Universidade Federal de São João Del Rei
Centro Federal de Educação Tecnológica
de Minas Gerais
Programa de Pós Graduação em
Engenharia Elétrica

DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO HÍBRIDO IEFGM-MOM APLICADO À SOLUÇÃO DO ESPALHAMENTO ELETROMAGNÉTICO EM DUAS DIMENSÕES

Belo Horizonte

Universidade Federal de São João Del Rei
Centro Federal de Educação Tecnológica
de Minas Gerais
Programa de Pós Graduação em
Engenharia Elétrica

Dissertaçãosubmetida à banca examinadora designada pelo Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica-ASSOCIAÇÃO AMPLA ENTRE A UFSJ E O CEFET-MG, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre emEngenharia Elétrica.

Área de Concentração:Sistemas Elétricos
Linha de Pesquisa: Eletromagnetismo Aplicado
Orientadora:Dra. Úrsula do Carmo Resende
Co-orientador: Dr. Márcio Matias Afonso
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFET-MG

Belo Horizonte

Universidade Federal de São João Del Rei
Centro Federal de Educação Tecnológica
de Minas Gerais
Programa de Pós Graduação em
Engenharia Elétrica

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica – Associação Ampla entre a Universidade Federal de São João Del Rei e o Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais em 14 de dezembro de 2015 como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

_____

Prof. Dra. Úrsula do Carmo Resende – Orientadora
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

_____

Prof. Dr. Márcio Matias Afonso – Co-orientador
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

_____

Prof. Dr. Fernando José da Silva Moreira
Universidade Federal de Minas Gerais

_____

Prof. Dr. Marco Aurélio de Oliveira Schroeder
Universidade Federal de São João Del Rei

"É muito melhor lançar-se em busca de conquistas grandiosas, mesmo expondo-se ao fracasso, do que alinhar-se com os pobres de espírito, que nem gozam muito nem sofrem muito, porque vivem numa penumbra cinzenta, onde não conhecem nem vitória, nem derrota. " (Theodore Roosevelt)

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pela vida e a possibilidade de empreender esse caminho evolutivo, por propiciar tantas oportunidades de estudos e por colocar em meu caminho pessoas amigas e preciosas.

Àminha família, especialmente ao meu esposo e amigo Fred Muzzi, pelo amor, carinho apoio e compreensão. Aos meus pais, Miriam e Fidelis, pelo amor, educação, fortaleza e apoio de sempre. Aos meus irmãos e familiarespor suas manifestações de apoio e carinho.

Aos amigos de Mestrado que compartilharam comigo esses momentos de aprendizado, alegrias e sofrimento, especialmente ao Arthur Farrad, Biharck Araújo, Helciner Victor,Pollyana Pereirae William Douglas.

Aos amigos de graduação Fábio Arruda, NaiaraDuarte e Rafael Alípio (Cruyff) que mesmo seguindo caminhos diversos, sempre se fizeram presentes com lembranças, palavras de encorajamento e amizade.

À amiga Grabriela Magalhães pela revisão cuidadosa.

Àminha orientadora Úrsula Resende, um agradecimento carinhoso por todos os momentos de paciência, compreensão e competência. Por conduzir esse trabalho com imensa dedicação.

À EMBRAER S/A, em especial ao Giuliano Mendonça, pelo apoio necessário para realização desse trabalho.

Àtodos os professores que fizeram parte desse caminhar.

Enfim, a todos aqueles que de uma maneira ou de outra contribuíram para que este trabalho pudesse ser concluído.

Resumo

Esta dissertação se concentra na proposta de uma nova técnica híbrida, que combina o método sem malha, Elementos Livres de Galerkin Interpolantes, com o Método dos Momentos para a solução de problemas 2D de espalhamento eletromagnético.A formulação é aplicada na análise do espalhamento eletromagnético por um cilindro dielétrico infinito. Na solução híbrida proposta o problema é dividido em dois, uminterno e umexterno. Para o problema interno, o método sem malha é usado para resolver a forma fraca da equação escalar 2D de Helmholtz. Para o problema externo, o método dos momentos é usado para resolver a Equação Integral Campo Elétrico. A continuidade dos campos elétrico e magnético tangenciaisna fronteira entre os meios interno e externo é utilizada para atender a condição de radiação de Sommerfeld.A precisão do método é verificada por meio da comparação dos resultados das soluções numérica e analítica.

Palavras Chaves:Método Híbrido, Espalhamento Eletromagnético, Elementos Livres de Galerkin Interpolantes, Método dos Momentos, Métodos sem Malhas

Abstract

This dissertation focuses on the proposal of a new hybrid technique, which combines a meshless method,Interpolating Element Free Galerkin, with the Method of Moments for the solution of 2D electromagnetic scattering problems.The formulation is applied in the analysis of the scattering by an infinite dielectric cylinder.For the hybrid solution the scattering problem is divided in two, internal and external problems. For the internal problem, the meshless method is used to solve the weak form of 2D scalar Helmholtz equation. For the external problem, the Method of Momentsis use to solve the Electric Field Integral Equation. The continuityof the tangential electric and magnetic fields at the boundary between the interior and the exterior surroundingsare used to enforce the Sommerfeld radiation condition. The accuracy of the proposed method is verified by comparing the numerical and analytical solutions.

Keywords: *Hybrid technique*, *electromagnetic scattering, Interpolating Element Free Galerkin, Method of Moments, Meshless*

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Símbolos

φ	Ângulo entre$\hat{n}e\vec{R}$
p	Base Polinomial Completa
$\vec{E}^s$	Campo Elétrico Espalhado
$\vec{E}^i$	Campo Elétrico Incidente
$\vec{E}$	Campo Elétrico Total
$\vec{H}^i$	Campo Magnético Incidente
$\vec{H}^s$	Campo Magnético Espalhado
$\vec{H}$	Campo Magnético Total
E_z	Campo Elétrico com Componente ao Longo da Direção$\hat{z}$
${E_z}^i$	Campo Elétrico Incidente com Componente ao Longo da Direção$\hat{z}$
${E_z}^S$	Campo ElétricoEspalhado com Componente ao Longo da Direção$\hat{z}$
H_ϕ	Campo Magnético com Componente ao Longo da Direção$\hat{\phi}$
$v(x_I)$	Coeficiente Desconhecido do Nó I
I_j^J	Coeficientes Desconhecidos para Corrente Elétrica
I_j^M	Coeficientes Desconhecidos para Corrente Magnética
$a(x)$	Coeficientes Desconhecidos e que dependem da posição de$x$
a_n	Coeficientes Desconhecidos
u_J	Coeficientes indeterminados
v	Coeficientes Desconhecidos deE_z
I_I^M	Coeficientes Desconhecidos deM_ϕ
λ_0	Comprimento de Onda no Vácuo
k	Constante de Propagação em um meio com característica(εeμ)
k_0	Constante de Propagação para o Espaço Livre
α	Constante Escalar para o Domínio de Influência
$\vec{J}$	Corrente Elétrica Superficial
$\vec{M}$	Corrente Magnética Superficial
ψ	Derivada de$u$na Direção$\hat{n}$
d_c	Distância Nodal
Ω	Domínio do Espalhador
$E_M(\%)$	Erro Médio
$E_{Max}(\%)$	Erro Máximo

$H_0^h(\bar{\Omega})$	Espaço de Dimensão Finita
$H_0^1(\bar{\Omega})$	Espaço de Funções Lineares de Dimensão Infinita
Ω_0	Espaço Livre
ω	Frequência Angular
Γ_e	Fronteira Fictícia
g	Função Conhecida
P	Função de Base Pulso
T	Função de Base Triangular
f_n	Funções de Base
F_I	Funções de Base Pulso ou Triangulares
Φ	Função de Forma
$H_0^{(2)}$	Função de Hankel de Segundo Tipo e Ordem Zero
$\mathbb{P}$	Função de Peso
u^h	Função Local
W	Função Janela
$\Im$	Funcional Quadrático
w_m	Funções de Teste
W_{MOM}	Funções de Teste do MOM
V	Matriz Excitação
K	Matriz dos coeficientes do IEFGM
Z	Matriz Impedância
Z_H	Matriz Global do Método Híbrido
N_P	Número de FBP sobre a FronteiraΓ
N_T	Número de FBT Sobre A FronteiraΓ
N_P	Número de Nós Envolvidos na Aproximação
N_Ω	Número de Nós sobre o domínioΩ
N_Γ	Número de Nós sobre a fronteiraΓ
n	Número de Pontos onde a Solução é Avaliada
m	Número de Termos da Base Polinomial
$\mathcal{L}$	Operador Integro-diferencial
$\mathcal{K}$	Operador Integro-diferencial
L	Operador Linear
μ_0	Permeabilidade Magnética do Vácuo
μ_Ω	Permeabilidade Magnética do Cilindro
μ_r	Permeabilidade Magnética Relativa do Meio
ε_0	Permissividade Elétrica do Vácuo
ε_Ω	Permissividade Elétrica do Cilindro
ε_r	Permissividade Elétrica Relativado Meio
A_z	Potencial Vetor Magnético

F_{ϕ}	Potencial Vetor Elétrico
R_{Γ_E}	Raio da Fronteira Fictícia
a	Raio do Cilindro
τ	Resíduo
u^*	Solução Aproximada
Γ	Superfície do Espalhador
d_I	Suporte da Função Janela
$S_{analitico}$	Valor Obtido pela Solução Analítica
S_{IEFGM}	Valor Obtido pela Solução IEFGM
$S_{IEFGM-MOM}$	Valor Obtido pela Solução IEFGM-MOM
S_{MOM}	Valor Obtido pela Solução MOM
f	Variável Desconhecida
$\hat{n}$	Vetor Normal àΓ

Lista de Abreviações

ABC	*Absorvent Boundary Condition* - Condição de Contorno Absorvente
BEM	*Boundary Element Method* - Método dos Elementos de Fronteira
CEFET	Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
CFIE	*Combined Field Integral Equation* – Equação Integral de Campo Combinado
CSPH	*Correct Smooth Particle Hydrodynamics* - Método Partícula Hidrodinâmica Suavizada Corrigida
DEM	*Diffuse Element Method* - Método dos Elementos Difusos
EFGM	*Element Free Galerkin Method* - Método dos Elementos Livres de Galerkin
EFIE	*Electric Field Integral Equation* - Equação Integral do Campo Elétrico
FBP	Funções Base do Tipo Pulso
FBT	Funções Base do Tipo Triângulo
FDM	*Finite Difference Method* - Método das Diferenças Finitas
FDTD	*Finite Difference Time-Domain* - Diferenças Finitas no Domínio do Tempo
FEM	*Finite Element Method* - Método dos Elementos Finitos
GEA	Grupo de Eletromagnetismo Aplicado
IEFGM	*Interpolating Element Free Galerkin Method* - Método dos Elementos Livres de Galerkin Interpolantes
IMLS	*Interpolating Moving Least Squares* - Mínimos Quadrados Móveis Interpolantes
MFIE	*Magnetic Field Integral Equation* - Equação Integral do Campo Magnético
MLPG	*Meshless Local Petrov-Galerkin* - Método Local de Petrov-Galerkin Sem Malha
MLS	*Moving Least Squares* - Mínimos Quadrados Móveis
MOM	*Method of Moments* - Método dos Momentos
MTD	Meio Triângulo da Direita
MTE	Meio Triângulo da Esquerda

PPGEL	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
PVC	Problemas de Valor de Contorno
PUM	*Partition Unity Method* - Método da Partição de Unidade
RK	*Reproducing Kernel* -Núcleo Reprodutor
RKPM	*Reproducing Kernel Particle Method* - Método de Partículas com Reprodução de Núcleo
RGN	Relação entre o número de pontos de integração e o número de nós
SPH	*Smoothed Particle Hydrodynamics Method* - Método Partícula Hidrodinâmica Suavizada
UFSJ	Universidade Federal de São João Del Rei
WRM	*Weighted Residual Method* - Método dos Resíduos Ponderados

Publicação

Durante o desenvolvimento desta pesquisa foi realizada a publicacão no simposio relacionado a seguir.

RESENDE, U. C.; ROSA, C. K.; AVIDAGO, A. G.; MOREIRA, F. J. S.; AFONSO, M. M.. **A New Meshless-MOM Hybrid Method applied to the Analisys of 2D Electromagnetic Scattering**. ISEF 2015 - XVII International Symposium on Electromagnetic Fieldsin Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering.Valencia, Spain, September 10-12, 2015ISBN: 978-84-606-9102-0.

Capítulo 1
Introdução

1.1. Caracterização do Problema

Nomundo moderno, é cada vez maior o número de aplicações relacionadas ao espalhamento eletromagnético, as quais abrangem diversas áreas, como por exemplo: o funcionamento dos radares para detecção de submarinos e aeronaves (LIU e JIN, 2004); a modelagem da estrutura de florestas pelo sensoriamento remoto (LI, FANG e WANG, 1998); a determinação das propriedades físicas das geleiras marítimas (GOLDEN, BORUP, *et al.*, 1998); a detecção e identificação de cilindros enterrados (FREZZA, MARTINELLI, *et al.*, 2007); dentre outras. O estudo dessas aplicações, frequentemente requer o cálculo do campo eletromagnético envolvido. Porém, para a maioria dos problemas essecálculo somente apresenta solução analítica quando sua geometria é extremamente simples. Nos problemas práticos a geometria,em geral, é complexa e as dificuldades para obter soluções analíticas, as tornaminviáveis.No passado, do ponto de vista técnico, este problema foi contornado, em parte, com o uso de técnicas experimentais ou gráficas. Atualmente são empregadas técnicas numéricas, pois estas, são baratas,geram resultados precisos e, muitas vezes, são as únicas possíveis.

As principais técnicas numéricas aplicadas à solução de problemas de espalhamento eletromagnético podem ser classificadas em dois grupos: técnicas numéricas diferenciais e técnicas numéricas integrais. Dentre as principais técnicas diferenciais pode-se destacar o Método das Diferenças Finitas (*Finite Difference Method* – FDM) e o Método dos Elementos Finitos (*Finite Element Method* – FEM) e entre as técnicas integrais a que mais se destaca é o Método dos Momentos (*Method of Moments* - MOM). As técnicas diferenciais apresentam formulações mais simples e são, portanto, atraentes para simular estruturas complexas. Heterogeneidades podem ser mais facilmente tratadas através dessas técnicas. Entretanto, para aplicação em problemas ilimitados (ou problemas abertos, sem a presença de fronteiras), como os de

espalhamento eletromagnético, as mesmas não incorporam naturalmente a condição de radiação de Sommerfeld (PETERSON, SCOOTT e MITTRA, 1997). Assim, é necessária a extensão do domínio de discretização por meio do estabelecimento de uma fronteira fictícia, a certa distância do espalhador, sob a qual a condição de Sommerfeld é aproximada (JIN, 2002). As técnicas integrais, por outro lado, lidam bem com problemas ilimitados (domínio aberto), porém o método torna-se computacionalmente complexo quando heterogeneidades estão presentes(GIBSON, 2015).

Tendo em vista as vantagens e desvantagens das técnicas integrais e diferenciais, uma alternativa que vem sendo frequentemente investigada é o uso de soluções híbridas. Esse tipo de solução combina duas técnicas distintas, de forma a explorar os pontos fortes de cada uma para a obtenção de soluçõespara uma classe mais geral de problemas(YUAN, LYNCH e STROHBEHN, 1990).Dentre os principais métodos híbridos que têm sido investigados, o mais recorrente é a combinação do FEM-MOM (YUAN, 1990), (YUAN, LYNCH e STROHBEHN, 1990), (JANKOVIC, LABELLE, *et al.*, 1994), (ALI, HUBING e DRENIAK, 1997), (LING, SHENG e JIN, 1997) e(ILIC, DJORDJEVIC, *et al.*, 2009). Para problemas de espalhamento eletromagnético a combinação FEM-MOM implica em uma redução do domínio computacional, uma vez que não requer o estabelecimento de uma fronteira fictícia há certa distância do espalhador. Também deve ser destacado que a formulação permite o cálculo simultâneo do campo elétrico, $\vec{E}$,no interior do espalhador e das correntes elétrica, $\vec{J}$, e magnética, $\vec{M}$, em sua superfície.

Embora o FEM seja um método cuja a aplicabilidade, eficiência e precisão já estejam demonstrados na literatura, ele requer a geração de uma malha, ou seja, uma conectividade dentro da solução. Apesar dos esforços e pesquisas que têm sido realizadas para automatizar o processo de geração de malhas, um considerável esforço computacional é ainda necessário preparando e malhando modelos computacionais quando o problema envolve geometrias complexas, especialmente aquelas com descontinuidades, fronteiras móveis ou severas deformações. Tendo em vista essas dificuldades, nas últimas décadas foi proposta e tem sido desenvolvida uma nova classe de métodos para solução de equações diferenciais. Esses métodos não requerem o uso explícito de malhas e são conhecidos como Métodos sem Malhas (*Meshless Methods* – MM) (LIU, 2003).

Os MM surgiram em 1977, com a proposta do Método da Partícula Hidrodinâmica Suavizada(*Smoothed Particle Hydrodynamics Method* - SPH) (LUCY, 1977). Desde então, diversos MM têm sido propostos, sendo que a diferença básica entre eles está no processo de construção da função de forma. Dentre as principais aproximações utilizadas para a criação da função de forma, pode-se destacar: Núcleo Reprodutor (*Reproducing Kernel* - RK), Mínimos Quadrados Móveis (*Moving Least Squares* – MLS) e o Método da Partição de Unidade (*Partition Unity Method*- PUM)(LIU, 2003).

Dentre os diversos MM disponíveis na literatura, o Método dos Elementos Livres de Galerkin (*Element Free Galerkin Method* - EFGM) é um dos mais estabelecidos e vem ganhando destaque na literatura, devido as suas diversas vantagens. O mesmo é extremamente robusto, possui boas taxas de convergência e uma grande facilidade para realizar a discretização em problemas de geometria complexa. Ele vem sendo empregado na área de engenharia aplicada na solução de problemas lineares e não lineares, em diversas áreas da ciência, tais como: na acústica (SOLEAU e BOUILLARD, 2000);na mecânica (BELYTSCHKO, LU e GU, 1995); e em eletromagnetismo(CINGOSKI, MIYAMOTO, *et al.*, 1998), (VIANA, 1998), especialmente em problemas de espalhamento eletromagnético(REZENDE, 2005), (RESENDE, COPPOLI e AFONSO, 2015).

O EFGM foi proposto em 1994 a partir do Método dos Elementos Difusos (*Diffuse Element Method* – DEM), com melhorias no cálculo das derivadas das funções de forma assim como a utilização de integração numérica (BELYTSCHKO, LU e GU, 1994). Sua formulação é relativamente simples, mesmo quando o domínio está preenchido com materiais não homogêneos e quando o problema tem forma geométrica complexa. Ele é baseado em uma distribuição de nós, que pode ser ou não aleatória,e permite o tratamento de fronteiras não uniformes e móveis, com um custo computacional reduzido.Assim como o DEM, o EFGM utiliza um polinômio interpolador baseado na aproximação MLS em conjunto com a forma fraca do método de Galerkin (BELYTSCHKO, LU e GU, 1994). Embora ele necessite de uma malha de fundo para realização da integração numérica esse processo é independente do processo de distribuição dos nós (VIANA, 1998)e(LIU e GU, 2005).

Uma deficiência do EFGM, entretanto, é dada pelo fato das funções de forma do MLS não cumprirem a propriedade do delta de Krönecker, ou seja, as funções não são interpoladoras. Assim a imposição das condições de fronteira essenciais requer a utilização de métodos adicionais como o método dos multiplicadores de Lagrange

(BELYTSCHKO, LU e GU, 1994), o método das penalidades (ZHU e ATLURI, 1998) ou o método de Nitsche's (MENDEZ e HUERTA, 2004). Porém, é possível contornar essa restrição fazendo uma adaptação no MLS de forma que suas funções de forma satisfaçam a propriedade do delta de Krönecker;esse processo é conhecido comoMínimos Quadrados Móveis Interpolantes (*Interpolating Moving Least Squares* – IMLS) e foi proposto por Marques *et al*. em 2007 (MARQUES, MACHADO, *et al.*, 2007). O EFGM aplicado juntamente com a técnica do IMLS é chamado nesse trabalho de Método dos Elementos Livres de Galerkin Interpolantes (*InterpolatingElement Free Galerkin Method* – IEFGM).

Tendo em vista as vantagens dos métodos híbridos, em conjunto a aplicabilidade do IEFGM para a mesma gama de problemas tratadas pelo FEM, destacando-se a vantagem do IEFGM não necessitar da utilização de uma malha, no sentido clássico, e ser mais facilmente aplicado a geometrias complexas e não homogêneas, o presente trabalho propõe, um novo método híbrido para obtenção de uma solução mais geral e robusta de problemas de espalhamento eletromagnético por corpos dielétricos. Esse novo método híbrido combina o IEFGM e o MOM, onde o IEFGM é aplicado à região interna do espalhador, problema interior (limitado), enquanto o MOM é aplicado àregião externa, problema exterior (ilimitado).

1.2. Contextualização da Dissertação

Essa dissertação está inserida nos desenvolvimentos realizados pelo Grupo de Eletromagnetismo Aplicado (GEA) do CEFET-MG, cujo principal objetivo é a aplicação de métodos numéricos na busca de novas formas de solução dos problemas de eletromagnetismo aplicado e também no projeto de equipamentos eletromagnéticos. As principais técnicas numéricas investigadas pelo GEA são: Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo (FDTD), o FEM, MM e MOM. Dentre os diversos trabalhos desenvolvidos pelo GEA, em relação ao tema dessa dissertação, pode-se destacar:

1. Análise das Condições Absorventes De Engquist-Majda e Bayliss-TurkelAplicadas ao Espalhamento Eletromagnético(PINTO, 2012);
2. Análise Paramétrica do Método Sem Malha Element Free Galerkin em Problemas Eletrostáticos (PORTO, 2012)

3. Avaliação do Espalhamento por Estruturas Filamentares Utilizando o Método dos Momentos (MOREIRA, 2012)
4. Análise do Espalhamento Eletromagnético por Corpos de Revolução pelo Método dos Momentos Utilizando Integrais Elípticas (VIDAL, 2011)
5. Técnicas de Computação Paralela Aplicadas em Métodos Sem Malha (ARAÚJO, 2014)
6. Espalhamento eletromagnético solucionado via FEM-ABC (PINTO, AFONSO, *et al.*, 2012)
7. Evaluation of Singular Integral Equation in MOM Analysis of Arbitrary Thin Wire Structures (RESENDE, MOREIRA e AFONSO, 2014)
8. Analysis of Element Free Galerkin Interloping Moving Least Square Method in an Electrostatic Problem (RESENDE, COPOLLI, *et al.*, 2015)
9. A Meshless Approach Using EFG Interpolating Moving Least-Squares Method in 2-D Electromagnetic Scattering Analysis (RESENDE, COPPOLI e AFONSO, 2015)

Assim, essa dissertação é um trabalho de continuidade dos trabalhos desenvolvidos pelo GEA, consolidando os conhecimentos já gerados sobre IEFGM e MOM e unificando esses conhecimentos na proposta de um método híbrido que combina as duas técnicas para solução dos problemas de espalhamento eletromagnético.

1.3. Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é o desenvolvimento do ferramental teórico, analítico e numérico de uma nova técnica híbrida, que combina o IEFGM e o MOM, para a solução do problema de espalhamento eletromagnético de um cilindro dielétrico infinito.

Para possibilitar o alcance desse objetivo geral, os seguintes objetivos específicos podem ser destacados:

1. Realizar uma revisão bibliográfica sobre espalhamento eletromagnético,MOM, MM e os métodos híbridos;
2. Apresentar e aplicar a modelagem matemática para solução do espalhamento eletromagnético por um cilindro dielétrico infinito utilizando o IEFGM;

3. Apresentar e aplicar a modelagem matemática para solução do espalhamento eletromagnético por um cilindro dielétrico infinito utilizando o MOM com a utilização de funções base e teste do tipo pulso e triângulo;
4. Desenvolvere aplicar a modelagem matemática para solução do espalhamento eletromagnético por um cilindro dielétrico infinito utilizando o método híbrido IEFGM-MOM;
5. Desenvolver um programa em Matlab®,para modelagem matemática do IEFGM, do MOM e do híbrido IEFGM-MOM;
6. Validaros modelos computacionaiscomparando os resultados obtidos com a respectiva solução analítica;
7. Realizar diferentes análises de sensibilidade para as formulações implementadas, de forma a reter e discutir as suas principais características.

1.4. Organização do Trabalho

Este trabalho estáorganizado em seis capítulos, incluindo este introdutório.

No segundo Capítulo é apresentada a definição do fenômeno de espalhamento, o problema deste estudo e sua modelagem por equações diferenciais e integrais.

O terceiro Capítulo apresenta o desenvolvimento da formulação do IEFGM, suas principais características e a aplicação do método aoproblema do espalhamento eletromagnético por um cilindro dielétrico infinito. São também apresentadosos resultados obtidos pelo IEFGM em comparação com os resultados analíticos.

No quarto Capítulo é apresentado o MOM e sua formulação geral. O método é aplicado ao problema do espalhamento eletromagnético por um cilindro dielétrico infinito, com o uso de funções base do tipo pulso e triângulo. Também são apresentados os resultados obtidos pelo métodoem comparação com o resultado analítico.

O quinto Capítulo apresenta o método híbrido proposto, IEFGM-MOM, suas principais características e a formulação matemática para solução do espalhamento eletromagnético por um cilindro dielétrico infinito. E em seguida, são apresentados os resultados obtidos por meio do IEFGM-MOM, além de sua comparação com os resultados analíticos, do IEFGM e do MOM.

No sextoCapítulo é realizada a conclusão do trabalho e apresentadas propostas para trabalhosfuturos.

Capítulo 2
Espalhamento Eletromagnético

Neste capítuloé descrito o fenômeno de espalhamento eletromagnético e é apresentada sua modelagem matemática, utilizando equações diferenciais e integrais, para um cilindro dielétrico infinito.

2.1. Definição Geraldo Espalhamento Eletromagnético

O fenômeno do espalhamento eletromagnético pode ser descrito a partir da Figura 2.1, onde a antena (a) emite uma onda eletromagnética que se propaga no espaço livre, Ω_0, eincide na aeronave (b).A partir da onda eletromagnética incidente, descrita pelos campos elétrico e magnético incidentes,$\boldsymbol{E}^i$e$\boldsymbol{H}^i$, que ilumina o objeto em (b), denominado espalhador, podem ser definidascorrentes equivalentes elétrica, $\boldsymbol{J}$, e magnética, $\boldsymbol{M}$. Essas correntes são impostas ao problema equivalente e responsáveis pela geração doscampos elétrico e magnético espalhados,$\boldsymbol{E}^s$e$\boldsymbol{H}^s$. Assim, os campos elétricoe magnético totais, $\boldsymbol{E}$e $\boldsymbol{H}$,emΩ_0, tornam-se a composição de campos espalhados e incidentes, dados por(BALANIS, 1989):

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^i + \boldsymbol{E}^s \tag{2.1}$$

e

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}^i + \boldsymbol{H}^s. \tag{2.2}$$

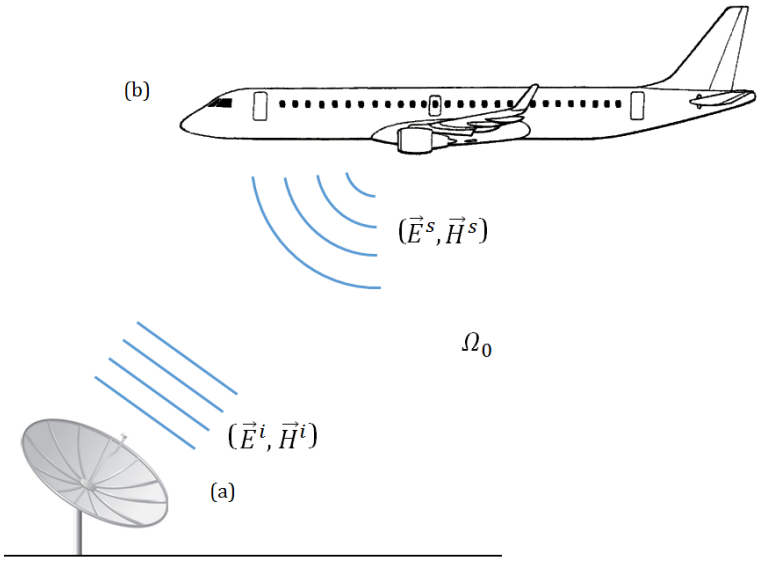


Figura 2.1 -Situação típica de espalhamento eletromagnético

Fonte: Adaptado de (AFONSO, 2003)

2.2. Espalhamento por Cilindro Dielétrico Infinito

Os cilindros representam umas das superfícies geométricas mais importantes na engenharia, principalmente em relação ao espalhamento eletromagnético. A superfície de muitos espalhadores práticos, como fuselagem de aviões, mísseis e outros, podem com frequência, ser modelados por estruturas cilíndricas. Assim, o cilindro circular é provavelmente uma das geometrias mais amplamente utilizadas para representar problemas práticos de espalhamento, devido à sua simplicidade e a disponibilidade de soluções simples aproximadas(PETERSON, SCOOTT e MITTRA, 1997)e(SADIKU, 2000).

Dessa forma, oespalhador escolhido para análise nesse trabalho é um cilindro circular dielétrico, homogêneo, de raio$a$, infinito na direção$\hat{z}$, iluminadopor uma onda eletromagnética (plana e uniforme)TM_zque propaga na direção $\hat{x}$.Como a incidência da onda é normal ao eixo z e as características eletromagnéticas do espalhador não variam nessa direção, o problema tridimensional pode ser reduzido aum bidimensional. Assim, o problemapode ser simplificado, sendo analisada apenas a sua seção reta, conforme apresentado na Figura 2.2. Este é um problema clássico da teoria eletromagnética, o qual possui solução analítica, permitindo a validação dos métodos numéricos(BALANIS, 1989).

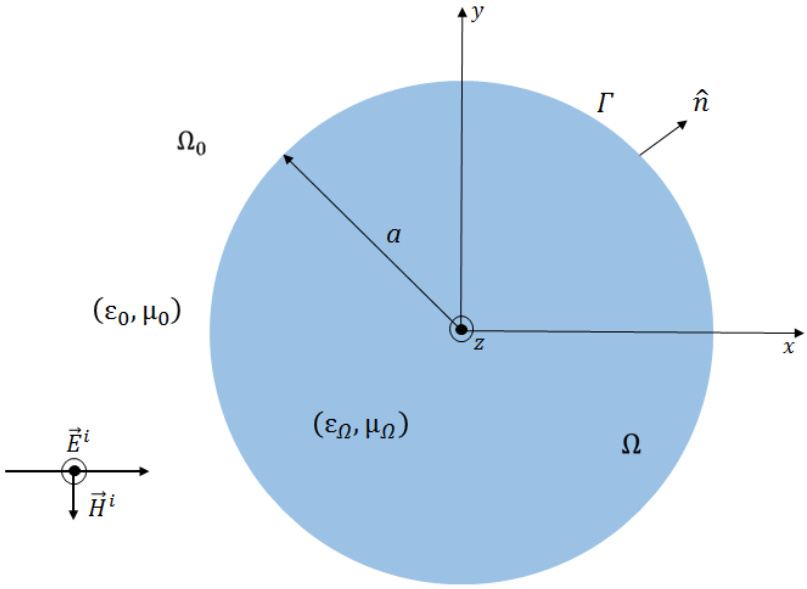


Figura 2.2 - Seção transversal do cilindro dielétrico

Na Figura 2.2, $\Omega_0$representa o espaço livre,Ωé a seção reta do cilindro, Γsua superfície com vetor normal$\hat{n}$, μ_0e$\varepsilon_0$sãoa permeabilidade magnética e a permissividade elétrica do vácuo, respectivamente, $\mu_\Omega = \mu_0\mu_r$e$\varepsilon_\Omega = \varepsilon_0\varepsilon_r$são a permeabilidade magnética e a permissividade elétrica do cilindro, respectivamente, onde μ_re$\varepsilon_r$são as permeabilidade magnética e permissividade elétrica relativas.

Em situações práticas, é frequentemente considerado que a fonte esteja suficientemente afastada do espalhador, de modo que a onda incidente seja plana e uniforme ao atingí-lo, como assumido no problema sob estudo. Nesse caso, a região das fontes pode ser excluída da análise do problema e somente sua influência sobre o espalhador é avaliada. Outra suposição, comumente feita em estudos dessa natureza, é que os campos elétrico e magnético oscilam harmonicamente em uma única frequência angular, ω. Assim, o fenômeno de espalhamento ocorre em regime harmônico e a 3ª e a 4ª equações de Maxwell, que o governam, podem ser expressas no domínio da frequência, para um meio genérico com características ($\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_re\mu = \mu_0\mu_r$), como(BALANIS, 1989):

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{M} - j\omega\mu\boldsymbol{H} \tag{2.3}$$

e

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + j\omega\varepsilon\boldsymbol{E}. \tag{2.4}$$

2.3. Modelagem Matemática do Espalhamento Eletromagnético por Cilindro Dielétrico Infinito usando Equação Diferencial

Observa-se que as Equações (2.3) e (2.4)estão acopladas, ou seja, os campos elétrico e magnético aparecem nas duas equações. Aumentando a ordem de derivação e com o auxílio de identidades matemáticas é possível desacoplar as equações, e assim obter equações separadas, conhecidas como "Equações de Onda de Helmoltz", para o campo elétrico(2.5) e para campo magnético (2.6)(BALANIS, 1989):

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + k^2 \boldsymbol{E} = 0 \tag{2.5}$$

e

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} + k^2 \boldsymbol{H} = 0, \tag{2.6}$$

onde$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$é a constante de propagação em um meio com característica (ε e μ).

No problema sob estudo nesse trabalho (espalhamento TM_z), as parcelas incidente, espalhada e total do campo elétrico tem componente ao longo da direção $\hat{z}$e do campo magnético tem componente ao logo das direções $\hat{\rho}$e$\hat{\phi}$. Fazendo o uso deste fato, as equações (2.5) e (2.6)podem ser representadas por uma única equação da seguinte forma:

$$\nabla(\nabla \cdot \alpha_1 \boldsymbol{u}) + {k_0}^2 \alpha_2 \boldsymbol{u} = 0, \tag{2.7}$$

ondek_0é a constante de propagação para o espaço livre,$\alpha_1 = {\mu_\Omega}^{-1}e\alpha_2 = \varepsilon_\Omega$para$u = \boldsymbol{E}$ e $\alpha_1 = {\varepsilon_\Omega}^{-1}e\alpha_2 = \mu_\Omega$para$u = \boldsymbol{H}$.

A Equação (2.7) é o ponto de partida para a obtenção da formulação matemática diferencial para solução do problemade espalhamento eletromagnético, e, é conhecida como formulação forte.A solução, a partir da formulação forte do problema, consiste em resolver diretamente as equações que governam o problema físico e suas condições de contorno. A obtenção da solução pela forma forte é, em geral, difícil e limitada a casos especiais(BALANIS, 1989).

Como forma de transpor as dificuldades para solução do problema a partir da formulação forte, é comumente utilizada uma formulação aproximada para o problema, que ainda sim seja robusta e precisa. Essa formulação é conhecida como forma fraca e conduz a um método único,que pode ser aplicado para resolver diferentes tipos de problemas físicos. O principal método utilizado na obtençãoda forma fraca é oMétodo

dos Resíduos Ponderados(*Weighted Residual Method* - WRM), que consiste na minimização do resíduo gerado pela solução aproximada(JIN, 2002). Ou seja, para obtenção da formulação fraca, admite-se uma solução aproximada, u^*, paraaEquação (2.7), sendo o resíduo, $\boldsymbol{\tau}$, gerado por essa aproximação,

$$\boldsymbol{\tau} = \nabla(\nabla \cdot \alpha_1 \boldsymbol{u}^*) + {k_0}^2 \alpha_2 \boldsymbol{u}^*. \tag{2.8}$$

Para minimizar esse resíduo, o mesmo é ponderado por uma função de peso, $\mathbb{P}$, integrado em todo domínio do problema, Ω, e forçado à zero(JIN, 2002):

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} \mathbb{P} d\Omega = 0. \tag{2.9}$$

De modo a simplificar a notação, nessa formulação adota-se a notação $\boldsymbol{u}$ para designar a solução aproximada $\boldsymbol{u}^*$. Aplicando a Equação (2.9) na Equação (2.8), obtém-se a expressão geral para formulação fraca do problema, que pode ser escrita da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} [\nabla(\nabla \cdot \alpha_1 \boldsymbol{u})] \cdot \mathbb{P} d\Omega + \int_{\Omega} {k_0}^2 \alpha_2 \boldsymbol{u} \cdot \mathbb{P} d\Omega = 0. \tag{2.10}$$

Aplicando a 1ª identidade de Green (A.2), a Equação (2.10) pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega} [(\nabla \cdot \alpha_1 \boldsymbol{u}) \cdot \nabla \mathbb{P}] d\Omega - \int_{\Omega} {k_0}^2 \alpha_2 \boldsymbol{u} \mathbb{P} d\Omega + \int_{\Gamma} \psi \mathbb{P} d\Gamma = 0, \tag{2.11}$$

ondeψ representa a derivada de $u$na direção $\hat{n}$, normal a Γ, dada por:

$$\psi = -\alpha_1 \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \hat{n}}. \tag{2.12}$$

A Equação (2.11)é a formulação fraca para o problema de espalhamento em duas dimensões. Pode ser observado pela mesma que:

1. As duas primeiras integrais da Equação(2.11) são avaliadas no domínio Ω, enquanto a terceira é avaliada sobre a fronteiraΓ;
2. A Equação (2.11) é simétrica, pois a ordem de derivação, tanto do campo quanto da função de peso $\mathbb{P}$, é igual;
3. A formulação fraca dos campos elétrico e magnético pode ser obtida por simples troca de variável.

