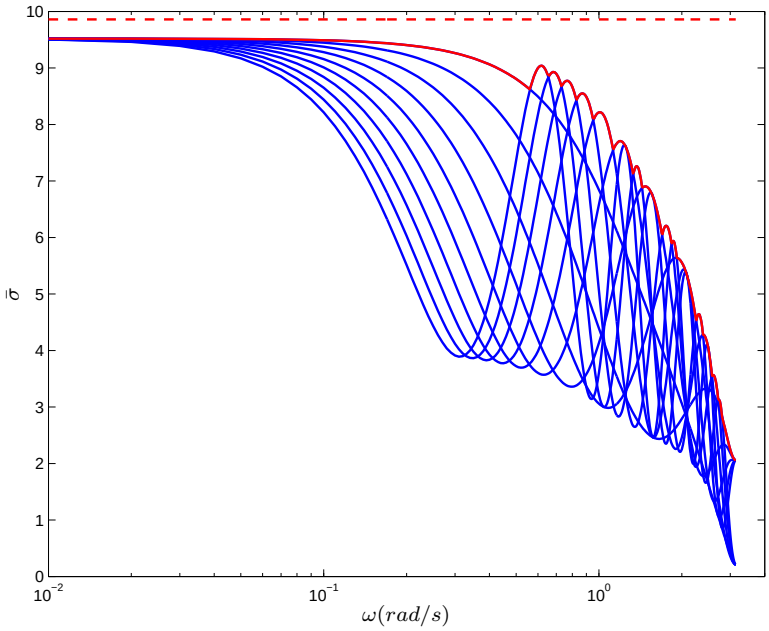


Figura 3.9: Valores singulares e custo garantido obtido para o sistema do Exemplo 3.5.1.1 em malha fechada, com $d \in \mathcal{I}[1, 10]$.

Nas figuras a seguir são apresentadas o comportamento do sistema em malha fechada, utilizando uma valor de atraso $d = 10$ (escolhido aleatorimente, já que a condição independe do atraso), quando são utilizados os ganhos K e K_d obtidos anteriormente e o sistema está sujeito ao vetor de entrada de perturbação, w_k, conforme mostrado na Figura 3.10. O vetor w_k foi criado aleatoriamente de modo a mostrar o efeito da perturbação na saída. A Figura 3.11 mostra a saída medida do sistema z_k quando sujeita a perturbação w_k, para uma condição inicial nula. Pela Figura, percebe-se que a relação máxima entre z_k/w_k é igual a $6.5399/1 = 6.5399$, valor inferior ao custo ótimo calculado. Os sinais de controle calculados na simulação são mostrados na Figura 3.12. Veja que a amplitude dos sinais de u_1 e u_2 tem variações significativas no momento das perturbações $k = 30$ a $k = 40$, e $k = 50$ a $k = 60$.

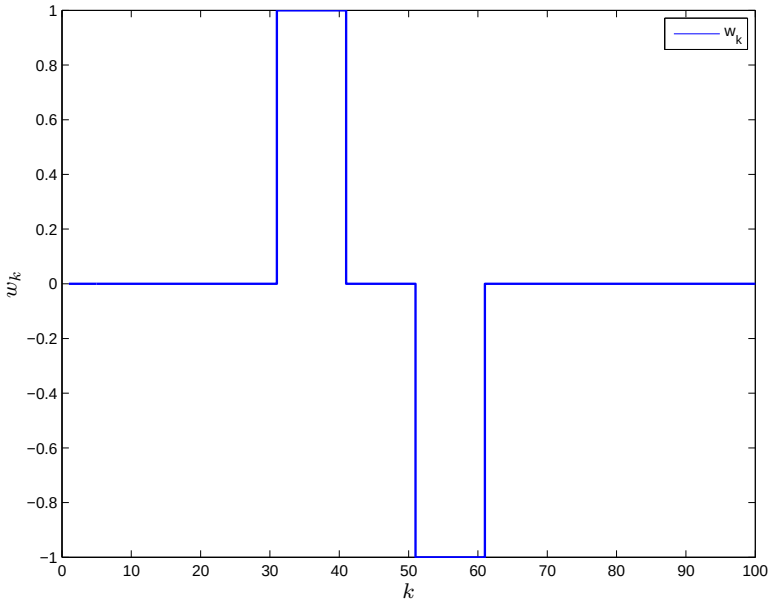


Figura 3.10: Sinal w_k aplicado ao sistema em malha fechada.

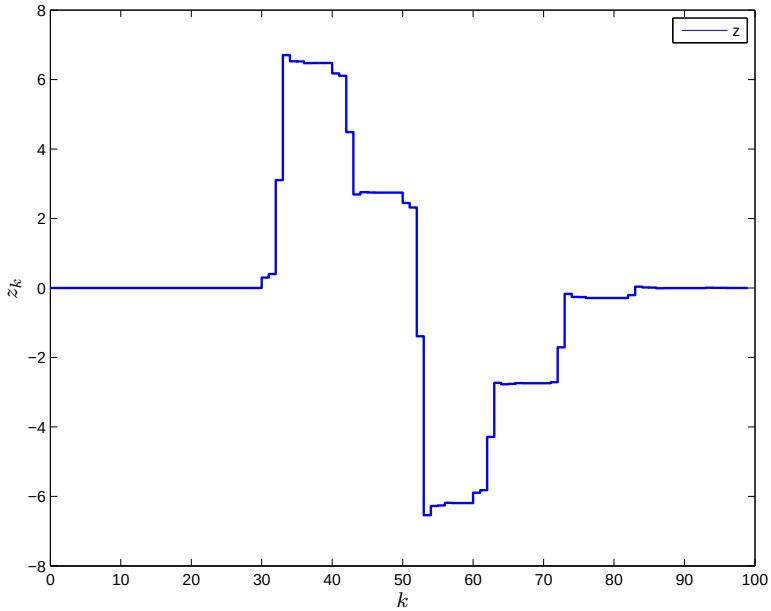


Figura 3.11: Saída z_k cujo o sistema em malha fechada foi obtido pelos ganhos K e K_d calculados pelo Teorema 3.1.

3.5.1.2 Exemplo 2

Considere que todas as matrizes do sistema do Exemplo 3.5.1.1 sejam multiplicadas por um fator $1 \leq f \leq 1.3$. Isso gera um sistema incerto com dois vértices. Utilizando a mesma matriz Δ do Exemplo 3.5.1.1 e considerando também os mesmos valores iniciais de α β, obtemos $\gamma = 169.0861$ como Teorema 3.4. Otimizando os valores α e β, obtivemos $\alpha = -0.1603$ e $\beta = 16.8843$, ganhos

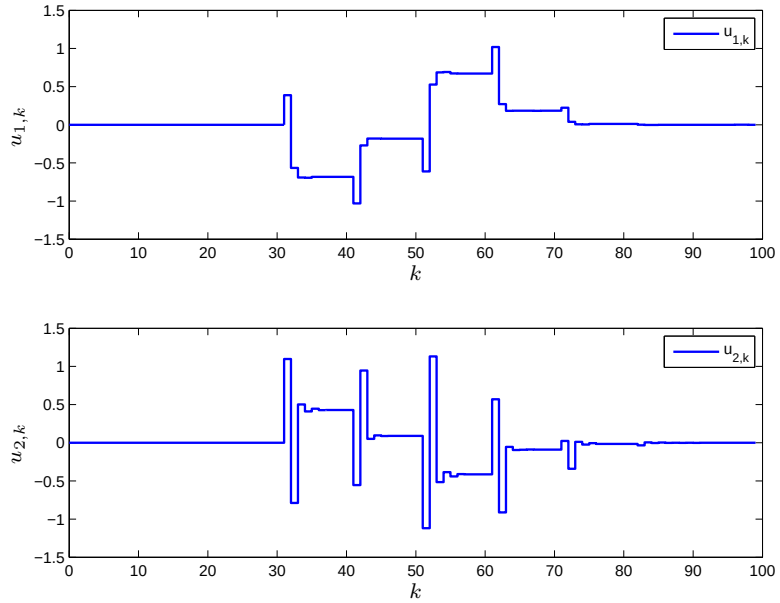


Figura 3.12: Sinal de controle $u_k = [u_1 \; u_2]^T$.

$$[K|K_d] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0.0821 & -0.4975 & 0.0082 & -0.0499 \\ 0.6653 & -1.0188 & 0.066 & -0.1020 \end{array}\right]$$

e $\gamma = 28.6836$, mostrando uma significativa redução em relação ao valor inicial. Na Figura 3.13 são mostrados os diagramas de valores singulares máximos para o sistema em malha fechada, para $d \in \mathcal{I}[1, 10]$ para f variando de 1 a 1.3 e o valor do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ estimado, $\gamma = 25.5271$. Na Figura 3.14 é mostrada a saída medida, z_k , do sistema quando esse é sujeito a

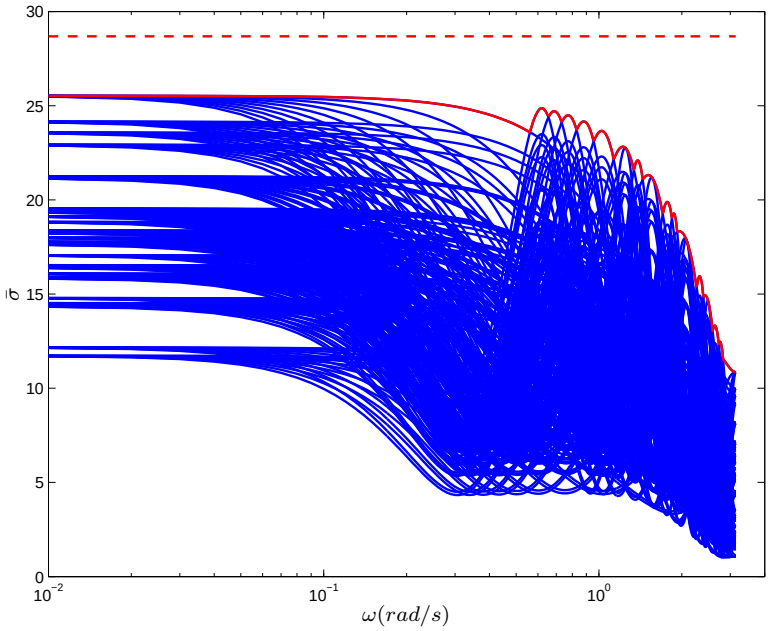


Figura 3.13: Valores singulares e custo garantido obtido para o sistema em malha fechada incerto para $d \in \mathcal{I}[1, 10]$.

mesma perturbação w_k do exemplo anterior. Pela Figura, percebe-se que mesma na presença de incertezas, a relação máxima entre z_k/w_k é igual a $19.0843/1 = 19.0843$, valor inferior ao custo ótimo calculado. Os sinais de controle calculados na simulação são mostrados na Figura 3.15.

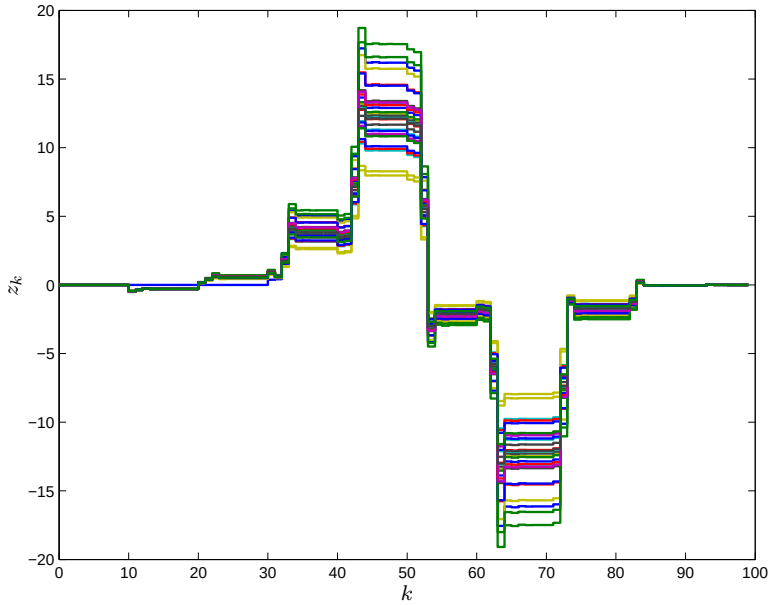


Figura 3.14: Saída z_k cujo o sistema em malha fechada foi obtido pelos ganhos K e K_d calculados pelo Teorema 3.4.

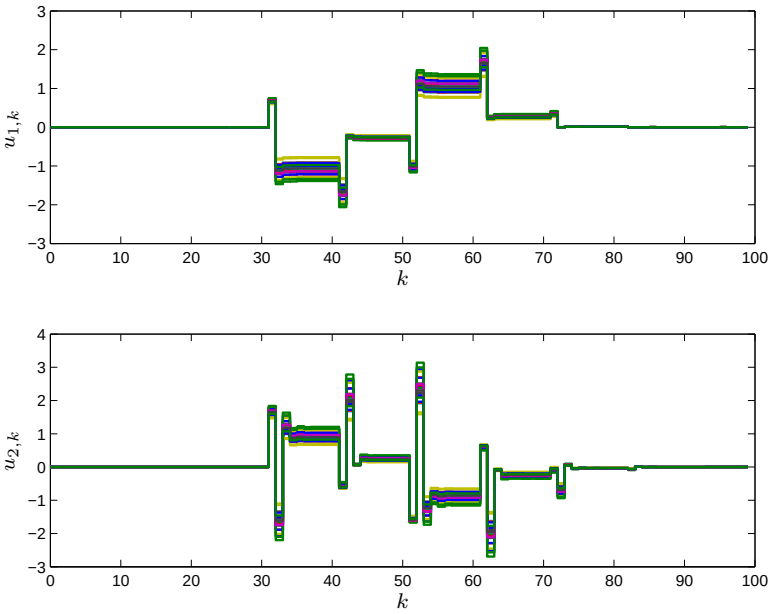


Figura 3.15: Sinal de controle $u_k = [u_1 \; u_2]^T$.