2.3.1. Método de Galerkin

Apesar de ser uma solução aproximada, considerando o espaço de funções lineares $H_0^1(\bar{\Omega})$[1]de dimensão infinita, a solução da Equação (2.11) é ainda bastante complexa. Assim, aplica-se o Método de Galerkin, que consiste na busca de uma solução aproximada para a Equação (2.11) em um espaço de dimensão finita $H_0^h(\bar{\Omega})$[2], tal que $H_0^h(\bar{\Omega}) \subset H_0^1(\bar{\Omega})$(VIANA, 1998).

Dessa forma, seja $H_0^h(\bar{\Omega})$o espaço de todas as combinações lineares do tipo:

$$\mathbb{P}^h = \sum_{I=1}^{N} \alpha_I \, a_I \tag{2.13}$$

e

$$u^h = \sum_{J=1}^{N} \Phi_J \, u_J, \tag{2.14}$$

onde$\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$,$\alpha_IcomI = 1,2,\cdots,N$ são funções de formaque pertencem a uma família de funções peso no espaço $H_0^h(\bar{\Omega})$, $a_I$são constantes arbitrárias, sendo nesse trabalho escolhido $\alpha_I = 1$,$\Phi_J$são funções de forma também pertencentes a $H_0^h(\bar{\Omega})$e$u_J$sãoos coeficientes a serem determinados.Ou seja, o método de Galerkin consiste na busca de$u^h \in H_0^h(\bar{\Omega})$,passando do domínio contínuo para o domínio discreto.

Fazendo a função de forma αigual à função de forma Φobtém-se o seguinte sistema linear

$$\boldsymbol{K} * \boldsymbol{U} = \boldsymbol{F}, \tag{2.15}$$

onde

$$K_{IJ} = B(\Phi_I, \Phi_J) = \int_{\Omega} \left[(\alpha_1 \nabla \Phi_J) \cdot \nabla \Phi_I\right] d\Omega - \int_{\Omega} {k_0}^2 \alpha_2 \Phi_I \Phi_J \, d\Omega, \tag{2.16}$$

$$F_I = \int_{\Gamma} \psi \Phi_J \, d\Gamma \tag{2.17}$$

---

[1] Espaço das funções com derivada primeira de quadrado integrável em$\bar{\Omega}$e que se anulam em $\bar{\Omega}$.

[2]Espaço das funções com derivada primeira de quadrado integrável em$\bar{\Omega}$.

e

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}. \tag{2.18}$$

A Equação (2.15)pode ser avaliada utilizando diferentes tipos de métodos diferenciais para solução deu_I. A modelagem matemática por equação diferencial é eficaz para solução de problemas de contorno em domínios fechados. Entretanto, para problemas de propagação de ondas, como é o caso desse trabalho, os métodos diferenciais requerem a utilização de uma fronteira global localizada a certa distância do espalhador onde uma condição de contorno absorvente (*Absorvent Boundary Condition* – ABC) deve ser imposta de forma a atender as condições de radiação de Sommerfeld(PETERSON, SCOOTT e MITTRA, 1997) e(PINTO, AFONSO, *et al.*, 2012), conforme apresentado na Seção 3.4.

2.4. Modelagem Matemática do Espalhamento Eletromagnético por Cilindro Dielétrico Infinito usando Equação Integral

Os problemas de radiação eletromagnética envolvem o cálculo de campos em qualquer lugar do espaço devido a uma distribuição de correntes elétrica, $\boldsymbol{J}$,e magnética,$\boldsymbol{M}$. Assim, o espalhamento pode ser tratado como um problema de radiação, onde essas correntes são geradas por outras distribuições de correntes ou campos(BALANIS, 1989).

Uma distribuição superficial cilíndrica, infinita ao longo da direção $\hat{z}'$, de correntes elétrica, $J\hat{z}'$, e magnética, $M\hat{\phi}'$, no espaço livre, com características ε eμ, gera um campo elétrico com componente somente ao longo da direção $\hat{z}$, E_z, e um campo magnético com componentesnas direções $\hat{\rho}$e$\hat{\phi}$, H_ϕ, caracterizando uma polarização TM_z. Esses campos, escritos usando a notação vetorial não homogênea de Helmholtz em termos dos potenciais vetores magnético, $\boldsymbol{A}$ e elétrico, $\boldsymbol{F}$, são da seguinte forma(BALANIS, 1989):

$$\boldsymbol{E}(\mathbf{x}) = -j\omega\left[1 + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla.\right]\boldsymbol{A}(\mathbf{x}) - \frac{1}{\varepsilon}\nabla \times \boldsymbol{F}(\mathbf{x}) \tag{2.19}$$

e

$$\boldsymbol{H}(\mathbf{x}) = -j\omega\left[1 + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla.\right]\boldsymbol{F}(\mathbf{x}) + \frac{1}{\mu}\nabla \times \boldsymbol{A}(\mathbf{x}), \tag{2.20}$$

onde$\boldsymbol{A}$e $\boldsymbol{F}$ são dados por:

$$\boldsymbol{A}(\mathbf{x}) = \mu\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-jkR}}{4\pi R}\boldsymbol{J}(\mathbf{x})\,\rho' dz' d\phi' \tag{2.21}$$

e

$$\boldsymbol{F}(\mathbf{x}) = \varepsilon\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-jkR}}{4\pi R}\boldsymbol{M}(\mathbf{x})\rho' dz' d\phi', \tag{2.22}$$

onde$\mathbf{x}$localiza o ponto de observação, $\mathbf{x}'$ localiza o ponto de fonte, $R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}e\rho, \phi$ e z correspondem às coordenadas cilíndricas.

Considerando a avaliação da integral em $z$de$[-\infty, +\infty]$, as Equações (2.21) e (2.22) podem ser reescritas em termos dafunção de Hankel de segundo tipo e ordem zero, $H_0^{(2)}$,como(GIBSON, 2015):

$$\boldsymbol{A}(\mathbf{x}) = -j\frac{\mu}{4}\int_0^{2\pi}\boldsymbol{J}(\mathbf{x}')H_0^{(2)}(kR)\rho' d\phi' \tag{2.23}$$

e

$$\boldsymbol{F}(\mathbf{x}) = -j\frac{\varepsilon}{4}\int_0^{2\pi}\boldsymbol{M}(\mathbf{x}')H_0^{(2)}(kR)\rho' d\phi'. \tag{2.24}$$

Aplicando (2.23) e (2.24)nas Equações (2.19) e (2.20), as mesmas podem ser reescritas na forma integral como:

$$\boldsymbol{E}(\mathbf{x}) = -\frac{\omega\mu}{4}\int_0^{2\pi}\left[1 + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla.\right]\boldsymbol{J}(\mathbf{x}')H_0^{(2)}(kR)\rho' d\phi' + \frac{j}{4}\int_0^{2\pi}\nabla \times \boldsymbol{M}(\mathbf{x}')H_0^{(2)}(kR)\rho' d\phi' \tag{2.25}$$

e

$$\boldsymbol{H}(\mathbf{x}) = -\frac{\omega\varepsilon}{4}\int_0^{2\pi}\left[1 + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla.\right]\boldsymbol{M}(\mathbf{x}')H_0^{(2)}(kR)\rho' d\phi' - \frac{j}{4}\int_0^{2\pi}\nabla \times \boldsymbol{J}(\mathbf{x}')H_0^{(2)}(kR)\rho' d\phi'. \tag{2.26}$$

onde∇ é o gradiente em relação ao ponto de observação.

As Equações (2.25) e (2.26)são conhecidas como Equação Integral do Campo Elétrico (*Electric Field Integral Equation* -EFIE) e Equação Integral do Campo Magnético(*Magnetic Field Integral Equation* - MFIE), respectivamente, para o problema de uma distribuição cilíndrica infinita de correntes superficiais $J\hat{z}'$e$M\hat{\phi}'$.

Embora toda a modelagem matemática desenvolvida nesse trabalho seja sólida e aplicável tanto para a EFIE como para a MFIE, é considerada a utilização somente da EFIE. Essa escolha deve-se ao fato de que, como a distribuição de corrente é infinita ao longo da direção $\hat{z}$, a parcela $\nabla(\nabla.\boldsymbol{J})$em(2.25) é igual a zero, simplificando a EFIE. Assim, considerando a identidade vetorial $\nabla G = -\nabla' G$(onde G é uma função escalar) e operando o rotacional, a Equação (2.25) pode ser reescrita como (BALANIS, 1989):

$$\boldsymbol{E}(\mathbf{x}) = -\frac{\omega\mu}{4}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{J}(\mathbf{x}')H_0^{(2)}(kR)\rho' d\phi' - \frac{jk}{4}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{M}(\mathbf{x}')\cos\varphi\, H_1^{(2)}(kR)\rho' d\phi', \tag{2.27}$$

ondeφ é o ângulo entre $\hat{n}$e$\vec{R}$,$H_1^{(2)}$é a função de Hankel de segundo tipo eprimeira ordem e o cos φé definido por:

$$\cos\varphi = \frac{\hat{n}' \cdot \vec{R}}{R} = \frac{(x - x')\cos\phi' + (y - y')\mathrm{sen}\,\phi'}{R}. \tag{2.28}$$

A Equação(2.25) pode também ser reescrita na notação de operadores como(GIBSON, 2015):

$$\boldsymbol{E}(\mathbf{x}) = \omega\mu\boldsymbol{\mathcal{L}} + jk\boldsymbol{\mathcal{K}}, \tag{2.29}$$

onde os operadores $\mathcal{L}$ e$\mathcal{K}$são dados por:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} = -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{J}(\mathbf{x}')H_0^{(2)}(kR)\rho' d\phi' \tag{2.30}$$

e

$$\boldsymbol{\mathcal{K}} = -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{M}(\mathbf{x}')\cos\psi\, H_1^{(2)}(kR)\rho' d\phi'. \tag{2.31}$$

2.4.1. Princípio da Equivalência

As expressões para o campo eletromagnético apresentadas nas Equações (2.25) e (2.26)assumem que as correntes $J\hat{z}'$ e $M\hat{\phi}'$ irradiam em uma região homogênea, cujos parâmetros μ e ε são uniformes, e livres de obstáculos. Entretanto, o problema sob estudo, apresentado na Figura 2.2, consiste de um corpo (obstáculo) com características μ_Ωe$\varepsilon_\Omega$inseridoem outro meio, com características diferentes, o qual, neste trabalho é o

vácuo com característica μ_0eε_0.Dessa forma, as Equações (2.25) e (2.26)não podem ser utilizadas para determinar os campos eletromagnéticos (GIBSON, 2015).

Para contornar essa restrição, a solução do espalhamento eletromagnético é realizadaapartir do princípio da equivalência, onde as EFIE e MFIE são obtidas em função de correntes equivalentes nas superfícies do espalhador(HARRINGTON, 2001). Assim, o problema original é substituído por problemas matematicamente equivalentes, onde o espalhador é retirado e em seu lugar são colocadas correntes superficiais equivalentes "flutuando" justamente sobre a superfície onde existia o espalhador, porém agora em um espaço livre de obstáculos. As correntes superficiais equivalentes garantem as condições de contorno originais.

Assim, seja o cilindro dielétrico homogêneo, conforme ilustrado na Figura 2.3 (a), o problema original, que deve ser substituído por dois problemas equivalentes, um externo e outro interno, conforme apresentado nas Figura 2.3 (b) e (c), respectivamente. Para o problema equivalente externo, têm-se que os campos elétrico e magnético internos ao espalhador valem zero ($E_1 = H_1 = 0$), as correntes superficiaisJ_ze$M_\phi$sãopostas sobre sua superfície e todo o espaço, incluindo o cilindro, possuem características do meio externo (ε_0, μ_0). Nessas condições, a Equação (2.29) pode ser reescrita como:

$$\boldsymbol{E}^S(\mathbf{x}) = \omega\mu_0\boldsymbol{\mathcal{L}}_0 + jk_0\boldsymbol{\mathcal{K}}_0. \tag{2.32}$$

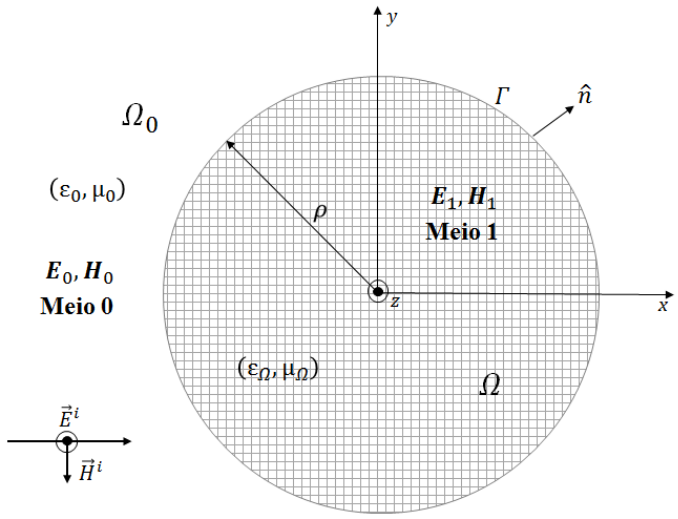
De maneira semelhante, para o problema equivalente interno, tem-se que o campo elétrico e magnético externos ao espalhador valem zero ($E_0 = H_0 = 0$) e todo espaço possui características do meio interno ($\varepsilon_\Omega, \mu_\Omega$). O sinal negativo nas correntes equivalentes superficiais $-J$ e -M indicam para esse caso que as correntes têm o sentido oposto àquele definido para o problema equivalente externo, devido a orientação fixa do operador $\hat{n}$. Nessas condições, a Equaçãos (2.29) pode ser reescrita como:

$$\boldsymbol{E}^S(\mathbf{x}) = -\omega\mu_\Omega\boldsymbol{\mathcal{L}}_\Omega - jk_\Omega\boldsymbol{\mathcal{K}}_\Omega. \tag{2.33}$$

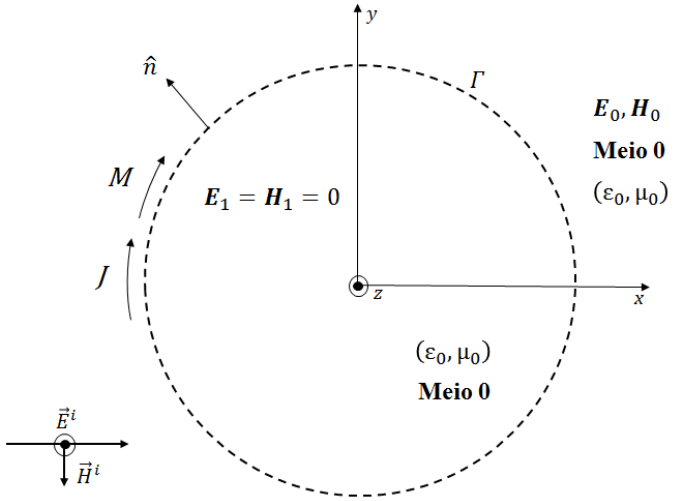
No problema sob análise, o campo incidente é uma onda TMz, dada por(BALANIS, 1989):

$$\boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{r}) = E_0 e^{-jk_0\hat{x}}\hat{z}. \tag{2.34}$$

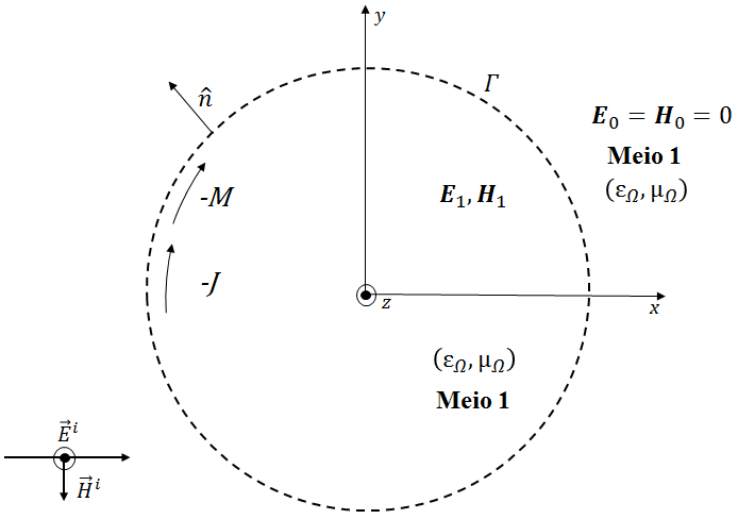
Assim, utilizando (2.1) e (2.2), a EFIE para os problemas externo e interno, respectivamente, são dadas por:



(a) Problema original



(b) Problema equivalente externo



(c) Problema equivalente interno

Figura 2.3 – Princípio da equivalência para o cilindro dielétrico

Fonte: Baseado em (RESENDE, 2007)

$$E_0 e^{-jk_0 x} = \boldsymbol{E}^S(\mathbf{x}) - \omega\mu_0 \boldsymbol{\mathcal{L}}_0 + jk_0 \boldsymbol{\mathcal{K}}_0 \tag{2.35}$$

e

$$0 = \boldsymbol{E}^S(\mathbf{x}) + \omega\mu_\Omega \boldsymbol{\mathcal{L}}_\Omega + jk_\Omega \boldsymbol{\mathcal{K}}_\Omega, \tag{2.36}$$

onde$E_z(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$é o campo elétrico total.

É usual realizar o produto vetorial $\hat{n} \times$ EFIEcomo forma de extrair as componentes normais dessas equações e, então, aplicar as condições de contorno a essas componentes tangenciais. No problema de espalhamento sob estudo, todas as parcelas de campos elétrico e magnético tem somente componentes tangencias; portanto, o produto vetorial $\hat{n} \times$é aplicado em (2.35) e (2.36)e resulta em:

$$E_0 e^{-jk_0 x} = -\boldsymbol{M}(\mathbf{x}) - \omega\mu_0 \boldsymbol{\mathcal{L}}_0 + jk_0 \boldsymbol{\mathcal{K}}_0 \tag{2.37}$$

e

$$0 = \boldsymbol{M}(\mathbf{x}) + \omega\mu_\Omega \boldsymbol{\mathcal{L}}_\Omega + jk_\Omega \boldsymbol{\mathcal{K}}_\Omega, \tag{2.38}$$

onde$\hat{n} \times \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{M}$.

As soluções de problemas por equações integrais, em geral, envolvem complexas manipulações matemáticas. Assim, estas são mais indicadas para solucionar problemas cujo domínio seja composto por material linear, homogêneo e isotrópico.

As vantagens obtidas na formulação do problema de espalhamento eletromagnético em termos de equações integrais, reside no fato de que essa formulação incorpora naturalmente a condição de radiação de Sommerfeld (GIBSON, 2015). Esse fato elimina a necessidade de adoção de uma fronteira global para o problema a certa distância do espalhador, o que reduz o domínio computacional do problema, com ganhos para o tempo de processamento das soluções e redução da utilização de recursos de memória.

2.5. Considerações Finais

Neste capítulosãodesenvolvidas as equações diferenciais e integrais de modo a permitir a implementação de métodos numéricos para solução do problema do espalhamento eletromagnético por cilindro dielétrico infinito. Destaca-se entre as técnicas numéricas diferenciais, o FEM, como método que requer malha, e,em especial nesse trabalho,o método sem malhaIEFGM. Já entre as técnicas numéricas integrais, destaca-se o MOM.

Capítulo 3
Método dos Elementos Livres de Galerkin Interpolantes

Nesse capítulo é apresentado ométodo sem malha IEFGM e sua aplicação ao problema de espalhamento eletromagnético por um cilindro dielétrico infinito. Sãotambém expostos os métodos para construção das funções de forma usando o MLS e o IMLS. Ao final do capítulo, o IEFGM é aplicado na solução do espalhamento eletromagnético por um cilindro dielétrico infinito e os resultados obtidos são comparados com aqueles gerados pela solução analítica.

3.1. Os Métodos sem Malha

Os MM são uma nova classe de métodos numéricos, onde uma aproximação das equações diferenciais parciais é aplicada somente com base em um conjunto de nós, distribuídos ao longo do domínio. Nessa situação não há necessidade de uma malha convencional, ou seja, sem a necessidade de associar tais nós a subdomínios exclusivos, nos quais a aproximação do problema é realizada de maneira exclusiva.

Entre os primeiros e principais MM, destaca-se o *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH), apresentado em 1977 e aplicado a problemas de astrofísica e em dinâmica de fluidos(LUCY, 1977). Posteriormente, em 1992, Nayroles *et al*. apresentaram o Método dos Elementos Difusos (*Diffuse Element Method*- DEM) baseado no conceito de MLS(NAYROLES, TOUZOT e VILLON, 1992),proposto em 1981 por Lancaster a partir da formulação fraca de Galerkin(LANCASTER e SALKAUSKAS, 1981).

Considerando os MM, o DEM pode ser visto como a primeira aplicação doMLS. Dois anos depois, Belytschko *et al.* apresentamo EFGM, a partir de algumas alterações do DEM (BELYTSCHKO, LU e GU, 1994). Em seguida, surgiram outros métodos baseados no SPH, destacando-se oMétodo de Partículas com Reprodução de

Núcleo(*ReproducingKernel Particle Method*-RKPM) que já foi desenvolvido a partir do conceito de núcleo reprodutor e aplicado a casos contínuos e discretos, sendo que a família dos RKPM possui aplicação muito abrangente e é vista como uma generalização do SPH(LIU, JUN, *et al.*, 1995).

Em 1998, Atluri e Zhu propõem o Método Local de Petrov-Galerkin Sem Malha*(Meshless Local Petrov-Galerkin*- MLPG) também baseado nos MLS, porém com a aplicação da formulação de Galerkin apenas localmente, em subdomínios(ATLURI e ZHU, 1998). Posteriormente, Kulasegaram *et al.* apresentaram o *Correct Smooth Particle Hydrodynamics* (CSPH) baseado no SPH, porém incluindo correções em relação à função janela e ao processo de integração numérica(KULASEGARAM, BONET, *et al.*, 2000). O SPH, o DEM, o EFGM, o RKPM, o MLPG e o CSPH destacam-se como os principais tipos de MM desenvolvidos até a presente data, e têm servido de base para proposta de outros tipos de MM (FRIES e MATTHIES, 2003)e(LIU e GU, 2005).

Todos os MM citados foram inicialmente aplicados a problemas de engenharia civil e mecânica. Tendo em vista o sucesso alcançado com a solução de problemas de valor de contorno nessas áreas, os MM foram então aplicados também para solução de problemas eletromagnéticos, sendo o DEM aplicado em 1996 (MARÉCHAL, 1996) e o EFGM em 1998 (CINGOSKI, MIYAMOTO, *et al.*, 1998). A partir de então, os MM vêm cada vez mais sendo aplicados ao cálculo de campos eletromagnéticos, destacando-se os trabalhos de(CINGOSKI, MIYAMOTO e YAMASHITA, 2000), (XUAN e UPDA, 2004), (XUAN, SHANKER, *et al.*, 2004), (PARREIRA, SILVA, *et al.*, 2006a), (PARREIRA, FONSECA, *et al.*, 2006b)e(BOTTAUSCIO, CHIAMPI e MANZIN, 2006). O IEFGM foi proposto em 2007 e diferencia-se do EFGM pela aplicação do IMLS, ao invés do MLS, para construção das funções de forma(MARQUES, MACHADO, *et al.*, 2007). Dentre os trabalhos que utilizam o IEFGM aplicado a solução de problemas eletromagnéticos, pode-se destacar (COPPOLI, SILVA e MESQUITA, 2008)e(RESENDE, COPPOLI e AFONSO, 2015).

3.2. Método dos Elementos Livres de Galerkin(EFGM)

O EFGM é uma extensão do DEM, onde ambos são baseados numa aproximação do MLS em conjunto com o método de Galerkin. No EFGM foram propostas algumas alterações em relação ao DEM e o refinamento de alguns aspectos, tais como a inclusão

das derivadas das funções aproximantes, a aplicação do método dos multiplicadores de Lagrange para imposição das condições de fronteira essenciais e a utilização de um método de integração numérica (GUEDES, 2006). Desde sua concepção em 1994, o EFGM é um dos tipos de MM mais utilizado na área de engenharia aplicada,incluindo problemas lineares e não lineares, sendo aplicado principalmente na solução de problemas de valor de contorno (PVC). Ele é um método extremamente robusto, possuindo boas taxas de convergência e grande facilidade de discretização do problema.

As três características básicas do EFGM clássico são:

1. Aplicação da aproximação MLS para a construção da função de forma, de modo a aproximar a variável desconhecida e sob análise $u(\mathbf{x})$ pela função local$u^h(\mathbf{x})$, onde$\mathbf{x} = (x, y)$ para o problema sob estudo nesse trabalho;
2. Utilização da forma fraca discreta de Galerkin para desenvolver o sistema de equações lineares;
3. Utilização de uma malha de células de integração, em segundo plano, para realizar a integração numérica.

Assim, para a utilização do EFGM, seja o domínio do problema Ω e sua fronteiraΓ representados por um conjunto de nós de coordenadas $\mathbf{x}_I = (x, y)$,conforme apresentado na Figura 3.1. Esses nós são responsáveis por transportar o valor das variáveis analisadasna formulação do EFGM;não sendo necessário que os mesmosdefinam uma malha no sentido clássico. Por isso, o método é considerado sem malha(LIU, 2003)e(BELYTSCHKO, LU e GU, 1994).

Também não é necessário que a distribuição nodal seja uniforme, sendo que uma distribuição mais densa de nós é frequentemente utilizada nas áreas onde os gradientes

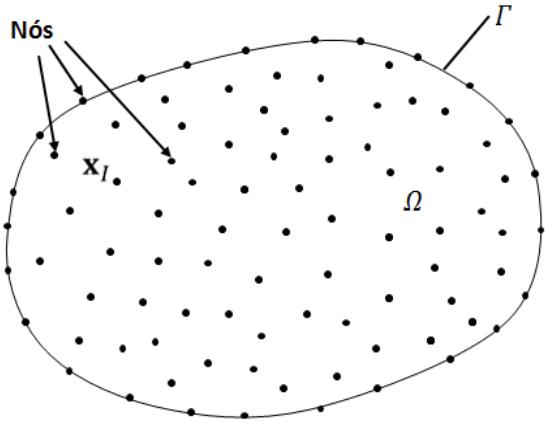


Figura 3.1 – Representação do domínio e da fronteira $\in \mathbb{R}^2$ por nós

Fonte: adaptado de (LIU, 2003)

de deslocamento das variáveis são maiores. A partir do conjunto de nós, uma aproximação baseada no MLS é usada para construir as funções de forma, e incorporar a forma fraca do problema.

3.2.1. FunçãoJanela

A cada nó I sob o domínio do problema é associada a uma função de forma, Φ_I, que é construída a partir de uma função chamada função janela $W_I(\mathbf{x})$de suporte compacto. O suporte de uma função é definido como a região do seu domínio onde ela é diferente de zero, e esse suporte é definido como compacto, se a região é limitada (VIANA, 1998).

Os seguintes aspectos são adotados em relação às funções janela (LIU e GU, 2005):

1. As funções janela têm suporte compacto se as seguintes condições forem válidas:

$$\begin{cases} W(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I) > 0, \text{se } \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_I\| < d \\ W(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I) = 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

   onde$d$ é o raio do suporte.

2. Seja $\mathbf{x}_I$a posição do nó I, designa-se por domínio de influência do nó I a vizinhança de $\mathbf{x}_I$na qual a função de janela $W(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I) > 0$.
3. A dimensão do domínio de influência do nó I é o valor de $d$para o qual se verifica a seguinte proposição:

$$W(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I) \neq 0, \forall \boldsymbol{x} : \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_I\| < d.$$

O domínio de influência, também conhecido como domínio de suporte, é definido como o domínio no qual um nó exerce sua influência, sendo que o mesmo é definido para cada nó, podendo ser diferente de um nó para o outro (LIU, 2003). A Figura 3.2 demonstra o conceito, onde representa o domínio de influência de três nós como exemplo,sendo que, os nós 1, 2 e 3têmraio do suporte d_1,d_2ed_3, e domínio de influência Ω_{d1},Ω_{d2}eΩ_{d3}, respectivamente.

O raio do suporte d é empregado como parâmetro de refinamento. No entanto, verifica-se que suportes pequenos podem envolver um número de nós insuficiente para

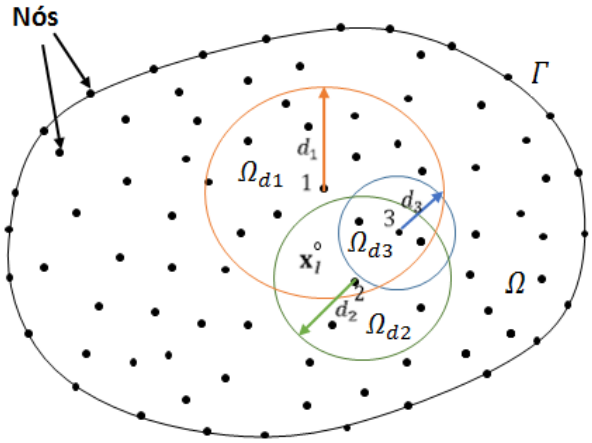


Figura 3.2 – Exemplo de domínio de influência

Fonte: adaptado de (LIU, 2003)

a determinação da solução aproximada. O suporte da função janela pode ser retangular, circular ou qualquer geometria. Isso depende da maneira como a função janela é calculada.

Dessa forma, a função janela tem a finalidade de fornecer pesos diferentes para os nós no domínio de influência. Ou seja, garantir que os nós mais distantes do ponto de aproximação apresentem pesos menores que os nós mais próximos. Por meio da função janela também é possível fazer com que os nós abandonem ou entrem no domínio de influência de forma gradual (suave) quando se move o ponto de aproximação $\mathbf{x}$, o que resulta em compatibilidade da função de forma assim construída (LIU, 2003). Assim, a função janela tem um papel muito importante, pois ela gera funções de forma que têm suas características, ou seja, são contínuas e com suporte compacto. As funções de forma terem suporte compacto é uma característica essencial, porque permite definir funções de aproximação com caráter local (LIU e GU, 2005).

3.3. Formulação Matemática do EFGM

Na formulação do EFGM, um conjunto de Nnós é espalhado sobre o domínio do problema. Cada nó, I, é um ponto $\mathbf{x}_I = (x, y) \in \Omega$para o qual a função de forma, $\Phi_I(\mathbf{x})$,é associada. Então, a função desconhecida $u(\mathbf{x})$ pode ser aproximada por:

$$u(\mathbf{x}) \approx u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{N} \Phi_I(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}_I) = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x})\boldsymbol{v}, \tag{3.1}$$

onde$v(\mathbf{x}_I)$ é o coeficiente desconhecido do nó I. Para solução dessa aproximação é utilizada a técnica MLS. Essa técnicaé frequentemente empregada para ajuste de dados, porém ela vem sendo uma alternativa amplamente considerada para a construção de funções de forma para métodos sem malha (LIU, 2003)e(BELYTSCHKO, LU e GU, 1994).

3.3.1. Mínimos Quadrados Móveis (MLS)

O MLS deu origem ao DEM, ao EFGM, dentre outros métodos sem malhas. A técnica foi introduzida por Lancaster, em 1981, e define aproximações locais na vizinhança de um ponto;portanto, as aproximações são válidas em determinados subdomínios. A técnica foi desenvolvida para construção e montagem de dados emuma superfície epermite, a partir de um conjunto de valores conhecidos, definir a aproximação de uma função. O MLS é frequentemente denominado regressão ou perda local,podendo ser classificado como um método de representação de funções de série finita(LANCASTER e SALKAUSKAS, 1981),(LIU, 2003)e(CLEVELAND, 1993).

A aproximação baseada no MLS possui duas características que a torna uma escolha interessante e recorrente (LIU e GU, 2005):

1. A função aproximada é contínua e suave em todo o domínio do problema;
2. É possível reproduzir uma aproximação com a ordem desejada de consistência.

O MLS associa cada nó a uma base polinomial e aum conjunto de coeficientes. Assim, a seguinte aproximação local pode ser definida:

$$u^h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) = \sum_{i=1}^{m} p_i(\mathbf{x}_I) a_i(\mathbf{x}) = \boldsymbol{p}^T(\mathbf{x}_I)\boldsymbol{a}(\mathbf{x}), \tag{3.2}$$

onde m é o número de termos da base polinomial, $\boldsymbol{p}^T(\mathbf{x}) = [1, x, y \quad \dots \quad p_m(\mathbf{x})]$é uma base polinomial completa e$\boldsymbol{a}(\mathbf{x}) = [a_1(\mathbf{x}) \quad a_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad a_m(\mathbf{x})]$são coeficientes a serem determinados e que dependem da posição de $\mathbf{x}$.

A consistência da aproximação MLS depende da ordem dos polinômios contidos na base polinomial. Se a ordem completa dos monômios é k, então as funções de forma do MLS possuem consistência C^k(LIU, 2003).

Para garantir um mínimo de completude na aproximação, frequentemente utiliza-se uma base polinomial composta por monômios de baixa ordem. Para o caso bidimensional, a base usada nesse trabalho é a linear, dada por:

$$\boldsymbol{p}^T(\mathbf{x}) = [1, x, y]. \tag{3.3}$$

O MLS introduz o funcional quadrático $\mathfrak{I}$, dado por:

$$\mathfrak{I} = \sum_{I=1}^{N_P} W(r_I)[u(\mathbf{x}_I) - u^h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I)]^2, \tag{3.4}$$

onde$W(r_I)$ é a função janela, N_Pé o número de nós envolvidos na aproximação, $r_I = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_I|/d_I$, $d_I = \alpha d_c$é o suporte da função janela, α é uma constante escalar para o domínio de influência, a qual normalmente varia entre 1.5 a 4 (BELYTSCHKO, LU e GU, 1994) e d_cé a distância nodal que depende da distribuição dos nós, sendo que para o problema de espalhamento eletromagnético sob estudo nesse trabalho é:

$$d_c = \frac{{R_{\Gamma_e}}^2}{\sqrt{N}}, \tag{3.5}$$

ondeR_{Γ_e}é o raio da fronteira fictícia onde a condição de Sommerfeld deve ser imposta, conforme descrito na Seção 3.4.

Os coeficientes $\boldsymbol{a}(\mathbf{x})$ são determinados minimizando o resíduo da Equação (3.4), normaL^2ponderada, o que conduz ao seguinte resultado para $\boldsymbol{a}(\mathbf{x})$:

$$\boldsymbol{a}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{A}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I)\boldsymbol{B}_I(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I)\boldsymbol{v}, \tag{3.6}$$

onde

$$\boldsymbol{A}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) = \boldsymbol{P}^{\boldsymbol{T}}(\mathbf{x}_I)\boldsymbol{W}(r_I)\boldsymbol{P}(\mathbf{x}_I), \tag{3.7}$$

$$\boldsymbol{B}_I(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) = \boldsymbol{P}^{\boldsymbol{T}}(\mathbf{x}_I)\boldsymbol{W}(r_I), \tag{3.8}$$

$$\boldsymbol{v} = \left[u(\mathbf{x}_1), u(\mathbf{x}_2), \dots, u\left(\mathbf{x}_{N_P}\right)\right], \tag{3.9}$$

$$\boldsymbol{P}(\mathbf{x}_I) = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_{N_P}) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_{N_P}) \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

e

$$\boldsymbol{W}(r_I) = \begin{bmatrix} W(r_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & W(\boldsymbol{r}_{N_P}) \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

Considerando a solução de $\boldsymbol{a}(\mathbf{x})$ apresentada na Equação (3.6), substituindo na Equação (3.2) e usando a Equação (3.1), o valor da aproximação$u^h(\mathbf{x})$é:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{N_P} \boldsymbol{p}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{A}^{-1}(\mathbf{x},\mathbf{x}_I)\boldsymbol{B}_I(\mathbf{x},\mathbf{x}_I)\boldsymbol{v}_I = \sum_{I=1}^{N_P} \Phi_I(\mathbf{x})\boldsymbol{v}_I, \tag{3.12}$$

onde$\Phi(\mathbf{x})$ é a matriz das funções de forma do MLS correspondentes aos $N_P$nós no domínio de influência, dada por:

$$\Phi(\mathbf{x}) = [\Phi_1(\mathbf{x}) \quad \Phi_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \Phi_{N_P}(\mathbf{x})] = \boldsymbol{p}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{A}^{-1}(\mathbf{x},\mathbf{x}_I)\boldsymbol{B}_I(\mathbf{x},\mathbf{x}_I). \tag{3.13}$$

Para determinar as derivadas parciais da função a ser aproximada, devem-se obter as derivadas das funções de forma MLS (LIU e GU, 2005). As funções de forma $\Phi_I(\mathbf{x})$definidas na Equação (3.13)apresentam um suporte compacto que é idêntico ao suporte da função janela $W_I(\mathbf{x})$, e ainda, a continuidade da função de forma e suas derivadas dependem da continuidade da função janela e suas derivadas (VIANA, 1998). Assim, as derivadas espaciais de$\Phi_I(\mathbf{x})$podem ser obtidas da seguinte forma:

$$\Phi_I(\mathbf{x})_{,i} = [\boldsymbol{p}^T]_{,i}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}_I + \boldsymbol{p}^T[\boldsymbol{A}^{-1}]_{,i}\boldsymbol{B}_I + \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{A}^{-1}[\boldsymbol{B}_I]_{,i}, \tag{3.14}$$

onde o subscrito $,i$ denota a derivada espacial e as notações em relação à$\mathbf{x}$e $\mathbf{x}_I$foram removidas para melhorar a leitura da equação, sendo:

$$[\boldsymbol{A}^{-1}]_{,i} = -\boldsymbol{A}^{-1}[\boldsymbol{A}^{-1}]_{,i}\boldsymbol{A}^{-1} \tag{3.15}$$

e

$$[\boldsymbol{B}_I]_{,i} = [\boldsymbol{W}(r_I)]_{,i}\boldsymbol{p}^T. \tag{3.16}$$

A função de forma gerada pelo método MLS não cumpre a propriedade do delta de Krönecker. Assim, as condições de fronteira do tipo essencial necessitam de técnicas adicionais para serem impostas, como por exemplo, o método dos multiplicadores de Lagrange (BELYTSCHKO, LU e GU, 1994), o método das penalidades (ZHU e ATLURI,

1998) ou o método de Nitsche's (MENDEZ e HUERTA, 2004). Em especial no EFGM, o método dos multiplicadores de Lagrange é o método mais adotado para imposição dessas condições de fronteira; porém, este método eleva o custo computacional da solução numérica. Tal deficiência pode ser contornada usando o IEFGM, ondea construção da função de forma é realizada pelo método IMLS, o qual atende a propriedade do delta de Krönecker,garantindo assim a imposição das condições de contorno essenciais diretamente no sistema linear discretizado (MARQUES, MACHADO, *et al.*, 2007)e(COPPOLI, MESQUITA e SILVA, 2009).