3.6 Lei SOF sem memória

Considere novamente o sistema (3.35). Nessa seção, não é considerada a saída atrasada, termo y_{k-d}, na lei de controle, portanto a lei de controle por realimentação estática de saída é dada por:

$$u_k = Ky_k \tag{3.64}$$

com $K \in \mathbb{R}^{m\times q}$. O sistema em malha fechada, obtido aplicando-se (3.64) em (3.35), é dado por

$$\tilde{\Psi}_2(\theta) : \begin{cases} x_{k+1} = \tilde{A}(\theta)x_k + \tilde{A}_d(\theta)x_{k-d} + \tilde{B}_w(\theta)w_k \\ z_k = \tilde{C}(\theta)x_k + \tilde{C}_d(\theta)x_{k-d} + \tilde{D}_w(\theta)w_k \end{cases} \tag{3.65}$$

em que

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\theta) &= A(\theta) + B_u(\theta)KC_2(\theta), \quad \tilde{A}_d(\theta) = A_d(\theta), \\ \tilde{C}(\theta) &= C_1(\theta) + D_u(\theta)KC_2(\theta), \quad \tilde{C}_d(\theta) = C_{1d}(\theta), \\ \tilde{B}_w(\theta) &= B_w(\theta), \quad \tilde{D}_w(\theta) = D_w(\theta). \end{aligned}$$

Da mesma maneira que foi feita anteriormente, com o objetivo de separar as matrizes conhecidas das matrizes de busca, o sistema em malha fechada (3.65) é reescrito como (3.39), em que:

$$\begin{aligned} \hat{A}(\theta) &= \begin{bmatrix} A(\theta) & A_d(\theta) & B_w(\theta) \\ C_1(\theta) & C_{1d}(\theta) & D_w(\theta) \end{bmatrix}, \ \hat{B}(\theta) = \begin{bmatrix} B_u(\theta) \\ D_u(\theta) \end{bmatrix}, \\ \hat{K} &= \begin{bmatrix} K & \bullet & \bullet \end{bmatrix}, \ \hat{C}(\theta) = \begin{bmatrix} C_2(\theta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Como somente a estrutura internas das matrizes foi modificada, ainda é válido o Teorema (3.4) obtido anteriormente.

3.6.0.3 Exemplo

Resolvendo o exemplo (3.5.1.2), os resultados obtidos quando a lei de controle engloba e não engloba a realimentação da saída atrasada é mostrado na Tabela 3.2.

Tabela 3.2: Comparação entre realimentação atrasada e não atrasada

Vértice	$\mathcal{H}_\infty$ sem K_d	$\mathcal{H}_\infty$ com K_d
1	15.9190	9.8581
$2(p = 0.1)$	39.1030	14.6840
$2(p = 0.3)$	Infactível	28.6836

Conforme pode ser observado pelos resultados mostrados na Tabela 3.2 utilizar o sinal de saída atrasado na lei de controle, o que implica no conhecimento do valor do atraso em cada amostragem, é vantajoso, pois reduz consideravelmente valor do custo garantido.

3.7 Comentários finais

Neste capítulo foram apresentadas técnicas independentes do atraso para a síntese de controladores via realimentação estática de saída para sistemas discretos no tempo com atraso invariante no vetor de estados. As condições propostas incluem sistemas cujos parâmetros são incertos. Foram considerados os problemas de estabilização e controle com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para esses sistemas. Como o controle por realimentação estática de saída resulta em condições que não podem ser expressas com LMIs, as condições propostas dependem da escolha parâmetros iniciais para resolver o problema de não-convexidade, a saber: os escalares α e β e a matriz $\Delta \in \mathbb{R}^{m\times m}$. A otimização desses parâmetros permite melhorar os resultados obtidos. Foi verificado que com a utilização da saída atrasada na lei de controle é possível obter resultado melhores do que utilizando apenas a saída atua. Exemplos numéricos foram apresentados para demonstrar a efetividade e aplicabilidade da técnica proposta.

Capítulo 4

Controle $\mathcal{H}_\infty$ com atraso variante no tempo

Neste capítulo são estudados os sistemas lineares discretos no tempo com atraso variante no vetor de estados. São invetigados os sistemas precisamente conhecidos e os sistemas sujeitos a incertezas. No caso dos sistemas incertos, as incertezas são assumidas pertencentes a um politopo convexo com vértices conhecidos. Todas as matrizes do modelos podem ser incertas. São propostas condições tanto para a estabilização desses sistemas quanto para assegurar um desempenho pré-estabelecido de atenuação $\mathcal{H}_\infty$. As condições desenvolvidas são independentes do atraso, mas dependentes do intervalo de variação deste. Uma vez atendidas, as condições propostas garantem que o sistema em malha fechada é estável para uma certa faixa de variação dada. Como forma de diminuir o conservadorismo das soluções, as leis de controle utilizadas são dependentes da saída e da saída atrasada do sistema, caso o atraso seja conhecido em tempo real. Exemplos numéricos são utilizados para ilustrar a aplicabilidade das condições propostas.

4.1 Estabilização

Seja o sistema linear discreto no tempo (3.1), no qual $\eta = k - d_k$. Portanto, neste capítulo, o atraso, d_k, é suposto finito e variante no tempo, limitado por

$$0 < \underline{d} \leq d_k \leq \overline{d} < \infty, \tag{4.1}$$

em que $\underline{d}$ e $\overline{d}$ são, respectivamente, o atraso mínimo e o atraso máximo. O intervalo de variação do atraso é representado por $\delta \in \mathbb{N} : \delta = \overline{d} - \underline{d}$, representa Logo, o sistema (3.1) é sujeito a atraso variante no vetor de estados, dado por

$$\Omega_v : \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + A_d x_{k-d_k} + B_u u_k \\ y_k = Cx_k + C_d x_{k-d_k} \end{cases} \tag{4.2}$$

em que $x_k = x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados no instante k, $x_{k-d_k} = x(k-d_k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados atrasado de d_k amostras, $u_k = u(k) \in \mathbb{R}^m$ é o sinal de controle e $y_k = y(k) \in \mathbb{R}^q$ é

a saída medida. As matrizes A, A_d, B_u, C, C_d, possuem dimensões apropriadas e, inicialmente, são supostas precisamente conhecidas.

Considere a lei de controle por realimentação estática de saída dada em (3.4)

$$u_k = Ky_k \tag{4.3}$$

com $K \in \mathbb{R}^{m\times q}$. O sistema em malha fechada, obtido aplicando-se (4.3) em (4.2), é dado por

$$\bar{\Omega}_v : x_{k+1} = \bar{A}x_k + \bar{A}_d x_{k-d_k}, \tag{4.4}$$

em que as matrizes de malha fechada, $\bar{A}$ e A_d possuem estrutura dada por

$$\bar{A} = A + B_u KC, \quad \bar{A}_d = A_d + B_u KC_d. \tag{4.5}$$

De forma a separar as matrizes conhecidas das matrizes de busca, é adotado o mesmo procedimento realizado no Capítulo 3, seção 3.1. Portanto, o sistema em malha fechada (4.4) pode ser reescrito como

$$x_{k+1} = (\hat{A} + \hat{B}\hat{K}\hat{C}) \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-d_k} \end{bmatrix}, \tag{4.6}$$

em que $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{K}$ e $\hat{C}$ são dadas por

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & A_d \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = B, \quad \hat{K} = K, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} C & C_d \end{bmatrix}.$$

Nesta seção é proposta uma condição para o seguinte problema:

Problema 4.1 (Projeto do controlador)**.** *Dado o sistema (4.2) determinar, se possível, a matriz de ganho $\hat{K} \in \mathbb{R}^{m\times q}$ de forma que o sistema (4.4) sujeito a (4.1) e (4.3) seja assintoticamente estável para dado $\delta = \overline{d} - \underline{d}$.*

4.1.1 Resultados principais

Nesta seção é apresentado um resultado semelhante ao obtido na seção 3.2 do Capítulo 3. A diferença entre os resultados está na escolha da candidata a função de Lyapunov-Krasovskii utilizada, a qual resulta em uma condição dependente dos valores mínimo e máximo assumidos pelo atraso. A função de L-K adotada foi

$$V(k) = \sum_{v=1}^{3} V_v(k) > 0 \tag{4.7}$$

com

$$V_1(k) = x_k^T P x_k \tag{4.8}$$

$$V_2(k) = \sum_{j=k-d_k}^{k-1} x_j^T S x_j \tag{4.9}$$

$$V_3(k) = \sum_{l=2-\bar{d}}^{1-\underline{d}} \sum_{j=k+l-1}^{k-1} x_j^T S x_j > 0 \tag{4.10}$$

que será utilizada para desenvolver condições de síntese para o ganho da lei de controle (4.3). O Lema a seguir apresenta uma condição para a síntese do ganho $\hat{K} = K$ que estabiliza assintoticamente o sistema em malha fechada (4.4).

Lema 4.1. *Considere o sistema em malha fechada com atraso variante nos estados dado por (4.4). Se existem matrizes* $\mathbf{0} < P = P^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < S = S^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\hat{K} \in \mathbb{R}^{m\times q}$ *tais que*

$$\begin{bmatrix} \rho_{11} & \star \\ \hat{A} + \hat{B}\hat{K}\hat{C} & -P^{-1} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{4.11}$$

com ρ_{11} *dada por*

$$\rho_{11} = \begin{bmatrix} (1+\delta)S - P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -S \end{bmatrix}, \tag{4.12}$$

é verificada, então o sistema é assintoticamente estável quando realimentado pela lei de controle (4.3).

Prova: Se (4.11) é verificada então, $\mathbf{0} < S = S^T$ e $\mathbf{0} < P = P^T$. Logo, uma candidata a função de L-K dada por (4.7) é definida positiva para todo $x_j \neq \mathbf{0}$. A partir de então, a prova segue os mesmo passos adotados em (3.12)-(3.14) do Lema 3.1 com Ξ_{11} substituída por (4.12). Para que (4.7) seja uma L-K é necessário que adicionalmente à sua positividade seja verificado

$$\Delta V_1(k) = V_1(k+1) - V_1(k) = x_{k+1}^T P x_{k+1} - x_k^T P x_k < \mathbf{0}. \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
\Delta V_2(k) &= V_2(k+1) - V_2(k), \\
&= \sum_{j=k-d_k}^{k-1} x_{j+1}^T S x_{j+1} - \sum_{j=k-d_k}^{k-1} x_j^T S x_j, \\
&= \sum_{j=k+1-d_{k+1}}^{k} x_j^T S x_j - \sum_{j=k-d_k}^{k-1} x_j^T S x_j, \\
&= x_k^T S x_k + \sum_{j=k+1-d_{k+1}}^{k-1} x_j^T S x_j - \left(x_{k-d_k}^T S x_{k-d_k} + \sum_{j=k-d_k+1}^{k-1} x_j^T S x_j \right) < \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Note que

$$\sum_{j=k+1-d_{k+1}}^{k-1} x_j^T S x_j = \sum_{j=k+1-d_{k+1}}^{k-\underline{d}} x_j^T S x_j + \sum_{j=k+1-\underline{d}}^{k-1} x_j^T S x_j \leq \sum_{j=k+1-\overline{d}}^{k-\underline{d}} x_j^T S x_j + \sum_{j=k+1-d_k}^{k-1} x_j^T S x_j. \tag{4.15}$$

Substituindo-se (4.15) em (4.14), tem-se que

$$\Delta V_2(k) \leq x_k^T S x_k - x_{k-d_k}^T S x_{k-d_k} + \sum_{j=k+1-\overline{d}}^{k-\underline{d}} x_j^T S x_j \leq \mathbf{0}. \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
\Delta V_3(k) &= \sum_{l=2-\overline{d}}^{1-\underline{d}} \Big(\sum_{j=k+l-1}^{k-1} x_{j+1}^T S x_{j+1} - \sum_{j=k+l-1}^{k-1} x_j^T S x_j \Big) \\
&= \sum_{l=2-\overline{d}}^{1-\underline{d}} \Big(\sum_{j=k+l}^{k} x_j^T S x_j - \sum_{j=k+l-1}^{k-1} x_j^T S x_j \Big), \\
&= \sum_{l=2-\overline{d}}^{1-\underline{d}} \Big(x_k^T S x_k + \sum_{j=k+l}^{k-1} x_j^T S x_j - \sum_{j=k+l-1}^{k-1} x_j^T S x_j \Big), \\
&= \sum_{l=2-\overline{d}}^{1-\underline{d}} x_k^T S x_k + \sum_{l=2-\overline{d}}^{1-\underline{d}} \Big(\sum_{j=k+l}^{k-1} x_j^T S x_j - \sum_{j=k+l-1}^{k-1} x_j^T S x_j \Big), \\
&= (1 - \underline{d} - 2 + \overline{d} + 1) x_k^T S x_k + \sum_{l=2-\overline{d}}^{1-\underline{d}} \Big(\sum_{j=k+l}^{k-1} x_j^T S x_j - x_{k+l-1}^T S x_{k+l-1} - \sum_{j=k+l}^{k-1} x_j^T S x_j \Big), \\
&= (\overline{d} - \underline{d}) x_k^T S x_k - \sum_{l=2-\overline{d}}^{1-\underline{d}} x_{k+l-1}^T S x_{k+l-1}, \\
&\text{seja } j = k + l - 1, \\
&= \delta x_k^T S x_k - \sum_{j=k-\overline{d}+1}^{k-\underline{d}} x_j^T S x_j < \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Somando-se as equações (4.14), (4.16) e (4.17), obtém-se a expressão de ΔV_k dada por

$$\begin{aligned}
\Delta V(k) &= \Delta V_{1_k} + \Delta V_{2_k} + \Delta V_{3_k}, \\
&\leq x_{k+1}^T P x_{k+1} + x_k^T [(1+\delta) S - P] x_k - x_{k-d_k}^T S x_{k-d_k} < \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Substituindo-se a expressão de x_{k+1} dada em (4.4) em (4.18) obtém-se

$$\Delta V \leq \begin{bmatrix} x_k^T & x_{k-d_k}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1+\delta) S - P + \bar{A}^T P \bar{A} & \star \\ \bar{A}^T P \bar{A}_d & \bar{A}_d^T P \bar{A}_d - S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-d_k} \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \tag{4.19}$$

Uma vez que (4.11) e (4.19) são iguais, conclui-se a prova. ∎

Uma nova condição para o projeto de controladores estabilizantes via realimentação estática de saída é apresentada a seguir. A diferença entre a condição desenvolvida no capítulo anterior está na escolha da candidata a função de L-K, a qual apresenta um termo a mais, o qual é responsável pela condição ser dependente da variação do atraso máximo e mínimo.