3.3.2. Mínimos Quadrados Móveis Interpolantes (IMLS)

Como as funções de forma obtidas pela aproximação MLS, em geral, não atendem a propriedade do delta de Krönecker, os valores encontrados na solução do problema são parâmetros nodais, e não soluções nodais(VIANA, 1998).Entretanto, é possível superar essa restrição utilizando uma função janela,$W(r_I)$,singular no processo de construção da função de forma. Esse tipo de função torna-se infinita no nó$\mathbf{x}_I$e, assim, garante que apenas os pontos próximos a esse nó possuam algum valor, enquanto quenos demais nós, a mesma se aproxima de zero rapidamente. Um exemplo de uma função janela, utilizada em (COPPOLI, 2010) e também usada neste trabalho, é dada por:

$$W(r_I) = \frac{1}{r^{2n} + \beta}, \tag{3.17}$$

onde β é um valor real positivo suficientemente pequeno para evitar divisões por zero e n é uma constante para ajustar a precisão dos resultados.

O emprego de funções janela com singularidades no MLS permite interpolar ao invés de aproximar; assim, o método é adaptado de maneira que a função de forma construída atenda à propriedade do delta de Krönecker. Essa metodologia ficou conhecida como IMLS(MARQUES, MACHADO, *et al.*, 2007)e(COPPOLI, 2010). A combinação do IMLS com o EFGM é chamada nesse trabalho de IEFGM.

Para efeito de comparação, a Figura 3.3 ilustra as funções janela em uma dimensão centralizada em um nó posicionado em $x = 3$e com domínio de influência $r_I = 0,3$. A linha em azul apresenta uma função janela "Spline" Quadrática e as demais linhas ilustram a função janela utilizandoa Equação(3.17)com$\beta = 10^{-10}$. Observa-

seque a “Spline” Quadrática possui valor unitário sobre o nó e que as funçõesdo IMLS possuem um valor muito grande, que tende ao infinito, nos pontos próximos ao ponto $x = 3$, o que força a função de forma atendera propriedade do delta de Krönecker. Tanto para “Spline” Quadrática quanto para as funções do IMLS, o valor da função janela tende a zero fora do domínio de influência do nó sob interesse.

Para o problema em estudo nesse trabalho, o IMLS conduz a funções de forma 2D sobre o domínio Ω do cilindro que degeneram para funções 1D na fronteira Γ docilindro. A Figura 3.4 apresenta uma função de forma IMLS 2D, e a Figura 3.5 apresenta funções de formaIMLS 1D distribuídas sobre a fronteira do cilindro, Γ. É possível observar que as funções de forma 2D e 1D satisfazem a propriedade do delta de Krönecker.

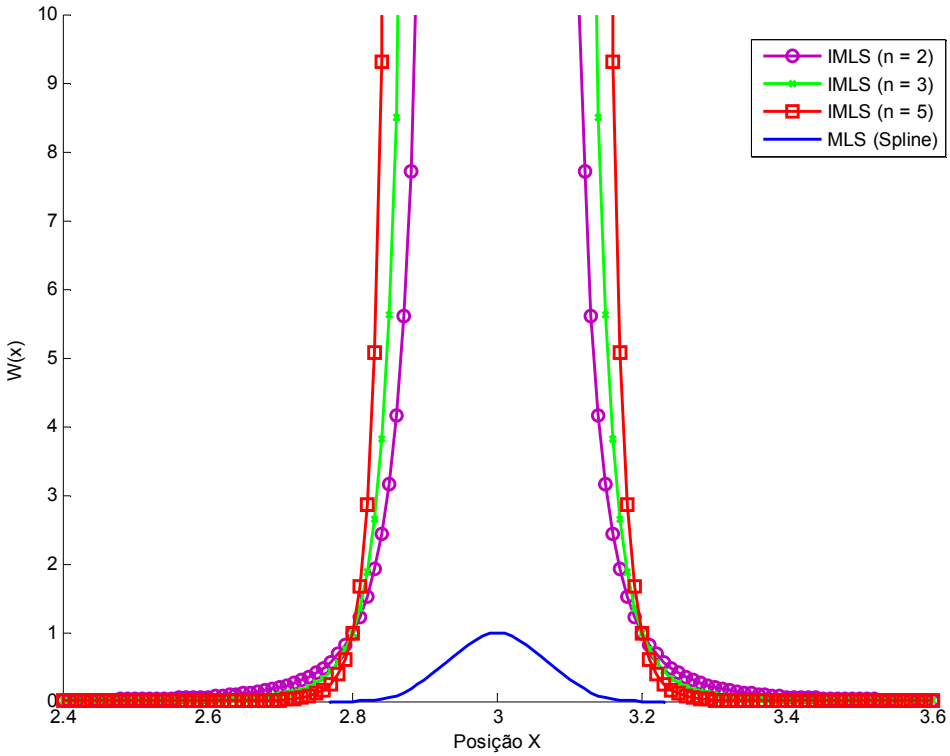


Figura 3.3 – Funções janela MLS e IMLS

As funções janela são de fundamental importância para a construção das funções de forma do EFGM e do IEFGM. As características das mesmas garantem a robustez e convergência do método. No caso do IMLS, é possível utilizar funções janelas diferentes daquelas apresentadas na Equação (3.17), desde que as mesmas sejam singulares.

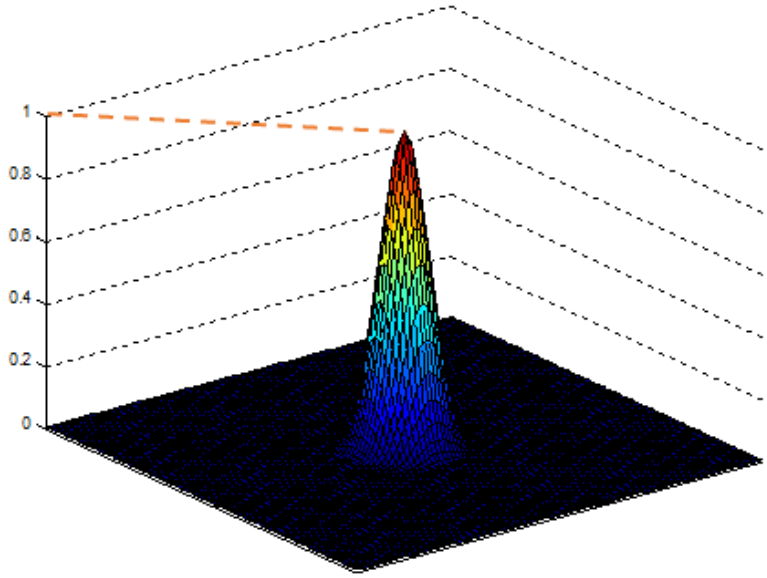


Figura 3.4 – IMLS - Funções de forma 2D

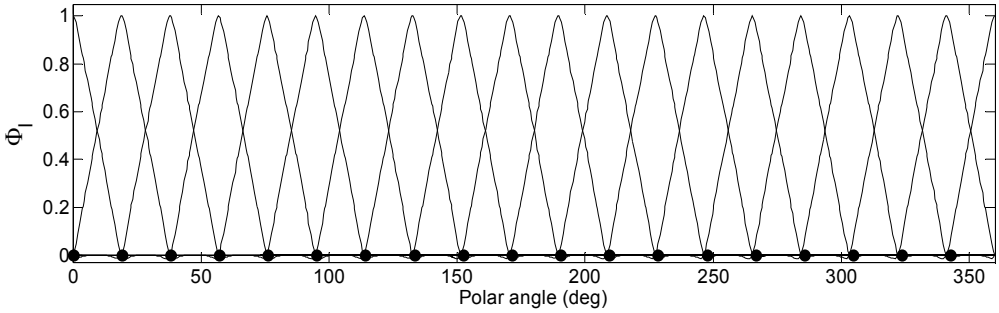


Figura 3.5 – IMLS – Conjunto de 19 funções de forma 1D sobre Γ

3.4. IEFGMAplicado ao Espalhamento Eletromagnético por um Cilindro Dielétrico Infinito

A aplicação do IEFGM para solução do problema de espalhamento eletromagnético por um cilindro dielétrico infinito é realizada utilizando a Equação (2.11).Porém, para esse tipo de problema, onde o espalhador se encontra no espaço livre e infinito, é necessário estabelecer um domínio computacional limitado para o problema (DUHAMEL e NGUYEN, 2009). Assim, é criada uma fronteira fictícia global, localizada a certa distância do espalhador, sob a qual uma condição de fronteira absorvente (*Absorvent Boundary Condition* – ABC) deve ser imposta para simular a condição de radiação de Sommerfeld. Em duas dimensões, esta condição é dada por(PETERSON, SCOOTT e MITTRA, 1997):

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{\partial E_z}{\partial n} = -jkE_z. \tag{3.18}$$

Para o problema sob análise, a fronteira fictícia Γ_eé representada pela circunferência de linha pontilhada concêntrica a secção transversal do cilindro, conforme ilustrado na Figura 3.6. O estabelecimento dessa fronteira global e as condições impostas sobre ela permitem encontrar uma solução única para o problema.

Considerando especificamente o problema do espalhamento analisado, a Equação(2.11), pode ser reescritacomo:

$$\int_{\Omega}\left[\left(\frac{1}{\mu_r}\nabla E_z(\mathbf{x})\right)\cdot\nabla\mathbb{P}(\mathbf{x}) - {k_0}^2\varepsilon_r E_z(\mathbf{x})\mathbb{P}(\mathbf{x})\right]d\Omega \;+\; \int_{\Gamma}\psi\mathbb{P}(\mathbf{x})d\Gamma = 0. \tag{3.19}$$

A derivada normal de$E_z$sobre a superfície do espalhador, ψ na Equação (3.19), não é estabelecida e deve satisfazer a condição de Sommerfeld. De forma a realizar tal tarefa,é considerada uma condição de fronteira ABC de primeira ordem de Bayliss-Turkel aplicada a essa derivada agora na fronteira fictícia Γ_e. Assim, a Equação (3.19) pode ser reescrita como (JIN, 2002):

$$\int_{\Omega}\left[\left(\frac{1}{\mu_r}\nabla E_z(\mathbf{x})\right)\cdot\nabla\mathbb{P}(\mathbf{x}) - {k_0}^2 E_z(\mathbf{x})\mathbb{P}(\mathbf{x})\right]d\Omega \;+\int_{\Gamma_e}\gamma\mathbb{P}(\mathbf{x})E_z(\mathbf{x})d\Gamma_e = \int_{\Gamma_e} q\mathbb{P}(\mathbf{x})d\Gamma_e, \tag{3.20}$$

onde:

$$q = \frac{1}{\mu_r}\nabla E_z(\mathbf{x})\cdot\hat{n} + \gamma {E_z}^i(\mathbf{x}) \tag{3.21}$$

e

$$\gamma = \frac{1}{\mu_r}\left[jk_0 + \frac{1}{2}\rho\right]. \tag{3.22}$$

Considerando o método de Galerkin, já apresentado na Seção2.3.1, que fixa $\Phi_J = \alpha_I$, a partir das Equações (2.16) a (2.18), pode-se escrever o sistema linear para o problema da seguinte forma (JIN, 2002) :

$$\begin{bmatrix} K_{1,1} & \cdots & K_{1,N_\Omega} & K_{1,N_\Omega+1} & \cdots & K_{1,N_\Omega+N_\Gamma} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N_\Omega,1} & \cdots & K_{N_\Omega,N_\Omega} & K_{N_\Omega,N_\Omega+1} & \cdots & K_{N_\Omega,N_\Omega+N_\Gamma} \\ L_{N_\Omega+1,1} & \cdots & L_{N_\Omega+1,N_\Omega} & L_{N_\Omega+1,N_\Omega+1} & \cdots & L_{N_\Omega+1,N_\Omega+N_\Gamma} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{N_\Omega+N_\Gamma,1} & \cdots & L_{N_\Omega+N_\Gamma,N_\Omega} & L_{N_\Omega+N_\Gamma,N_\Omega+1} & \cdots & L_{N_\Omega+N_\Gamma,N_\Omega+N_\Gamma} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{N_\Omega} \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N_\Omega+N_\Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{N_\Omega+N_\Gamma} \end{bmatrix}, \tag{3.23}$$

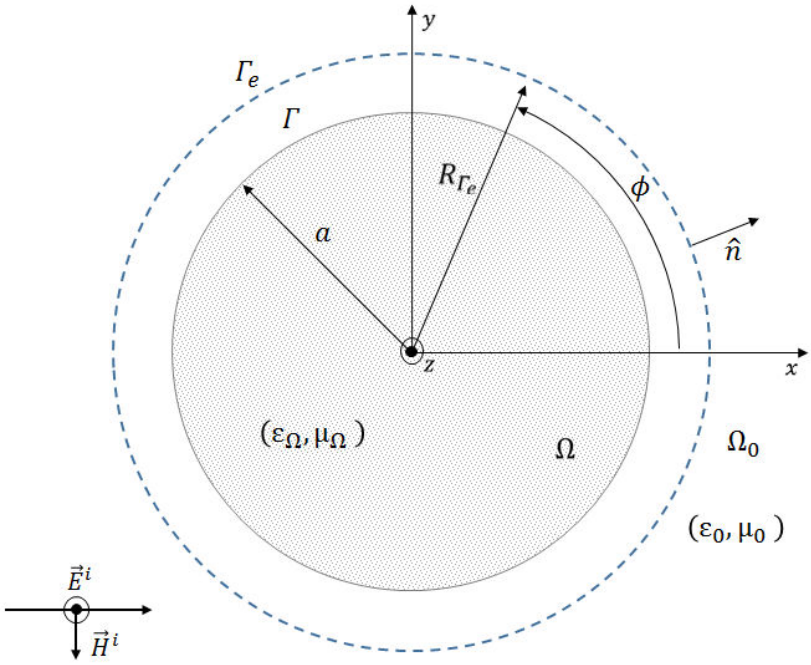


Figura 3.6 - Seção transversal do cilindro com fronteira ABC

onde

$$K_{IJ} = K(\Phi_I, \Phi_J) = \int_\Omega \left[\left(\frac{1}{\mu_r}\nabla\Phi_J(\boldsymbol{x})\right)\cdot\nabla\Phi_I(\boldsymbol{x}) - {k_0}^2\varepsilon_r\Phi_I(\boldsymbol{x})\Phi_J(\boldsymbol{x})\right]d\Omega, \tag{3.24}$$

$$L_{IJ} = L(\Phi_I, \Phi_J) = \int_{\Gamma_e} \Phi_I(\mathbf{x})\Phi_J(\mathbf{x})d\Gamma_e, \tag{3.25}$$

$$F_I, = \int_{\Gamma_e} q\Phi_I(\mathbf{x})d\Gamma_e, \tag{3.26}$$

Ké a matriz dos coeficientes do IEFGM,N_Ωé o número de nós sobre o domínioΩ e N_Γé o número de nós sobre a fronteira Γ.

Os elementos das matrizes$K$, L e F são calculados solucionando as integrais numericamente, utilizando a Quadratura Gaussiana, a qual é aplicada auma estrutura auxiliar de células retangulares para a integral sobre Ω.Cada célula é avaliada utilizando $2\,x\,2$ pontos de Gauss. Para a integral sobrea fronteira, Γ_e,amesma é dividida em segmentos, sob os quais são aplicados 2 pontos de Gauss.

3.5. Análise de Resultados

Nessa Seção são apresentados e avaliados os resultados obtidos na aplicação do IEFGM. Esses resultados são comparados com a respectiva solução analítica por meio dos seguintes erros:

$$\mathrm{E_M}(\%) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{|S_{analitico} - S_{IEFGM}|}{|S_{analitico}|}}{n} * 100\% \tag{3.27}$$

e

$$\mathrm{E_{MAX}}(\%) = max \left\| \frac{|S_{analitico} - S_{IEFGM}|}{|S_{analitico}|} \right\| * 100\% \tag{3.28}$$

onde$\mathrm{E_M}(\%)$é o erro médio, $\mathrm{E_{MAX}}(\%)$é o erro máximo, $S_{analitico}$ é o valorobtido pela solução analítica, S_{IEFGM}é o valor obtido utilizando o IEFGM e n é o número de pontos onde a solução é avaliada.

Nesse trabalho, todas as execuções das rotinas computacionais desenvolvidas foram realizadas utilizando um computador Intel i5-3570QM, 3.4GHz, 8GB RAM.

3.5.1. Solução BaseIEFGM

Para avaliação do IEFGM é considerado o cilindro dielétrico infinito apresentado na Figura 3.6 com raio $a = 0{,}3\lambda_0$, onde λ_0é o comprimento de onda no vácuo, raio da fronteira$R_{\Gamma_e} = 2{,}0a$, $\varepsilon_\Omega = 2\varepsilon_0e\mu_\Omega = \mu_0$. Em relação à construção do IEFGM foram uniformemente distribuídos1330 nós de forma cilíndrica sobre o domínio do problema, que representa uma densidade de nós por área de 1176 $(nós/{\lambda_0}^2)$, e, foram utilizados7876 pontos de integração distribuídos uniformemente de forma retangulare para o domínio de influência a constante$\alpha = 3{,}0$. A função janela utilizada é aquela definida em (3.17) onde os valores utilizados foram $\beta = 0{,}1$ e $n = 10$.

Para validação do método é considerado o cálculo do campo elétrico em uma linha sobre a seção do cilindro posicionada no eixo x e $y = 0$, de $x = -a$ a $x = a$. A Figura 3.7 apresenta as curvas do campo elétrico obtidas pela aplicação do IEFGM e pela solução analítica.A partir dessa figura, é possível perceber uma boa concordância entre os resultados numérico e analítico tanto para a magnitude quanto para a fase do campo

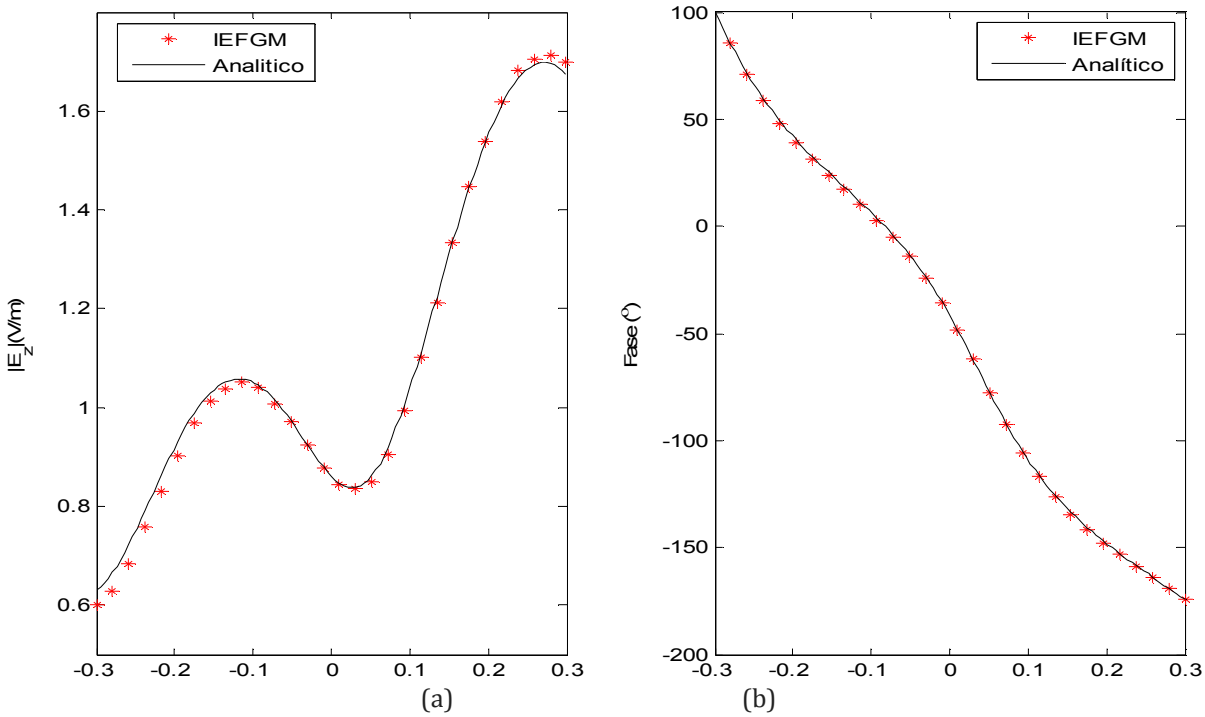


Figura 3.7 - Validação do IEFGM – campo elétrico no interior do cilindro: a) Magnitude; b) Fase

elétrico. Essa concordância valida os resultados do IEFGM cujos erros são apresentados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 –Validação IEFGM – E_M(%) e E_{MAX}(%)para campo elétrico no interior do cilindro

E_M(%)	E_{MAX}(%)
2,25	4,55

Uma vez confirmada a validade da solução é então conduzida uma análise paramétrica, apresentada nas Seções 3.5.2 a3.5.5, com o objetivo de identificar o melhor conjunto de valores para os parâmetros do IEFGM.

3.5.2. Influência da Quantidade de Nós

Nessa Subseção é avaliado o impacto da variação do número de nós na solução pelo IEFGM. Os resultados são calculados considerando os parâmetros apresentados na Seção 3.5.1, variando o número de nós de 8 a 5173 nós. A Figura 3.8 apresenta os resultados obtidos.

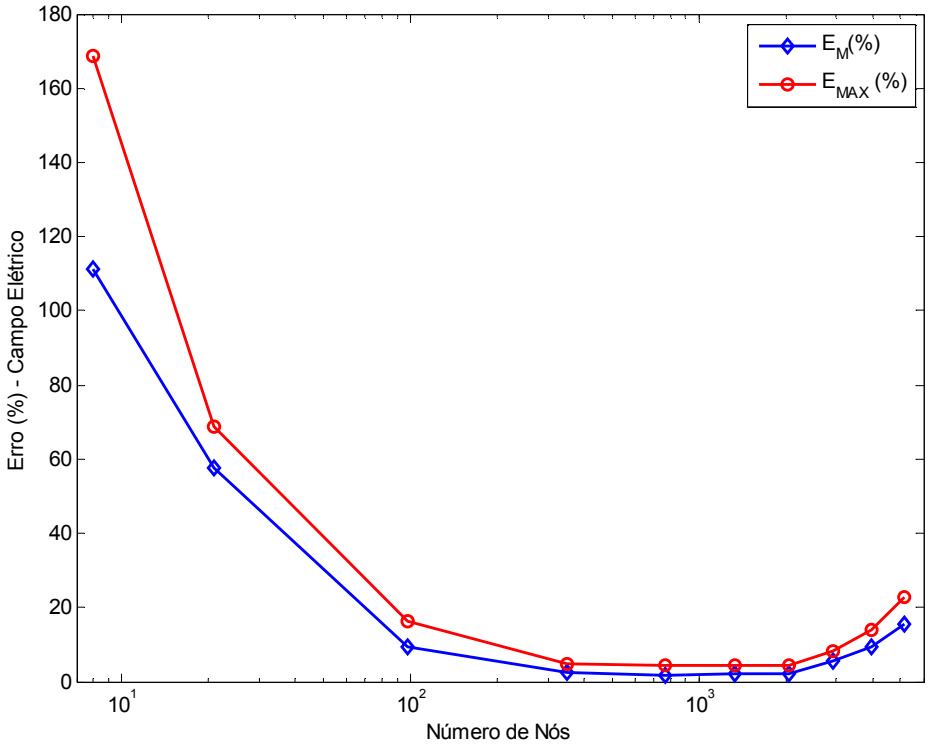


Figura 3.8 –IEFGM – Avaliação da influência donúmero de nós no erro

De modo geral pode ser observado que àmedida que o número de nós aumenta os valores dos erros diminuem até certo limiar, e mantém-se em torno de 2%. Entretanto, após 2924 nós ocorre um aumento gradativo nos valores dos erros. Esse aumento se deve principalmente ao fato de que a razão entre o número de pontos de integração em relação ao número de nós (RGN) diminui à medida que o número de nós aumenta. A RGN é de fundamental importância para a convergência do método; essa razão deve ser maior que 67%, para que a precisão dos resultados seja mantida (LIU, 2003).

$$RGN > \frac{N_G}{N} * 100\% \tag{3.29}$$

onde$N_G$énúmero de pontos de integração e N é o número de nós.

A Figura 3.9 e a Figura 3.10 apresentam o número de condicionamento da matriz K e o tempo de processamento da solução, respectivamente. Observa-se que o número de condicionamento aumenta à medida que o número de nós aumenta, como esperado; porém, para todos os casos o sistema linear obtido ainda é bem condicionado, uma vez que a matriz K é diagonalmente dominante. Observa-se também que o aumento expressivo no número de nós acarreta o aumento do tempo de processamento, como esperado.

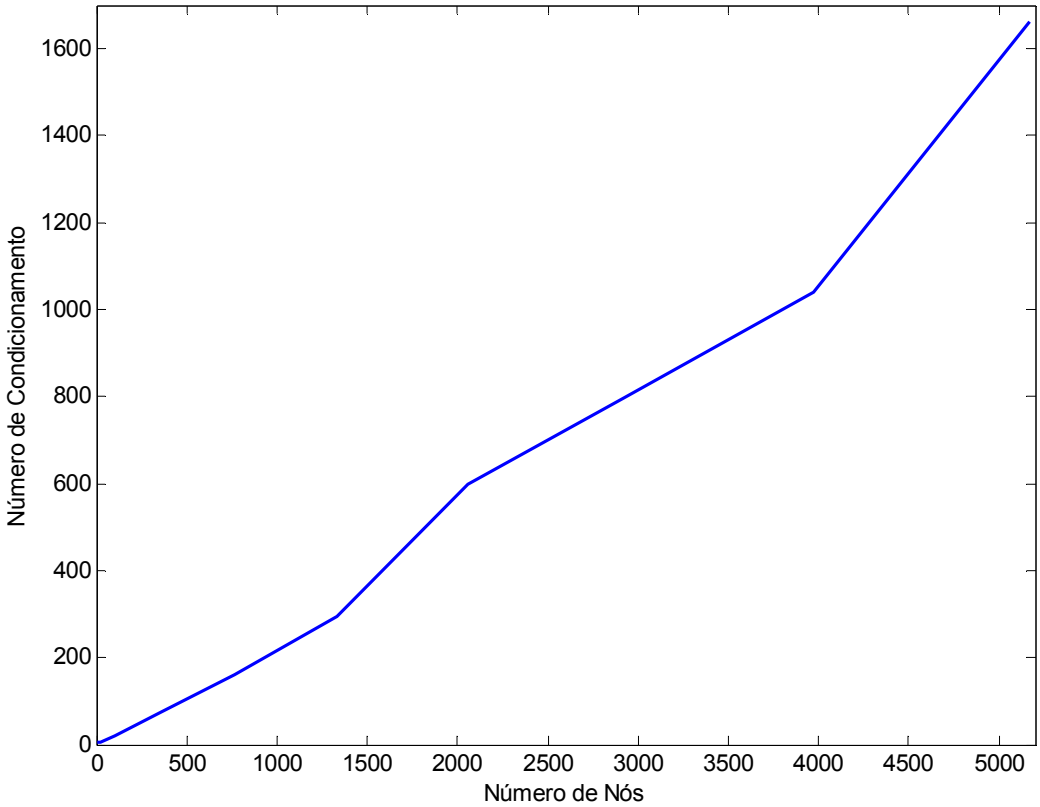


Figura 3.9 –IEFGM – Avaliação da influência do número de nós no número de condicionamento

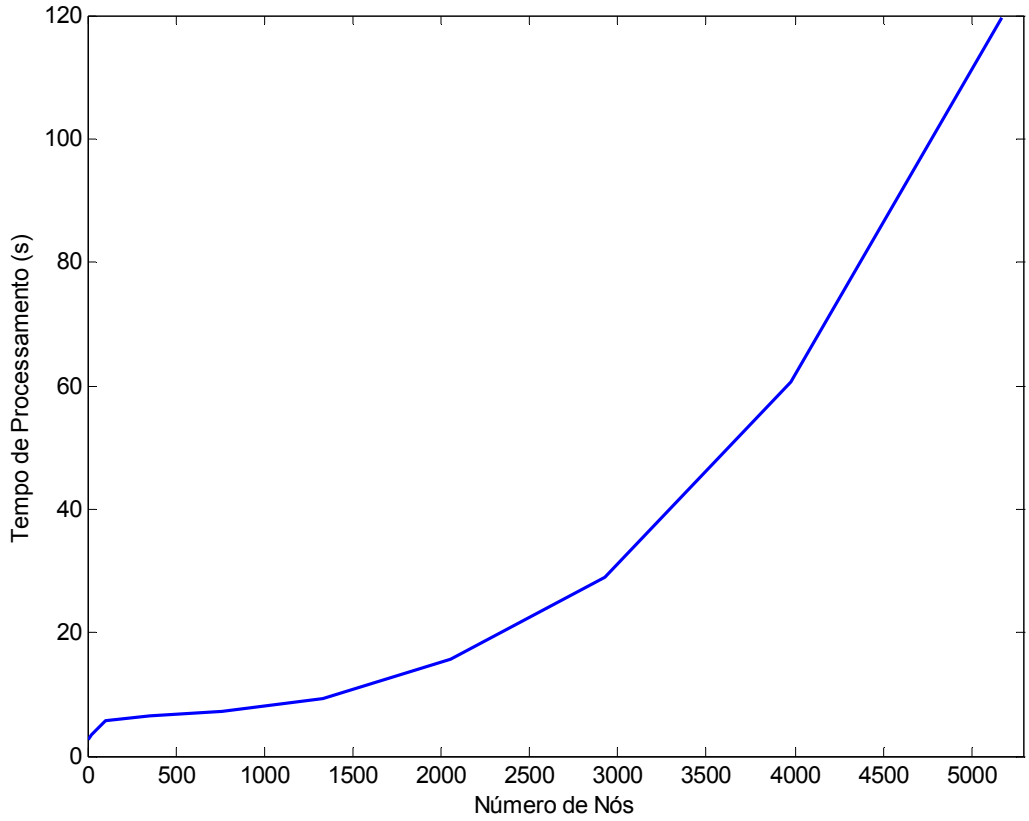


Figura 3.10 –IEFGM – Avaliação da influência do número de nósno tempo de processamento

3.5.3. Influência da Quantidade dePontos de Integração

Nessa Subseção é avaliado o impacto da variação da RGN na solução pelo IEFGM. Os resultados são calculados considerando os parâmetros apresentados na Seção 3.5.1. Assim, é fixado o número de nós em 1330 e variado o número de pontos de integração, o que implica em uma variação doRGN. Vale destacar que essa variação é realizada pelo número de células de integração; o número de pontos de Gauss em cada célula é mantido em $2\ x\ 2$.

Para essa análise são testados10 valores de RGNs, sendo $número\ de\ integração\ =\ RGNx\ número\ de\ nós$;assim, $RGN = 3$significa que o número de pontos de integração é 3 vezes maior que o número de nós. A Figura 3.11 apresenta os valores de$E_M(\%)$e$E_{MAX}(\%)$obtidos. Observa-se que os erros decaem à medida que aRGN aumenta, sendo que o$E_M(\%)$se estabiliza em torno de 2% e o $E_{MAX}(\%)$em torno de 5%. O melhor resultado éencontrado para o RGN igual a 378,3%, no qual o$E_M(\%)$é2,18% e $E_{MAX}(\%)$é5,04%.

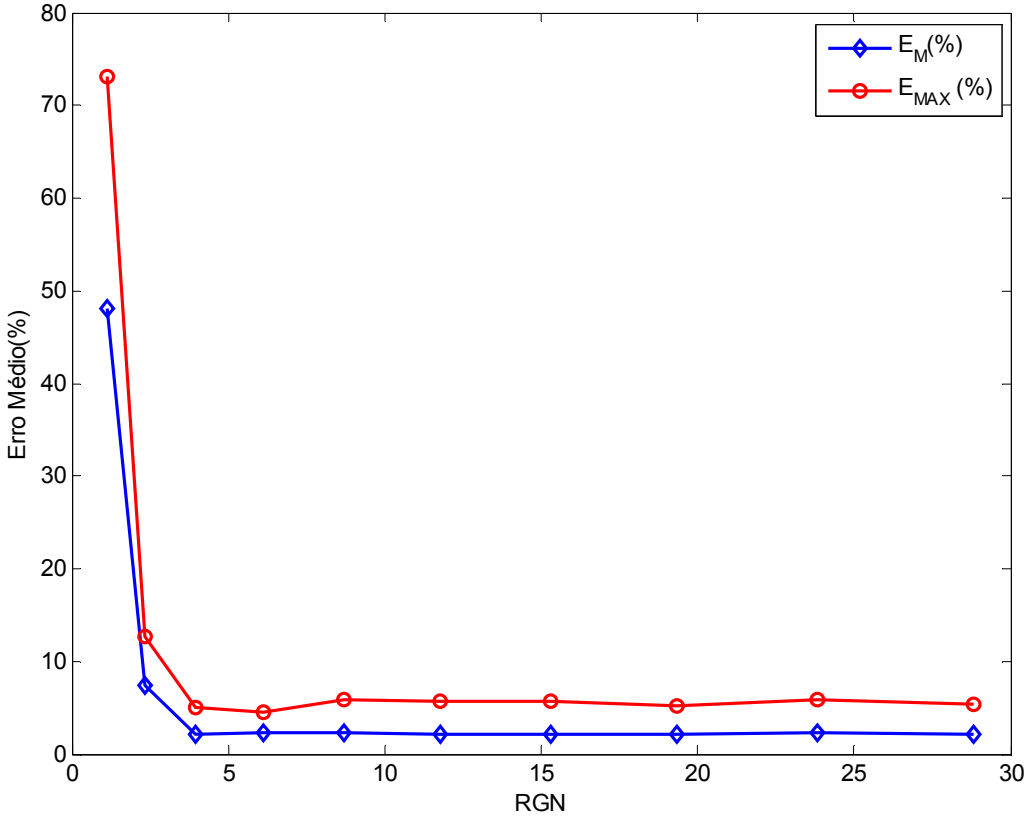


Figura 3.11 –IEFGM– Avaliação da influência da RGN no erro

A Figura 3.12 e a Figura 3.13 apresentam o número de condicionamento da matriz K e o tempo de processamento da solução, respectivamente. Pequenos valores de RGN implicam em valores mais elevados do número de condicionamento da matriz K, devido à representatividade mais fraca das funções de forma. O aumento do RGN reduz sensivelmente o número de condicionamento da matriz$K$ e, adicionalmente,observa-se que os valores de RGN para os quais os erros se estabilizam são os mesmos que estabilizam o valor do número de condicionamento da matriz K. Pode-se observar também que o aumento do RGNacarreta o aumento do tempo de processamento, conforme esperado.