Teorema 4.1. *Seja o sistema linear discreto com atraso variante nos estados (4.4). Para parâmetros escalares $\mu > 0$, α e β dados, se existem matrizes $\mathbf{0} < P = P^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < S = S^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < J = J^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $V \in \mathbb{R}^{m\times q}$, $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $\Delta \in \mathbb{R}^{m\times m}$ tais que*

$$\Gamma_v = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \star & \star & \star \\ G\hat{A} + \hat{B}V\hat{C} & \alpha G - \alpha G^T + \alpha^2 P + J & \star & \star \\ \beta^{-1}\Delta V\hat{C} & \mathbf{0} & -\beta^{-1}(\Delta U + U^T\Delta^T) & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & G\hat{B} - \hat{B}U & -J \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{4.20}$$

é verificada, com ρ_{11} dada em (4.12), então o sistema é assintoticamente estável com a lei de controle (4.3) e ganho dados por $\hat{K} = U^{-1}V$.

Prova: A prova segue os mesmos passos apresentados na prova do Teorema 3.1, substituindo Ξ_{11} por ρ_{11}. ■

Observe que, conforme estabelecido no capítulo anterior, a condição só é convexa se $\Delta \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e os escalares α e β são previamente fornecidos. Caso contrário, a desigualdade pode ser resolvida por meio de uma busca desses parâmetros. Por exemplo, criando-se matrizes Δ, de posto completo, aleatórias e fazendo uma varredura dos valores do par (α, β) para os quais a desigualdade (4.20) é factível.

4.1.2 Estabilização robusta

Nesta seção assumimos que o sistema (4.2) é sujeito a incertezas politópicas, isto é, as matrizes do sistema dependem de forma afim de um vetor de parâmetros θ, de forma que

$$\Omega(\theta)_v : \begin{cases} x_{k+1} = A(\theta)x_k + A_d(\theta)x_{k-d_k} + B_u(\theta)u_k \\ y_k = C(\theta)x_k + C_d(\theta)x_{k-d_k} \end{cases} \tag{4.21}$$

As matrizes desse sistema podem ser descritas por um politopo $\mathcal{P}$ com vértices conhecidos, dado por (3.24) em que Υ e Ω_i são definidos, em (3.25) e (3.26), respectivamente. Considerando a lei de controle dada por (3.4) e aplicando essa lei em (4.21), tem-se o sistema em malha fechada dado por:

$$\bar{\Omega}(\theta)_v : x_{k+1} = \bar{A}(\theta)x_k + \bar{A}_d(\theta)x_{k-d_k}, \tag{4.22}$$

em que as matrizes de malha fechada, $\bar{A}$ e $\bar{A}_d$ possuem a mesma estrutura dada em (3.28).

Portanto, é possível desenvolver um resultado semelhante ao proposto no Teorema 3.2 de forma a assegurar o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para todo o domínio de incertezas.

Teorema 4.2 (Controle Robusto)**.** *Seja o sistema (4.22). Para parâmetros escalares $\mu > 0$, α e β dados, se existem matrizes $\mathbf{0} < P_i = P_i^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < S_i = S_i^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < J_i = J_i^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i \in \mathcal{I}[1, N]$, $V \in \mathbb{R}^{m\times q}$, $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $\Delta \in \mathbb{R}^{m\times m}$ tais que*

$$\begin{gathered} \Gamma_{i_v} < \mathbf{0}, \quad i \in \mathcal{I}[1, N], \\ \Gamma_{ij_v} < \mathbf{0}, \quad i \in \mathcal{I}[1, N-1], \ j \in \mathcal{I}[i+1, N], \end{gathered} \tag{4.23}$$

em que

$$\Gamma_{i_v} = \begin{bmatrix} \rho_{11_i} & \star & \star & \star \\ G_i\hat{A}_i + \hat{B}_iV\hat{C}_i & -\alpha G_i - \alpha G_i^T + \alpha^2 P_i + J_i & \star & \star \\ \beta^{-1}\Delta V\hat{C}_i & \mathbf{0} & -\beta^{-1}(\Delta U + U^T\Delta^T) & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & G_i\hat{B}_i - \hat{B}_iU & -J_i \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (4.24)$$

$$\Gamma_{ij_v} = \begin{bmatrix} \rho_{11_{ij}} & \star & \star & \star \\ G_iA_j + G_jA_i + \hat{B}_iV\hat{C}_j + \hat{B}_jV\hat{C}_i & -\alpha G_i - \alpha G_j + \alpha^2(P_i + P_j) + J_i + J_j & \star & \star \\ \beta^{-1}\Delta V(\hat{C}_i + \hat{C}_j) & \mathbf{0} & -2\beta^{-1}(\Delta U + U^T\Delta^T) & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & G_i\hat{B}_j + G_j\hat{B}_i - (\hat{B}_i + \hat{B}_j)U & -J_i - J_j \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (4.25)$$

com

$$\rho_{11_i} = \begin{bmatrix} S_i - P_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -S_i \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

$$\rho_{11_{ij}} = \begin{bmatrix} S_i + S_j - P_i - P_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -S_i - S_j \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

são verificadas, então o sistema é robustamente assintoticamente estável com a lei de controle (4.3) e ganho dado por $\hat{K} = U^{-1}V$ *. Além disso,*

$$V(\theta, k) = \sum_{v=1}^{3} V_v(\theta, k) > 0 \quad (4.28)$$

com

$$V_1(\theta, k) = x_k^T P(\theta) x_k \quad (4.29)$$

$$V_2(\theta, k) = \sum_{j=k-d_k}^{k-1} x_j^T(\theta) S x_j \quad (4.30)$$

$$V_3(\theta, k) = \sum_{l=2-\bar{d}}^{1-\underline{d}} \sum_{j=k+l-1}^{k-1} x_j^T S(\theta) x_j > 0 \quad (4.31)$$

em que $P(\theta) = \sum_{i=1}^{N} \theta_i P_i$, $S(\theta) = \sum_{i=1}^{N} \theta_i S_i$, $\theta_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{N} \theta_i = 1$, *é uma função de L-K dependente de parâmetros que assegura a estabilidade robusta do sistema em malha fechada.*

Prova: A prova é similar à apresentada no Teorema (3.2). ∎

Note que as condições propostas nos teoremas 4.1 e 4.2 são dependentes da variação do atraso máximo e mínimo. Isso é devido à escolha da função de L-K (veja (4.7)). A presença do termo $(1 + \delta)$ multiplicando a matriz de Lyapunov S acrescenta dificuldades na solução da LMI, já que, para essa condição, a matriz P tem que ser mais negativa que S e o fator que a multiplica.

4.1.3 Exemplos

Nesta seção são apresentados exemplos para ilustrar o uso das condições proposta nesse capítulo. Inicialmente é utilizado o Teorema 4.1 para a síntese de controladores para sistemas livres de incerteza. Em sequência, é utilizado o Teorema 4.2 para a síntese de controladores robustos. Em ambos os casos, figuras ilustram a evolução dos estados do sistema em malha fechada obtido com o uso dos controladores projetados. Para fins de comparações, utilizamos os mesmos exemplos propostos no capítulo anterior.

4.1.3.1 Exemplo 1

Considere o mesmo sistema do Exemplo 3.2.2.2, sendo que desta vez o atraso é variante no tempo. Para esse sistema, utilizando os mesmo parâmetros do Exemplo 3.2.2.2, ou seja, $\alpha = 1$, $\beta = 7$ e $\Delta = \mathbf{I}_3$, a condição do Teorema 4.1 consegue projetar controladores para uma faixa de atrasos variantes de $1 \leq d_k \leq 130$. Já, a condição proposta em [HWLS08] consegue soluções factíveis em uma faixa, mais estreita, de $1 \leq d_k \leq 93$.

Neste exemplo, como a matriz C_d é nula, a saída pode ser dada como $y_k = Cx_k$. Dessa forma, considerando a lei de controle dada em (3.36), $u_k = Ky_k + K_d y_{k-d_k}$, a qual acrescenta na realimentação a saída atrasada, são modificadas as matrizes de malha fechada (4.5), que passam a ser descritas por:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A + B_u K C, \\ \bar{A}_d &= A_d + B_u K_d C. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Logo, as matrizes do sistema aumentado (4.6), o qual separa as matrizes do controlador das matrizes de Lyapunov, são dadas por:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & A_d \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = B, \quad \hat{K} = \begin{bmatrix} K & K_d \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix}. \tag{4.33}$$

Como somente a estrutura interna das matrizes foi modificada, o Teorema 4.1 ainda é válido, porém a matriz do controlador $\hat{K}$ leva em consideração um termo referente a saída atrasada (K_d). Utilizado dessa forma, para $\alpha = 1$, $\beta = 7$ e $\Delta = \mathbf{I}_3$, é possível obter controladores para uma faixa de atraso de $1 \leq d_k \leq 281$. Essa faixa é expressivamente maior que a faixa obtida sem utilizar a realimentação da saída atrasada: 216% maior.

Para exemplificar, a Figura 4.1 mostra uma faixa de atraso variante dada por $d_k \in [1, 50]$, utilizada para obter a evolução dos estados do sistema mostrada na Figura 4.2, quando o sistema possui um controlador dado por

$$\hat{K} = [K|K_d] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0.8319 & -0.3101 & -0.0074 & 0.0474 \\ 1.0505 & -0.3093 & -0.0522 & -0.0682 \\ 0.0175 & 0.2830 & -0.0250 & -0.1016 \end{array}\right].$$

Por meio da Figura 4.2 ilustra-se que o sistema em malha fechada é assintoticamente estável. Foi

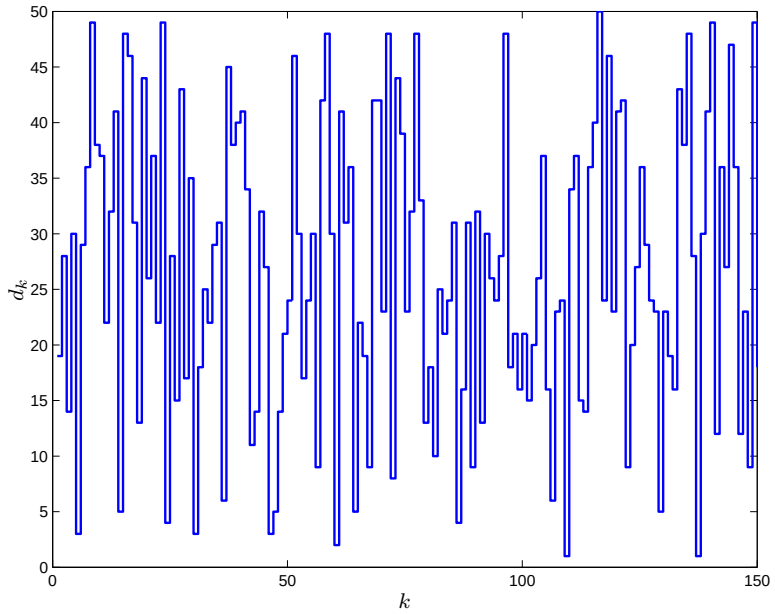


Figura 4.1: Atraso d_k.

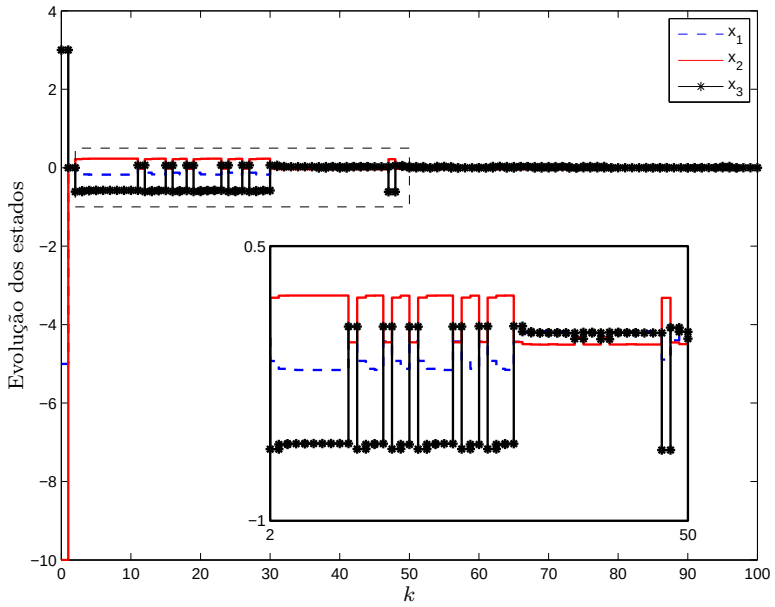


Figura 4.2: Evolução dos estados para o sistema em malha fechada no Exemplo 4.1.3.1, para $1 \leq d_k \leq 50$.

observado que ao utilizar valores diferentes para Δ é possível aumentar o intervalo de variação do atraso, conforme mostrado na Tabela (4.1). Ou seja, a solução do problema é determinada por Δ. Entretanto, determinar o melhor valor para Δ ainda é um problema em aberto. A matriz Δ pode ser obtida através da criação de matrizes aleatórias de posto completo e varredura dos parâmetros α e β. Foi verificado que a matriz identidade geralmente produz resultados factíveis para determinados valores de α e β, assim como $B^T B$.