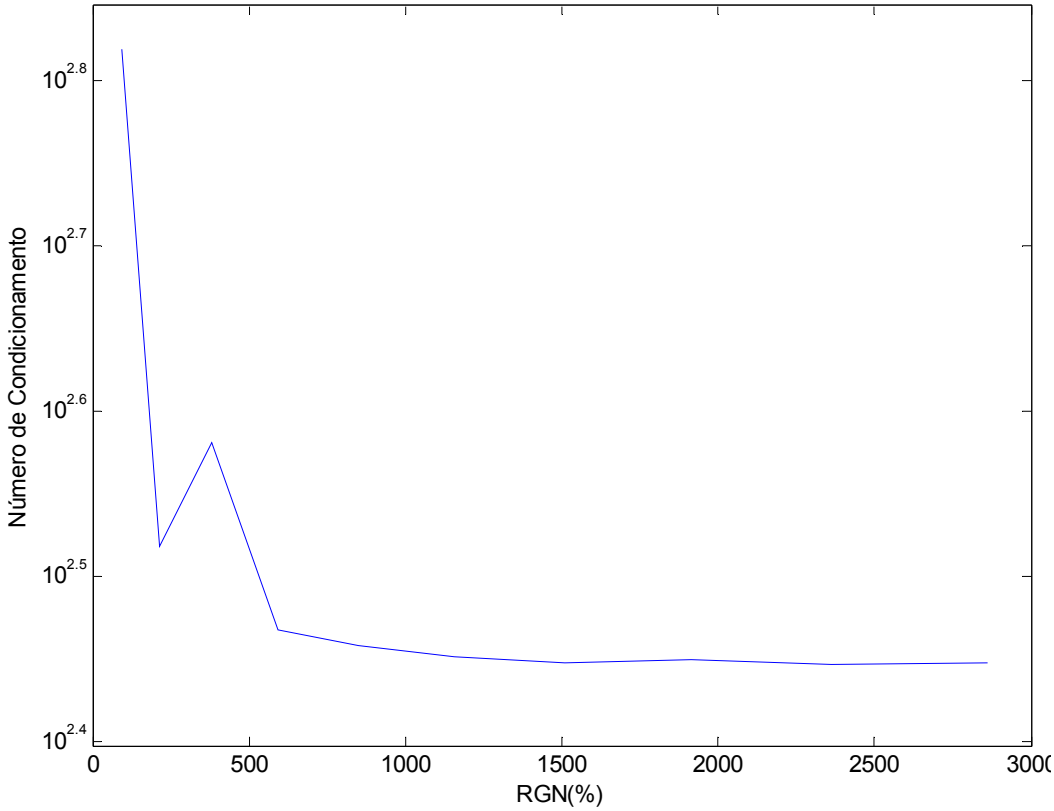


Figura 3.12 –IEFGM–Avaliação da influência da RGNno número de condicionamento

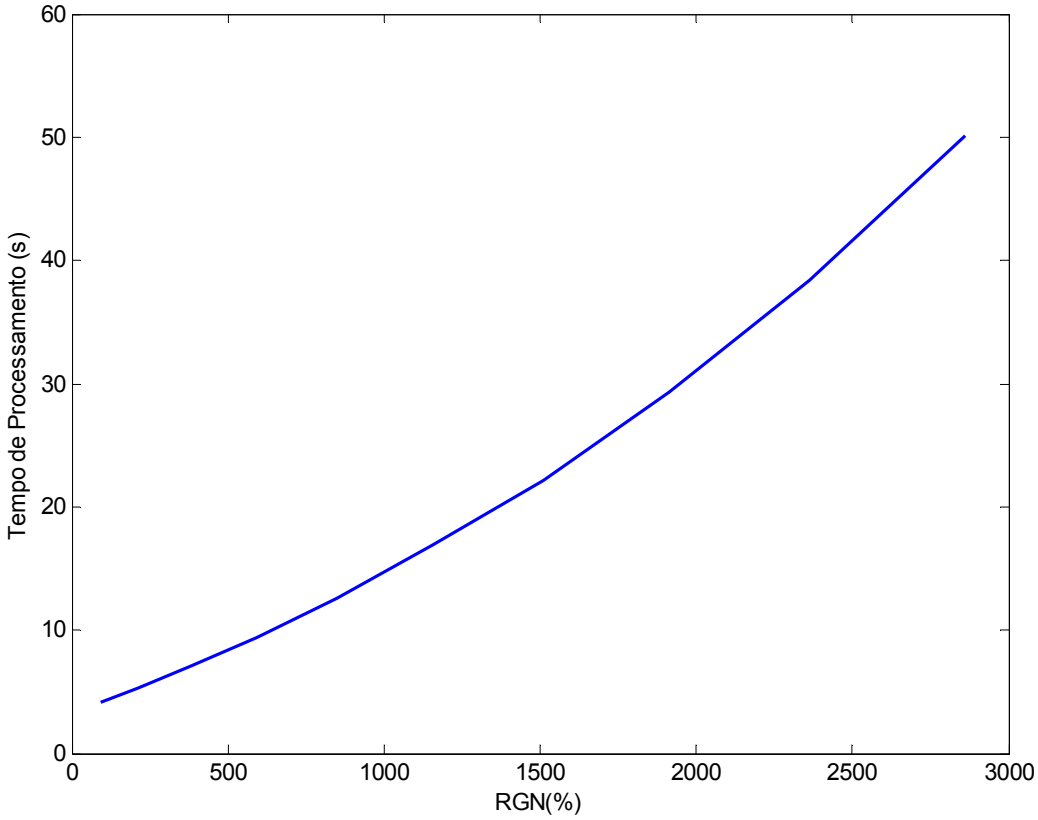


Figura 3.13 –IEFGM–Avaliação da influência da RGNno tempo de processamento

3.5.4. Influência do Tamanho do Domínio de Influência

Nessa Subseção é avaliado o impacto da variação do tamanho do domínio de influência na solução pelo IEFGM. Os resultados são calculados considerando os parâmetros apresentados na Seção 3.5.1, com número de nós de 1330 e $RGN = 3{,}97$, e variando os valores de $\alpha = 0{,}6$ a $\alpha = 5{,}4$.

A Figura 3.14 apresenta os valores de$\mathrm{E_M}(\%)$e$\mathrm{E_{MAX}}(\%)$obtidos. Para valores de $\alpha < 0{,}6$, não épossível de calcular o campo elétrico, devido a singularidade da matriz **A**, apresentada na Equação (3.7). Conforme discutido na Seção3.2.1, pode ser confirmado que um raio do suporte pequeno pode envolver um número de nós insuficiente para a determinação da solução aproximada, resultando em baixa precisão(LIU e GU, 2005). Assim, para $0{,}8 < \alpha < 1$, os valores de $\mathrm{E_M}(\%)$e$\mathrm{E_{MAX}}(\%)$obtidossão elevados. E para os valores de $1 < \alpha < 5{,}4$,$\mathrm{E_M}(\%)$e$\mathrm{E_{MAX}}(\%)$se mantiveram estáveis, em torno de 2,1%.

A má qualidade dos resultados gerados para $0{,}8 < \alpha < 1{,}0$ pode ser também observadana Figura 3.15, que apresentada os resultados do número de condicionamento

da matriz K. Observa-se que para$0{,}8 < \alpha < 1{,}0$ o número de condicionamento é mais elevado. Para os valores de $1{,}0 < \alpha < 5{,}4$ o número de condicionamento, assim como $E_M(\%)$e$E_{MAX}(\%)$, se mantêm praticamente estáveis.

A Figura 3.16 apresenta os valores do tamanho do domínio de influência em relação ao tempo de processamento. Observa-se que quanto maior o domínio de influência do nó, maior o tempo de processamento. Esse comportamento é esperado, uma vez que o aumento do domínio de influência acarreta o aumento do número de nós para os quais um determinado nó exerce influência para o cálculo da aproximação local.

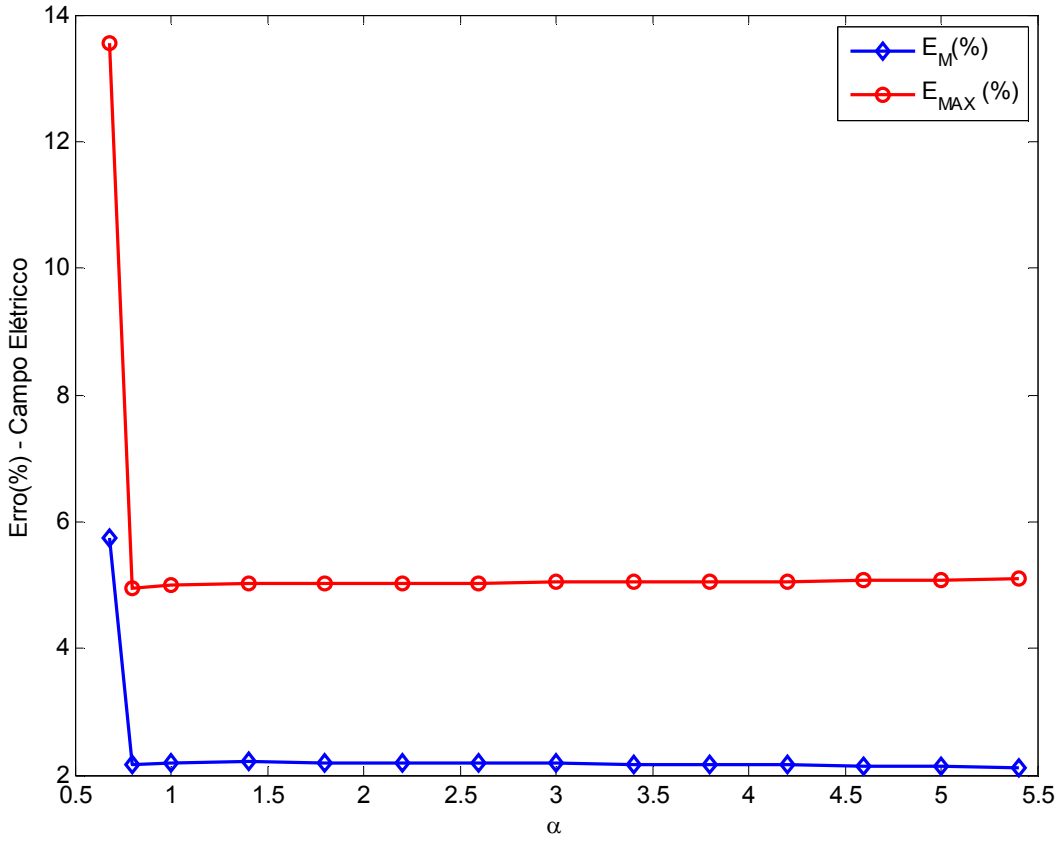


Figura 3.14 –IEFGM – Avaliação da influência do tamanho dodomínio de influência no erro

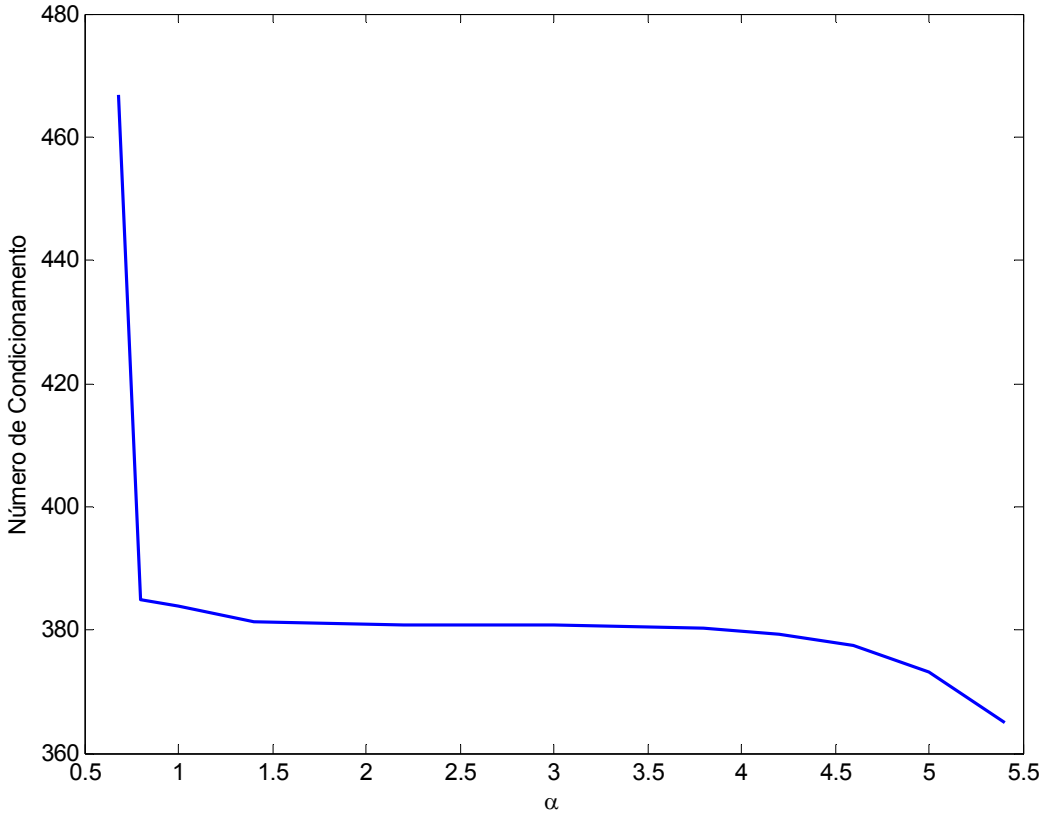


Figura 3.15 –IEFGM – Avaliação da influência do tamanho do domínio de influência nonúmero de condicionamento

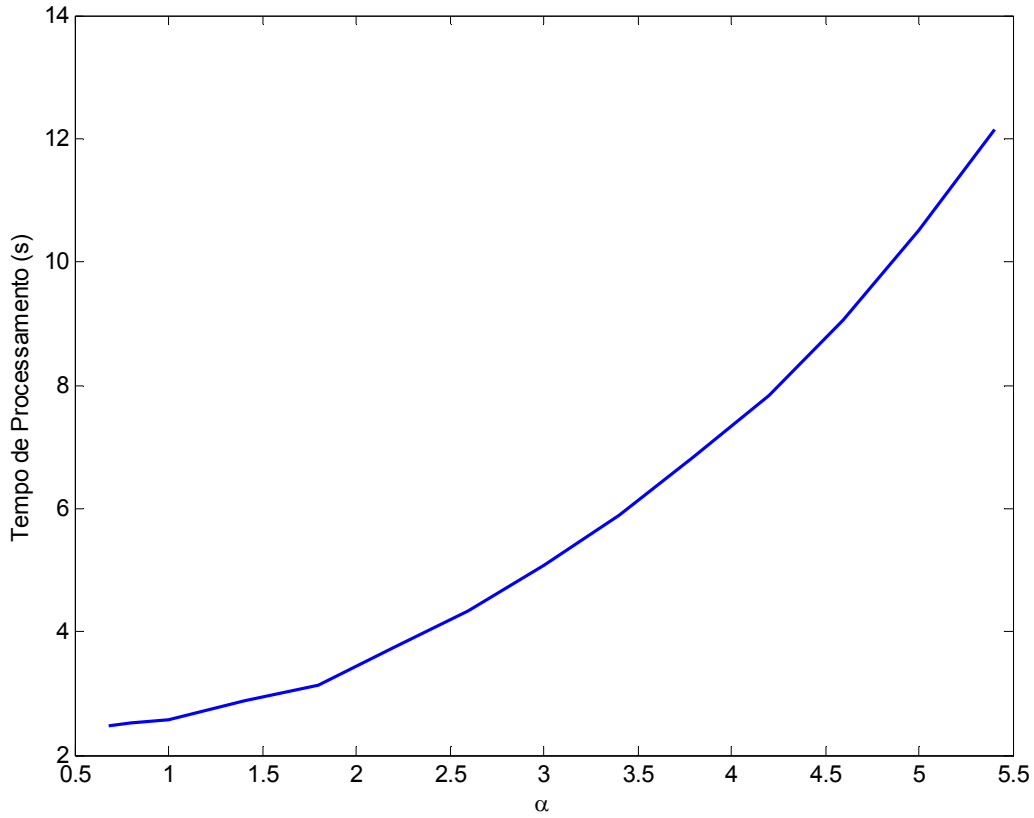


Figura 3.16 –IEFGM – Avaliação da influência do tamanho do domínio de influência notempo de processamento

3.5.5. Influência da Distância da FronteiraΓ_e

Nessa Subseção é avaliadaa influência do raio da fronteira $\Gamma_e$na solução pelo IEFGM. Os resultados são calculados considerando os parâmetros apresentados na Seção 3.5.1, com$\alpha = 2,6$.Considerando o raio do cilindro fixado em $a = 0{,}3\lambda_0$e o raio da fronteira $\Gamma_e$igual a$R_{\Gamma_e} = \delta a$, ondeδ é o fator de multiplicação para o raio da fronteira $\Gamma_e$eé variado de 1 a 6. Vale destacar que para manter a análise consistente, a densidade de nós ($nós/\lambda^2$) éaproximadamente mantida, assim como a RGN, conforme apresentado na Tabela 3.2.

A Figura 3.17 apresenta os valores de$\mathrm{E_M}(\%)$e$\mathrm{E_{MAX}}(\%)$obtidos. Observa-se que pequenos raios, não conduzem a solução precisa para o problema. Observa-se também que à medida que o raio aumenta, como a RGNé mantida, os valores de erro tendem a diminuir, conforme esperado.

Tabela 3.2 –IEFGM – Densidade de nós e RGNpara cilindro com $a = 0{,}3\lambda_0$ variando a distância da fronteira Γ_e

δ	Area$(\lambda_0{}^2)$	Número de Nós	Número de Pontos de Integração	Nós/$\lambda_0{}^2$	RGN
1	0,283	351	1382	1241,41	3,93
2	1,131	1330	5284	1175,98	3,97
3	2,545	2937	11694	1154,17	3,98
4	4.534	5173	20604	1143,48	3,98
5	7,069	8037	32066	1131,77	4,01
6	10,179	11529	45990	1178,92	3,83

A Figura 3.18 e a Figura 3.19apresentam o número de condicionamento da matriz K e tempo de processamento, respectivamente. Pode-se observar que o aumento dadistância da fronteira $\Gamma_e$acarreta o aumento do número de condicionamento da matrix K e no tempo de processamento, conforme esperado, uma vez que são utilizados mais nós e pontos de integração.

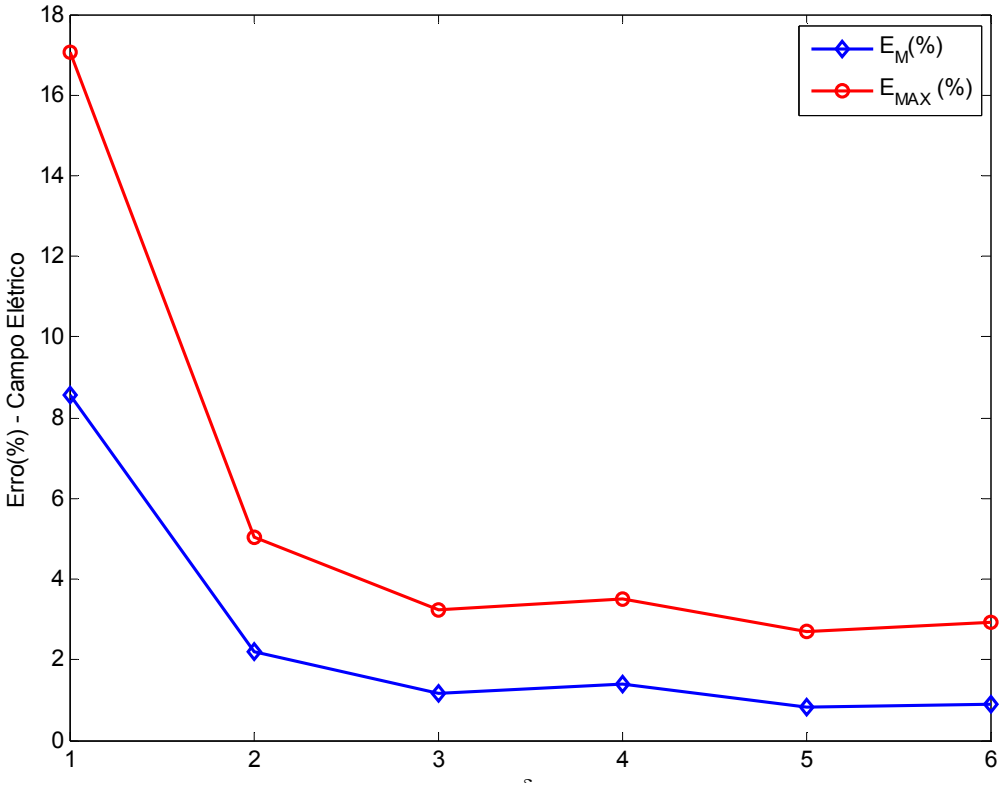


Figura 3.17 –IEFGM – Avaliação da influência da distância da fronteira $\Gamma_e$no erro

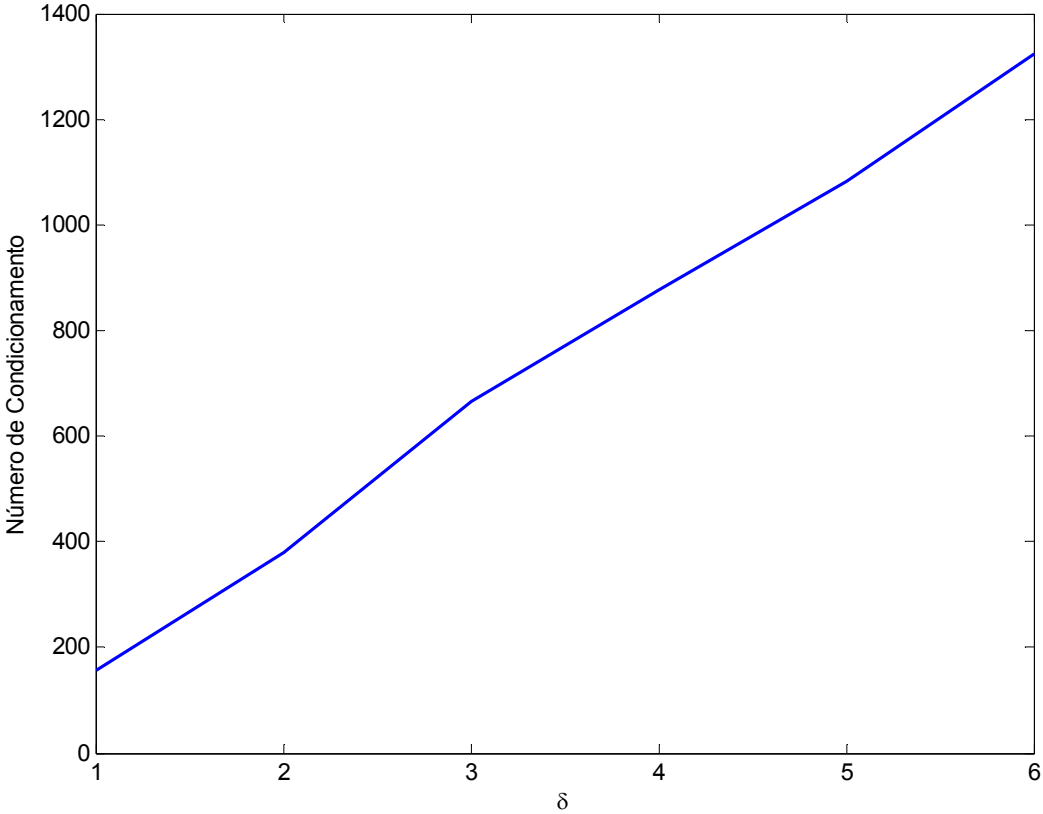


Figura 3.18 –IEFGM – Avaliação da influência da distância da fronteira$\Gamma_e$no número de condicionamento

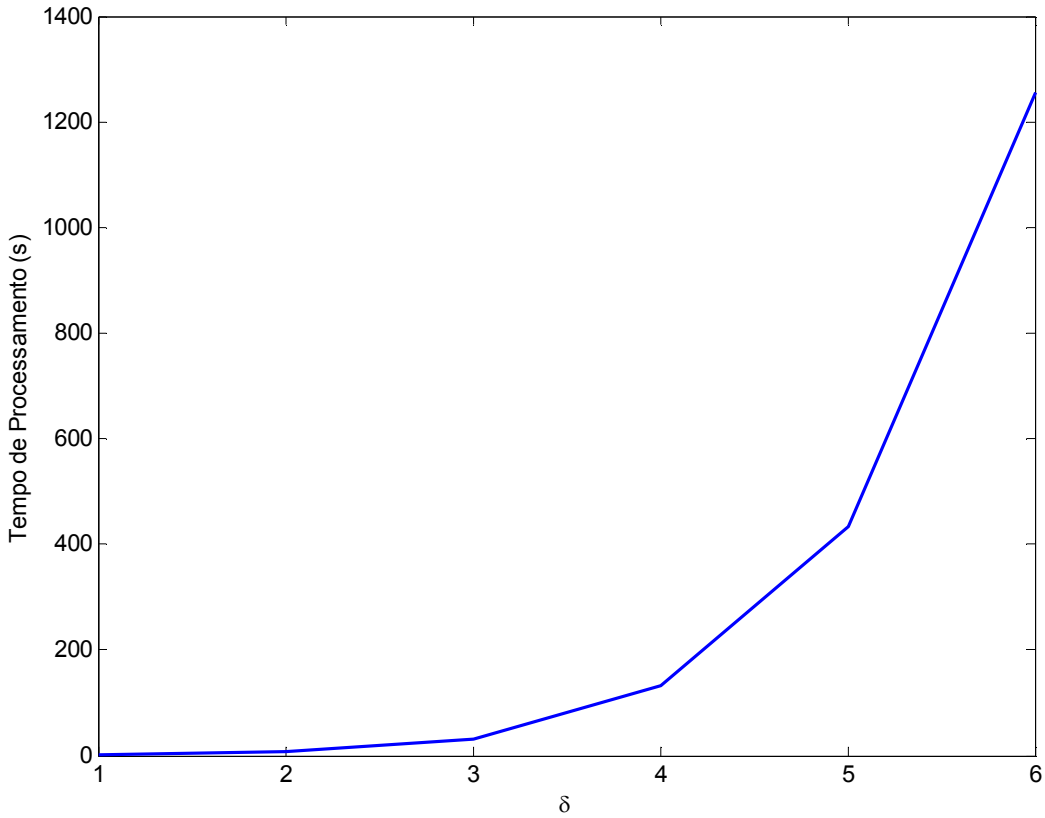


Figura 3.19 –IEFGM – Avaliação da influência da distância da fronteira Γ_e no tempo de processamento

3.6. Considerações Finais

Nesse capítuloé apresentado o IEFGM e sua aplicação ao problema do espalhamento eletromagnético por um cilindro dielétrico infinito. Os resultados obtidossão validados por meio de sua comparação com a respectiva solução analítica. Observa-se que o IEFGM é capaz de produzir uma solução precisa, tendo em vista os valores dos erros obtidos nos resultados apresentados na Seção3.5.

Verifica-se que o número de nós eo tamanho do domínio de influência impactam diretamente nos resultados obtidos pelo IEFGM, assim como a RGN. Em relaçãoàdistância da fronteira Γ_e, verifica-se que o seu aumento conduz a uma melhora na precisão dos resultados obtidos, conforme esperado, embora seu aumento implique no acréscimo do custo computacional. Para todos os casos investigados, o número de condicionamento apresenta baixos valores, o que demonstra que o sistema linear da solução por IEFGM é bem comportado.

Capítulo 4
Método dos Momentos

Neste capítulo é apresentada a definição geral do Método dos Momentos (MOM), suas principais características e o processo para solução da EFIE aplicada ao problema de espalhamento eletromagnético por um cilindro dielétrico infinito. São consideradas funções de base e de teste do tipo pulso e do tipo triangulares. Os resultados numéricos obtidos são comparados com a respectiva solução analítica.

4.1. Introdução

O MOM é uma técnica numérica bastante conhecida e robusta, que se destaca por ser aplicada em diversas áreas da engenharia, como por exemplo, mecânica dos fluídos, acústica e eletromagnetismo. Seu uso em eletromagnetismo tornou-se bastante popular a partir dos trabalhos de (RICHMOND, 1965)e(HARRINGTON, 1968). O método é aplicado com sucesso em uma grande variedade de problemas de interesse prático em eletromagnetismo, como por exemplo, radiação de antenas filamentares, problemas de espalhamento eletromagnético, o cálculo da capacitância de vários objetos, cálculos associados a linhas de transmissão, além da determinação da forma de vários objetos, tais como aviões e foguetes, dentre outras aplicações (TRINTINALIA, 2008).

O método consiste na técnica de transformar equações integrais em um sistema linear. A ideia é expandir as variáveis desconhecidas usando um grupo de funções conhecidas com coeficientes desconhecidos. Então, as equações resultantes são convertidas em um sistema linear de equações pela aplicação das condições de contorno.

O sistema linear resultante é então solucionado numericamente para os coeficientes desconhecidos (GIBSON, 2015).Embora o método tenha sido proposto na década de 60, novas aplicações e algoritmos surgem com frequência, com o objetivo de

obter metodologias mais eficientes. Isto mostra que essa é, ainda, uma área de pesquisa muito rica(GIBSON, 2015).

4.2. Formulação Geral do MOM

Considere o problema geral:

$$L(f) = g, \tag{4.1}$$

onde$L$ é um operador linear, g é uma função conhecida e f é a variável desconhecida. Em problemas de espalhamento eletromagnético, geralmente, L é um operador integro-diferencial, como $\mathcal{L}$ e$\mathcal{K}$definidos nas Equações (2.30) e (2.31), respectivamente, f é a corrente, e gé o campo incidente. Assim, expandindo f em uma soma de N funções base, tem-se:

$$f = \sum_{n=1}^{N} a_n f_n, \tag{4.2}$$

onde$a_n$são os coeficientes desconhecidos e $f_n$sãoas funções base conhecidas.

Como L é linear, pode-se substituir a Equação (4.2) na Equação (4.1), resultando em:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n L(f_n) \approx g, \tag{4.3}$$

onde o residual é dado por.

$$R = g - \sum_{n=1}^{N} a_n L(f_n). \tag{4.4}$$

O nome Método dos Momentos originou-se da definição do produto interno ou momento entre as funções base $f_n(\boldsymbol{r}')$e as funções de teste $w_m(\boldsymbol{r})$. As condições de contorno do problema são impostas por meio das funções teste e o produto interno é definido como (GIBSON, 2015):

$$\langle w_m, f_n \rangle = \int_{w_m} w_m(\boldsymbol{r}) \int_{f_n} f_n(\boldsymbol{r}') d\boldsymbol{r}' d\boldsymbol{r}, \tag{4.5}$$

ondeas integrais podem ser de linha, superfície ou volume dependendo das funções base e teste. É desejado que o produto interno de cada uma das N funções de teste com a função residual seja zero; assim:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \langle w_m, L(f_n) \rangle = \langle w_m, g \rangle, \tag{4.6}$$

o que resulta em um sistema linear de ordem N, com a seguinte forma:

$$[b_m] = [Z_{mn}][a_n], \tag{4.7}$$

onde$m$ corresponde às funções teste, n às de funções basee os elementos do sistema linear são:

$$Z_{mn} = \langle w_m, L(f_n) \rangle \tag{4.8}$$

e

$$b_m = \langle w_m, g \rangle. \tag{4.9}$$

Para a escolha das funções teste é importante que os elementos de$w_m$sejam linearmente independentes, para que as N equações na Equação(4.8) sejam assim, linearmente independentes também (ou seja, sejam passíveis de solução não trivial) (BALANIS, 1989). Além disso, geralmente é vantajoso escolher funções de teste que minimizem o esforço computacional necessário para avaliar o produto interno.A condição de independência linear entre os elementos e a vantagem da simplicidade computacional são características importantes também para as funções base (GIBSON, 2015). A convergência do MOM está intimamente relacionada com a escolha das funções base e, embora em menor escala, a escolha das funções teste.

A característica mais importante das funções de base é que elas representem razoavelmente o comportamento da função desconhecida através do seu domínio. Se a solução tem um alto nível de variação através de uma região particular, funções base de pulso podem não ser uma boa escolha, como funções lineares ou de ordem superior. A escolha da função base determina o nível de dificuldade em avaliar os elementos da matriz do MOM, que em alguns casos pode ser bastante elevada.

Uma escolha particular de funções, muito empregada, é fazer com que as funções teste e base sejam iguais, ou seja, $w_m = f_n$; essa técnica é conhecida como Método de Galerkin e garante maior precisão, rapidez e simplicidade para solução (GIBSON, 2015).

O Método de Galerkin é aplicado neste trabalho, e as funções teste e base escolhidas são iguais.

4.3. MOMAplicado ao Espalhamento Eletromagnético por um Cilindro Infinito

A solução numérica para o espalhamento eletromagnético pode ser obtida através da aplicação do MOM à EFIE, dada pelasEquações(2.37)e(2.38). Esta solução é obtida através da transformação da EFIE em um sistema linear de equações algébricas. As correntes equivalentes ($\boldsymbol{J}(\mathbf{x}')$ e $\boldsymbol{M}(\mathbf{x}')$) são as variáveis desconhecidas, e devem ser representadas por uma soma finita de funções base conhecidas, $\boldsymbol{J}_j(\mathbf{x}')e\boldsymbol{M}_j(\mathbf{x}')$, multiplicadas por coeficientes desconhecidos, I_j^J eI_j^M(RESENDE, 2007):

$$\boldsymbol{J}(\mathbf{x}') = \sum_{j=1}^{N} I_j^J \boldsymbol{J}_j(\mathbf{x}') \tag{4.10}$$

e

$$\boldsymbol{M}(\mathbf{x}') = \sum_{j=1}^{N} I_j^M M_{\phi_j}(\mathbf{x}'), \tag{4.11}$$

onde$N$ é o número total de funções base que devem ser cuidadosamente escolhidas para representar o comportamento das correntes na superfície do cilindro dielétrico. Substituindo as Equações (4.10) e (4.11) nas Equações (2.37) e (2.38),têm-se:

$$\begin{aligned} E_0 e^{jk_0 x} = &-\sum_{j=1}^{N} I_j^M \boldsymbol{M}_j(\mathbf{x}) + \frac{\omega\mu_0}{4}\sum_{j=1}^{N} I_j^J \int_0^{2\pi} \boldsymbol{J}_j(\mathbf{x}') H_0^{(2)}(k_0 R)\rho' d\phi' \\ &+ \frac{jk_0}{4}\sum_{j=1}^{N} I_j^M \int_0^{2\pi} \boldsymbol{M}_j(\mathbf{x}') \cos\psi\, \nabla' H_1^{(2)}(k_0 R)\rho' d\phi' \end{aligned} \tag{4.12}$$

e

$$\begin{aligned} 0 = &\sum_{j=1}^{N} I_j^M \boldsymbol{M}_j(\mathbf{x}) - \frac{\omega\mu_\Omega}{4}\sum_{j=1}^{N} I_j^J \int_0^{2\pi} \boldsymbol{J}_j(\mathbf{x}') H_0^{(2)}(k_\Omega R)\rho' d\phi' \\ &- \frac{jk_\Omega}{4}\sum_{j=1}^{N} I_j^M \int_0^{2\pi} \boldsymbol{M}_j(\mathbf{x}') \cos\psi\, \nabla' H_1^{(2)}(k_\Omega R)\rho' d\phi'. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Os coeficientes I_j^J eI_j^Msão obtidos operando o produto de funções teste,$w_i(\boldsymbol{r})$, em ambos os lados das Equações (4.12) e (4.13), e resolvendo a integral de linha resultante. Utilizando esse procedimento nas Equações(4.12)e (4.13), tem-se:

$$\int_0^{2\pi} w_i(\mathbf{x}) E_0 e^{jk_0 x} d\phi =$$

$$\int_0^{2\pi} w_i(\boldsymbol{r}) \sum_{j=1}^{N} I_j^M \boldsymbol{M}_j(\mathbf{x})\, d\phi + \frac{\omega\mu_0}{4} \int_0^{2\pi} w_i(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^{N} I_j^J \int_0^{2\pi} \boldsymbol{J}_j(\mathbf{x}') H_0^{(2)}(k_0 R) \rho' d\phi'\, d\phi \tag{4.14}$$

$$+ \frac{jk_0}{4} \int_0^{2\pi} w_i(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^{N} I_j^M \int_0^{2\pi} \boldsymbol{M}_j(\mathbf{x}') \cos\psi\, \nabla' H_1^{(2)}(k_0 R) \rho' d\phi'\, d\phi$$

e

$$0 = \int_0^{2\pi} w_i(\boldsymbol{r}) \sum_{j=1}^{N} I_j^M \boldsymbol{M}_j(\mathbf{x})\, \rho d\phi - \frac{\omega\mu_\Omega}{4} \int_0^{2\pi} w_i(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^{N} I_j^J \int_0^{2\pi} \boldsymbol{J}_j(\mathbf{x}') H_0^{(2)}(k_\Omega R) \rho\rho' d\phi'\, d\phi$$

$$- \frac{jk_\Omega}{4} \int_0^{2\pi} w_i(\boldsymbol{r}) \sum_{j=1}^{N} I_j^M \int_0^{2\pi} \boldsymbol{M}_j(\mathbf{x}') \cos\psi\, \nabla' H_1^{(2)}(k_\Omega R) \rho\rho' d\phi'\, d\phi \tag{4.15}$$

Assim, a seguinte equação matricial é obtida:

$$V = [Z][I], \tag{4.16}$$

onde$Z$ é a matriz impedância de dimensão $(2N \times 2N)$dada por:

$$[Z] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \tag{4.17}$$

onde

$$A_{ij} = \frac{\omega\mu_0}{4} \int_0^{2\pi} w_i(\boldsymbol{r}) \int_0^{2\pi} \boldsymbol{J}_j(\mathbf{x}') H_0^{(2)}(k_0 R) \rho\rho' d\phi'\, d\phi, \tag{4.18}$$

$$B_{ij} = - \int_0^{2\pi} w_i(\mathbf{x}) \boldsymbol{M}_j(\boldsymbol{r}) \rho\, d\phi \tag{4.19}$$

$$+ \frac{jk_0}{4} \int_0^{2\pi} w_i(\boldsymbol{r}) \int_0^{2\pi} \boldsymbol{M}_j(\mathbf{x}')\, cos\, \psi\, \nabla' H_1^{(2)}(k_0 R) \rho\rho' d\phi'\, d\phi,$$

$$C_{ij} = - \frac{\omega\mu_\Omega}{4} \int_0^{2\pi} w_i(\boldsymbol{r}) \int_0^{2\pi} \boldsymbol{J}_j(\mathbf{x}') H_0^{(2)}(k_\Omega R) \rho\rho' d\phi'\, d\phi \tag{4.20}$$

e

$$D_{ij} = \int_0^{2\pi} w_i(\boldsymbol{r})\boldsymbol{M}_j(\mathbf{x})\, d\phi \tag{4.21}$$
$$-\frac{jk_\Omega}{4}\int_0^{2\pi} w_i(\boldsymbol{r})\int_0^{2\pi} \boldsymbol{M}_j(\mathbf{x}')\, cos\,\psi\, \nabla' H_1^{(2)}(k_\Omega R)\rho\rho' d\phi'\, d\phi.$$

$$V = \begin{bmatrix} V_0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

é denominada matriz excitação de dimensão $(2N \times 1)$, e os í-ésimos elementos da matriz V_0,de dimensão $[N \times 1]$,são dados por:

$$V_{0,i} = \int_0^{2\pi} w_i(\mathbf{x}')E_0 e^{jk_0 x}\rho d\phi. \tag{4.23}$$

$$[I] = \begin{bmatrix} I^J \\ I^M \end{bmatrix}, \tag{4.24}$$

sendo,$[I^J]$e$[I^M]$matrizes de dimensão $(N \times 1)$dos coeficientes desconhecidos e os j-ésimos elementos dessas matrizes os coeficientesdesconhecidosI_j^J eI_j^M, respectivamente.