Tabela 4.1: Valores do atraso máximo em função das variáveis de busca

Δ	α	β	$\overline{d}$
$\mathbf{I}_3$	1	7	281
$B^T B$	1	10	1091

4.1.3.2 Exemplo 2

Considere o mesmo sistema do Exemplo 3.5.1.2, extraído de [GLWW04]. Nesse exemplo, para $\alpha = 3$, $\beta = 6$ e $\Delta = 1$, valores utilizados no exemplo 3.2.2.1 do capítulo anterior, não é possível calcular controladores para o sistema. Porém, se forem utilizados $\alpha = 0.01$, $\beta = 10$, e $\Delta = 1$, obtém-se controladores para uma variação de atraso de $3 \leq d_k \leq 11$. Essa faixa de atraso variante, mostrada na Figura 4.3, foi utilizada para obter a evolução dos estados do

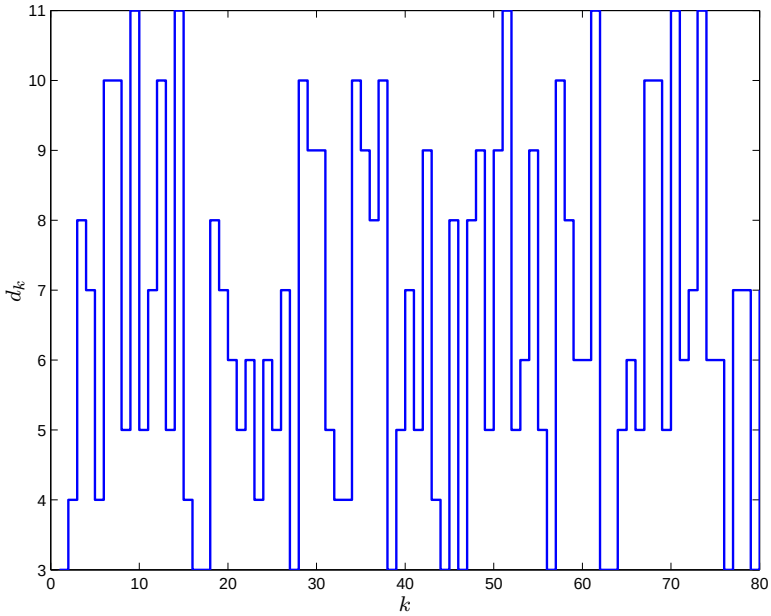


Figura 4.3: Atraso d_k.

sistema em malha fechada, mostrado na Figura 4.4, quando o sistema é realimentado por um ganho

$$\hat{K} = K = \begin{bmatrix} -0.3557 & -0.1864 \end{bmatrix}$$

Na simulação, foi assumida a condição inicial $x(k) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ para $k \leq 0$.

É possível ver pela figura que o sistema é assintoticamente estável quando realimentado utilizando o ganho calculado.

Utilizando-se esses valores para α, β e Δ, por meio da condição proposta no Teorema 4.1, obtém-se resultado igual ao obtido por [GLWW04], no qual é utilizada uma função L-K com um termo a mais. Porém, obtém-se um valor inferior a [HWLS08], cuja faixa é $3 \leq d_k \leq 12$. É importante observar que a técnica proposta em [HWLS08] também utiliza uma candidata a

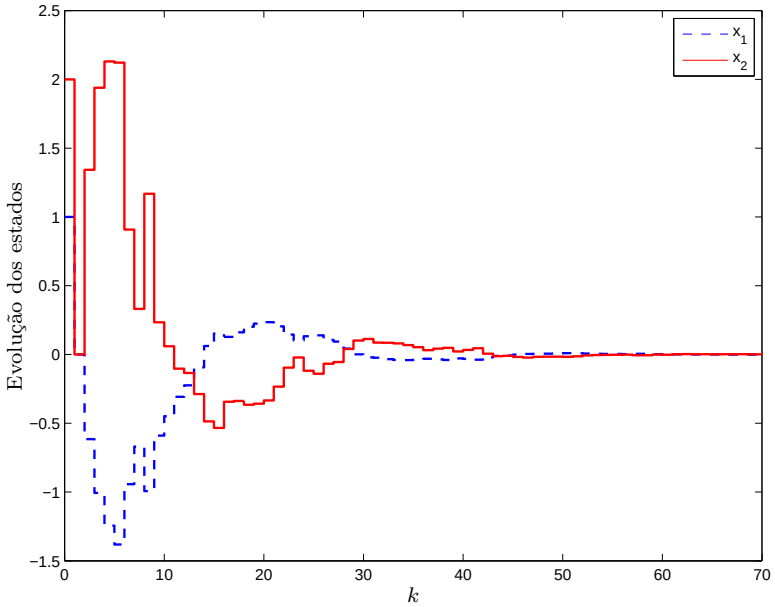


Figura 4.4: Evolução dos estados para o sistema em malha fechada no Exemplo 4.1.3.1, para $1 \leq d_k \leq 11$.

função de L-K com um termo a mais que a utilizada neste trabalho. Em relação a [GLWW04], a técnica proposta em [HWLS08] utiliza um procedimento modificado para resolver o problema da não convexidade através do uso da linearização por cone complementar.

4.1.3.3 Exemplo 3

Considere o sistema incerto descrito em na Seção 3.2.2, Exemplo 3.2.2.3. Para esse sistema, utilizando o Teorema 4.2 com $\alpha = 1$, $\beta = 7$ e $\Delta = \mathbf{I}_3$, sem utilizar a saída atrasada, é possível obter um controlador para um intervalo de variação máximo dado por $1 \leq d_k \leq 28$, o qual resulta no controlador dado por:

$$\hat{K} = K = \begin{bmatrix} 0.5846 & -0.1793 \\ 0.7191 & -0.1649 \\ -0.0110 & 0.1741 \end{bmatrix}.$$

As Figuras 4.5 e 4.6 mostram o atraso e a evolução dos estados do sistema em malha fechada, respectivamente. Para obter a evolução dos estados, foram criados 30 sistemas aleatório pertencentes ao politopo considerado, para um atraso variante $1 \leq d_k \leq 7$.

Se for utilizada a lei de controle que inclui a saída atrasada, considerando que d_k é conhecido em tempo real, usando o Teorema 4.2 com $\alpha = 1$, $\beta = 7$ e $\Delta = \mathbf{I}_3$, é obtido um controlador para uma faixa de variação máxima para o atraso dada por $1 \leq d_k \leq 69$. Nesse caso, o controlador $\hat{K} = [K \mid K_d]$ é dado por:

$$\hat{K} = [K|K_d] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0.5800 & -0.2166 & -0.0113 & 0.0220 \\ 0.7697 & -0.1811 & -0.0258 & -0.0318 \\ 0.0356 & 0.2040 & -0.0034 & -0.0472 \end{array}\right].$$

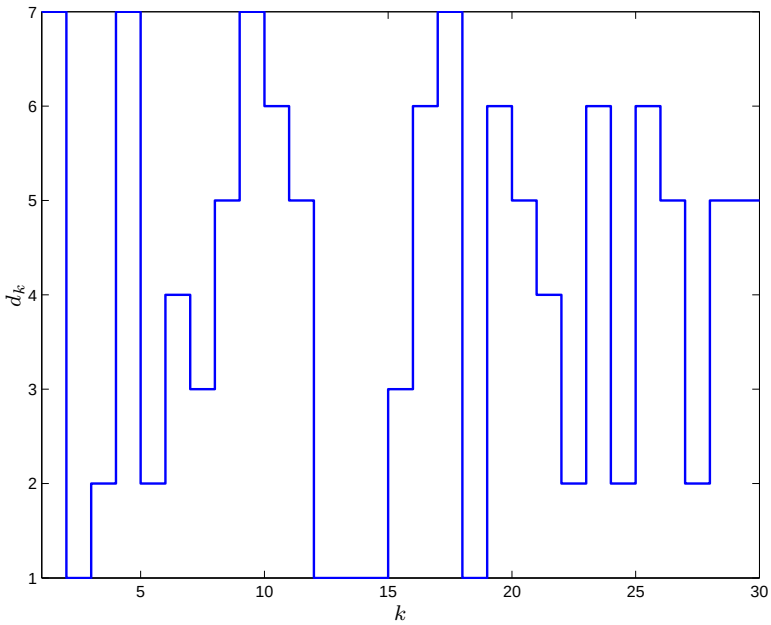


Figura 4.5: Atraso d_k.

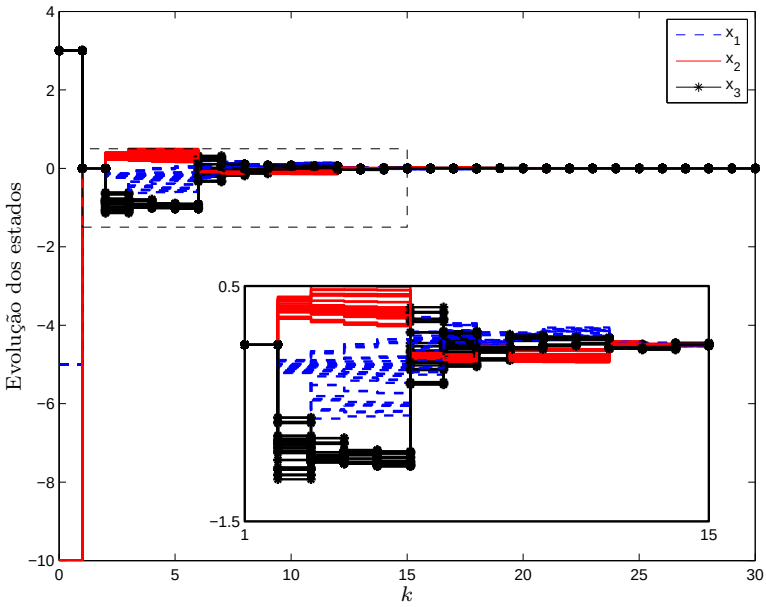


Figura 4.6: Evolução dos estados para o sistema em malha fechada no Exemplo 4.1.3.3, para $1 \leq d_k \leq 7$.

Se for utilizado $\Delta = B^T B$ (B nominal), o intervalo de variação máximo do atraso é dado por $1 \leq d_k \leq 109$ e o controlador $\hat{K} = [K \mid K_d]$ é dado por:

$$\hat{K} = [K|K_d] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0.6444 & -0.2120 & -0.0158 & 0.0274 \\ 0.7942 & -0.1986 & -0.0204 & -0.0423 \\ -0.0161 & 0.1875 & 0.0051 & -0.0611 \end{array}\right].$$

4.2 Controle $\mathcal{H}_\infty$

Seja o sistema linear discreto no tempo, inicialmente apresentado em (3.35), sujeito agora a atraso variante no vetor de estados dado por

$$\Psi_v : \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + A_d x_{k-d_k} + B_u u_k + B_w w_k \\ z_k = C_1 x_k + C_{1_d} x_{k-d_k} + D_u u_k + D_w w_k \\ y_k = C_2 x_k \end{cases} \tag{4.34}$$

em que $x_k = x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados no instante k, $x_{k-d_k} = x(k-d_k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados atrasado de d_k amostras, $u_k = u(k) \in \mathbb{R}^m$ é o sinal de controle, $w_k = w(k) \in \mathbb{R}^v$ é o vetor de entradas exógenas, $z_k = z(k) \in \mathbb{R}^p$ é a saída controlada, $y_k = y(k) \in \mathbb{R}^q$ é a saída medida. As matrizes A, A_d, B_u, B_w, C_1, C_{1d}, D_u, D_w e C_2 possuem dimensões apropriadas e, inicialmente, são supostas precisamente conhecidas. Considere a lei de controle por realimentação estática de saída dada por

$$u_k = Ky_k + K_d y_{k-d_k}, \tag{4.35}$$

com $[K|K_d] \in \mathbb{R}^{m\times 2q}$. O sistema em malha fechada, obtido aplicando-se (4.35) em (4.34), é dado por

$$\bar{\Psi}_v : \begin{cases} x_{k+1} = \bar{A}x_k + \bar{A}_d x_{k-d_k} + \bar{B}_w w_k \\ z_k = \bar{C}x_k + \bar{C}_d x_{k-d_k} + \bar{D}_w w_k \end{cases} \tag{4.36}$$

em que as matrizes de malha fechada possuem a mesma estrutura dada em (3.38):

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A + B_u K C_2, & \bar{A}_d &= A_d + B_u K_d C_2, \\ \bar{C} &= C_1 + D_u K C_2, & \bar{C}_d &= C_{1d} + D_u K_d C_2, \\ \bar{B}_w &= B_w, & \bar{D}_w &= D_w. \end{aligned}$$

O sistema em malha fechada aumentado é dado por

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_k \end{bmatrix} = (\hat{A} + \hat{B}\hat{K}\hat{C}) \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-d_k} \\ w_k \end{bmatrix}, \tag{4.37}$$

em que as matrizes $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{K}$ e $\hat{C}$ possuem a estrutura dada em (3.40):

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & A_d & B_w \\ C_1 & C_{1d} & D_w \end{bmatrix}, \ \hat{B} = \begin{bmatrix} B_u \\ D_u \end{bmatrix}, \ \hat{K} = \begin{bmatrix} K & K_d & \bullet \end{bmatrix}, \ \hat{C} = \begin{bmatrix} C_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Note que o uso de K_d só é possível de d_k é conhecido em tempo real. Caso contrário é necessário impor $K_d = \mathbf{0}$. Nesta seção propomos soluções para os seguintes problemas:

Problema 4.2 (Estimação $\mathcal{H}_\infty$)**.** *Determinar, se possível, um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, $\gamma > 0$ que verifique $\|z_k\|_2 \leq \gamma \|w_k\|_2$, $\forall w_k \in \ell_2$ (veja (2.21)), para o sistema (4.36) sujeito a (4.1) e $x_j = \mathbf{0}$, $j \in \mathcal{I}[0, -\tau]$ (veja (3.3)).*

Problema 4.3 (Controle $\mathcal{H}_\infty$)**.** *Determinar, se possível, ganhos por realimentação estática de saída, K e K_d tais que o sistema (4.34) sujeito a (4.1) e $x_j = \mathbf{0}$, $j \in \mathcal{I}[0, -\tau]$ (veja (3.3)) sob ação da lei de controle (4.35) seja assintoticamente estável e para todo $w_k \in \ell_2$ exista $z_k \in \ell_2$ tal que $\gamma > 0$ seja um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para sistema em malha fechada resultante.*

4.2.1 Resultados principais

Nesta seção é apresentado um resultado semelhante ao obtido na seção 3.4 do Capítulo 3. As diferenças em relação os resultados apresentados residem no fato do sistema possuir atraso variante no tempo, o que impõe a utilização de outra candidata à função de L-K.

Lema 4.2. *Seja o sistema em malha fechada (4.36). Se existem matrizes $\mathbf{0} < P = P^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < S = S^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\hat{K} \in \mathbb{R}^{m\times(2n+m)}$ e um escalar $\mu > 0$ tais que*

$$\begin{bmatrix} \varrho_{11} & \star \\ \hat{A} + \hat{B}\hat{K}\hat{C} & -\begin{bmatrix} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \tag{4.38}$$

é verificada, com

$$\varrho_{11} = \begin{bmatrix} (1+\delta)S - P & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{4.39}$$

então, o sistema é assintoticamente estável e possui custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma = \sqrt{\mu}$.

Prova: A prova desse Lema segue os passos apresentados em (4.2), com a função de Lyapunov substituída por (4.7) e Φ_{11} substituída por ϱ_{11}. ■

O resultado apresentado no Lema anterior é não-convexo, sendo, portanto necessárias manipulações matemáticas para desacoplar o produto entras as matrizes do sistemas e as matrizes desconhecidas. O Teorema apresentado a seguir fornece uma alternativa para esse problema.

Teorema 4.3. *Considere o sistema (4.36). Para parâmetros escalares $\mu > 0$, α e β dados, se existem matrizes $\mathbf{0} < P = P^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < S = S^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < J = J^T \in \mathbb{R}^{(n+p)\times(n+p)}$, $G \in \mathbb{R}^{(n+p)\times(n+p)}$, $V \in \mathbb{R}^{m\times 3q}$, $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $\Delta \in \mathbb{R}^{m\times m}$ tais que*

$$\Lambda_v = \begin{bmatrix} \varrho_{11} & \star & \star & \star \\ G\hat{A} + \hat{B}V\hat{C} & -\alpha G - \alpha G^T + \alpha^2 \begin{bmatrix} P & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} + J & \star & \star \\ \beta^{-1}\Delta V\hat{C} & \mathbf{0} & -\beta^{-1}(\Delta U + U^T\Delta^T) & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & G\hat{B} - \hat{B}U & -J \end{bmatrix} < \mathbf{0} \tag{4.40}$$

é verificada com ϱ_{11} dado em (4.39), então, o sistema é assintoticamente estável com a lei de controle (4.35) e ganhos dados por $\hat{K} = U^{-1}V$ possui custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma = \sqrt{\mu}$.

Prova: A prova segue os mesmos passos realizadas no Teorema (3.3), com Φ_{11} substituída por ϱ_{11}. ■

Para que a condição seja convexa é necessário que os valores de α, β e Δ sejam previamente fornecidos. Caso contrário, é necessário criar matrizes aleatórias Δ, de posto completo, e fazer uma varredura dos parâmetros α, β e Δ para os quais a desigualdade (4.40) é factível.

4.2.2 Extensão para o controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ via SOF

Considerando que o sistema é incerto, apresentamos a extensão do resultado proposto no Teorema 4.3, de forma a assegurar o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para todo um domínio de incertezas. Portanto, nesta seção assumimos que o sistema (4.34) é sujeito a incertezas politópicas e as matrizes dependem de forma afim de um vetor de parâmetros θ

$$\Psi(\theta)_v : \begin{cases} x_{k+1} = A(\theta)x_k + A_d(\theta)x_{k-d_k} + B_u(\theta)u_k + B_w(\theta)w_k \\ z_k = C_1(\theta)x_k + C_{1_d}(\theta)x_{k-d_k} + D_u(\theta)u_k + D_w(\theta)w_k \\ y_k = C_2(\theta)x_k. \end{cases} \tag{4.41}$$

Essas matrizes podem ser descritas por um politopo $\mathcal{P}$ com vértices conhecidos dado por (3.53) em que Υ e Ψ_i são dados por (3.25) e (3.54), respectivamente. Considerando a mesma lei de controle dada em (4.35), o sistema em malha fechada, obtido aplicando-se (4.35) em (4.41), é dado por

$$\bar{\Psi}(\theta)_v : \begin{cases} x_{k+1} = \bar{A}(\theta)x_k + \bar{A}_d(\theta)x_{k-d_k} + \bar{B}_w(\theta)w_k \\ z_k = \bar{C}(\theta)x_k + \bar{C}_d(\theta)x_{k-d_k} + \bar{D}_w(\theta)w_k \end{cases} \tag{4.42}$$

em que as matrizes de malha fechada são dadas por

$$\begin{aligned} \bar{A}(\theta) &= A(\theta) + B_u(\theta)KC_2(\theta), & \bar{A}_d(\theta) &= A_d(\theta) + B_u(\theta)K_dC_2(\theta), \\ \bar{C}(\theta) &= C_1(\theta) + D_u(\theta)KC_2(\theta), & \bar{C}_d(\theta) &= C_{1d}(\theta) + D_u(\theta)K_dC_2(\theta), \\ \bar{B}_w(\theta) &= B_w(\theta), & \bar{D}_w(\theta) &= D_w(\theta). \end{aligned}$$

O sistema em malha fechada aumentado, que separa as matrizes conhecidas das matrizes de busca, é dado por

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_k \end{bmatrix} = (\hat{A}(\theta) + \hat{B}(\theta)\hat{K}\hat{C}(\theta)) \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-d_k} \\ w_k \end{bmatrix}, \tag{4.43}$$

em que as matrizes $\hat{A}$,$\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{K}$ são dadas por

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A(\theta) & A_d(\theta) & B_w(\theta) \\ C_1(\theta) & C_{1d}(\theta) & D_w(\theta) \end{bmatrix}, \ \hat{B} = \begin{bmatrix} B_u(\theta) \\ D_u(\theta) \end{bmatrix}, \ \hat{K} = \begin{bmatrix} K & K_d & \bullet \end{bmatrix}, \ \hat{C} = \begin{bmatrix} C_2(\theta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_2(\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Teorema 4.4 (Controle Robusto)**.** *Seja o sistema (4.42). Para parâmetros escalares $\mu > 0$, α e β dados, se existem matrizes $\mathbf{0} < P_i = P_i^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < S_i = S_i^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{0} < J_i = J_i^T \in \mathbb{R}^{(n+p)\times(n+p)}$, $G_i \in \mathbb{R}^{(n+p)\times(n+p)}$, $i \in \mathcal{I}[1,N]$, $V \in \mathbb{R}^{m\times 3q}$, $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $\Delta \in \mathbb{R}^{m\times m}$ tais que*

$$\begin{array}{c} \Lambda_{i_v} < \mathbf{0}, \quad i \in \mathcal{I}[1,N], \\ \Lambda_{ij_v} < \mathbf{0}, \quad i \in \mathcal{I}[1,N-1],\ j \in \mathcal{I}[i+1,N], \end{array} \tag{4.44}$$

são verificadas, em que

$$\Lambda_{i_v} = \begin{bmatrix} \varrho_{11i} & \star & \star & \star \\ G_i\hat{A}_i + \hat{B}_iV\hat{C}_i & -2\alpha G_i + \alpha^2\begin{bmatrix} P_i & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{I}\end{bmatrix} + J_i & \star & \star \\ \beta^{-1}\Delta V\hat{C}_i & \mathbf{0} & -\beta^{-1}(\Delta U + U^T\Delta^T) & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & G_i\hat{B}_i - \hat{B}_iU & -J_i \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{4.45}$$

$$\Lambda_{ij_v} = \begin{bmatrix} \varrho_{11ij} & \star & \star & \star \\ G_iA_j + G_jA_i + \hat{B}_iVhC_j + \hat{B}_jV\hat{C}_i & -2\alpha G_i - 2\alpha G_j + \alpha^2\begin{bmatrix} P_i + P_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{I}\end{bmatrix} + J_i + J_j & \star & \star \\ \frac{\Delta}{\beta}V\hat{C}_i + \frac{\Delta}{\beta}V\hat{C}_j & \mathbf{0} & -2\beta^{-1}(\Delta U + U^T\Delta^T) & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & G_i\hat{B}_j + G_j\hat{B}_i - (\hat{B}_i + \hat{B}_j)U & -J_i - J_j \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{4.46}$$

com

$$\varrho_{11i} = \begin{bmatrix} (1+\delta)S_i - P_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -S_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{4.47}$$

$$\Phi_{11ij} = \begin{bmatrix} (1+\delta)*(S_i + S_j) - P_i - P_j & \mathbf{0} & \\ \mathbf{0} & -S_i - S_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -2\gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{4.48}$$

então o sistema é robustamente assintoticamente estável com a lei de controle (4.35) e ganhos dados por $\hat{K} = U^{-1}V$ (veja estrutura (3.39)) e possui custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma = \sqrt{\mu}$. Além disso, (4.28) é uma função de L-K dependente de parâmetros que assegura a estabilidade robusta do sistema em malha fechada.

4.2.3 Exemplos

Nesta seção é investigado o sistema apresentado no Exemplo 3.5.1, desta vez considerando que o atraso é variante no tempo. No primeiro exemplo, o sistema é considerado precisamente conhecido. No segundo, é considerado que as matrizes do sistema são incertas. Em ambos os casos, figuras ilustram o comportamento temporal do sistema.

4.2.3.1 Exemplo 1:

Seja o sistema apresentado em 3.5.1.1, no qual são utilizados os mesmo valores iniciais para α, β e Δ: $\alpha = 1$, $\beta = 10$ e $\Delta = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Nesse sistema, foi procurado determinar a maior faixa de variação do atraso, tal que se $d_k \in [1, \overline{d}]$, a condição (4.3), ainda é factível. Para esses valores iniciais de α, β e Δ, é obtida uma faixa de variação máxima de $d_k \in [1, 939]$ com $\gamma_{\bar{d}} = 1.3369 \times 10^3$. Utilizando a função *fminsearch()* para otimizar os valores de α e β e assim reduzir o valor γ, após o processo de otimização, foi obtido $\gamma_{\bar{d}} = 160.2506$, para $\alpha = 0.0048$, e $\beta = 19.8851$, os quais determinam ganhos dados por

$$[K|K_d] = \left[\begin{array}{c|c} 0.1385 - 0.7425 & 0.0014 - 0.0074 \\ 0.7671 - 1.4953 & 0.0077 - 0.0150 \end{array}\right].$$

No processo de otimização utilizando a função *fminsearch()*, a cada itereção é resolvida uma LMI para determinados valores de α e β. O valor de γ é o valor a ser otimizado. Os diagramas de valores singulares para o sistema em malha fechada obtido com os ganhos calculados são mostrados Figura 4.7, considerando valores fixos de atraso dentro do intervalo $d \in [1, 30]$. Observe que na construção do diagrama de valores singulares foram usados valores constantes

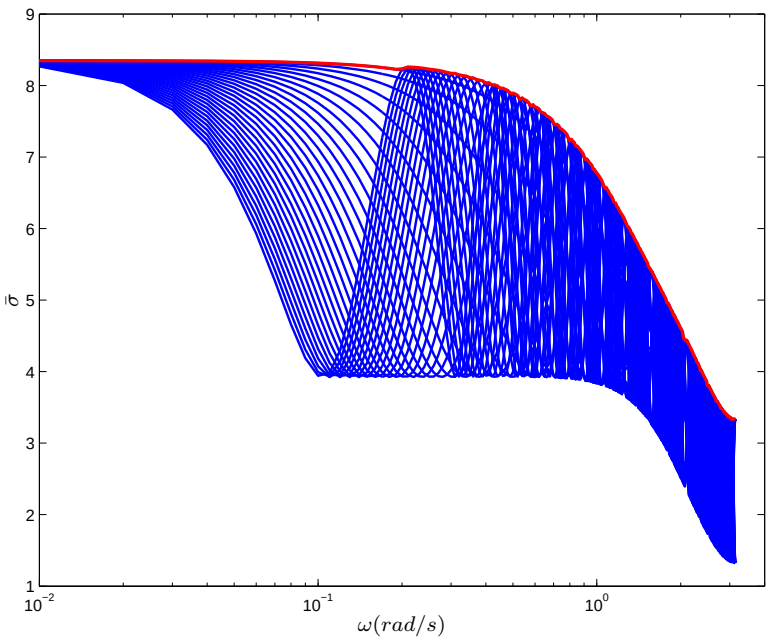


Figura 4.7: Valores singulares e custo garantido obtido para o sistema em malha fechada incerto para $d \in \mathcal{I}[1, 30]$.

de atraso. Assim, o máximo valor singular obtido pode ser inferior ao custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ real para o atraso variante no tempo. Também é apresentado o comportamento do sistema em malha fechada, utilizando a faixa de atraso considerada. Essa faixa de variação do atraso é mostrada na Figura 4.8. Foi considerado que o sistema está sujeito ao vetor de entrada de perturbação, w_k,

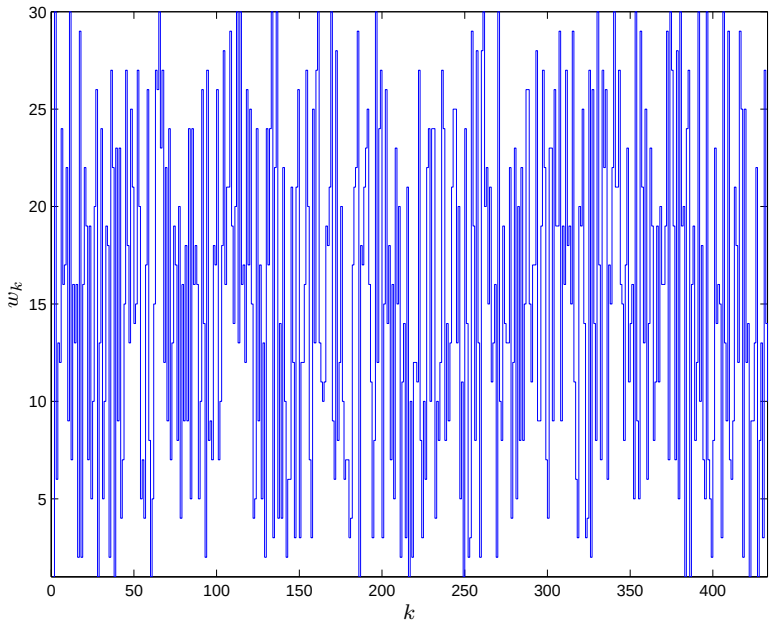


Figura 4.8: Atraso $d_k \in [1, 30]$.