4.3.1. Aplicação das Funções Base e Teste

Conforme discutido na Seção 4.2, a escolha de funções base adequadas é de fundamental importância de modo a garantir a precisão e a convergência da análise numérica(HARRINGTON, 1968). Nesse trabalho a representação das correntes superficiais equivalentes elétrica,$\boldsymbol{J}(\mathbf{x}')$,e magnética,$\boldsymbol{M}(\mathbf{x}')$, é realizada por dois tipos de funções de base e de teste, funções pulso e funções triangulares.

4.3.1.1. Funções Base e Teste do Tipo Pulso

As funções pulso geralmente garantem uma boa representação para a variável desconhecida do problema e produzem equações integrais relativamente simples e uma boa precisão para a solução.A Figura 4.1 ilustra a distribuição de funções base do tipo pulso (FBP) sobre a fronteira Γ do problema sob estudo, as quais são definidas como:

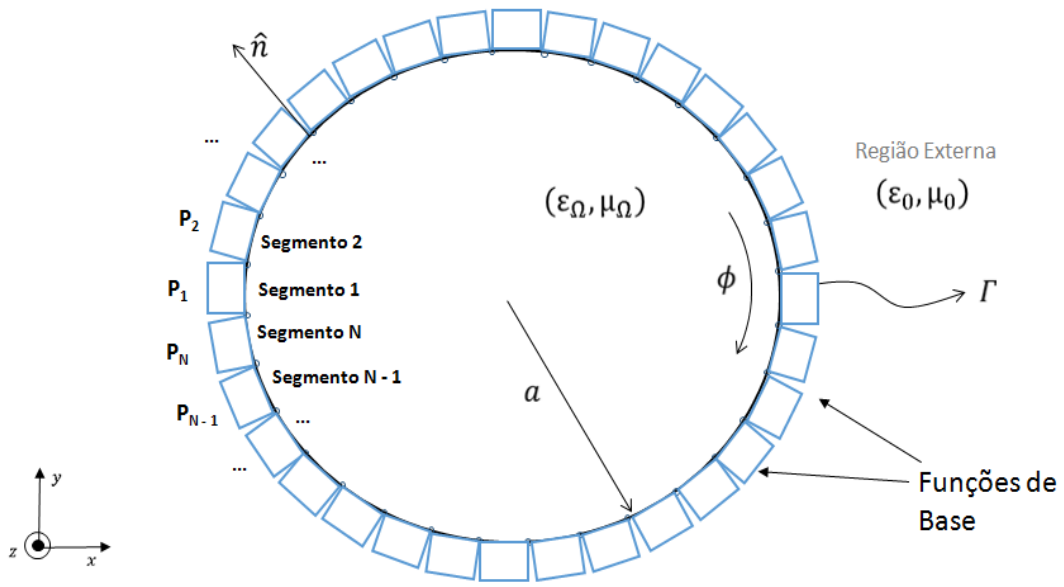


Figura 4.1 – Discretização da fronteira Γ em N segmentos e funções de base pulso

$$P(\mathbf{x}') = \begin{cases} 1 & \mathbf{x}'_n \leq \mathbf{x}' \leq \mathbf{x}'_{n+1} \\ 0 & \text{fora do segmento} \end{cases}. \tag{4.25}$$

Para as funções base pulso (FBP), conforme apresentado naEquação(4.25), as correntes$\boldsymbol{J}(\mathbf{x}')$ e$\boldsymbol{M}(\mathbf{x}')$são representadasda seguinte forma:

$$\boldsymbol{J}(\mathbf{x}') = \sum_{j=1}^{N_\mathrm{P}} P_j(\mathbf{x}') I_j^J \tag{4.26}$$

e

$$\boldsymbol{M}(\mathbf{x}') = \sum_{j=1}^{N_\mathrm{P}} P_j(\mathbf{x}') I_j^M , \tag{4.27}$$

ondeP_jé a função base pulso e N_Pé o número de funções base pulso sobre a fronteira Γ.

Nesse trabalho é escolhido o método de Galerkin para avaliação da EFIE pelo MOM; dessa forma, as funções de teste $w_m(\mathbf{x})$também são representadas por funções do tipo pulso. Dessa forma, as funções de teste são definidas como:

$$W_i(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_\mathrm{P}} P_i(\mathbf{x}). \tag{4.28}$$

Assim, os elementos do sistema matricial, Equação (4.16), obtidos são:

$$A_{ij} = \frac{\omega\mu_0}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} H_0^{(2)}(k_0R)\rho\rho' d\phi'\, d\phi, \tag{4.29}$$

$$B_{ij} = \int_0^{2\pi} d\phi + \frac{jk_0}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} cos\,\psi\, \nabla' H_1^{(2)}(k_0R)\rho\rho' d\phi'\, d\phi, \tag{4.30}$$

$$C_{ij} = -\frac{k_\Omega\eta_\Omega}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} H_0^{(2)}(k_\Omega R)\rho\rho' d\phi'\, d\phi, \tag{4.31}$$

$$D_{ij} = \int_0^{2\pi} d\phi - \frac{jk_\Omega}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} cos\,\psi\, \nabla' H_1^{(2)}(k_\Omega R)\rho\rho' d\phi'\, d\phi \tag{4.32}$$

e

$$V_{0,i} = \int_0^{2\pi} E_0 e^{jk_0x}\rho d\phi. \tag{4.33}$$

4.3.1.2. Funções Base e Teste do Tipo Triangular

A segunda escolha para representação das correntes superficiais equivalentes são as funções bases triangulares (FBT), que, assim como as funções pulso, garantem uma boa representação do problema, proporcionando, porém, uma aproximação mais suave das correntes superficiais. O inconveniente é dado pelo aumento da complexidade das integrais, aumentando também o custo computacional total(GIBSON, 2015). As FBT são definidas como:

$$T(\boldsymbol{r}') = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_{n-1}}{\mathbf{x}'_n - \mathbf{x}'_{n-1}} & \mathbf{x}'_{n-1} \le \mathbf{x}' \le \mathbf{x}'_n \\ \\ \dfrac{\mathbf{x}'_{n+1} - \mathbf{x}'}{\mathbf{x}'_{n+1} - \mathbf{x}'_n} & \mathbf{x}'_n \le \mathbf{x}' \le \mathbf{x}'_{n+1} \end{cases} \tag{4.34}$$

A Figura 4.2ilustra a distribuição de FBT sobre a fronteira Γ do domínio do problema sob estudo. Pode ser observado que cada função triangular é definida sobre dois segmentos consecutivos, conforme destacado na Figura 4.3. Assim, cada segmento éassociado a dois meios triângulos (MT): o MTD à direita que possui derivada negativa em relação à variável ϕ e o MTE à esquerda que possui derivada positiva.

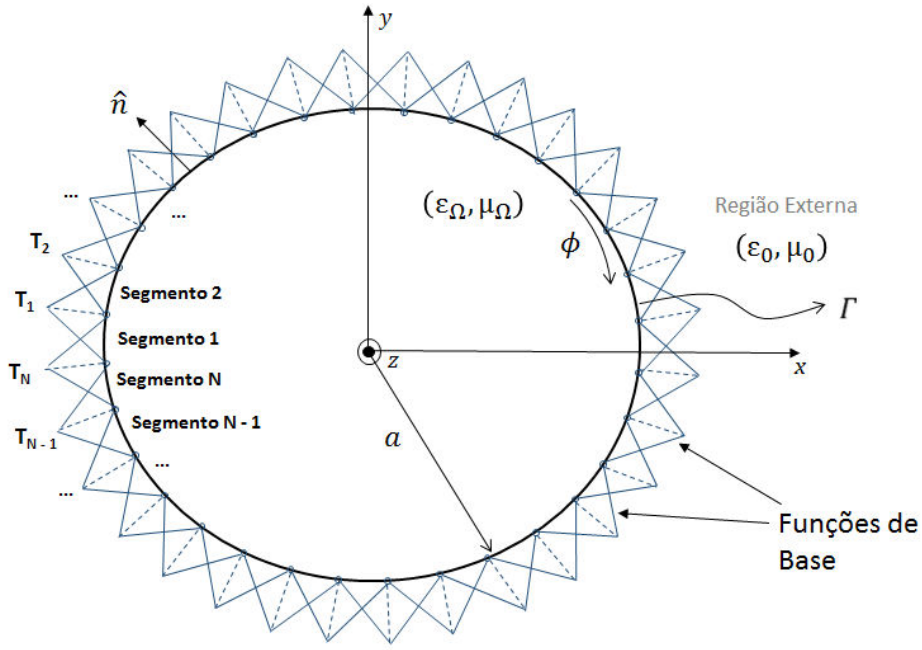


Figura 4.2 – Discretização da fronteira Γ em N elementos e funções de base triângulo

Para as funções base triângulo, conforme apresentadonaFigura 4.3, as correntes$\boldsymbol{J}(\mathbf{x}')$ e$\boldsymbol{M}(\mathbf{x}')$, são representadas da seguinte forma:

$$\boldsymbol{J}(\mathbf{x}') = \sum_{j=1}^{N_T} T_j(\mathbf{x}') I_j^J \tag{4.35}$$

e

$$\boldsymbol{M}(\mathbf{x}') = \sum_{j=1}^{N_T} T_j(\mathbf{x}') I_j^M , \tag{4.36}$$

ondeT_jé a função base triangular e N_Té o número de FBTsobre a fronteira Γ.

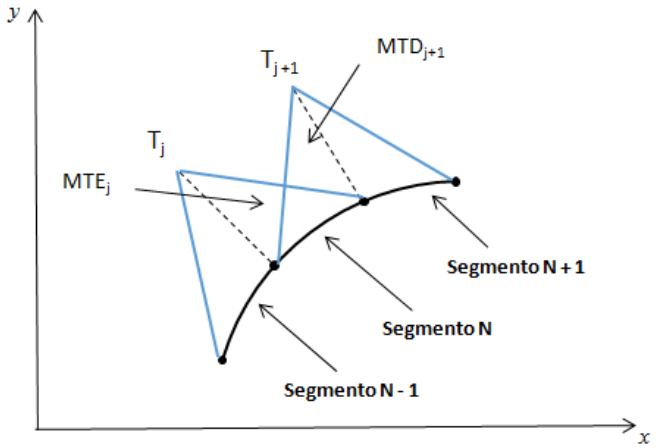


Figura 4.3 – Detalhe definição meios triângulos

Fonte: adaptado de(RESENDE, 2007))

De modo similar ao descrito na Seção 4.3.1.1, com a aplicação do método de Galerkin, as funções de teste $w_m(\mathbf{x})$também são representadas por funções do tipo triangular. Dessa forma, as funções de teste são definidas para FBT, como:

$$W_i(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_\mathrm{T}} T_i(\mathbf{x}) \,. \tag{4.37}$$

Assim os elementos do sistema matricial, Equação (4.16), obtidos são:

$$A_{ij} = \sum_{q_i=1}^{2}\sum_{q_j=1}^{2} \frac{\omega\mu_0}{4}\int_0^{2\pi} T_{q_i}(\mathbf{x})\int_0^{2\pi} T_{q_j}(\mathbf{x}')H_0^{(2)}(k_0R)\rho\rho' d\phi'\, d\phi, \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned} B_{ij} &= -\sum_{q_i=1}^{2}\int_0^{2\pi} T_{q_i}(\mathbf{x})\, d\phi \\ &+ \sum_{q_i=1}^{2}\sum_{q_j=1}^{2} \frac{jk_0}{4}\int_0^{2\pi} T_{q_i}(\mathbf{x})\int_0^{2\pi} T_{q_j}(\mathbf{x}')\cos\psi\, \nabla' H_1^{(2)}(k_0R)\rho\rho' d\phi'\, d\phi\,, \end{aligned} \tag{4.39}$$

$$C_{ij} = -\sum_{q_i=1}^{2}\sum_{q_j=1}^{2} \frac{\omega\mu_\Omega}{4}\int_0^{2\pi} T_{q_i}(\mathbf{x})\int_0^{2\pi} T_{q_j}(\mathbf{x}')H_0^{(2)}(k_\Omega R)\rho\rho' d\phi'\, d\phi, \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \sum_{q_i=1}^{2}\int_0^{2\pi} T_{q_i}(\mathbf{x})\, d\phi \\ &- \sum_{q_i=1}^{2}\sum_{q_j=1}^{2} \frac{jk_\Omega}{4}\int_0^{2\pi} T_{q_i}(\mathbf{x})\int_0^{2\pi} T_{q_j}(\mathbf{x}')\cos\psi\, \nabla' H_1^{(2)}(k_\Omega R)\rho\rho' d\phi'\, d\phi \end{aligned} \tag{4.41}$$

e

$$V_{0,i} = \sum_{q_i=1}^{2}\int_0^{2\pi} T_{q_i}(\mathbf{x})\, E_0 e^{jk_0x} d\phi, \tag{4.42}$$

onde$q_i = q_j = 1$indicam MTE para o segmento fonte e observador, respectivamente, e $q_i = q_j = 2$indicam o MTD.

4.4. Análise de Resultados

NessaSeção são apresentados e avaliados os resultados obtidos na aplicação do MOM. Esses resultados são comparados com a respectiva solução analítica por meio dos erros apresentados na Seção3.5, e aqui redefinidos para o MOM:

$$\mathrm{E_M}(\%) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{|S_{analitico} - S_{MOM}|}{|S_{analitico}|}}{n} * 100\% \tag{4.43}$$

e

$$\mathrm{E_{MAX}}(\%) = max \left\| \frac{|S_{analitico} - S_{MOM}|}{|S_{analitico}|} \right\| * 100\% \tag{4.44}$$

ondeS_{MOM}é o valor obtido utilizando MOM.

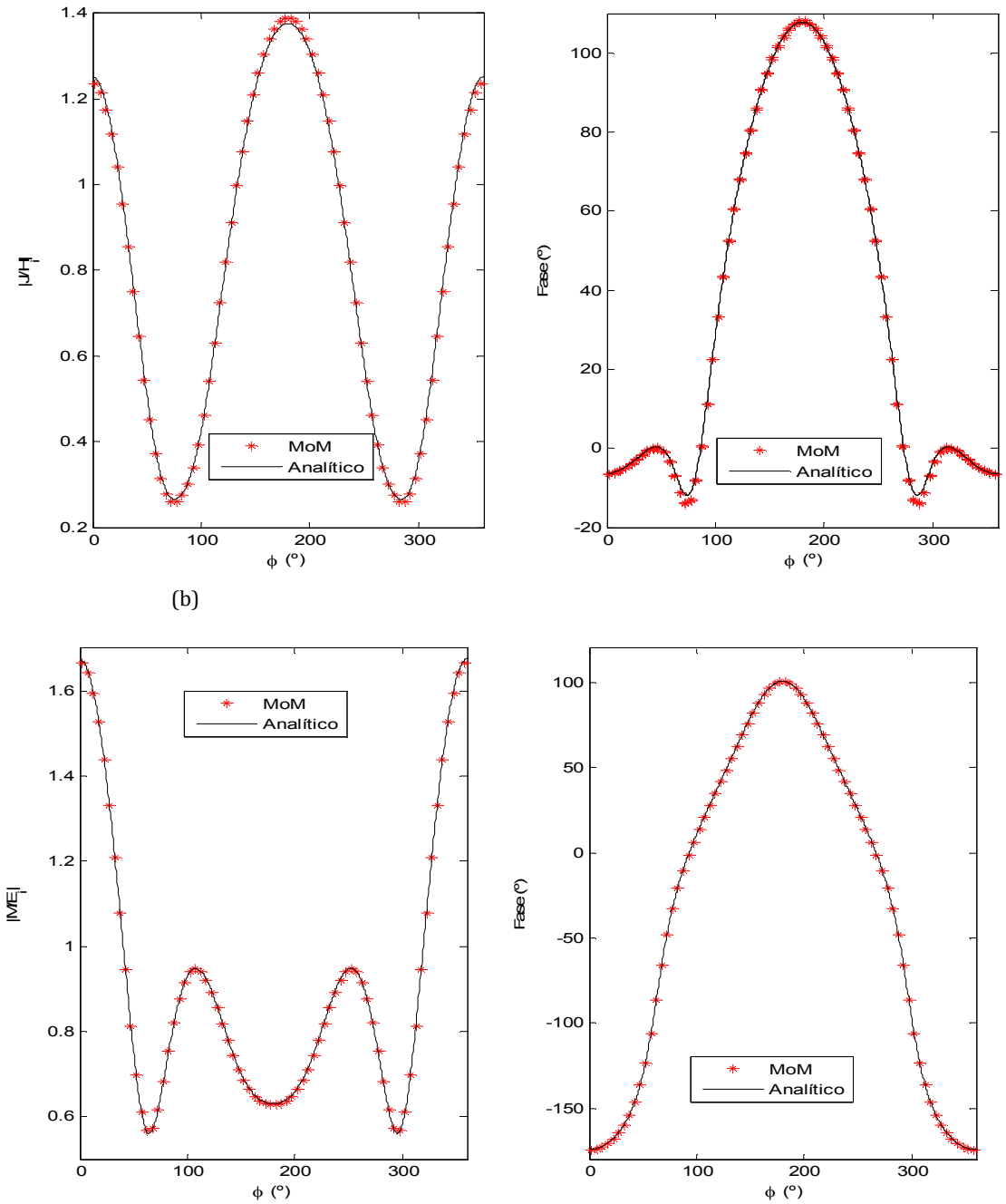
A avaliação numérica dasEquações (4.29) - (4.33) e (4.38) - (4.42)é realizada utilizando Quadratura Gaussiana. Para contornar os casos onde singularidades estão presentes, ou seja, quando o ponto de observação, $\boldsymbol{r}$, está muito próximo do ponto da fonte, $\boldsymbol{r}'$, a técnica utilizada consiste em considerar um número de pontos de Gauss para os segmentos observador e para os segmentos fonte diferentes, de modo a garantir que os pontos nunca sejam coincidentes.

Nesse trabalho, todas as execuções das rotinas computacionais desenvolvidas foram realizadas utilizando um computador Intel i5-3570QM, 3.4GHz, 8GB RAM.

4.4.1. Solução Utilizando Funções Pulso

Para avaliação do MOM com a utilização de funções base e teste do tipo pulso é considerado o cilindro dielétrico infinito com raio$a = 0{,}3\lambda_0$, $\varepsilon_\Omega = 2\varepsilon_0e\mu_\Omega = \mu_0$. Em relação à construção do MOM, a fronteira do cilindro Γé discretizada em 72 segmentos, nos quais são aplicadas funções de base e teste do tipo pulso, conforme apresentado na Figura 4.1.Para cada segmento são aplicados 4 pontos de Gauss no segmento fonte (pgf) e 3 pontos no segmento observador (pgo).

Para validação do MOM foi considerado o cálculo das correntes $\boldsymbol{J}$ e $\boldsymbol{M}$ apresentados na Figura 4.4.É possível perceber boa coerência entre os resultados numérico e analítico para o caso sob estudo. A Tabela 4.1apresenta os erros $\mathrm{E_M}(\%)$e$\mathrm{E_{MAX}}(\%)$paraessas correntes, os quais também validam os resultados obtidos.



(a) (b)

(c) (d)

Figura 4.4 – Validação MOMFBP – Correntes induzidas no cilindro a) Magnitude dacorrente ***J***; b) Fase da corrente***J***; c) Magnitude da corrente ***M*** d) Fase da corrente ***M***

Tabela 4.1- Validação MOM FBP - Correntes induzidas no cilindro – $E_M(\%)$e$E_{MAX}(\%)$

Grandeza	$E_M(\%)$	$E_{MAX}(\%)$
J	1.9182	4.7338
M	0.68353	0.98121

Uma vez confirmada a validade da solução é então conduzida uma análise paramétrica, apresentadas nas Seções 0 e 0 com o objetivo de identificar o melhor conjunto de valores para os parâmetros do MOM.

4.4.1.1. Influência da Quantidade de Segmentos

Nessa Subseção é avaliado o impacto da variação da quantidade de segmentos na solução pelo MOM utilizando FBP. Os resultados são calculados considerando os parâmetros apresentados na Subseção4.4.1, variando a quantidade de segmentos de 8 a 180 segmentos. A Figura 4.5 apresentaE_M(%), E_{MAX}(%)para os resultados obtidos. Pode-se verificar que o aumento do número de segmentos acarreta na melhoria dos resultados.

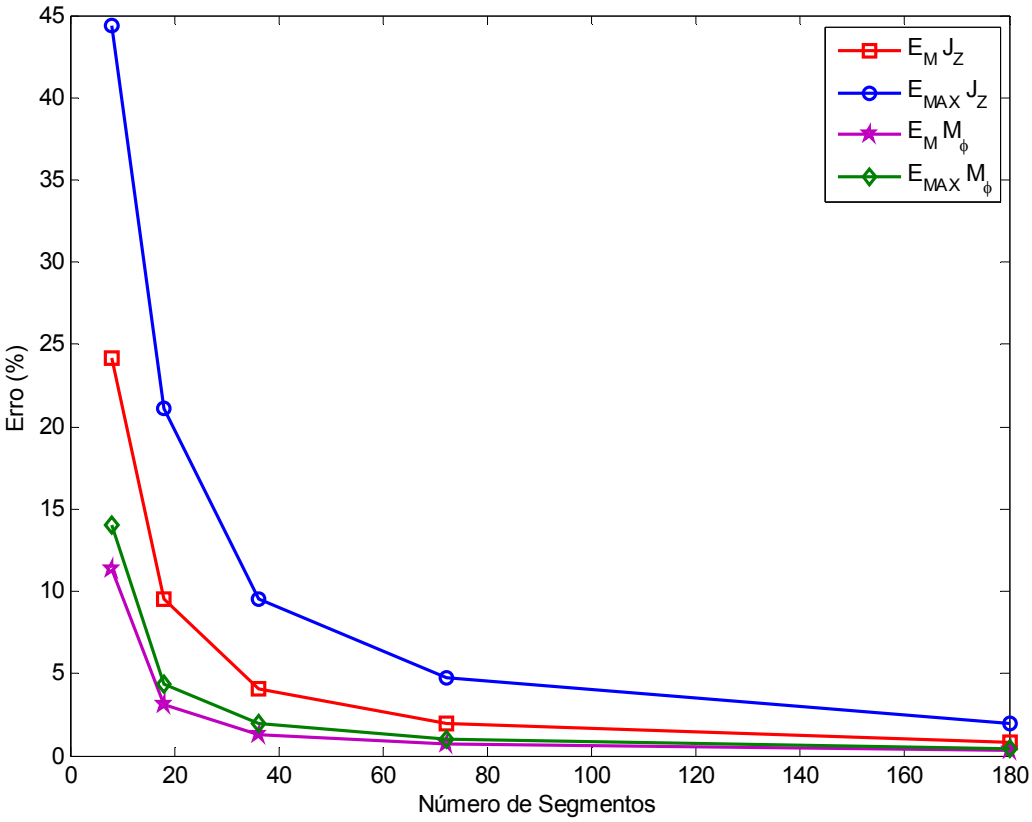


Figura 4.5 –MOM FBP – Avaliação da influência do número de segmentos no erro

A Figura 4.6 e a Figura 4.7 apresentam o número de condicionamento da matriz Z e o tempo de processamento em relação ao número de segmentos, onde se pode observar que o aumento do número de segmentos provoca um significativo aumento no número de condicionamento da matriz Z e no tempo de processamento, conforme

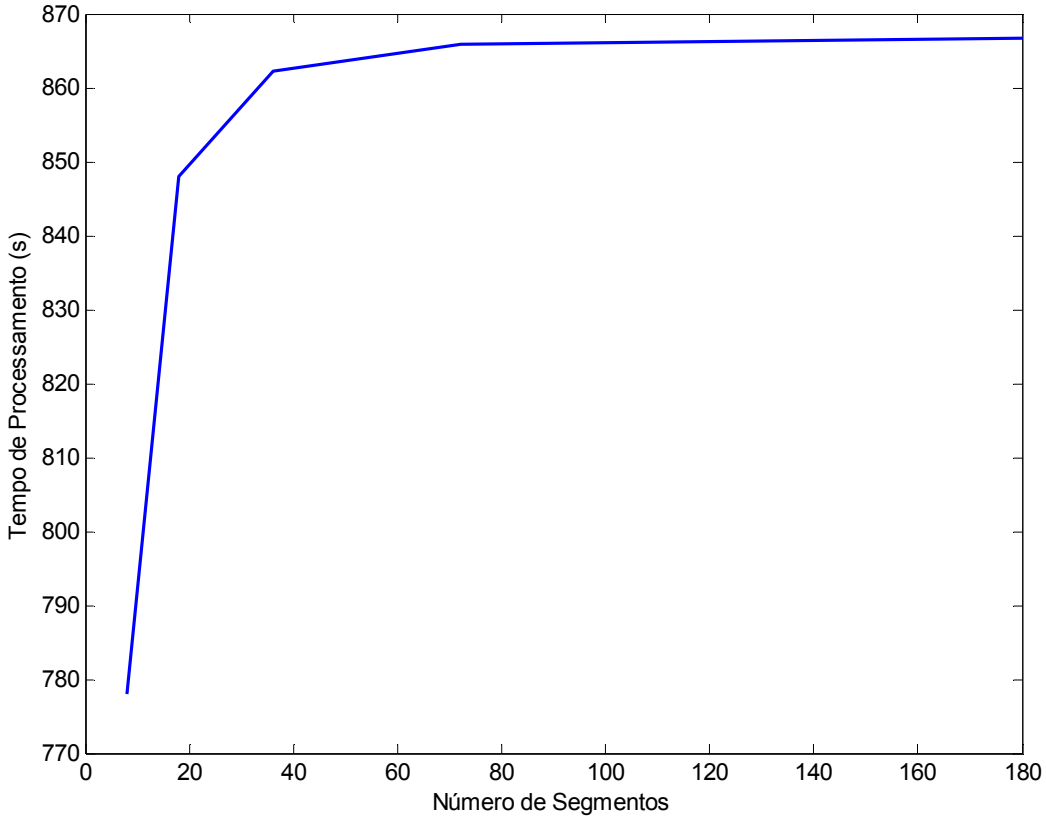


Figura 4.6 –MOM FBP – Avaliação da influência do número de segmentos nonúmero de condicionamento

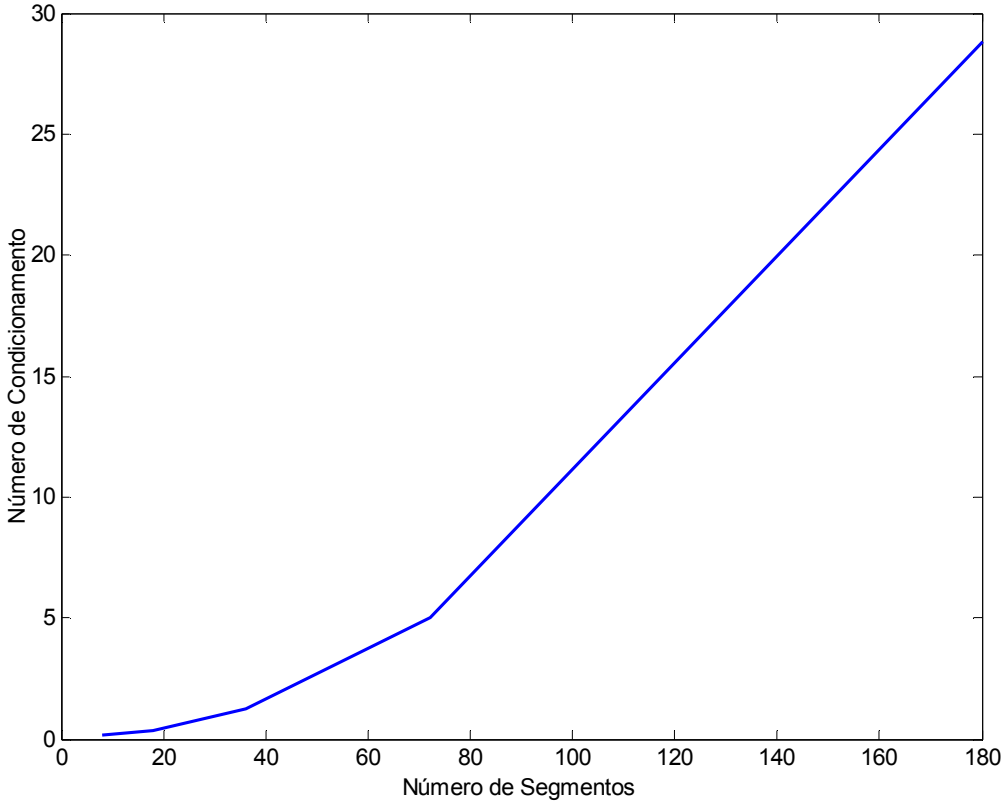


Figura 4.7 –MOM FBP – Avaliação da influência do número de segmentos no tempo de processamento

esperado. Entretanto, observa-se que enquanto o tempo de processamento aumenta gradativamente, o número de condicionamento tende a se estabilizar após cerca de 60 segmentos.

4.4.1.2. Influência do Número de Pontos de Integração

Nessa Subseção é avaliado o impacto da variação da quantidade de pontos de Gauss por segmento na solução pelo MOM utilizando FBP. Os resultados são calculados considerando os parâmetros apresentados na Subseção4.4.1, variando a quantidade de pontos de Gauss de 1 a 7. Conforme descrito na Seção4.4, para realização da integração numérica com a garantia de que não ocorram singularidades,é necessário considerar um número de pontos de Gauss diferentes para os segmentos observador e fonte; dessa forma, a variação de pontos de Gauss é realizada levando em consideração essa condição.

A Tabela 4.2 resume os resultados obtidos, com evidência para os erros $E_M(\%)$e$E_{MAX}(\%)$alcançados, tempo de processamento e o número de condicionamento da matriz dos sistemas lineares advindos da aplicação do MOM no problema.De forma geral, o aumento de números de pontos de Gauss diminui o erro observado, embora, para o problema tratado não sejam observadas melhorias significativas para escolhas acima de 4 pontos de Gauss.

O tempo de processamento também aumenta consideravelmente com o aumento do número de pontos; dessa forma, um número menor de pontos de Gauss garante respostas com menor custo computacional. Em relação ao número de condicionamento, observa-se que a alteração da quantidade de pontos de Gauss nãocausa uma variação significativa nesse parâmetro. A relação entre a quantidade de pontos de Gauss no observador e na fonte é importante; entretanto, a inversão das quantidades não alteram os resultados.

Tabela 4.2- MOM FBP – Correntes induzidas no cilindro -$E_M(\%)$,$E_{MAX}(\%)$,número de condicionamento e tempo de processamento – variação do número de pontos de Gauss

Número de Pontos de Gauss	***J***		***M***		Número de Condicionamento	Tempo de Processamento (s)
	$E_M(\%)$	$E_{MAX}(\%)$	$E_M(\%)$	$E_{MAX}(\%)$		
pgf = 1 pgo = 2	3.0879	7.9387	1.1951	2.2627	865.0324	1.06
pgf = 2 pgo = 3	2.0608	5.2979	0.73894	1.1754	865.5333	2.58
pgf = 3 pgo = 4	1.9182	4.7338	0.68353	0.98121	865.7948	5.21
pgf = 4 pgo = 5	1.8645	4.4636	0.66621	0.91007	865.9395	7.67
pgf = 5 pgo = 6	1.8401	4.2992	0.66009	0.87905	866.0347	11.31
pgf = 6 pgo = 7	1.828	4.1891	0.6583	0.86163	866.1026	16.41

4.4.2. Solução utilizando Funções Triangulares

Para avaliação do MOM com a utilização de funções base e teste triangularesé considerada as mesmas condições apresentadas na seção 4.4.1.As curvas dascorrentes ***J*** e ***M***induzidas na superfície do cilindro, obtidas pela aplicação do MOM e pela solução analítica são apresentadas naFigura 4.8.É possível perceber boa coerência entre os resultados numérico e analítico para o caso sob estudo.

A Tabela 4.3 apresentaos erros $E_M(\%)$e$E_{MAX}(\%)$paraas correntes ***J*** e ***M***, os quais também validam os resultados obtidos. Assim, uma vez confirmada a validade da solução é então conduzida uma análise paramétrica, apresentada nas Seções 4.4.2.1 e 4.4.2.2com o objetivo de identificar o melhor conjunto de valores para os parâmetros do MOM.

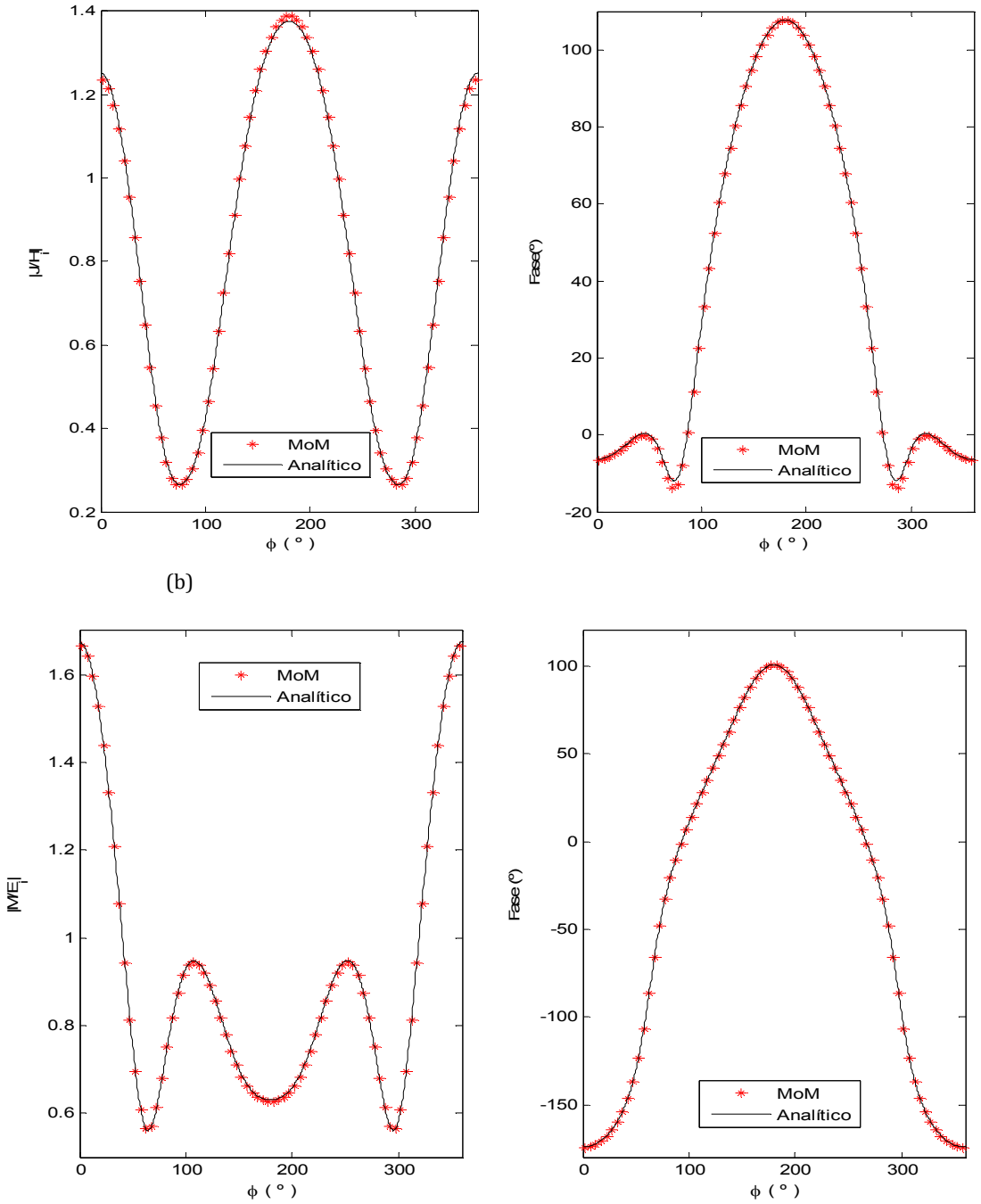


Figura 4.8 – Validação MOM FBT– Correntes induzidas no cilindro a) Magnitude dacorrente ***J***; b) Fase da corrente***J***; c) Magnitude da corrente ***M*** d) Fase da corrente ***M***

Tabela 4.3- Validação MOM FBT – Correntes induzidas no cilindro - $E_M(\%)$e$E_{MAX}(\%)$

Grandeza	$E_M(\%)$	$E_{MAX}(\%)$
J	1.7444	3.7483
M	0.66964	0.83112

4.4.2.1. Influência da Quantidade de Segmentos

Nessa Subseção é avaliado o impacto da variação da quantidade de segmentos na solução pelo MOM utilizando FBT. Os resultados são calculados considerando os parâmetros apresentados na Seção4.4.1, variando a quantidade de segmentos de 8 a 180 segmentos.