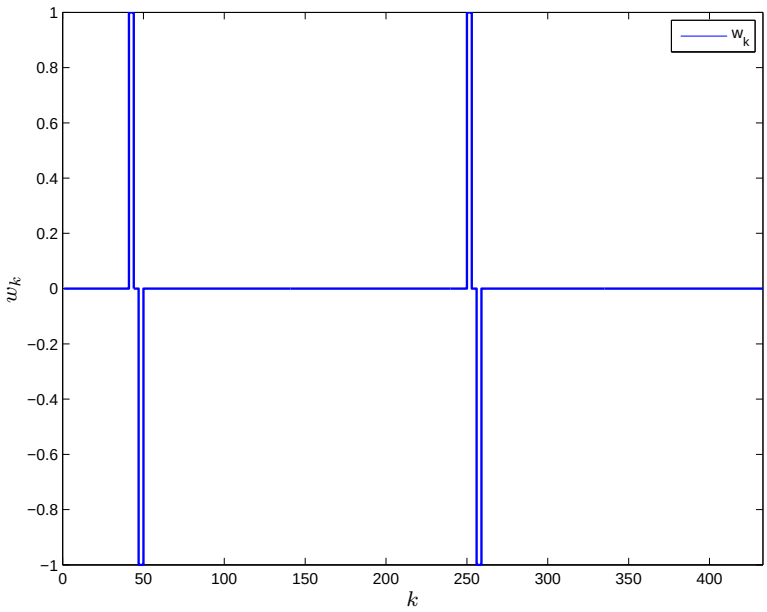


Figura 4.9: Sinal w_k aplicado ao sistema em malha fechada.

conforme mostrado na Figura 4.9. A Figura 4.10 mostra a saída medida do sistema z_k quando sujeita à perturbação w_k para uma condição inicial nula. Por meio da Figura, é observada que a relação máxima entre z_k/w_k é igual a $9.3111/1 = 9.3111$, valor inferior ao custo ótimo calculado. Os sinais de controle calculados na simulação são mostrados na Figura 4.11. A amplitude dos sinais de u_1 e u_2 tem variações significativas no momento de aplicação das perturbações. Foi observado que a amplitude do sinal de controle u_2 foi maior amplitude que de u_1.

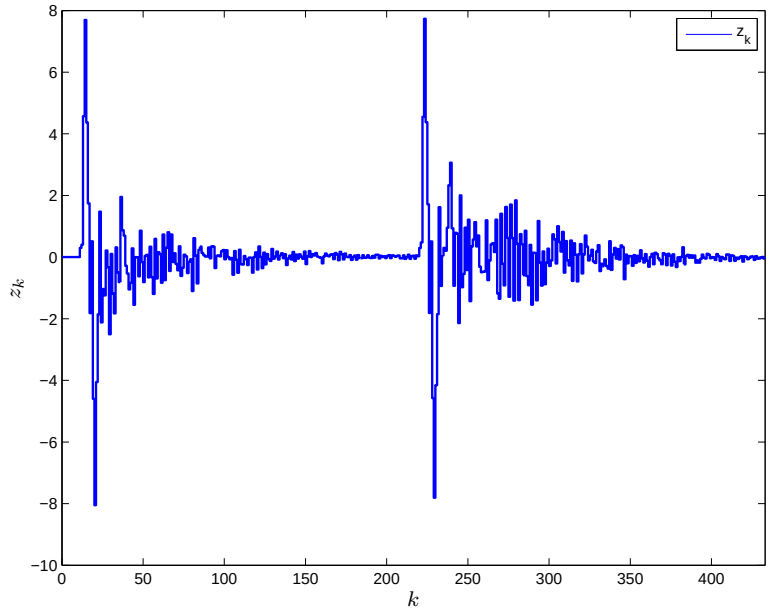


Figura 4.10: Saída z_k cujo o sistema em malha fechada.

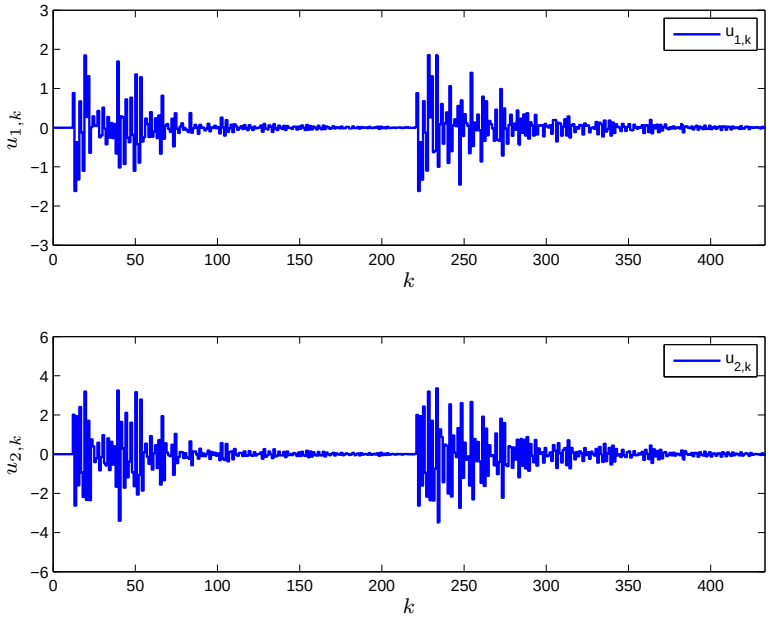


Figura 4.11: Sinal de controle $u_k = [u_1 \; u_2]^T$.

4.2.3.2 Exemplo 2:

Considere o sistema incerto do Exemplo 3.5.1.2, porém o atraso é variante no tempo. Para esse sistema, o interesse é determinar o maior valor $\delta = \overline{d} - 1$ tal que a condição descrita no Teorema 4.4 seja factível. Utilizando o Teorema 4.3 com $\alpha = 1$, $\beta = 10$ e $\Delta = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ é obtido um atraso máximo de $\overline{d} = 35$. Esse atraso máximo resulta em um custo inicial de $\gamma = 1.4728 \times 10^3$. Após a otimização utilizando a função *fminsearch()*, foram obtidos $\alpha = 0.0085$,

$\beta = 18.6972$ e $\gamma = 98.1737$. Para esses valores, o ganho $\hat{K}$ é dado por

$$\hat{K} = [K|K_d] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0.1467 & -0.7420 & 0.0015 & -0.0074 \\ 0.7849 & -1.4924 & 0.0079 & -0.0149 \end{array}\right]$$

Na Figura 4.12 é mostrado o diagrama de valores singulares para o sistema em malha fechada obtido com os ganhos calculados. A faixa de atraso considerada foi $d \in [1, 5]$. Para a construção do diagrama de valores singulares foram utilizados valores constantes de atraso. Portanto, o valor singular máximo pode ser inferior ao custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ real para o atraso variante no tempo. A faixa de variação do atraso é mostrada na Figura (4.13). Considerando que o sistema

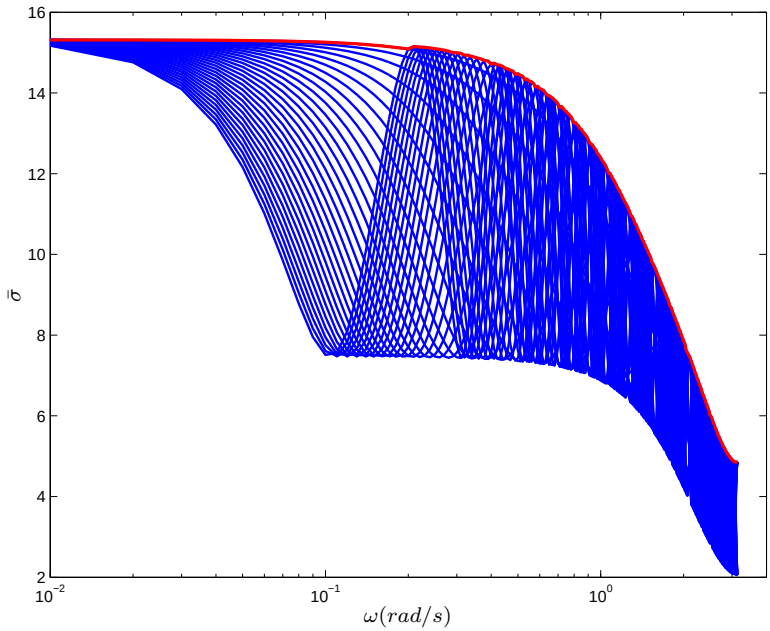


Figura 4.12: Valores singulares e custo garantido obtido para o sistema em malha fechada incerto para $d \in \mathcal{I}[1, 30]$.

está sujeito a perturbação mostrada na Figura 4.14, a Figura 4.15 mostra a saída medida do sistema z_k quando sujeita essa perturbação. É observada que relação máxima entre z_k/w_k é igual a $13.8007/1 = 13.8007$, valor inferior ao custo ótimo calculado. Os sinais de controle calculados na simulação são mostrados na Figura 4.16.

4.3 Comentários finais

São apresentadas condições dependentes da faixa de variação do atraso para a síntese de controladores estáticos via realimentação estática de saída para sistemas discretos com atraso variante nos estados. São apresentadas condições para estabilização e o controle $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas precisamente conhecidos e incertos. As condições desenvolvidas não são convexas e dependem da escolha de variáveis para obter testes de factibilidade baseados em LMIs. A

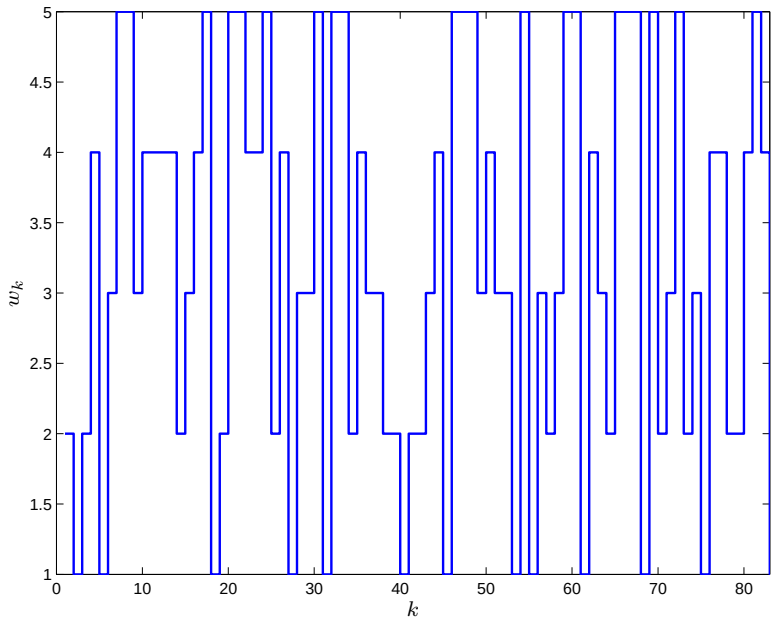


Figura 4.13: Atraso d_k, $d_k \in [1, 5]$.

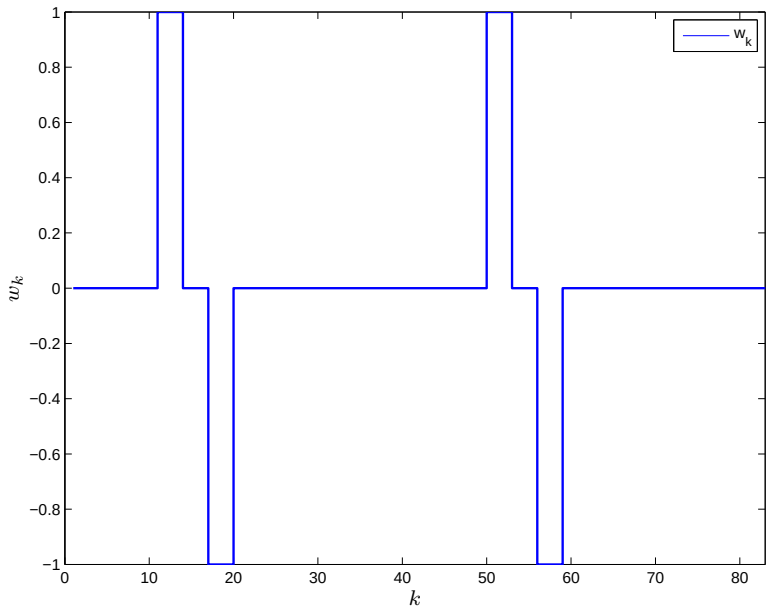


Figura 4.14: Sinal w_k aplicado ao sistema em malha fechada.

escolha apropriada dessas variáveis podem reduzir o conservadorismo dos resultados obtidos. O uso da saída atrasada na lei de controle também é utilizada como o intuito de melhorar os resultados. Exemplos foram utilizados para ilustrar o uso das condições propostas.

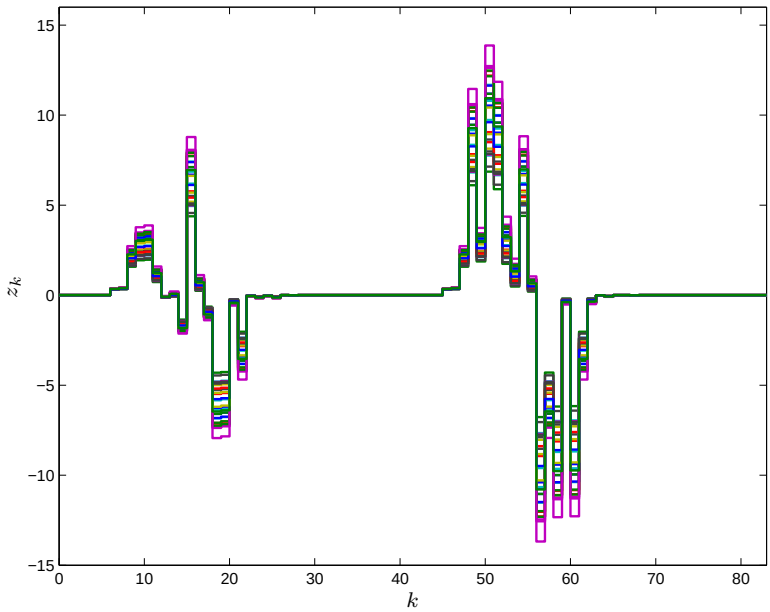


Figura 4.15: Saída z_k cujo o sistema em malha fechada.

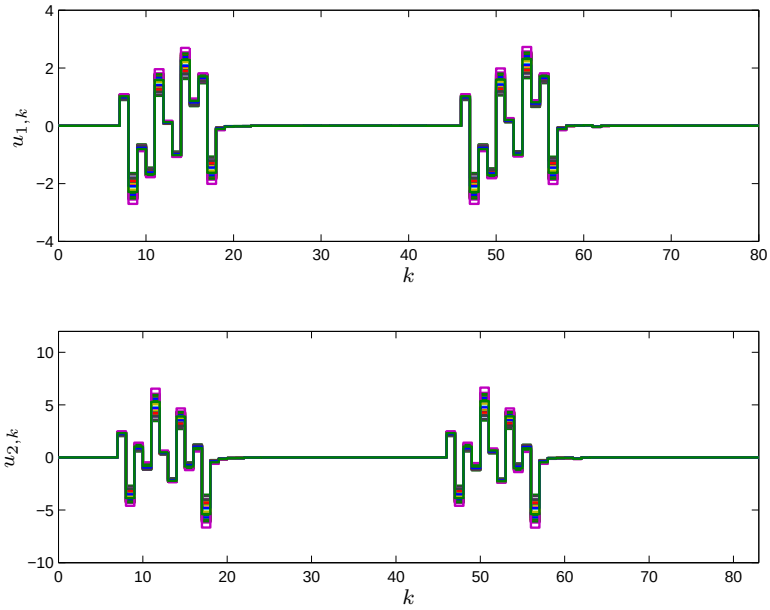


Figura 4.16: Sinal de controle $u_k = [u_1 \; u_2]^T$.

Capítulo 5

Considerações finais e perspectivas

Nesta dissertação foi estudado o projeto de controladores utilizando realimentação estática de saída para sistemas incertos discretos no tempo com atraso invariante ou variante no vetor de estados. No Capítulo 2 foram revisados os principais conceitos da Teoria de Controle necessários para a obtenção dos resultados deste trabalho.

No Capítulo 3, baseado na publicação [OL15] aceita no XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI), foram desenvolvidas condições para o projeto de controladores estabilizantes utilizando realimentação estática de saída para sistemas discretos com atraso invariante no vetor de estados. Foi utilizada uma candidata a função de L-K simplificada para tratar os termos relacionados ao atraso, o que resultou em uma condição do tipo independente do atraso. Foi também considerado o projeto de controladores estabilizantes robustos. Para tal, foi utilizada uma candidata a função de L-K dependente de parâmetros. Para a estabilização desses tipos de sistemas foi utilizada uma lei de controle que depende apenas da saída do sistema. O projeto de controladores que asseguram um desempenho $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema também foi estudado. Foram desenvolvidas condições para sistemas precisamente conhecidos e incertos. Para o projeto dos controladores $\mathcal{H}_\infty$ foi utilizada uma lei de controle que depende da saída e da saída atrasada do sistema. As condições desenvolvidas não são convexas e dependem da utilização de variáveis iniciais que, uma vez dadas, tornam o problema convexo. Entretanto, mostrou-se que não há grandes dificuldades em obter essas variáveis iniciais. Uma escolha apropriada dessas variáveis podem reduzir o conservadorismo dos resultados obtidos.

No Capítulo 4 foram desenvolvidas condições para a síntese de controladores via SOF para sistemas incertos discretos no tempo com atraso variante no vetor de estados. Foram desenvolvidas condições para o projeto de controladores estabilizantes e controladores que asseguram o custo $\mathcal{H}_\infty$. Para o desenvolvimento das condições foi utilizada uma candidata a função de L-K mais completa que a utilizada no Capítulo 3. Devido à escolha dessa candidata a função de L-K, as condições desenvolvidas são dependentes da faixa de variação do atraso. Dependem da

relação entre o atraso máximo e o atraso mínimo. Para o projeto de controladores robustos, foi utilizada uma função de L-K dependente de parâmetros. Como as condições obtidas nesse capítulo foram baseadas nos resultados do Capítulo 3, as condições obtidas não são convexas e dependem da escolha de variáveis iniciais que, uma vez escolhidas, tornam o problema linear.

Os sistemas incertos descritos nos Capítulos 3 e 4 foram considerados pertencentes a um politopo convexo. Para todas as condições propostas nesse trabalho, exemplos numéricos foram utilizados para ilustrar a efetividade das mesmas.

5.1 Trabalhos produzidos

- A. C. Oliveira e V. J. S. Leite, Controle Robusto $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas lineares discretos no tempo com atraso nos estados via realimentação estática de saída, in: Anais do *XII* Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, Natal, RN, Brasil.

- A. C. Oliveira e V. J. S. Leite, Controle Robusto $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas lineares discretos no tempo com atraso variante nos estados via realimentação estática de saída - Em preparação.

5.2 Perspectivas

A trabalho desenvolvido nesta dissertação permite que outras direções de pesquisa sejam investigadas. Uma delas é considerar, por exemplo, a saturação do sinal de controle, que é um fenômeno presente em sistemas reais devido aos limites físicos dos atuadores. Seja, por exemplo, o sistema linear discreto definido por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + A_d x_{k-d} + Bu_k \\ y_k &= Cx_k \end{aligned} \tag{5.1}$$

em que $x_k = x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados no instante k, $x_{k-d_k} = x(k-d_k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados atrasado de d_k amostras, $u_k = u(k) \in \mathbb{R}^m$ é o sinal de controle e $y_k = y(k) \in \mathbb{R}^q$ é a saída medida. As matrizes A, A_d, B e C, possuem dimensões apropriadas. Seja a lei de controle via realimentação estática de saída dada por

$$u_k = Ky_k, \tag{5.2}$$

em que $K \in \mathbb{R}^{m\times q}$. Para considerar a saturação do sinal de controle, é suposto que o vetor de controle u_k está sujeito a uma restrição de amplitude, ou seja, cada componente de u_k está compreendida entre um valor máximo e um valor mínimo. Portanto, u_k pertence a um conjunto poliedral ζ dado por

$$\zeta \doteq \{u \in \mathbb{R}^m; -p \leq u \leq p\}$$

com $p_i \geq 0 \ \forall i = 1, \ldots, m$. Logo, a lei de controle que realmente é aplicada ao sistema é

$$u_k = sat(Ky_k),$$

em que cada componente de u_k é definida por

$$u_i = (sat(Ky))_i = \begin{cases} -p_i & \text{se} \quad K_i y_k < -p_i \\ K_i y_k & \text{se} \quad -p_i \leq K_i y_k \leq p_i \\ p_i & \text{se} \quad K_i y_k > p_i \end{cases}$$

em que K_i denota a i-ésima linha de K. A presença de saturação pode causar efeitos indesejados, como por exemplo a instabilidade do sistema. Desta forma, considerar a saturação na análise e síntese de sistemas de controle é um tema de importância teórica e prática [TGGQ11]. Para o caso de estabilização de sistemas lineares com saturação, pode-se tratar os problemas de estabilidade global ou local. O objetivo, nesse caso, seria propor condições para a estabilização local.

As condições propostas nos Capítulos 3 e 4 podem ser desenvolvidas utilizando candidatas a função de L-K mais completas. Assim, são esperados resultados menos conservadores.

Pode ser explorado também o controle de sistemas não-lineares via realimentação estática de saída utilizando modelos fuzzy Tagaki-Sugeno. Os modelos fuzzy são uma alternativa para descrever sistemas não-lineares e consiste, basicamente, em descrever o sistema não-linear em termos de submodelos localmente lineares invariantes no tempo, conectados por funções de pertinência, que descrevem o comportamento do sistema em diferentes pontos do espaço [Klu10, SLCK14].

Outra extensão imediata dos resultados obtidos nesta dissertação é o projeto dos controladores dinâmicos. Por exemplo, seja o sistema linear discreto no tempo com atraso variante no vetor de estados descrito pela equação de espaço de estados

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + A_d x_{k-d_k} + B_u u_k + B_w w_k \\ z_k &= C_1 x_k + C_{1_d} x_{k-d_k} + D_u u_k + D_w w_k \\ y_k &= C_2 x_k \end{aligned}$$

em que $x_k = x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados no instante k, $x_{k-d_k} = x(k-d_k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados atrasado de d_k amostras, $u_k = u(k) \in \mathbb{R}^m$ é o sinal de controle, $w_k = w(k) \in \mathbb{R}^v$ é o vetor de entradas exógenas, $z_k = z(k) \in \mathbb{R}^p$ é a saída controlada, $y_k = y(k) \in \mathbb{R}^q$ é a saída medida. As matrizes A, A_d, B_u, B_w, C_1, C_{1d}, D_u, D_w e C_2 possuem dimensões apropriadas. Considere o controlador por realimentação dinâmica:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+1} &= \mathcal{A}\bar{x}_k + \mathcal{A}_d \bar{x}_{k-d_k} + \mathcal{B} y_k + \mathcal{B}_d y_{k-d_k} \\ u_k &= \mathcal{C}\bar{x}_k + \mathcal{C}_d \bar{x}_{k-d_k} + \mathcal{D} y_k + \mathcal{D}_d y_{k-d_k} \end{aligned}$$

em que $\bar{x}_k = \bar{x}(k) \in \mathbb{R}^{n_c}$ é o vetor de estados do controlador no instante k, $\bar{x}_{k-d_k} = \bar{x}(k-d_k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados atrasado de d_k amostras, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_d$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_d$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_d$, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}_d$, são as matrizes de ganho do controlador. Considerando a abordagem proposta em [SADG97], é possível construir controladores dinâmicos de saída por meio de uma lei estática utilizando um sistema aumentado. Para isso, considere o sistema aumentado obtido quando $u_c = \bar{x}_{k+1}$ e $y_{c_k} = \bar{x}_k$, logo:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \bar{x}_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \bar{x}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \bar{x}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B_u \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{c_k} \\ u_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix} w_k \\
z_k &= \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \bar{x}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{1d} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \bar{x}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & D_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{c_k} \\ u_k \end{bmatrix} + D_w w_k \\
\begin{bmatrix} y_{c_k} \\ y_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \bar{x}_k \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Portanto, a lei de controle é estática equivalente a:

$$\begin{bmatrix} u_{c_k} \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{c_k} \\ y_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{A}_d & \mathcal{B}_d \\ \mathcal{C}_d & \mathcal{D}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{c_k} \\ y_k \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

O sistema (5.3) e a lei de controle (5.4) podem ser escritos como:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_{k+1} &= \tilde{A}\tilde{x}_k + \tilde{A}_d\tilde{x}_{k-d_k} + \tilde{B}_u\tilde{u}_k + \tilde{B}_w w_k \\
\tilde{z}_k &= \tilde{C}_1\tilde{x}_k + \tilde{C}_d\tilde{x}_{k-d_k} + \tilde{D}_u\tilde{u}_k + \tilde{D}_w w_k \\
\tilde{u}_k &= \tilde{K}\tilde{y}_k + \tilde{K}_d\tilde{y}_{k-d_k}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

em que:

$$\begin{aligned}
&\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_k \\ \bar{x}_k \end{bmatrix}, \quad \tilde{u} = \begin{bmatrix} u_{c_k} \\ u_k \end{bmatrix}, \quad \tilde{y} = \begin{bmatrix} y_{c_k} \\ y_k \end{bmatrix}, \\
&\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_d = \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_u = \begin{bmatrix} 0 & B_u \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_w = \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix}, \\
&\tilde{C}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}_d = \begin{bmatrix} C_{1_d} & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}_u = \begin{bmatrix} 0 & D_u \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}_w = D_w, \\
&\tilde{K} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix}, \quad \tilde{K}_d = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_d & \mathcal{B}_d \\ \mathcal{C}_d & \mathcal{D}_d \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Dessa forma são obtidos controladores que resultam em um resultado igual ao do caso estático. Como forma de melhorar o resultado, pode utilizada uma formulação de projeto como a apresentada em [CY14, Teorema 2]. Podem ser exploradas também outras opções para o projeto do controlador dinâmico, como a sugerida em [MOS98] ou, mais recentemete, a técnica sugerida em [Sad15], o qual é baseada em um processo iterativo para o projeto dos controladores.

Apêndice A

Demonstrações

A.1 Transformação de Congruência

Se $X > \mathbf{0}$, então $x^T X x > \mathbf{0}$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $x \neq \mathbf{0}$. Uma vez que X e Y são congruentes, existe uma matriz G não-singular tal que $Y = G^T X G$ [Ber05]. Consequentemente, usando o fato de que G é não-singular, para todo $x \neq \mathbf{0}$, então o vetor $y \doteq G^{-1}x \neq \mathbf{0}$ (o que implica que $x = Gy$) e

$$X > \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow x^T X x = (Gy)^T X (Gy) = y^T \underbrace{G^T X G}_{Y} y = y^T Y y > \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow Y > \mathbf{0}$$

A.2 Complemento de Schur

Assuma que $R(x) > \mathbf{0}$ e seja a matriz não-singular G dada por

$$G = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -R(x)^{-1}S(x)^T & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Fazendo uma Transformação de Congruência, temos que

$$G^T \begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} G = \begin{bmatrix} Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R(x) \end{bmatrix} > \mathbf{0}.$$

A prova desse Lema é baseada em [DY13].

A.3 Lema 2.4

Pré e pós multiplicando (2.4a) pela matriz de posto completo $\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \frac{1}{\beta}\mathbb{M}^T \end{bmatrix}$ e sua transposta, respectivamente, recupera-se a expressão (2.4b).

A.4 Lema 2.5

Desenvolvendo a expressão dada em (2.5a), tem-se

$$-(\mathbb{V}\mathbb{Q}^{-1} - \alpha)(\mathbb{V}^T - \alpha\mathbb{Q})^T) \leq \mathbf{0},$$

$$-(\mathbb{V}\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{V}^T - \alpha\mathbb{V}\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{Q}^T - \alpha\mathbb{V}^T + \alpha^2\mathbb{Q}^T) \leq \mathbf{0},$$

$$-\mathbb{V}\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{V}^T + \alpha\mathbb{V} + \alpha\mathbb{V}^T - \alpha^2\mathbb{Q}^T) \leq \mathbf{0}, \tag{A.1}$$

Reorganizando os termos em (A.1) obtém-se a expressão em (2.5b).

Bibliografia

[ÅH01] K. J. Åström and T. Hägglund. The future of PID control. *Control Engineering Practice*, 2001.

[Ama06] F. Amato. *Robust control of linear systems subject to uncertain time-varying parameters.* Springer, 2006.

[Bar85] B. R. Barmish. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 46(4):399–408, 1985.

[BB05] G. I. Bara and M. Boutayeb. Static output feedback stabilization with $\mathcal{H}_\infty$ performance for linear discrete-time systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 50(2):250–254, 2005.

[BEGFB94] S. Boyd, L. El-Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, volume 15. Philadelphia, PA, 1994.

[Ber05] D. S. Bernstein. *Matrix Mathematics: theory, facts, and formulas with application to linear systems theory.* Princeton University Press, 2005.

[BG05] A. S. Bazanella and J. M. Gomes da Silva Jr. *Sistemas de controle: Princípios e métodos de projeto.* UFRGS, 2005.