A Figura 4.9 apresenta$E_M(\%)$, $E_{MAX}(\%)$para os resultados obtidos.A Figura 4.10e a Figura 4.11apresentam o número de condicionamento da matriz Ze o tempo de processamento em relação ao número de segmentos, respectivamente.As mesmas análises e considerações apresentadas na Subseção paras as FBP são válidas para as FBT, tanto para $E_M(\%)$e$E_{MAX}(\%)$, como para o tempo de processamento e o número de condicionamento da matriz Z. Porém, vale salientar que os resultados obtidos com FBT são ligeiramente melhores que os obtidos com FBP, com exceção para o tempo, onde pode ser observado que a FBT apresenta maior custo computacional.

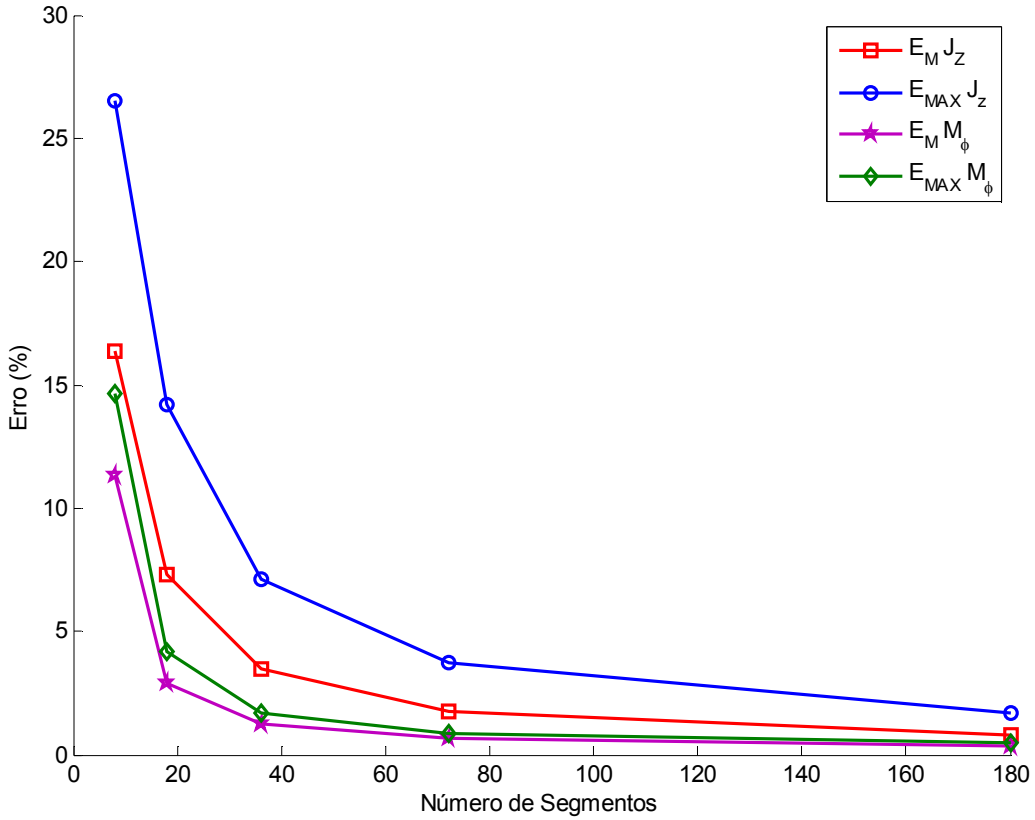


Figura 4.9 –MOM FBT – Avaliação da influência do número de segmentos no erro

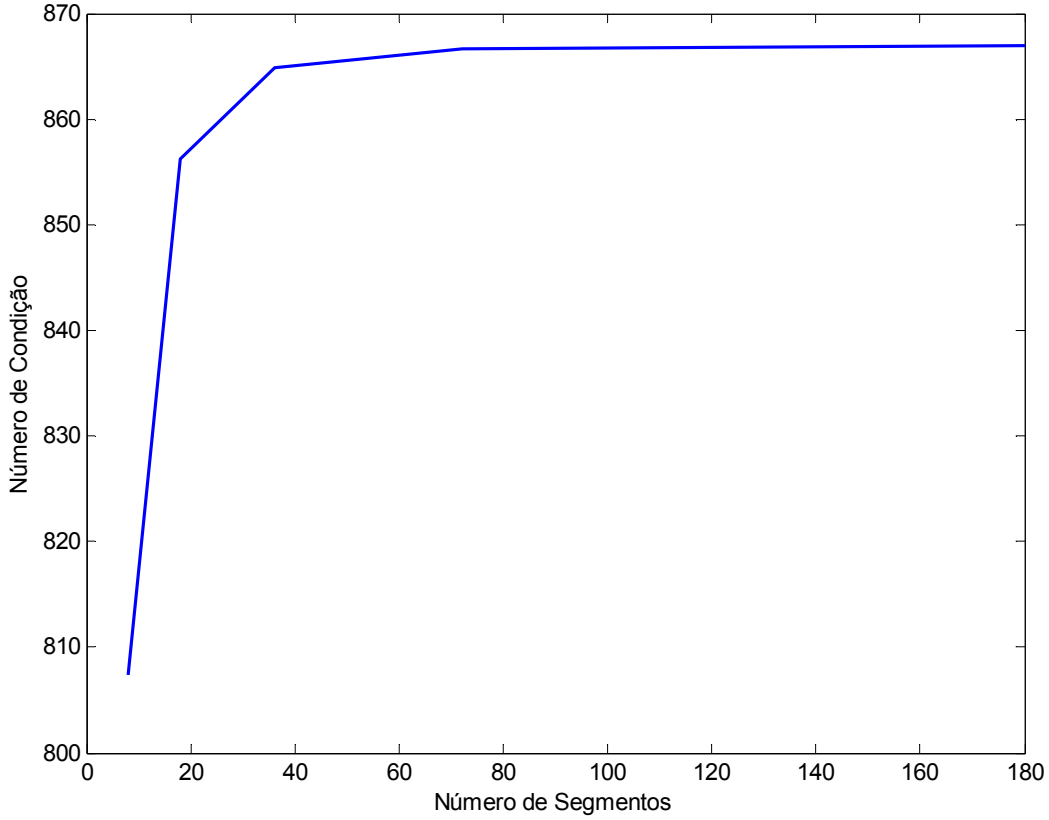


Figura 4.10 – MOM FBT – Avaliação influência do número de segmentos no número de condicionamento

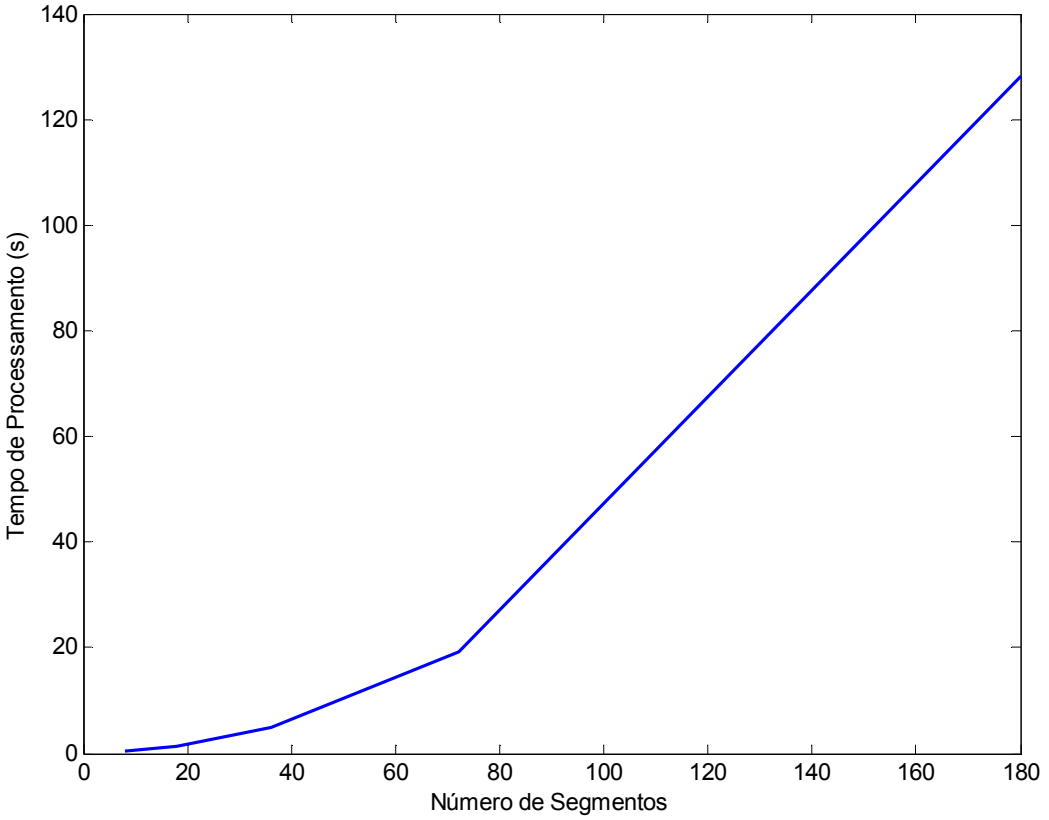


Figura 4.11 –MOM FBT – Avaliação da influência do número de segmentos no tempo de processamento

4.4.2.2. Influência do Número de Pontos de Integração

Nessa Subseção é avaliado o impacto da variação da quantidade de pontos de Gauss por segmento na solução pelo MOM utilizando FBT. Os resultados são calculados considerando os parâmetros apresentados na seção 4.4.1, variando a quantidade de pontos de Gauss variando de 1 a 7.A Tabela 4.4resume os resultados obtidos, com evidência para os erros $E_M(\%)$e$E_{MAX}(\%)$alcançados, tempo de processamento e o número de condicionamento da matriz Z.

As mesmas análises e considerações apresentadas na Subseção 0 para as FBP são válidas para as FBT. Porém, vale salientar que os resultados obtidos com FBT são ligeiramente melhores que os obtidos com FBP, com exceção para o tempo, onde pode ser observado que a FBT apresenta maior custo computacional.

Tabela 4.4- MOM FBT – Correntes induzidas no cilindro - $E_M(\%)$,$E_{MAX}(\%)$,número de condicionamento e tempo de processamento – variação do número de pontos de Gauss

Número de Pontos de Gauss	***J***		***M***		Número de Condicionamento	Tempo de Processamento (s)
	$E_M(\%)$	$E_{MAX}(\%)$	$E_M(\%)$	$E_{MAX}(\%)$		
pgf = 1 pgo = 2	3.573	12.3174	1.3662	3.4555	867.9524	3.96
pgf = 2 pgo = 3	1.7465	4.0357	0.66181	0.86308	866.5454	10.36
pgf = 3 pgo = 4	1.7444	3.7483	0.66964	0.83112	866.6987	19.89
pgf = 4 pgo = 5	1.7687	3.5893	0.68629	0.8255	866.8383	32.38
pgf = 5 pgo = 6	1.7993	3.5008	0.70374	0.85534	866.9393	47.36
pgf = 6 pgo = 7	1.8284	3.4497	0.72124	0.87975	867.0140	65.85

4.4.3. Avaliação FBP X FBT

Em relação ao tipo de funções base e teste, comparando os resultados apresentados nas Subseções 4.4.1e 4.4.2pode-se concluir que para o problema sob estudo,os erros $E_M(\%)$e$E_{MAX}(\%)$alcançadospara ligeiramente melhores para as FBT do que para as FBP. Em relação ao tempo de processamento e o número de

condicionamento,os resultados são melhores para as FBP, tendo em vista o aumento da complexidade do cálculo.

Acredita-se que essa pequena diferençaacontece devidoàsimplicidade do problema sob estudo, o que não conduz a uma vantagem expressiva das FBT.

4.5. Considerações Finais

Nesse capítulo éapresentado o MOM e a sua aplicação ao problema do espalhamento eletromagnético por um cilindro dielétrico infinito. E os resultados obtidos são validados por meio da comparação com a respectiva solução analítica.

Capítulo 5
Método Híbrido IEFGM - MOM

Neste capítulo inicialmente, é apresentada umabreve revisão bibliográficasobre os principais métodos híbridos aplicados ao problema de espalhamento eletromagnético. Em seguida, é descrita a modelagem matemática do novométodo híbrido para solução do espalhamento eletromagnético proposto nesse trabalho. O método combinaoIEFGM com o MOM, com o objetivo de obter uma solução geral e robusta. Então, a metodologia desenvolvida é aplicada a um cilindro dielétrico infinito iluminado por uma onda TMz e os resultados obtidos são comparados com a respectiva solução analítica e aqueles obtidos pelo IEFGM e o MOM separadamente.

5.1. Métodos Híbridos

A ideia central dos métodos híbridos é a aplicação de dois ou mais métodos, combinando as vantagens e pontos fortes de cada método, para a obtenção de soluções para uma classe mais geral de problemas. Dentre os primeiros trabalhos sobre espalhamento eletromagnético por objetos não-homogêneos utilizando métodos híbridos, pode-se se destacar(PAULSEN, LYNCH e STROHBEHN, 1988), (YUAN, LYNCH e STROHBEHN, 1990)e(YUAN, 1990). Os métodos híbridos propostos até o momento apresentam como característica básica a adoção do acoplamento entre técnicas numéricas diferenciais e integrais. Destaca-se entre as técnicas numéricas diferenciais os Métodos das Diferenças Finitas (FDM), especificamente o Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo (FDTD), e o FEM. Dentre as técnicas numéricas integrais destaca-se o MOM ou Método dos Elementos de Fronteira (*Boundary Element Method* - BEM).

Dentre os principaismétodos híbridos presentes na literatura atual, cita-se:

1. FEM-MOM: (YUAN, 1990), (YUAN, LYNCH e STROHBEHN, 1990), (JANKOVIC, LABELLE, *et al.*, 1994), (PEKEL e MITTRA, 1995), (LING, SHENG e JIN, 1997), (ALI, HUBING e DRENIAK, 1997), (VOUVAKIS, LEE, *et al.*, 2004), (ILIC e NOTAROS, 2009), (ILIC e NOTAROS, 2009), (MOHSIN e SHEIKH, 2010)e(ILIC e NOTAROS, 2010);
2. MOM-FDTD: (TAFLOVE e UMASHANKAR, 1982), (CERRI, RUSSO, *et al.*, 1998), (MARROCCO, FARI e BARDATI, 2001), (TOPA e KARWOWSKI, 2007)e(TOPA e KARWOWSKI, 2008);
3. FEM e Método Integral da Condição de Contorno Estendida (BI), (MORGAN, CHEN, *et al.*, 1984), (LIU e JIN, 2001)e(LEI, HU e HU, 2012);
4. FEM e BEM (LYNCH, PAULSEN e STROHBEHN, 1986),(PAULSEN, LYNCH e STROHBEHN, 1988),(AFONSO, 2003)e(YU, WANG e SUN, 2009);
5. Field Feedback Formulation (F3), (MORGAN e WELCH, 1986), (CRUELLAS e FERRANDO, 1988), (CRUELLAS e FERRANDO, 1989) e (MORGAN e WELCH, 1992).

Com base nos trabalhos disponíveis na literatura verifica-se que a técnica híbrida mais empregada para tratar problemas de espalhamento eletromagnético é o método FEM-MOM. A solução pelo FEM é aplicada àregião interior do espalhador, que,em geral, envolve um meio não homogêneo, e a região exterior e ilimitadaé avaliada peloMOM. Assim, devido ao grande uso dessa técnica híbrida, é apresentada uma breve revisão bibliográfica a seu respeito na Seção 5.1.1, a seguir.

5.1.1. Método FEM-MOM

Ambos os métodos integrais e diferencias têm demonstrado ser muito potentes para resolver problemas de espalhamento eletromagnético. No entanto, cada método tem vantagens e desvantagens próprias quando aplicado a diferentes problemas.

O MOM é um método que lida bem com problemas ilimitados; entretanto, torna-se computacionalmente complexo quando heterogeneidades estão presentes. Em contraste, heterogeneidades são facilmente tratadas pelo FEM, que requer menos recursos computacionais devido a sua matriz esparsa. Porém, o FEM é mais apropriado para problemas de valor de contorno, ou seja, problemas limitados por fronteiras

explícitas. Portanto, o objetivo do método híbrido FEM-MOM é combinar as principais vantagens dos dois métodos para tornar mais vantajoso o tratamento de problemas de espalhamento eletromagnético com heterogeneidades complexas.

Basicamente, essa técnica híbrida utiliza FEM para formular o campo eletromagnético em regiões de geometria complexa e heterogêneas e utiliza o MOM para solucionar as equações de Maxwell nas regiões onde as funções de Green são conhecidas. Nestas regiões, o FEM falha em determinar satisfatoriamente a condição pertinente de radiação (YUAN, LYNCH e STROHBEHN, 1990).

A técnica consiste em aplicar o princípio da equivalência e transformar o problema original em problemas equivalentes:exterior e interior, região onde as funções de Green estão disponíveis e região onde não estão disponíveis, respectivamente. Essas regiões são então acopladas através das condições da fronteira, de modo a aproximar a condição de radiação de Sommerfeld, na superfície exterior do espalhador, devido à continuidade dos campos elétrico e magnético, combinando as soluções de MOM e FEM para disponibilizar a solução geral, (YUAN, 1990),(YUAN, LYNCH e STROHBEHN, 1990),(HOPPE, EPP e LEE, 1994),(JANKOVIC, LABELLE, *et al.*, 1994), (ALI, HUBING e DRENIAK, 1997),(LING, SHENG e JIN, 1997), (VOUVAKIS, LEE, *et al.*, 2004)e(ILIC, DJORDJEVIC, *et al.*, 2009).

Em relação ao método híbrido FEM-MOM, a utilização da técnica FEM apresenta como principal desvantagem a dependência da malha utilizada para garantir a qualidade dos resultados obtidos. Essa desvantagem pode ser superada pelos MMs, que podem oferecer ainda as suas demais vantagens, apresentadas no Capítulo 3. Essas características justificam a proposta de um novo método híbrido com a utilização de um MM em acoplamento com o MOM.

5.2. Método Híbrido IEFGM-MOM

Tendo em vista o desenvolvimento de novas técnicas *meshless*, que possuem grande robustez, boas taxas de convergência e maior facilidade para a discretização de problemas de valor de contorno, aliado ao sucesso dos demais métodos híbridos no tratamento de problemas de espalhamento eletromagnético, esse trabalho propõe um novo método híbrido, o qual combina oIEFGM com o MOM. Esse método aproveita as

vantagens do MM para a solução da equação diferencial, a fim de tratar a região não homogênea e finita do problema, aliando às vantagens do MOM, já destacadas no Capítulo 4, para a solução da região ilimitada e homogênea.

A metodologia proposta no presente trabalho é baseada na formulação de (HOPPE, EPP e LEE, 1994) que apresenta um Método Híbrido quecombina elementos da EFIE eda MFIE ao longo da região exterior com a solução doFEM para a região interior para tratar um Corpo de Revolução (*Body of Revolution* – BOR).

O desafio do presente trabalho está no desenvolvimento da modelagem matemática e na implementação computacional do método híbridoIEFGM-MOM para solução e problemas relacionados ao espalhamento eletromagnético, ainda não disponíveis na literatura.

5.3. Modelagem Matemática do IEFGM-MOM

5.3.1. Descrição Geral do Problema

Nesse trabalho, a técnica proposta é aplicada na solução de um problema de espalhamento eletromagnético em 2D, conforme apresentado Seção 2.2 e na Figura 5.1. O problema é dividido em dois: o problema interno, onde o campo eletromagnético em um cilindro dielétrico, homogêneo e infinito é modelado utilizando o IEFGM, e o problema externo, que abrange o espaço livre, sendo aplicadas as equações integrais sob a superfície do cilindro, as quais são avaliadas pelo MOM.

Os problemas interno e externo são acoplados pela imposição da continuidade dos campos elétrico e magnético tangenciais sobre a superfície do cilindro. Consequentemente, o tamanho do problema é reduzido, em relação à solução utilizando unicamente um método diferencial, pois não é necessário considerar a região externa ao cilindro e nenhuma fronteira fictícia com condição absorvente precisa ser definida.

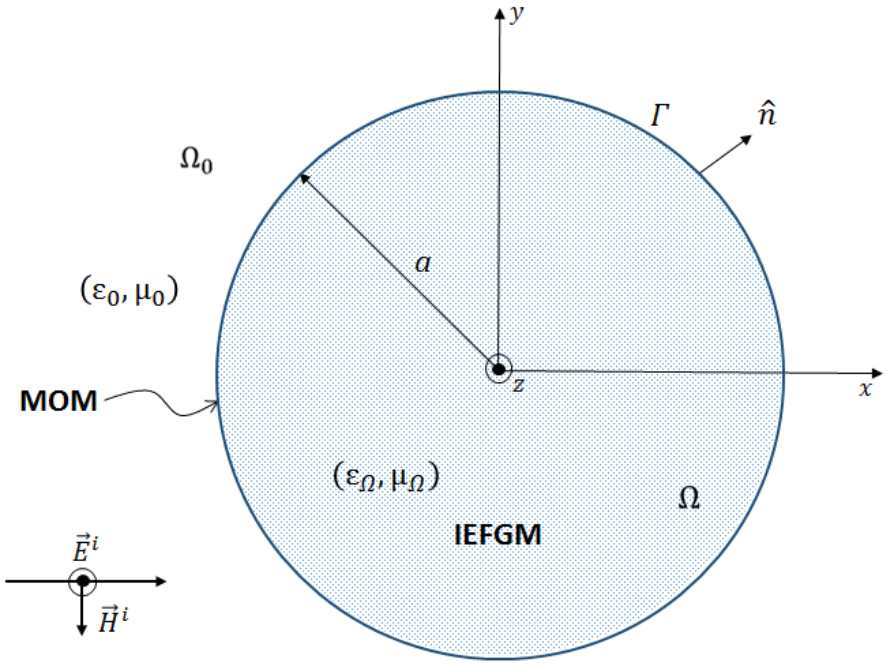


Figura 5.1 - Seção transversal do cilindro dielétrico iluminado por uma onda TMz.

5.3.2. Problema Interno - IEFGM

A discretização do problema interno é realizada conforme apresentado na Figura 5.2, utilizando um conjunto de nós N distribuídos sobre o domínio do problema ($\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$). Cada nó, I, é um ponto $\mathbf{x}_I = (x, y) \in \bar{\Omega}$para o qual a função de forma, $\Phi_I(\mathbf{x})$, é associada.

Para o problema do espalhamento eletromagnético sob estudo, uma onda plana TMz incide normalmente sob o cilindro dielétrico infinito, e todas parcelas do campo elétrico (E, E^SeE^i) são tangenciais à superfície do cilindro, ou seja, na direção $\hat{z}$. Assim, como as componentes tangenciais do campo devem ser contínuas ao longo de Γ, então, é conveniente escolher o campo elétrico como variável desconhecida a ser determinada na formulação IEFGM.

A formulação IEFGM é aplicada ao problema interno a partir da Equação (3.19), aqui reescrita:

$$\int_{\Omega} \left[\left(\nabla \cdot \frac{1}{\mu_r} \boldsymbol{E}(\mathbf{x}) \right) \cdot \nabla \mathbb{P}(\mathbf{x}) - {k_0}^2 \varepsilon_r \boldsymbol{E}(\mathbf{x}) \mathbb{P}(\mathbf{x}) \right] d\Omega \; + \; \int_{\Gamma} \psi \mathbb{P}(\mathbf{x}) d\Gamma = 0. \qquad (5.1)$$

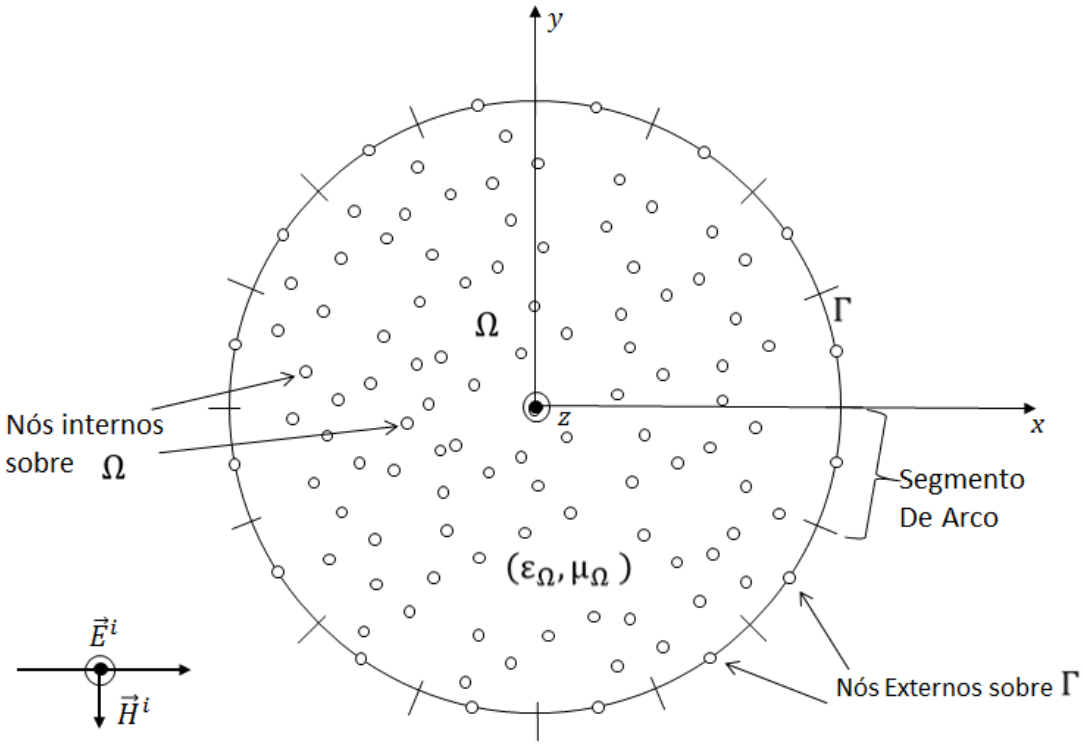


Figura 5.2 – Problema equivalente para região interna – distribuição de nós para IEFGM

Aplicando a Lei de Faraday, a Equação (5.1)pode ser reescritaem função apenas das quantidades desconhecidas, a serem determinadas, $\boldsymbol{E}(\mathbf{x})$ e $\boldsymbol{J}(\mathbf{x})$, obtendo assim a equação final para a formulação IEFGM, conforme a seguir:

$$\int_{\Omega} \left[\left(\nabla \cdot \frac{1}{\mu_r}\boldsymbol{E}(\mathbf{x})\right) \cdot \nabla\mathbb{P}(\mathbf{x}) - {k_0}^2 \varepsilon_r \boldsymbol{E}(\mathbf{x})\mathbb{P}(\mathbf{x})\right] d\Omega = j\omega\mu_0 \int_{\Gamma} \mathbb{P}(\mathbf{x})\boldsymbol{J}(\mathbf{x}) d\Gamma \tag{5.2}$$

Utilizando o método de Galerkin, as funções desconhecidas $\boldsymbol{E}(\mathbf{x})$ e $\boldsymbol{J}(\mathbf{x})$podem ser aproximadas utilizando as funções de forma, Φ_I, como:

$$\boldsymbol{E}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{N} \Phi_I(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}_I) \tag{5.3}$$

e

$$\boldsymbol{J}^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{N} \Phi_I(\mathbf{x}) I_I^j(\mathbf{x}_I), \tag{5.4}$$

onde$\mathbf{x} = (x, y)$, $v(\mathbf{x}_I)$ e $I_I^j(\mathbf{x}_I)$são coeficientes desconhecidos.

Considerando toda a modelagem matemática apresentada na Seção3.4 e a função de peso $\mathbb{P}$definida na Equação (2.13), é possível definir as matrizes $Z^{IEFG}(N_T \times$

N_T)e$B^{IEFG}(N_T \times N_\Gamma)$. Essas matrizes são as primeiras necessárias para o desenvolvimento do método híbrido. Seus elementos são definidos por:

$$Z_{ij}^{IEFG} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \Phi_I \nabla \Phi_J - {k_0}^2 \varepsilon_r \Phi_I \Phi_J\right) d\Omega \tag{5.5}$$

e

$$B_{ij}^{IEFG} = -j\omega\mu_0 \int_{\Gamma} \Phi_I \Phi_J d\Gamma \tag{5.6}$$

onde$N_T = N_\Omega + N_\Gamma$, N_Ωé o número de nós no domínio Ω e N_Γé o número de nós sobre a fronteira Γ.

Os elementos das matrizes Z^{IEFG}eB^{IEFG}são calculados solucionando as integrais numericamente, utilizando a Quadratura Gaussiana, a qual é aplicada a uma estrutura auxiliar de células retangulares para a integral sobre Ω.Cada célula será avaliada utilizando 2 x 2 pontos de Gauss. Para a integral sobrea fronteira, Γ, a mesma é dividida em segmentos de arco, conforme ilustrado na Figura 5.2, sob os quais são aplicados pontos de Gauss, variando de 2 a 7. Conforme destacado na Seção4.4.2.2, a partir de 2 pontos de Gauss, os mesmos oferecem pouca influência no resultado obtido; assim, nesse capítulo são utilizados 3 pontos de Gauss no observador e 4 pontos na fonte, respectivamente.

5.3.3. Problema Externo - MOM

Considerando o problema equivalente externo, conforme descrito na Seção 2.4.1 e reapresentado na Figura 5.3, o cilindro dielétrico infinito é substituído por correntes superficiaisequivalentes $\boldsymbol{J}$ e $\mathbf{M}$ que são produzidas pelos camposelétrico e magnético reais fora do cilindro, e os quais são zero dentro do cilindro. As correntes devem satisfazer as condições:

$$\boldsymbol{J} = \hat{n} \times \boldsymbol{H} \tag{5.7}$$

e

$$\boldsymbol{M} = -\hat{n} \times \boldsymbol{E} \tag{5.8}$$

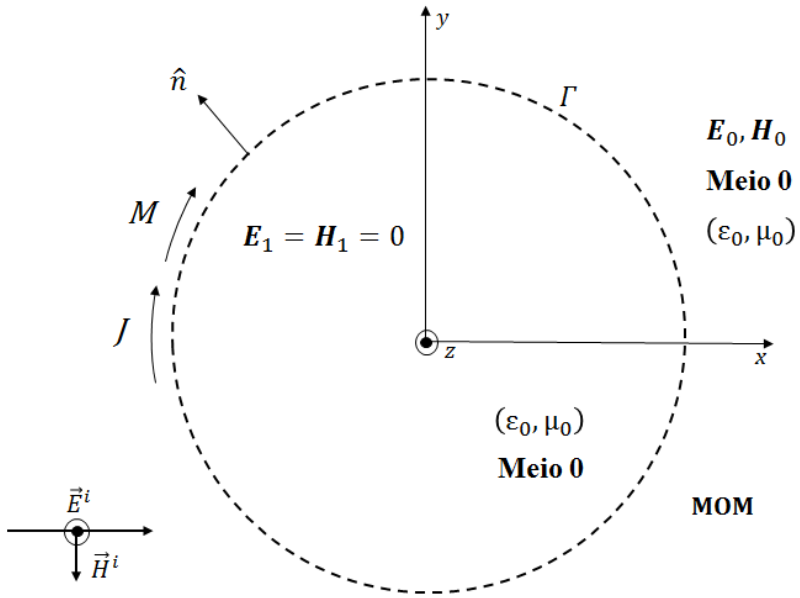


Figura 5.3 – Problema equivalente para região externa – MOM

As Equações (5.7) e (5.8)são responsáveis pelo acoplamento dos campos com suas respectivas correntes, garantem a continuidade das componentes tangenciais dos campos elétrico e magnético, e também permitem o acoplamento entre os métodos IEFGM e MOM.

Conforme descrito na Seção 2.4.1, a EFIE para o problema externo é dada pela Equação(2.37), aqui reapresentada:

$$E_0 e^{jk_0 x} = -\boldsymbol{M}(\mathbf{x}) + \frac{\omega\mu_0}{4}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{J}(\mathbf{x}') H_0^{(2)}(k_0 R)\rho' d\phi' + \frac{jk_0}{4}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{M}(\mathbf{x}') \cos\psi\, H_1^{(2)}(k_0 R)\rho' d\phi'. \tag{5.9}$$

Nesse trabalho, as correntes $\boldsymbol{J}(\mathbf{x}')$ e $\boldsymbol{M}(\mathbf{x}')$,assim como a função de teste,são descritas em termos das funções base pulso ou triângulo, ao longo de Γ. Assim, considerando a modelagem matemática apresentada na Seção 4.3.1.1 são obtidas as matrizes$Z^{JMOM}(N_P \times N_P)$, $Z^{MMOM}(N_P \times N_P)$e$V^{MOM}(N_P \times 1)$para as funções teste e base do tipo pulso, onde seus elementos definidos por:

$$Z_{ij}^{JMOM} = \frac{\omega\mu_0}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} H_0^{(2)}(kR)\rho\rho' d\phi'\, d\phi, \tag{5.10}$$

$$Z_{ij}^{MMOM} = \int_0^{2\pi} d\phi + \frac{jk_0}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} cos\,\psi\, \nabla' H_1^{(2)}(kR)\rho\rho' d\phi' d\phi \tag{5.11}$$

e

$$V_{0,i}^{MOM} = \int_0^{2\pi} E_0 e^{jk_0 x} \rho d\phi. \tag{5.12}$$

ondeN_Pé o número de funções pulso sobre Γ.

Para as funções teste e base triangulares têm-se as matrizes $Z^{JMOM}(N_T \times N_T)$, $Z^{MMOM}(N_T \times N_T)$e$V^{MOM}(N_T \times 1)$, onde os elementos das matrizes são definidos por:

$$Z_{ij}^{JMOM} = \sum_{q_i=1}^{2} \sum_{q_j=1}^{2} \frac{\omega\mu_0}{4} \int_0^{2\pi} T_{q_i}(\mathbf{x}) \int_0^{2\pi} T_{q_j}(\mathbf{x}') H_0^{(2)}(k_0 R) \rho\rho' d\phi' \, d\phi \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned} Z_{ij}^{MMOM} &= -\sum_{q_i=1}^{2} \int_0^{2\pi} T_{q_i}(\mathbf{x}) d\phi \\ &+ \sum_{q_i=1}^{2} \sum_{q_j=1}^{2} \frac{jk_0}{4} \int_0^{2\pi} T_{q_i}(\mathbf{x}) \int_0^{2\pi} T_{q_j}(\mathbf{x}') \cos\psi \, \nabla' H_1^{(2)}(k_0 R) \rho\rho' d\phi' \, d\phi \end{aligned} \tag{5.14}$$

e

$$V_{0,i}^{MOM} = \sum_{q_i=1}^{2} \int_0^{2\pi} T_{q_i}(\mathbf{x}) E_0 e^{jk_0 x} \rho d\phi \,. \tag{5.15}$$

ondeN_Té o número de triângulos sobre Γ, $q_i = q_j = 1$correspondem ao MTE para o observador e fonte, respectivamente e $q_i = q_j = 2$correspondem ao MTD para o osbervador e fonte, respectivamente, conforme Figura 4.3.

Neste trabalho, os elementos das matrizes Z^{JMOM}, Z^{MMOM}eV^{MOM}são calculados numericamente, solucionando as integrais utilizando quadratura Gaussiana. Assim, a fronteira Γ é dividida em segmentos de arco, conforme ilustrado na Figura 5.2, sendo aplicados pontos de Gauss em cada segmento, variando de 2 a 7. Para contornar os possíveis casos onde singularidades estão presentes, ou seja, quando o ponto de observação, $\mathbf{x}$, está muito próximo do ponto da fonte, $\mathbf{x}'$,a técnica utilizada consiste em considerar um número de pontos de Gauss diferentespara os segmentos observador e fonte, de modo a garantir que os pontos nunca sejam coincidentes.