[Bha07] A. Bhaya. *Enciclopédia de Automática - Controle & Automação*, volume 2, chapter Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Lineares, pages 67–91. Editora Blücher, São Paulo, SP, 2007.

[BPG89] J. Bernussou, P. L. D. Peres, and J. C. Geromel. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *Systems & Control Letters*, 13(1):65–72, July 1989.

[BV04] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2004.

[CCS+05] S. S. Chen, Y. C. Chang, S. F. Su, S. L. Chung, and T. T. Lee. Robust static output-feedback stabilization for nonlinear discrete-time systems with time delay via fuzzy control approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 13(2):263–272, April 2005.

[Che07] J.-D. Chen. Delay-dependent $\mathcal{H}_\infty$ control of uncertain neutral systems with state and input delay: LMI opimization approach. *Chaos, Solitions & Fractals*, 33(2):595–606, July 2007.

[CMLG11] A. F. Caldeira, M. F. Miranda, V. J. S. Leite, and E. N. Gonçalves. Minimização do custo $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas incertos discretos no tempo com atraso nos estados. *SBA: Controle & Automação*, 22:256–272, Maio/Junho 2011.

[COR]

[CT99] C. A. R. Crusius and A. Trofino. Sufficient LMI conditions for output feedback control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(5):1053–1057, May 1999.

[CY14] X. H. Chang and G. H. Yang. New results on output feedback $\mathcal{H}_\infty$ control for linear discrete-time systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 59(5):1355–1359, May 2014.

[DB09] R. C. Dorf and R. H. Bishop. *Sistemas de Controle Moderno*. LTC, 11 edition, 2009.

[DGKF89] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. Francis. State space solutions to the standard $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(8):831–847, August 1989.

[DvHK+05] G. Dünnebier, D. van Hessem, J. V. Kadam, K. U. Klatt, and M. Schlegel. Optimization and control of polymerization processes. *Chemical engineering & technology*, 28(5):575–580, April 2005.

[DY13] G. R. Duan and H. H. Yu. *LMIs in Control Systems: Analysis, Design and Applications*. CRC Press, 2013.

[EPA14] Y. Ebihara, D. Peaucelle, and D. Arzelier. On the structure of generalized plant convexifying static $\mathcal{H}_\infty$ control problems. *Automatica*, 50(6):1706–1714, May 2014.

[FHM93] M. Fujita, K. Hatake, and F. Matsumura. Loop shaping based robust control of a magnetic bearing. *IEEE Control Systems*, 13(4):57–65, August 1993.

[GL07] J. M. Gomes da Silva Jr. and V. J. S. Leite. *Enciclopédia de Automática - Controle & Automação*, volume 2, chapter Sistemas Lineares com Atrasos de Tempo, pages 108–124. Editora Blücher, São Paulo, SP, 2007.

[GLWW04] H. Gao, J. Lam, C. Wang, and Y. Wang. Delay-dependent robust output feedback stabilisation of discrete-time systems with time-varying state delay. *IEE Proceedings Control Theory and Applications*, 151(6):691–698, November 2004.

[GMP15] M. Grossard, J. Martin, and G. F. C. Pacheco. Control-oriented design and robust decentralized control of the cea dexterous robot hand. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 20(4):1809–1821, August 2015.

[GNLC94] P. M. Gahinet, A. Nemirovskii, A. J. Laub, and M. Chilali. The LMI control toolbox. In *IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 2038–2038, May 1994.

[GOA97] L. E. Ghaoui, F. Oustry, and M. AitRami. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(8):1171–1176, August 1997.

[Gon06] E. N. Gonçalves. *Análise e Síntese de Controladores e Filtros Robustos para Sistemas com Domínios Politópicos de Incerteza.* Tese de doutorado, UFMG, Belo Horizonte (BH), Brasil, Setembro 2006.

[GPK05] D. W. Gu, P. Hr. Petkov, and M. M. Konstantinov. *Robust control design with* MATLAB®, volume 1. Springer Science & Business Media, 2005.

[GT15] E. Gyurkovics and T. Takács. Robust dynamic output feedback guaranteed cost control for discrete-time systems with time-varying delays. *Asian Journal of Control*, 17(2):687–698, July 2015.

[HDI08] L. Hetel, J. Daafouz, and C. Iung. Equivalence between the Lyapunov-Krasovskii functionals approach for discrete delay systems and that of the stability conditions for switched systems. *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, 2:697–705, August 2008.

[HJK14] L. Hongyi, X. Jian, and H.R. Karimi. Output feedback based $\mathcal{H}_\infty$ control for vehicle suspension systems with control delay. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 61(1):436–446, January 2014.

[HKNC13] M. A. Hosen, A. Khosravi, S. Nahavandi, and D. Creighton. Control of polystyrene batch reactor using fuzzy logic controller. In *2013 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC)*, pages 4516–4521, Manchester,UK, October 2013.

[HRMP09] R. C. L. F. Oliveira H. R. Moreira and P. L. D. Peres. Robust $\mathcal{H}_2$ static output feedback design starting from a parameter-dependent state feedback controller for time-invariant discrete-time polytopic systems. *Optimal Control Applications and Methods*, November 2009.

[HWLS08] Y. He, M. Wu, G.-P. Liu, and J.-H. She. Output feedback stabilization for a discrete-time system with a time-varying delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(11):2372–2377, November 2008.

[HZ11] T. Hornik and Q. C. Zhong. A current-control strategy for voltage-source inverters in microgrids based on $\mathcal{H}_\infty$ and repetitive control. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 26(3):943–952, March 2011.

[KKL07] A. Karimi, H. Khatibi, and H. Longchamp. Robust control of polytopic systems by convex optimization. *Automatica*, 43(8):1395–1402, 2007.

[Klu10] M. Klug. Realimentação dinâmica de saída com parâmetros varianetes e aplicação aos sistetemas fuzzy takagi-sugeno. Tese de mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, December 2010.

[KS13] A. Karimi and M. S. Sadabadi. Fixed-order controller design for state space polytopic systems by convex optimization. In *Proceddings of the IFAC Joint Conference*, Grenoble, France, 2013.

[LLGS12] H. Li, H. Liu, H. Gao, and P. Shi. Reliable fuzzy control for active suspension systems with actuator delay and fault. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 20(2):342–357, April 2012.

[LLK06] K. H. Lee, J. H. Lee, and W. H. Kwon. Sufficient LMI conditions for $\mathcal{H}_\infty$ output feedback stabilization of linear discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(4):675–680, April 2006.

[LMP04] V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. Alocação robusta de pólos através de realimentação de estados dependente de parâmetros. *Revista de Controle & Automação*, 15(2):127–134, April–June 2004.

[LMWT06] X. G. Liu, R. R. Martin, M. Wu, and M. L. Tang. Delay-dependent robust stabilisation of discrete-time systems with time-varying delay. *IEE Proceedings — Control Theory and Applications*, 153(6):689–702, November 2006.

[Löf04] J. Löfberg. YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *Proceedings of the IEEE CCA/ISIC/CACSD Multiconference*, Taipei, Taiwan, 2004. Available from `http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php`.

[LTP04] V. J. S. Leite, S. Tarbouriech, and P. L. D. Peres. Controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas discretos com atraso nos estados: condições LMI independentes do atraso. In *Anais do XV Congresso Brasileiro de Automática*, Gramado, RS, September 2004.

[MBB04] D. Mehdi, E. K. Boukas, and O. Bachelier. Static output feedback design for uncertain linear discrete time systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 21:1–13, March 2004.

[ML08] M. F. Miranda and V. J. S. Leite. Síntese convexa para sistemas incertos discretos no tempo com atrasos variantes. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, 19(3):242–255, 2008.

[MOP09] H. R. Moreira, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Realimentação de saída robusta a partir de controladores dependentes de parâmetros para sistemas lineares incertos discretos no tempo. *SBAI 2009*, Setembro 2009.

[MOS98] I. Masubuchi, A. Ohara, and N. Suda. LMI-based controller synthesis: A unified formulation and solution. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 8(8):669–686, July 1998.

[MP96] S. O. R. Moheimani and I. R. Petersen. Optimal guaranteed cost control of uncertain systems via static and dynamic output feedback. *Automatica*, 32(4):575–579, April 1996.

[MS08] L. Moreira and C.G. Soares. $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ designs for diving and course control of an autonomous underwater vehicle in presence of waves. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 33(2):69–88, April 2008.

[Nic01] S. I. Niculescu. *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*, volume 269 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, London, 2001.

[Nis12] N. S. Nise. *Engenharia de Sistemas de Controle*. LTC, 6 edition, 2012.

[Oga10] K. Ogata. *Engenharia de Controle Moderno*. Prentice Hall, 5 edition, 2010.

[OL15] A. C. Oliveira and V. J. S. Leite. Controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas lineares discretos no tempo com atraso nos estados via realimentação estática de saída. In *XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, Natal, RN. Aceito, Outubro 2015.

[PA01] D. Peaucelle and D. Arzelier. An efficient numerical solution for $\mathcal{H}_2$ static output feedback synthesis. In *Proceedings of the 2001 European Control Conference*, pages 1–6, Porto, Portugal, September 2001.

[PDB93] A. Packard, J. Doyle, and G. Balas. Linear multivariable robust control with a μ perspective. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control — Transactions of ASME*, 115(2B):426–438, June 1993.

[PG07] R. M. Palhares and E. N. Gonçalves. *Enciclopédia de Automática – Controle & Automação*, volume 1, chapter Desigualdades Matriciais Lineares em Controle, pages 155–195. Editora Blücher, São Paulo, SP, 2007.

[PP01] E. Prempain and I. Postlethwaite. Static output feedback stabilisation with $\mathcal{H}_\infty$ performance for a class of plants. *Systems & Control Letters*, 43(3):159–166, July 2001.

[Ric03] J.-P. Richard. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39(10):1667–1694, October 2003.

[RP02] D. C. W. Ramos and P. L. D. Peres. An LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(4):675–678, April 2002.

[Sad15] A. Sadeghzadeh. Robust reduced-order controller synthesis: a dilated lmi approach. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, pages 1–21, October 2015.

[SADG97] V. L. Syrmos, C. T. Abdallah, P. Dorato, and K. Grigoriadis. Static output feedback — a survey. *Automatica*, 33(2):125–137, February 1997.

[SGC97] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(7):896–911, 1997.

[Sil11] L. F. P. Silva. Estudo sobre inclusão de desempenho na síntese de controladores para sistemas discretos no tempo com atrasos nos estados. Tese de mestrado, Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, February 2011.

[SKYK99] S.-H. Song, J.-K. Kim, C.H. Yim, and H.-C. Kim. $\mathcal{H}_\infty$ control of discrete-time linear systems with time-varying delays in state. *Automatica*, 35:1587–1591, September 1999.

[SLCK14] L. F. P. Silva, V. J. S. Leite, E. B. Castelan, and M. Klug. Local stabilization of time-delay nonlinear discrete-time systems using takagi-sugeno models and convex optimization. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, August 2014.

[SNA+11] R. Sipahi, S. J. Niculescu, C. T. Abdallah, W. Michiels, and K. Gu. Stability and stabilization of systems with time delay: Limitations and opportunities. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2:38–65, February 2011.

[Sou94] C. C. Souza. Controle ótimo de sistemas flexíveis via realimentação de saída. Tese de mestrado, Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação, 1994.

[Sou10] F. F. M. E. Sousy. Hybrid $\mathcal{H}_\infty$ based wavelet-neural-network tracking control for permanent-magnet synchronous motor servo drives. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 57(9):3157–3166, September 2010.

[Stu99] J. F. Sturm. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11-12:625–653, 1999. URL: http://sedumi.mcmaster.ca/.

[SW99] C. Scherer and S. Weiland. Lecture notes disc course on linear matrix inequalities in control, April 1999.

[Tak98] R. H. C. Takahashi. *Controle Singular de Sistemas Incertos.* Tese de doutorado, FEEC - Universidade Estadual de Campinas, 1998.

[Tei13] M. H. Teixeira. Controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ com alocação regional de pólos de sistemas incertos discretos no tempo com atraso nos estados. Tese de mestrado, Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, November 2013.

[TGGQ11] S. Tarbouriech, G. Garcia, J. M. Gomes da Silva Jr., and I. Queinnec. *Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators.* Springer Science & Business Media, 2011.

[TIS07] M. H. Terra, J. Y. Ishihara, and A. A. G. Siqueira. *Controle $\mathcal{H}_\infty$*, volume 1, pages 133–154. Editora Blücher, São Paulo, SP, 2007.

[TKL07] A. Tamimi, M. A. Khalaf, and F.L. Lewis. Adaptive critic designs for discrete-time zero-sum games with application to $\mathcal{H}_\infty$ control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 37(1):240–247, February 2007.

[Tro00] A. Trofino. Controle robusto, August 2000. URL: http://user.das.ufsc.br/ trofino/disciplinas/das-6600/apostila-robusto.pdf.

[TTT08] K. C. Toh, M. J. Todd, and R. H. Tütüncü. SDPT3 −−a matlab software package for semidefinite programming, version 1.3. *Optimization methods and software*, 11(1-4):545–581, Junuary 2008.

[XLY01] S. Xu, J. Lam, and C. Yang. Quadratic stability and stabilization of uncertain linear discrete-time systems with state delay. *Systems & Control Letters*, 43(2):77–84, 2001.

[Zam81] G. Zames. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(2):301–320, April 1981.

[ZD98] K. Zhou and J. C. Doyle. *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall, New York, 1998.

[ZGD96] K. Zhou, K. Glover, and J. C. Doyle. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 1996.

[ZH13] Q-. C. Zhong and T. Hornik. Cascaded current-voltage control to improve the power quality for a grid-connected inverter with a local load. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 60(4):1344–1355, April 2013.

[ZK88] K. Zhou and P. P. Khargonekar. Robust stabilization of linear systems with norm bounded time varying uncertainty. *Systems & Control Letters*, 10:17–20, January 1988.

[ZLFW12] F. Zhang, G. Liu, L. Fang, and H. Wang. Estimation of battery state of charge with $\mathcal{H}_\infty$ observer: Applied to a robot for inspecting power transmission lines. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 59(2):1086–1095, February 2012.

[ZQCY13] Y. Zhang, W. Qing, D. Chaoyang, and J. Yifan. $\mathcal{H}_\infty$ output tracking control for flight control systems with time-varying delay. *Chinese Journal of Aeronautics*, 26(5):1251–1258, 2013.