5.4. Formulação do Método Híbrido IEFGM-MOM

A técnica híbrida proposta nesse trabalho combina o IEFGM, aplicado ao problema interno, e a EFIE solucionada pelo MOM, aplicada ao problema externo. As soluções do IEFGM e MOM são acopladas forçando a continuidade dos campos elétrico e magnético tangenciais entre as regiões interior e exterior. A continuidade do campo magnético tangencial é imposta pela integral na fronteira Γ apresentada na Equação (5.2), que incorpora a condição apresentada na Equação (5.7). E continuidade do campo elétrico tangencial apresentada na Equação(5.8), pode ser imposta da seguinte forma:

$$\int_{\Gamma} W_{MOM} \cdot (\boldsymbol{E} - \hat{n} \times \boldsymbol{M}) d\Gamma = 0, \tag{5.16}$$

ondeW_{MOM}são as funções de teste do MOM.As funções desconhecidas E_zeM_{ϕ}são aproximadas na fronteira Γpor:

$$\boldsymbol{E}(\mathbf{x}') = \sum_{I=1}^{N_{\mathrm{P}}} F_I(\mathbf{x}')\boldsymbol{v}_I \tag{5.17}$$

e

$$\boldsymbol{M}(\mathbf{x}') = \sum_{\mathrm{I}=1}^{N_{\mathrm{P}}} F_I(\mathbf{x}') I_I^M , \tag{5.18}$$

onde$\boldsymbol{v}$ são os coeficientes desconhecidos de E_z $(\boldsymbol{r}')$, I_I^Msão os coeficientes desconhecidos de $M_{\phi}(\boldsymbol{r}')eF_I(\boldsymbol{r}')$são funções de base pulso ou triangulares.

Considerando as funções de base e teste do tipo pulso, obtém-se as matrizes $H^E\,(N_{\mathrm{P}} \times N_{\mathrm{P}})eH^M(N_{\mathrm{P}} \times N_{\mathrm{P}})$, cujoselementos são dados por:

$$H_{ij}^E = H_{ij}^M = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho\rho' d d\phi'\, d\phi. \tag{5.19}$$

Considerando funções de base e teste triangulares, obtém-se matrizes $H^E\,(N_T \times N_T)$e$H^M(N_{\mathrm{T}} \times N_T)$, cujoselementos são:

$$H_{ij}^E = H_{ij}^M = \sum_{q_i=1}^{2} \sum_{q_j=1}^{2} \int_0^{2\pi} T_{q_i}(\mathbf{x}) \int_0^{2\pi} T_{q_j}(\mathbf{x}') \rho\rho' d d\phi'\, d\phi \tag{5.20}$$

ondetodos os elementos são avaliados usando a quadratura Gaussiana para as integrais ϕ' e ϕ, respectivamente, conforme descrito na Seção 5.3.3.

5.4.1. Solução Global

Com o objetivo de se obter uma solução simultânea para as incógnitas E_z ,sobreΩ, e J_z eM_ϕ,ao longo de Γ, as equações das Seções 5.3.2 e 5.3.3 devem ser combinadas em um único sistema linear. Sendo que, quando considerado funções do tipo pulso as equações são as Equações (5.5), (5.6), (5.10) - (5.12) e (5.19), enquanto queas funções triangularessão asEquações (5.5), (5.6), (5.13) - (5.15) e (5.20), o que resulta no sistema linear no seguinte formato:

$$\begin{bmatrix} Z^{IEFG} & B^{IEFG} & 0 \\ H^E & 0 & H^M \\ 0 & Z^{IMOM} & Z^{MMOM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^E \\ I^J \\ I^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ V^{MOM} \end{bmatrix}. \tag{5.21}$$

A Figura 5.4ilustra o sistema linear da Equação (5.21), destacando o tipo de função de forma ou de função base, assim como o tipo de função de teste, é empregada a cada submatriz. Na Figura 5.4 é apresentada a matriz global do método híbrido, Z_H, ondeé também destacada a dimensão de cada submatriz. Vale destacar que a correta aplicação das funções de forma, para o IEFGM, e das funções teste e base, para o MOM, é de fundamental importância para o funcionamento da modelagem matemática desenvolvida.

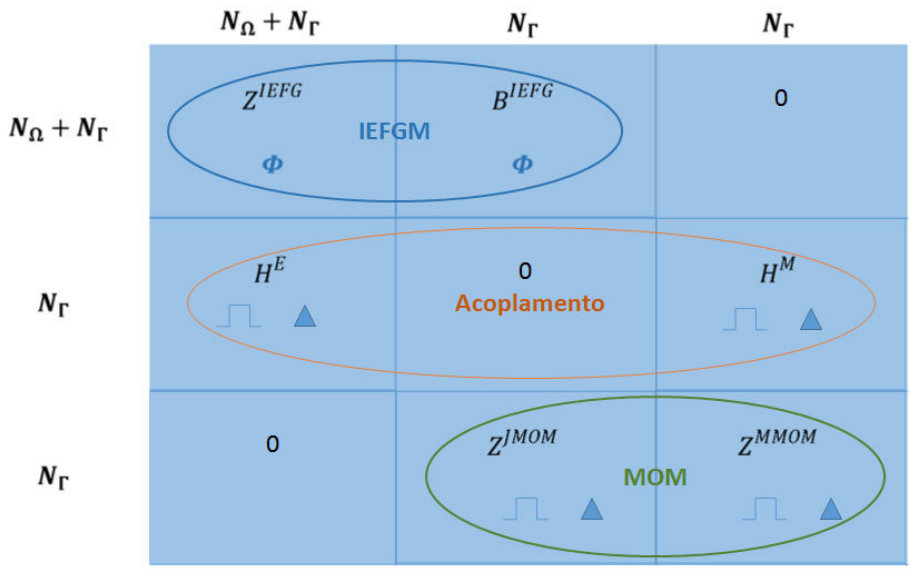


Figura 5.4 – Estrutura da matriz globalZ_H

5.5. Análise dos Resultados

Nessa Seção são apresentados e avaliados os resultados obtidos na aplicação do IEFGM-MOM. Esses resultados são comparados com a respectiva solução analítica por meio dos erros apresentados na Seção 3.5e aqui redefinidos para o IEFGM-MOM:

$$E_M(\%) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{|S_{analitico} - S_{IEFGM-MOM}|}{|S_{analitico}|}}{n} * 100\% \tag{5.22}$$

e

$$E_{MAX}(\%) = max \left\| \frac{|S_{analitico} - S_{IEFGM-MOM}|}{|S_{analitico}|} \right\| * 100\% \tag{5.23}$$

onde$S_{IEFGM-MOM}$é o valor obtido pela solução IEFGM-MOM.

Nesse trabalho, todas as execuções das rotinas computacionais desenvolvidas foram realizadas utilizandoum computador Intel i5-3570QM, 3.4GHz, 8GB RAM.

5.5.1. Solução Base IEFGM-MOM Utilizando Funções Pulso

Para avaliação do IEFGM-MOM com a utilização de funções base e teste do tipo pulsoé considerado um cilindro dielétrico infinito, conforme o apresentado na Figura 5.1, com raio $a = 0.3\lambda_0$, $\varepsilon_\Omega = 2\varepsilon_0e\mu_\Omega = \mu_0$. Em relação à construção do IEFGM, é utilizada uma densidade de nós por área de 1238 ($nós/{\lambda_0}^2$), para manter a densidade da mesma ordem que a utilizada na Seção 3.5.1.

Assim, sãouniformemente distribuídos 351 nós de forma cilíndrica sobre o domínio do problema, sendo 288distribuídos no interior do cilindro e 63distribuídos na fronteira Γ. Em relação ao número de pontos de integração, é verificado que paraalcançar erros da ordem dos obtidos noCapítulo 3, faz-se necessário utilizar uma $RGN = 30$aproximadamente; essa demanda pode ser verificada na Subseção5.5.1.2. Assim, são uniformemente distribuídos11316 pontos de integração de forma retangular, ou seja, uma RGN de 32,2. Para cada nóéutilizado um domínio de influência com constante$\alpha = 2,6$. A função janela utilizada éa mesma apresentada na(3.17).Em relação à construção do MOM, a fronteira Γdo cilindro édiscretizada em 63segmentos, nos quais são aplicadas funções de base e teste.

Para validação do IEFGM-MOM é considerado o cálculo do campo elétrico, $\boldsymbol{E}$, sobre uma linha posicionada através da seção do cilindro sobre o eixo x e $y = 0$, de $x = -a$ a $x = a$. E simultaneamente calculadasas correntes elétrica,$\boldsymbol{J}$,e magnética,$\boldsymbol{M}$,superficiais. A Figura 5.5apresenta os resultados obtidos pela aplicação do IEFGM-MOM e pela solução analítica.A Tabela 5.1resume os erros $\mathrm{E_M}(\%)$e$\mathrm{E_{MAX}}(\%)$para$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{J}$e $\boldsymbol{M}$. É possível perceber boa coerência entre os resultados numérico e analítico para o caso sob estudo.

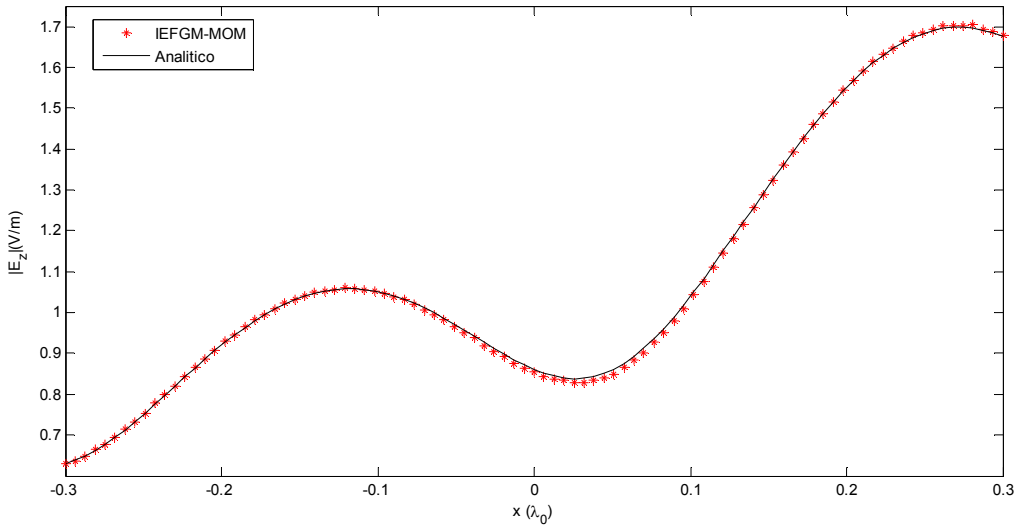
Tabela 5.1- Validação IEFGM-MOM FBP –$\mathrm{E_M}(\%)$e$\mathrm{E_{MAX}}(\%)$para$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{J}$e $\boldsymbol{M}$

Grandeza	$\mathrm{E_M}(\%)$	$\mathrm{E_{MAX}}(\%)$
$\boldsymbol{E}$	1,09	2,92
$\boldsymbol{J}$	2,53	9,68
$\boldsymbol{M}$	1,11	2,63

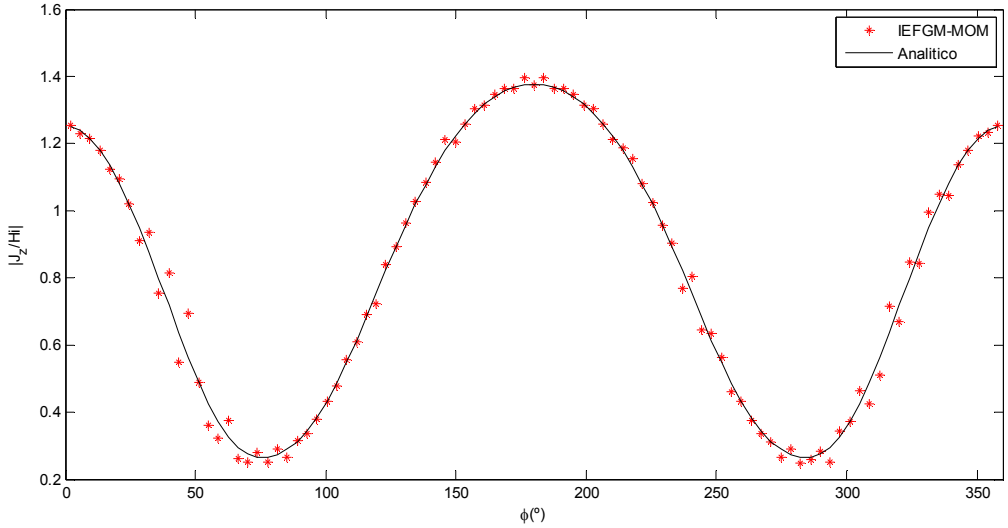
Uma vez confirmada a validade da solução é então conduzida uma análise paramétrica, apresentadas nas Subseções 5.5.1.1 e 5.5.1.2, com o objetivo de identificar o melhor conjunto de valores para os parâmetros do IEFGM-MOM considerando FBP.

5.5.1.1. Influência da Quantidade de Nós e de Segmentos

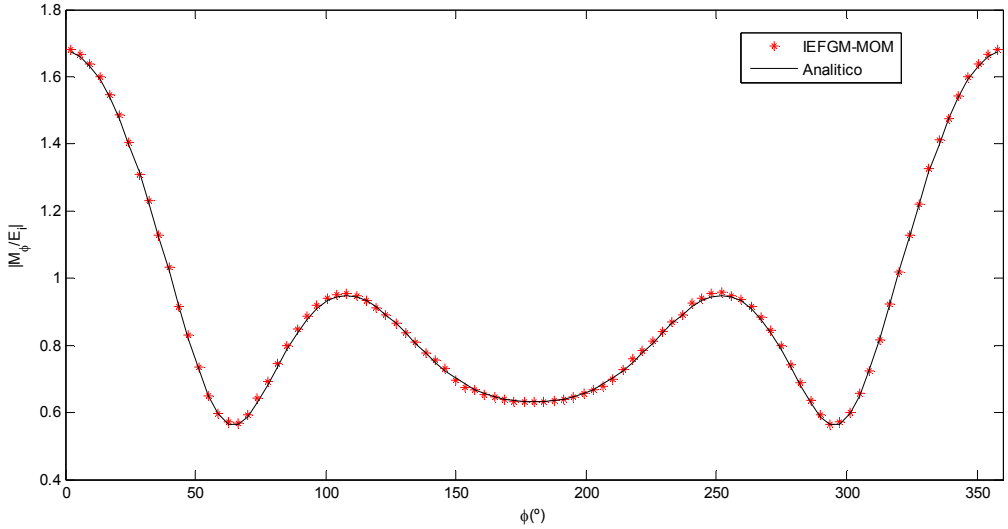
Nessa Subseção é avaliado o impacto da variação da quantidade de nós e segmentos na solução pelo IEFGM-MOMcom a utilização de FBP. Os resultados são calculados considerando os parâmetros apresentados na Subseção5.5.1, variando o número de nós de 21 a 3976 nós, e mantido o número de pontos de integração igual a 11316. Do modo que a modelagem matemática é concebida, assim como o algoritmo, não é possível aumentar o número de segmentos da fronteira Γdo cilindro sem aumentar a quantidade de nós sobre a fronteira Γdo cilindro, uma vez as matrizes devem apresentar dimensão condizente com a modelagem. Dessa forma,não é apresentadaa análise do erro em relação ao número de segmentos de modo independente.



a)



b)



c)

Figura 5.5 – Validação IEFGM-MOM FBP –a)magnitude do campo elétrico $\boldsymbol{E}$; b)magnitude da corrente$\boldsymbol{J}$; c)magnitude da corrente$\boldsymbol{M}$

A Figura 5.6 apresenta os resultados obtidos em relação ao$\mathrm{E_M}(\%)$para$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{J}$e $\boldsymbol{M}$.Pode-se concluir que o aumento do número de nós, e consequente aumento no número de segmentos, acarreta a diminuição no erro, até um certo limiar. Após esse limiar, o erro tende aumentar devido ao fato de que a RGN não foi mantida. Para $\boldsymbol{J}$esse limiar ocorre em 351 nós, onde o$\mathrm{E_M}(\%)$é igual a 2,53%. E para $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{M}$, esse limiar ocore em 2937 nós, sendo os$\mathrm{E_M}(\%) = 0{,}44\%e\mathrm{E_M}(\%) = 0{,}56\%$, respectivamente. Verifica-se que os erros obtidos para$J_z$são maiores do que àqueles obtidos para $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{M}$. Acredita-se que essa diferença se deve a problemas de ressonância no cilindro, que podem ser eliminados utilizando uma formulação combinada entre EFIE e MFIE, que não é escopo desse trabalho(MAUTZ e HARRINGTON, 1978)e(HOPPE, EPP e LEE, 1994).

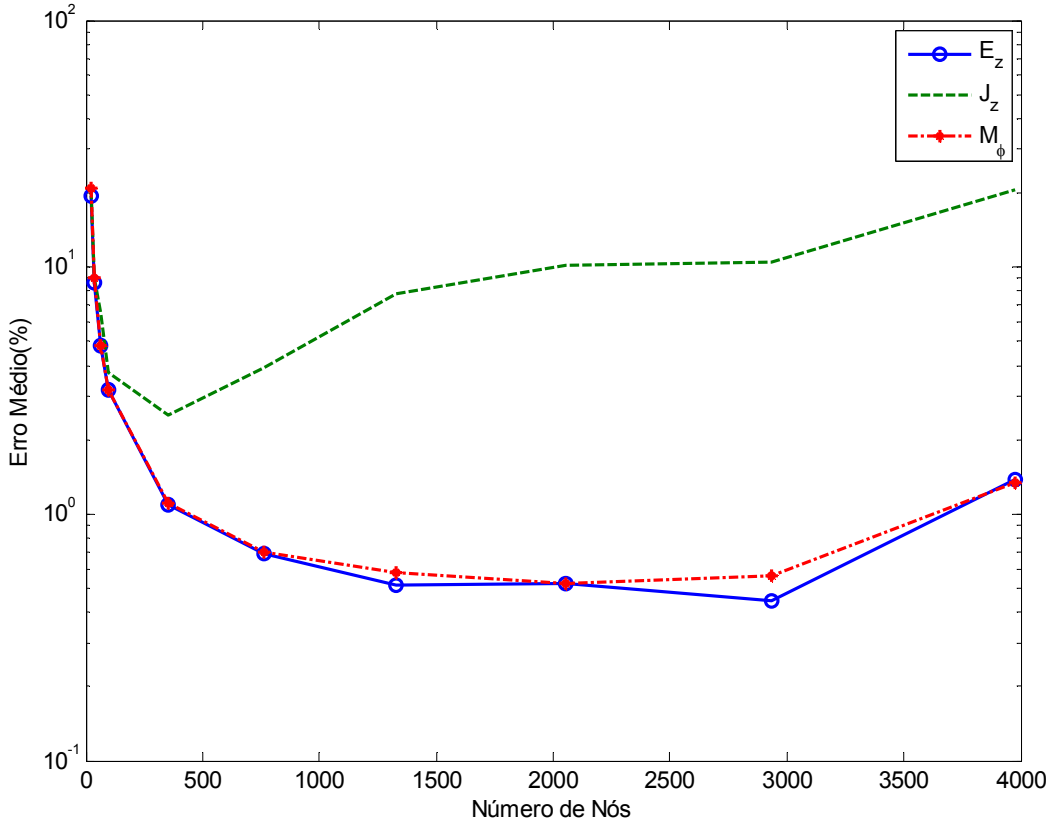


Figura 5.6 – IEFGM-MOMFBP – Avaliação da influência do número de nós no erro

A Figura 5.7 e a Figura 5.8 apresentam os resultados em relação ao condicionamento da matriz Z_He o tempo de processamento, respectivamente. Conforme esperado, observa-se que o número de condicionamento aumenta à medida que o número de nós aumenta; porém para todos os casos o sistema ainda é bem condicionado, embora o sistema não seja diagonalmente dominante. Observa-se também

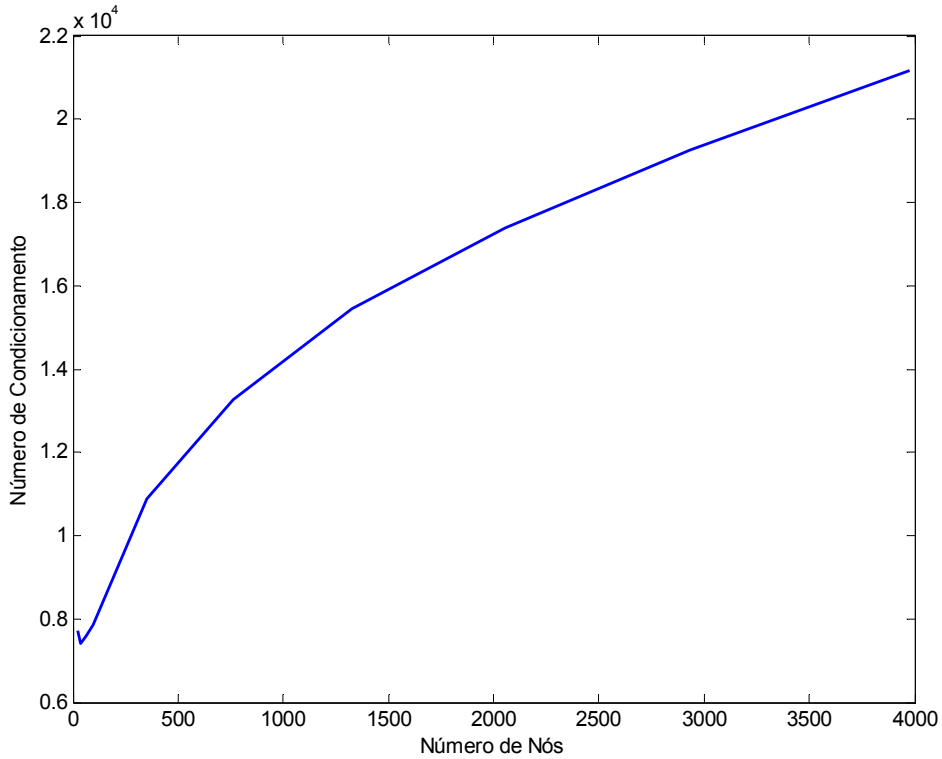


Figura 5.7 –IEFGM-MOMFBP – Avaliação da influência do número de nós nonúmero de condicionamento

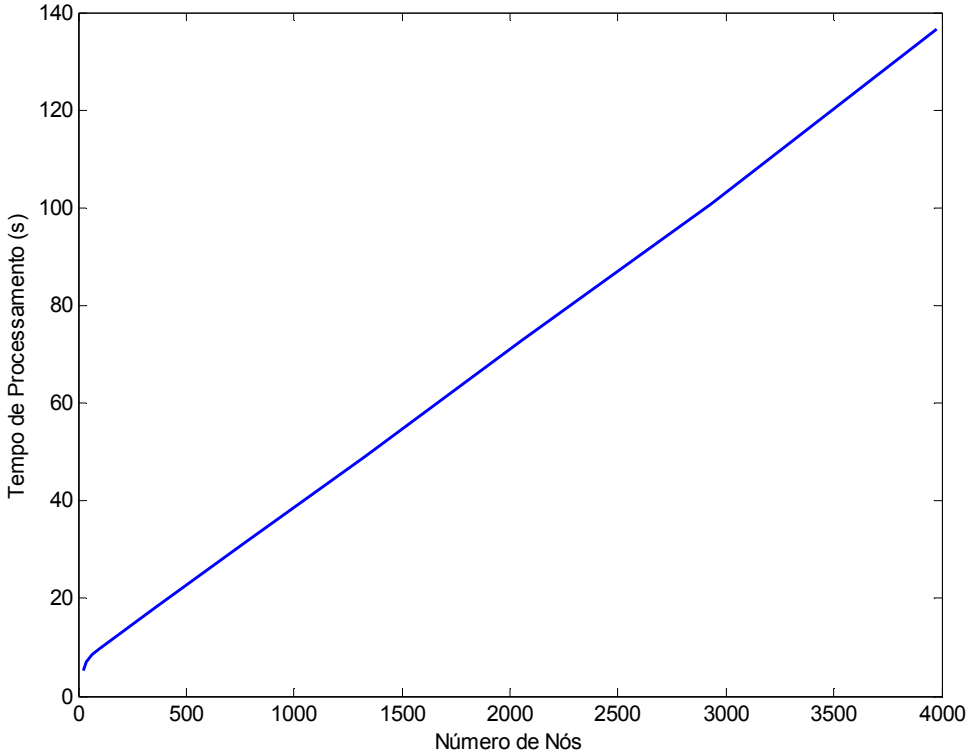


Figura 5.8 –IEFGM-MOMFBP – Avaliação da influência do número de nós no tempo de processamento

que o aumento do número de nós acarreta o aumento do tempo de processamento, conforme esperado.

5.5.1.2. Influência da Quantidade de Pontos de Integração

Nessa Subseção é avaliado o impacto da variação da RGN na solução pelo IEFGM-MOMcom a utilização de FBP. Os resultados são calculados considerando os parâmetros apresentados na Seção5.5.1. É fixado o número de nós em 351 e variado o número de pontos de integração, o que implica em uma variação doRGN. Vale destacar que essa variação é realizada pelo número de células de integração; o número de pontos de Gauss em cada célula é mantido em 2 x 2 e na fronteira são mantidos empgo $=$ 3 e pgf $=$ 4.

A Figura 5.9 apresentaos resultados obtidos em relação aoE_M(%)para$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{J}$e $\boldsymbol{M}$. Observa-se que os errosdecaem à medida que aRGN aumenta.Verifica-se que pequenas RGN não conduzem a resultados satisfatórios, destacando que para obter resultados da mesma ordem que os obtidos pelo IEFGM é necessáriaumaRGN maior. O melhor resultado para $\boldsymbol{J}$ é comRGN igual a 72,7, no qual oE_M(%)é de 1,67%. Para$\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{M}$ é com RGN igual a 89,7, sendo osE_M(%)1,06% e1,08%, respectivamente. Entretanto, observa-se que os erros apresentam a mesma ordem de grandeza a partir de aproximadamente $RGN = 35$ para todas as variáveis.

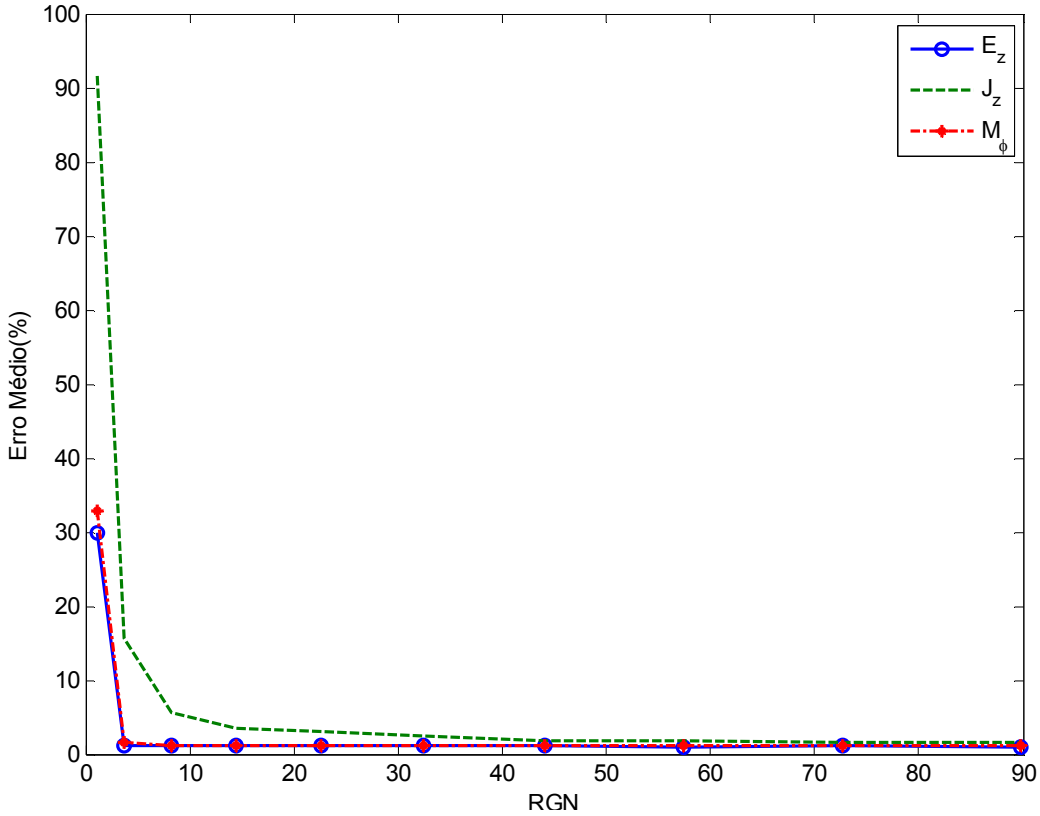


Figura 5.9 – IEFGM-MOMFBP – Avaliação da influência do número de pontos de integração no erro

A Figura 5.11e a Figura 5.12apresentam os resultados em relação ao condicionamento da matrizZ_He o tempo de processamento, respectivamente. Observa-se que o número de condicionamentoé maior para umaRGNpequena e a partir de um certo limiar torna-se constante, embora se mantenha na mesma ordem de grandeza para todos RGN avaliadas. Observa-se também que o aumento da RGN acarreta o aumento do tempo de processamento, como esperado.

5.5.2. Solução Base IEFGM-MOM utilizando Funções Triangulares

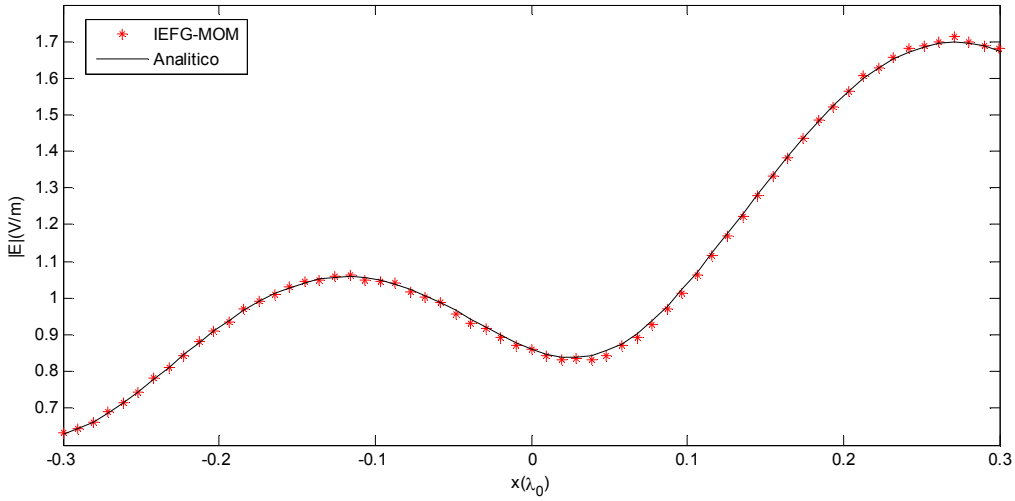
Para avaliação do IEFGM-MOM com a utilização de funções base e teste do tipo triangular foram consideradas as mesmas condições apresentadas na Seção 5.5.1.

As curvas obtidas para$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{J}$e $\boldsymbol{M}$pela aplicação do IEFGM-MOM e pela solução analítica são apresentados naFigura 5.10.Em relação aos resultados gráficos obtidos para o FBT, observa-se que os mesmossão muito parecidos com obtidos com para FBP.A Tabela 5.2resume os erros $\mathrm{E_M}$(%)e$\mathrm{E_{MAX}}$(%)para$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{J}$e $\boldsymbol{M}$. Observa-se uma boa coerência entre os resultados numérico e analítico para o caso sob estudo.

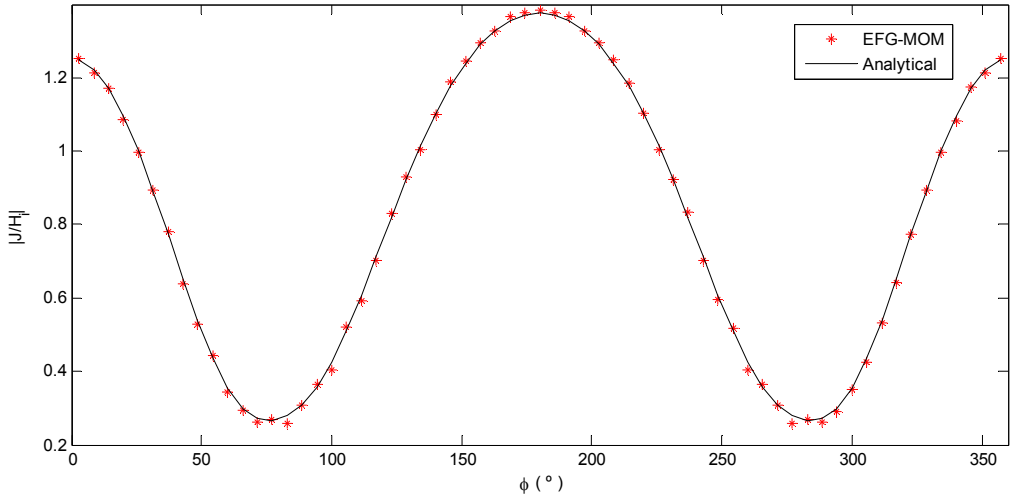
Uma vez confirmada a validade da solução é também conduzida uma análise paramétrica, apresentadas nas Seções 5.5.2.1 e 5.5.2.2 com o objetivo de identificar o melhor conjunto de valores para os parâmetros do IEFGM-MOM considerando FBT.

Tabela 5.2 - Validação IEFGM-MOM FBT – $\mathrm{E_M}$(%)e$\mathrm{E_{MAX}}$(%)para$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{J}$e $\boldsymbol{M}$

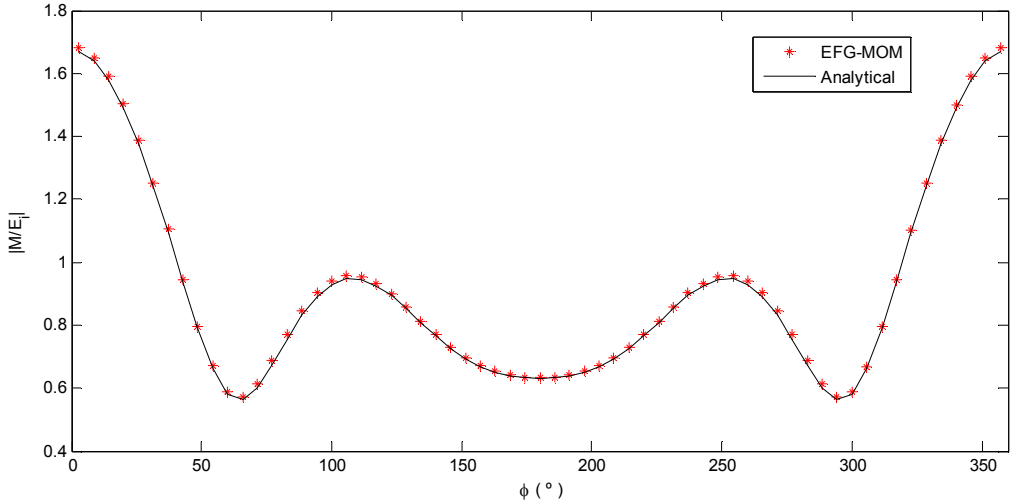
Grandeza	$\mathrm{E_M}$(%)	$\mathrm{E_{MAX}}$(%)
$\boldsymbol{E}$	0,74	2,53
$\boldsymbol{J}$	2,08	8,40
$\boldsymbol{M}$	0,99	2,09



a)



b)



c)

Figura 5.10 – Validação IEFGM-MOM FBT–a)magnitude do campo elétrico ***E***; b)magnitude da corrente***J***; c)magnitude da corrente***M***

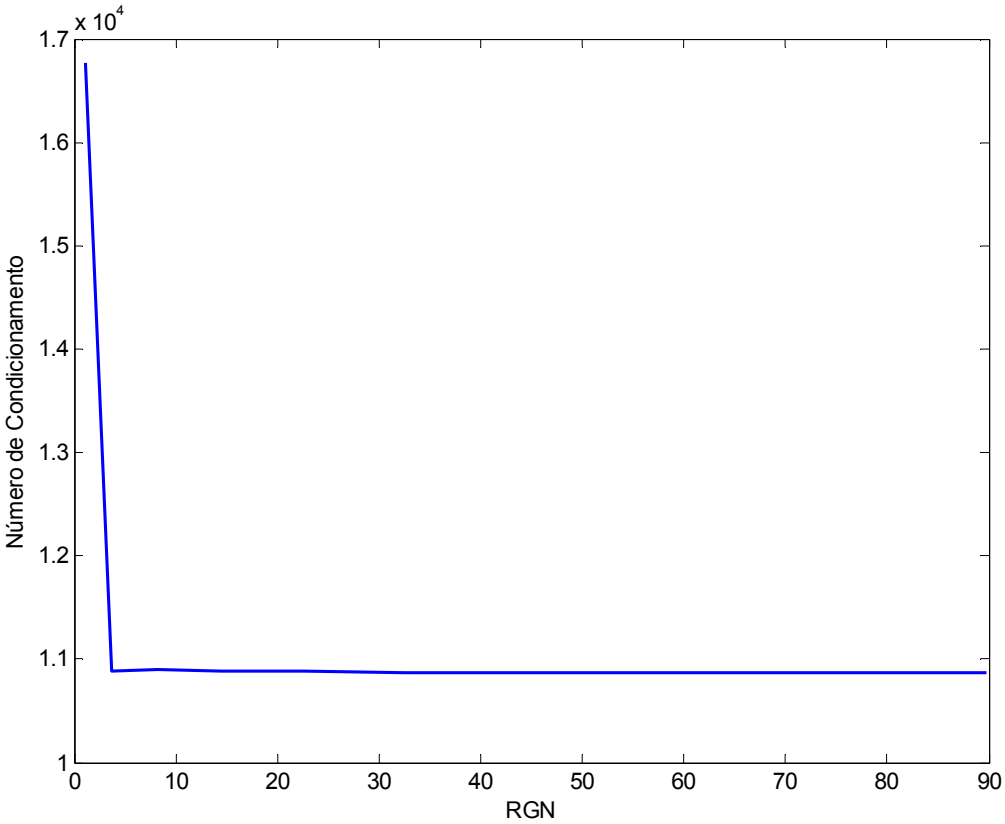


Figura 5.11 –IEFGM-MOM FBP – Avaliação da influência do número de pontos de integração no número de condicionamento

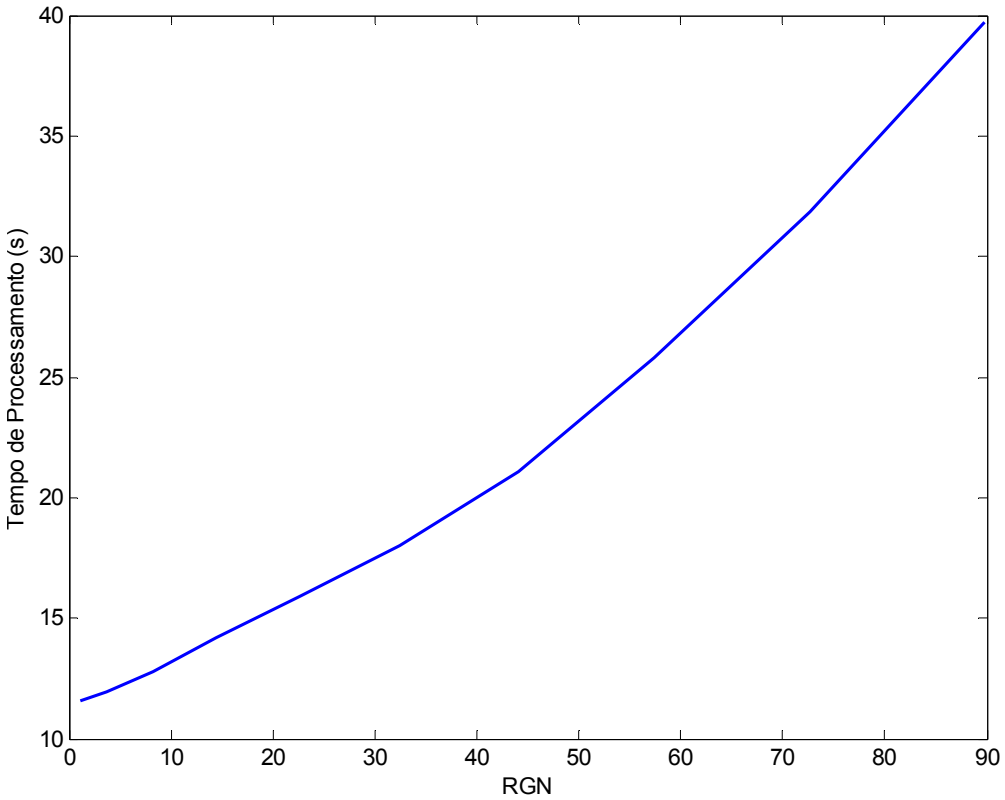


Figura 5.12 –IEFGM-MOMFBP – Avaliação da influência do número de pontos de integração no tempo de processamento

5.5.2.1. Influência da Quantidade de Nós e de Segmentos

Nessa Subseção é avaliado o impacto da variação da quantidade do número de nós na solução pelo IEFGM-MOM com a utilização de funções base e teste triangular. Os resultados são calculados considerando os parâmetros apresentados na Subseção5.5.1.1.

A Figura 5.13apresenta os resultados obtidos em relação ao$E_M(\%)$para$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{J}$e $\boldsymbol{M}$. Conforme esperado, as mesmas análises e considerações apresentadas na Subseção 5.5.1.1 para as FBP são válidas para as FBT, tanto para$E_M(\%)$, como para o número de condicionamento da matriz Z e o tempo de processamento, apresentados na Figura 5.14 e na Figura 5.15, respectivamente. Porém,é importante salientar que os resultados obtidos com FBT são melhores que os obtidos com FBP, com exceção para o tempo de processamento, onde pode ser observado que a FBT apresenta maior custo computacional.O melhor resultado encontrado para $\boldsymbol{J}$é para 351 nós onde $E_M(\%) = 2{,}08$; para$\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{M}$é para 2976 nós, onde$E_M(\%) = 0{,}36$e$E_M(\%) = 0{,}48$, respectivamente.

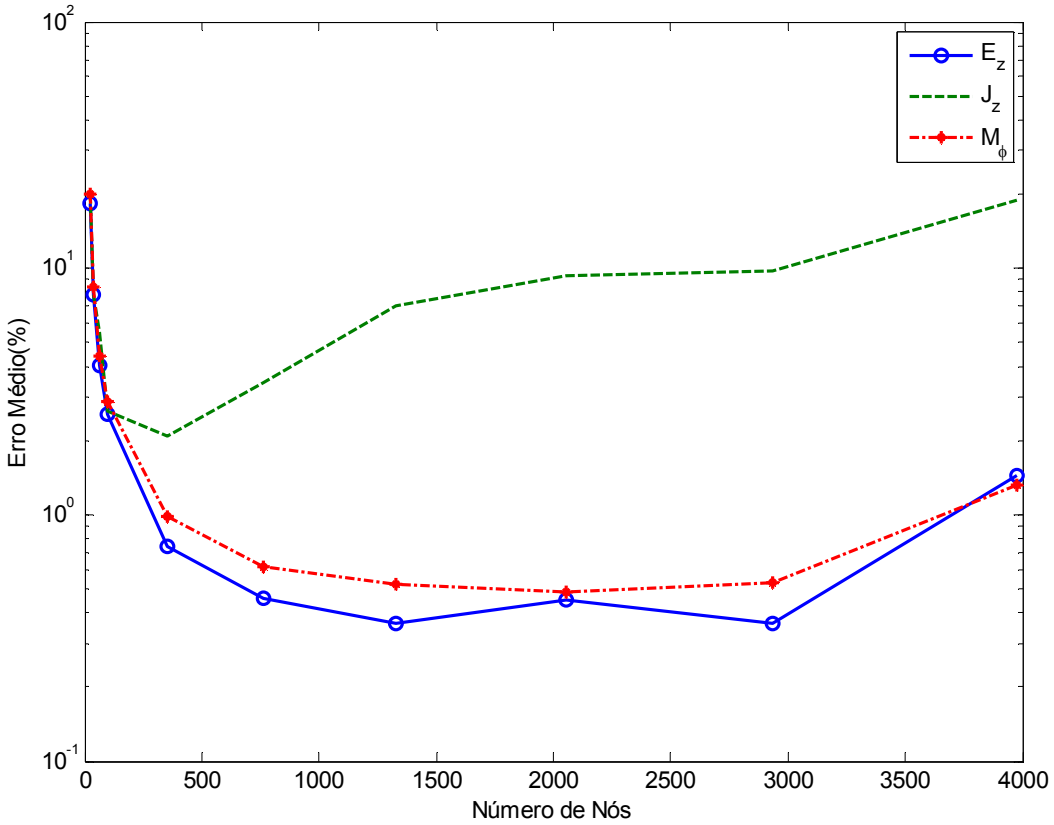


Figura 5.13 – IEFGM-MOMFBT– Avaliação da influência do número de nós no erro

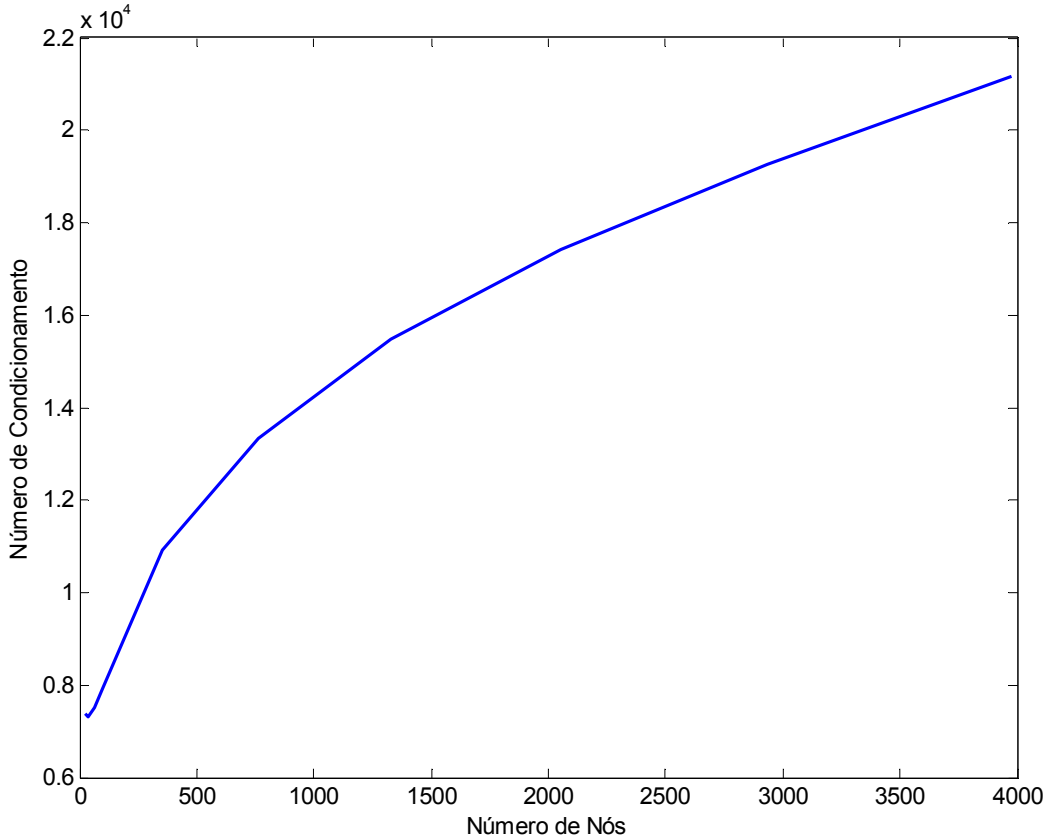


Figura 5.14 –IEFGM-MOMFBT – Avaliação da influência do número de nós nonúmero de condicionamento

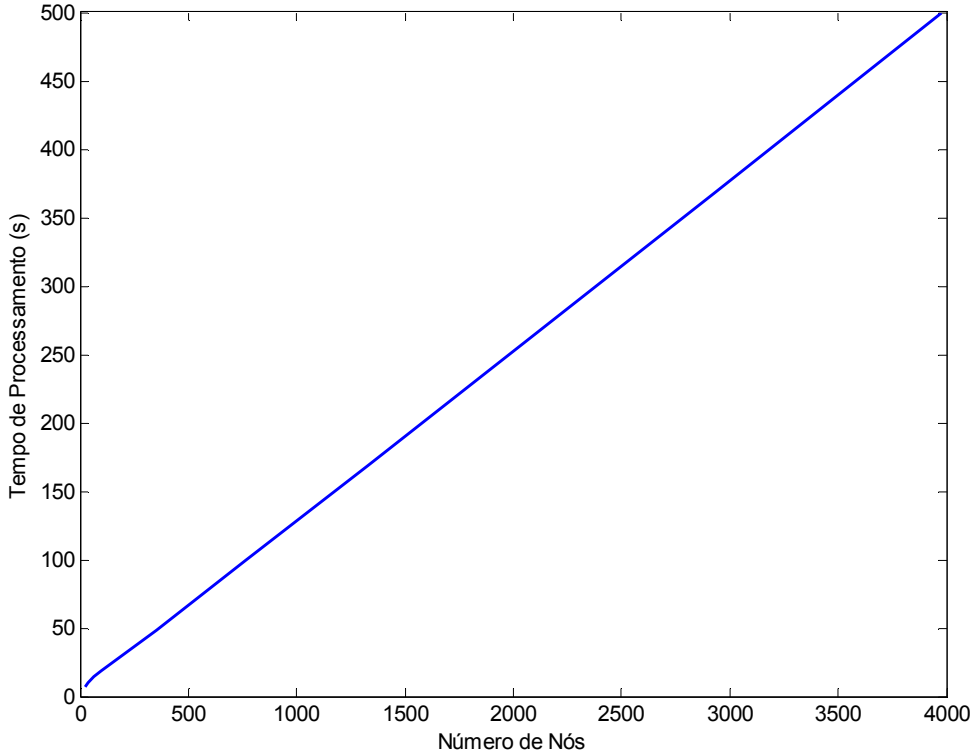


Figura 5.15 –IEFGM-MOMFBT – Avaliação da influência do número de nós no tempo de processamento

5.5.2.2. Influência da Quantidade de Pontos de Integração

Nessa Subseção é avaliado o impacto da variação da RGN na solução pelo IEFGM-MOM com a utilização de FBT. Os resultados são calculados considerando os parâmetros apresentados na Seção5.5.1.2.

A Figura 5.16apresenta os resultados obtidos em relação aoE_M(%)para$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{J}$e $\boldsymbol{M}$. Conforme esperado, as mesmas análises e considerações apresentadas na Subseção 5.5.1.2 paras as FBP são válidas para as FBT, tanto paraE_M(%), como para o número de condicionamento da matriz Z e o tempo de processamento, apresentados na Figura 5.17 e Figura 5.18, respectivamente. Também nessa análise, os resultados obtidos com FBT são melhores que os obtidos com FBP, com exceção para o tempo de processamento. O melhor resultado encontrado para $\boldsymbol{J}$ é comRGN igual a 72,7, no qual oE_M(%)é de 1,11%, e para$\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{M}$, é com RGN igual a 89,74, sendo os E_M(%) 0,71% e 0,95%, respectivamente.

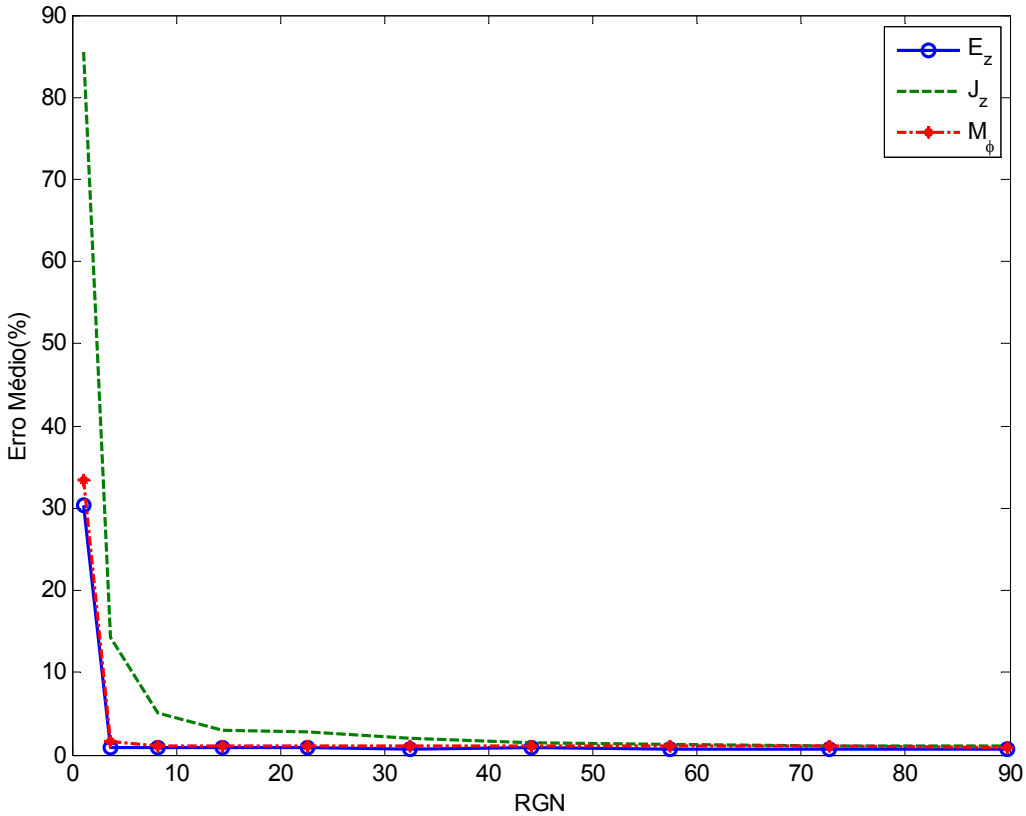


Figura 5.16 – IEFGM-MOMFBT– Avaliação da influência do número de pontos de integração no erro

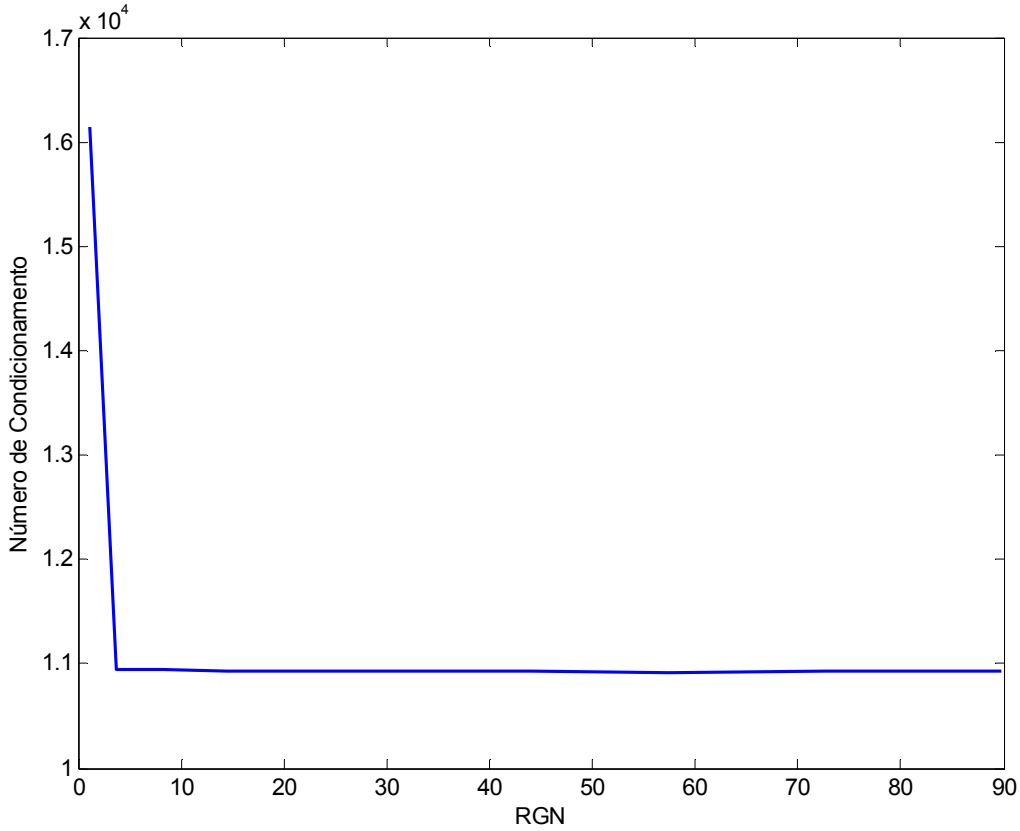


Figura 5.17 – IEFGM-MOM FBT – Avaliação da influência do número de pontos de integração no número de condicionamento

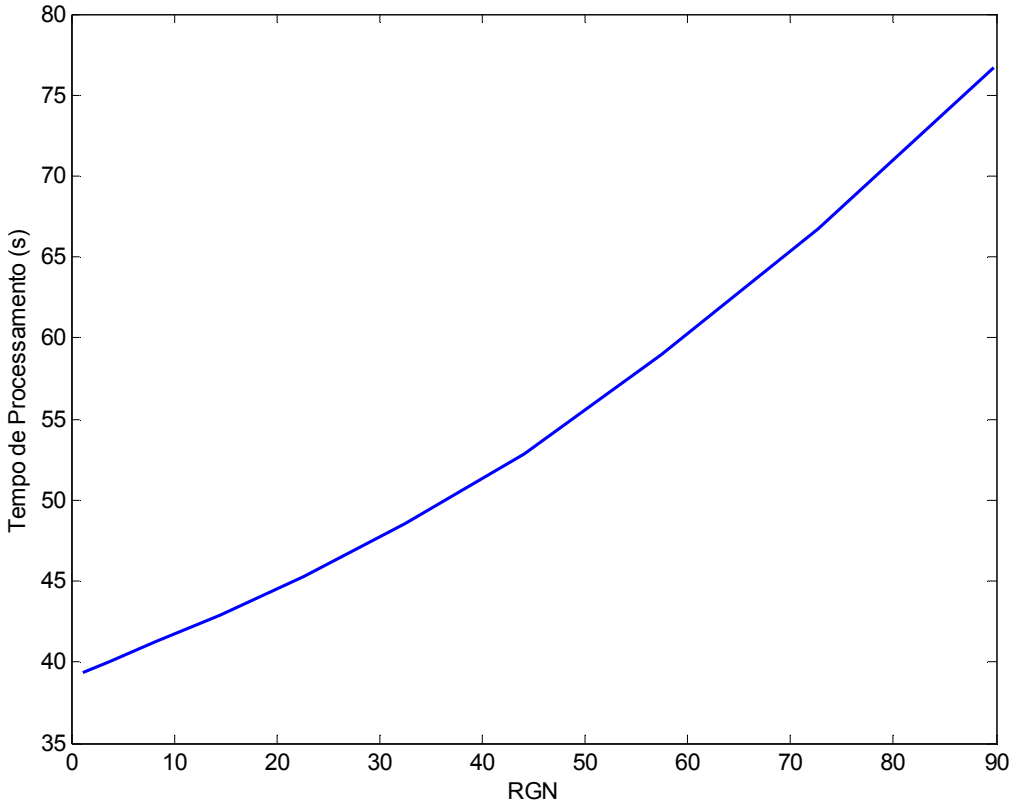


Figura 5.18 –IEFGM-MOMFBT– Avaliação da influência do número de pontos de integração no tempo de processamento

5.5.3. Avaliação IEFGM-MOM X IEFGM X MOM

Nessa Subseção é avaliado a qualidade dos resultados obtidos com o método híbrido IEFGM-MOM em relação àqueles obtidos pelos métodos IEFGM e MOM aplicados separadamente. O IEFGM e o MOMindividualmente não geram a solução para $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{J}$e $\boldsymbol{M}$simultaneamente. Conforme descrito no Capítulo 3, o IEFGM obtém os valores do $\boldsymbol{E}$e o MOM obtém os valores de $\boldsymbol{J}$ e $\boldsymbol{M}$, conforme apresentado no Capítulo 4. Dessa forma, os resultados obtidos com o método híbrido IEFGM-MOM são comparados de modo separado com os resultados obtidos pelo IEFGM e o MOM.

Para a comparação é considerado um cilindro dielétrico infinito, com raio $a = 0,3\lambda_0$, $\varepsilon_\Omega = 2\varepsilon_0e\mu_\Omega = \mu_0$. A Tabela 5.3 apresenta os parâmetros considerados na construção dos métodos.

Tabela 5.3– Parâmetros para construção dos métodos para o cilindro com $a = 0{,}3\lambda_0$

Parâmetros	IEFGM	MOM	IEFGM-MOM
Nós distribuídos no Domínio	762	-	351
Densidade de nós ($nós/\lambda_0$)	1178	-	1238
RGN	3,72	-	57,4
α	2,6	-	2,6
Discretização da Fronteira	-	63	63
Pontos de Gauss (pgo,pgf)	-	4, 3	4, 3

5.5.3.1. IEFGM-MOM x IEFGM - Campo Elétrico

Nessa Subseção são apresentados os resultados obtidos pelo híbrido IEFGM-MOM em comparação com os resultados obtidos pelo IEFGM para o cálculo do campo elétrico no interior do cilindro. Em relação ao IEFGM é considerado $R_{\Gamma_e} = 2a$para comparação.

A Tabela 5.4e a Tabela 5.5apresentam o resumo dos resultados obtidos. A Tabela 5.4 considera o IEFGM-MOM utilizando FBP ea Tabela 5.5 utilizando FBT. Pode-se observar que em relação ao$E_M(\%)$e$E_{MAX}(\%)$os resultados obtidos com a aplicação do método híbrido IEFGM-MOM são melhores que os obtidos com a aplicação do IEFGM individualmente, sendo até 66% melhor para o $E_M(\%)$obtido pelo IEFGM-MOM utilizando funções base e teste triangulares.

Tabela 5.4 - IEFGM-MOM FBP x IEFGM – $E_M(\%)$e$E_{MAX}(\%)$para o campo elétrico no interior do cilindro com $a = 0{,}3\lambda_0$

Método	$E_M(\%)$	$E_{MAX}(\%)$	Tempo de Processamento (s)	Número de Condicionamento
IEFGM-MOM	1,04	2,80	25,80	10872
IEFGM	2,18	5,04	7,11	380,8

Tabela 5.5 - IEFGM-MOM FBT x IEFGM – $E_M(\%)$e$E_{MAX}(\%)$para o campo elétrico no interior do cilindro com $a = 0{,}3\lambda_0$

Método	$E_M(\%)$	$E_{MAX}(\%)$	Tempo de Processamento (s)	Número de Condicionamento
IEFGM-MOM	0,71	2,38	58,99	10922
IEFGM	2,18	5,04	7,11	380,8

O condicionamento da matriz $Z_H$do método híbrido IEFGM-MOM é maior que o da matriz K do IEFGM, conforme esperado, já que a matriz $Z_H$não é diagonalmente dominante, ao contrário da matriz K. Apesar do IEFGM apresentar menor custo computacional, conforme esperado, uma vez que a matriz Z_Hé maior que a matriz K, é importante salientar que mesmo com o aumento da discretização dos parâmetros do método, responsável pelo aumento do custo computacional, os erros se mantêm constantes.

5.5.3.2. IEFGM-MOM X MOM - Correntes Elétrica e MagnéticaSuperficiais

Nessa Subseção são apresentados os resultados obtidos pelo método híbrido IEFGM-MOM em comparação com MOM para as correntes na superfície Γdo cilindro. A

Tabela 5.6e a Tabela 5.7apresentam o resumo dos resultados obtidos pelos métodos utilizando funções base do tipo pulso e triangular, respectivamente.

Pode-se observar a partir da Tabela 5.6,que os$E_M(\%)$e$E_{MAX}(\%)$obtidos para o cálculo de $\boldsymbol{J}$utilizando FBP são da mesma ordem de grandeza para o IEFGM-MOM e para o MOM. E a partir da Tabela 5.7, que os$E_M(\%)$e$E_{MAX}(\%)$obtidosutilizando FBT são menores para o IEFGM-MOM do que para MOM. Em relação ao cálculo de $\boldsymbol{M}$, observa-se nas Tabela 5.6 e Tabela 5.7, que os resultados alcançados pelo MOM são melhores que os pelo IEFGM-MOM. Entretanto, observa-se também, que os$E_M(\%)$e$E_{MAX}(\%)$obtidos pelos dois métodos possuem a mesma ordem de grandeza para a utilização dos dois tipos de funções base e teste.

Em relação ao número de condicionamento e o tempo de processamento, ambos são maiores para o IEFGM-MOM do que para o MOM; a diferença se deve principalmente ao tamanho do sistema linear resolvido por cada método.

Tabela 5.6 - IEFGM-MOM x MOM FBP–$E_M(\%)$e$E_{MAX}(\%)$paraas correntes na superfície do cilindro com $a = 0{,}3\lambda_0$

	$\boldsymbol{J}$		$\boldsymbol{M}$			
Método	$E_M(\%)$	$E_{MAX}(\%)$	$E_M(\%)$	$E_{MAX}(\%)$	Tempo de Processamento (s)	Número de Condicionamento
IEFGM-MOM	2,51	6,86	1,76	1,09	25,80	10872
MOM	2,28	6,93	0,65	1,48	5,21	865,46

Tabela 5.7 - IEFGM-MOM x MOM FBT – $E_M(\%)$e$E_{MAX}(\%)$paraas correntes na superfície do cilindro com $a = 0{,}3\lambda_0$

	$\boldsymbol{J}$		$\boldsymbol{M}$			
Método	$E_M(\%)$	$E_{MAX}(\%)$	$E_M(\%)$	$E_{MAX}(\%)$	Tempo de Processamento (s)	Número de Condicionamento
IEFGM-MOM	1,23	5,23	0,97	1,98	58,99	10922
MOM	1,94	5,67	0,61	1,12	19,89	866,55

5.5.4. Avaliação do Aumento do Raio do Cilindro

Tendo em vista a validação do método híbrido IEFGM-MOM, essa Subseção apresenta uma avaliação dos resultados obtidos para cilindros de raios maiores. Sãoconsideradosdois cilindros: umcom raio $a = 1\lambda_0$ e um com raio $a = 2\lambda_0$. Éadotado$\varepsilon_\Omega = 2\varepsilon_0e\mu_\Omega = \mu_0$. A Tabela 5.8 e a Tabela 5.9apresentam os parâmetros utilizados nos métodos para o cilindro de raio $a = 1\lambda_0$ ede raio $a = 2\lambda_0$, respectivamente.

A Tabela 5.10 e a Tabela 5.11resumem os erros $E_M(\%)$e$E_{MAX}(\%)$para$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{J}$e $\boldsymbol{M}$ com a aplicação dos métodos IEFGM-MOM, IEFGM e MOM para o cilindro com raio $a = 1\lambda_0$, com a utilização de FBP e FBT, respectivamente.Observa-se que os erros $E_M(\%)$e$E_{MAX}(\%)$obtidos pelo IEFGM-MOM são menores que os obtidos pelos métodos aplicados individualmente. Entretanto, o método híbrido apresenta maior número de condicionamento e tempo de processamento, principalmente devido a ordem do sistema linear envolvido na solução pelo método. Observa-se que os erros obtidos com as FBT são menores que os obtidos com as FBP, apesar do maior número de condicionamento e tempo de processamento.

Tabela 5.8– Parâmetros para construção dos métodos para o cilindro com $a = 1\lambda_0$

Parâmetros	IEFGM	MOM	IEFGM-MOM
Nós distribuídos no Domínio	20398	-	5173
Densidade de nós ($nós/\lambda_0$)	1623	-	1643
RGN	3,99	-	35,03
α	2,6	-	2,6
Discretização da Fronteira	-	258	252
Pontos de Gauss (pgo,pgf)	-	4, 3	4, 3

Tabela 5.9– Parâmetros para construção dos métodos para o cilindro com a $= 2\lambda_0$

Parâmetros	IEFGM	MOM	IEFGM-MOM
Nós distribuídos no Domínio	-	-	15649
Densidade de nós $(nós/\lambda_0)$	-	-	1245
RGN	-	-	35,43
α	-	-	2,6
Discretização da Fronteira		450	440
Pontos de Gauss (pgo,pgf)	-	4, 3	4, 3

Tabela 5.10- Validação IEFGM-MOM FBP –$E_M(\%)$e$E_{MAX}(\%)$para o campo elétrico no interior do cilindro e correntes superficiais induzidas com$a = 1\lambda_0$

Método	Grandeza	$E_M(\%)$	$E_{MAX}(\%)$	Número de Condicionamento	Tempo de Processamento (s)
IEFGM–MOM	***E***	1,12	2,42	137260	878,6
	J	2,42	14,18		
	M	0,97	7,82		
IEFGM	***E***	4,39	15,37	717	2595,8
MOM	***J***	2,81	15,94	3711	55,0
	M	1,82	16,68		

Tabela 5.11- Validação IEFGM-MOM FBT –$E_M(\%)$e$E_{MAX}(\%)$para o campo elétrico no interior do cilindro e correntes superficiais induzidas com$a = 1\lambda_0$

Método	Grandeza	$E_M(\%)$	$E_{MAX}(\%)$	Número de Condicionamento	Tempo de Processamento (s)
IEFGM–MOM	***E***	0,82	2,02	140189	27474,0
	J	1,82	13,03		
	M	0,80	3,96		
IEFGM	***E***	4,39	15,37	717	2595,8
MOM	***J***	1,75	9,13	3776	258, 6
	M	1,51	9,11		

Para o cilindro de raio a $= 2\lambda_0$ não épossível realizar o cálculo do campo elétrico interno utilizando o IEFGM devido ao limite dos recursos computacionais da máquina utilizada. E também devido ao limite computacional, não é possível calcular as variáveis utilizando o método híbrido com a aplicação de FBT. Dessa forma, são apresentados naTabela 5.12os erros $E_M(\%)$e$E_{MAX}(\%)$para$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{J}$e $\boldsymbol{M}$para o cilindro com raioa $= 2\lambda_0$, considerando o IEFGM-MOM e o MOM utilizando FBP.

Observa-se que os resultados obtidos pelo MOM aplicado individualmente são melhores que os obtidos com o IEFGM-MOM..Entretanto, observa-se que$E_M(\%)$e$E_{MAX}(\%)$apresentam a mesma ordem de grandeza

Tabela 5.12- Validação IEFGM-MOM FBP –$E_M(\%)$e$E_{MAX}(\%)$para o campo elétrico no interior do cilindro e correntes superficiais induzidas com$a = 2\lambda_0$

Método	Grandeza	$E_M(\%)$	$E_{MAX}(\%)$	Número de Condicionamento	Tempo de Processamento (s)
IEFGM–MOM	$\boldsymbol{E}$	1,94	6,69	89986	6074,3
	$\boldsymbol{J}$	3,67	28,38		
	$\boldsymbol{M}$	4,34	95,83		
IEFGM	$\boldsymbol{E}$	-	-	-	-
MOM	$\boldsymbol{J}$	2,00	18,67	4328	176
	$\boldsymbol{M}$	3,49	95,41		

5.6. Considerações Finais

Nesse capítulo é apresentado o IEFGM-MOM e sua aplicação ao problema do espalhamento eletromagnético por um cilindro dielétrico infinito. Os resultados obtidos são validados por meio de sua comparação com a respectiva solução analítica.

Observa-se que o IEFGM-MOM é capaz de produzir uma solução precisa, tendo em vista os valores dos erros obtidos nos resultados apresentados na Seção 5.5. Verifica-se que a quantidade de nós distribuídos no domínio do problema influencia diretamente nos resultados obtidos pelo IEFGM-MOM. Entretanto, apenas o aumento da quantidade de nós não é suficiente para obtenção de resultados de qualidade, uma vez que uma grande quantidade de nós não os garante. Bons resultados são obtidos desde que uma RNG > 30 seja adotada. Observa-se também, que o desempenho dos resultados para o

campo elétrico, $\boldsymbol{E}$e as correntes superficiais elétrica, $\boldsymbol{J}$, e magnética,$\boldsymbol{M}$não apresentam comportamentosidênticos. Assim, é de fundamental importância a análise paramétrica para encontrar um conjunto de parâmetros que conduza a uma solução precisa para todas variáveis sob análise.

Em relação ao tipo de funções base e teste aplicadas, observa-se que essas influenciam diretamente nos resultados, sendo que os resultados obtidos com a aplicação das FBT são melhores que com as FBP, conforme esperado. Entretanto, é importante destacar, que para o método híbrido IEFGM-MOM, a qualidade dos resultados obtidos com a aplicação de FBT é superior aqueles obtidos com a FBP, enquanto no MOM, as FBT conduzem a resultados ligeiramente melhores que as FBP.

Para o cilindro de raio $a = 0{,}3\lambda_0$, utilizando a mesma discretização da fronteira do cilindro e aproximadamente a mesma densidade de nós distribuídos no domínio do problema, o método híbrido IEFGM-MOM apresentou resultados mais precisos do que o IEFGM aplicado separadamente. Em relação ao MOM, os resultados obtidos apresentaram a mesma ordem de grandeza.O IEFGM-MOM apresentou número de condicionamento maior do que o IEFGM e o MOM, conforme esperado, tendo em vista que a matriz $Z_H$não é diagonalmente dominante, ao contrário da matriz K e da matriz Z. E maior tempo de processamento, conforme esperado, uma vez que a ordem do sistema linear envolvido na solução pelo método híbrido IEFGM-MOM é maior do que dos métodos IEFGM e MOM individualmente.

O método híbrido IEFGM-MOM foi aplicado a cilindros de raios maiores e o método mostra-se capaz de calcular de maneira precisa o espalhamento eletromagnético.Os resultados obtidos com o método híbrido foram comparados com os resultados obtidos com os métodos IEFGM e MOM aplicados separadamente. Para essa comparação foi utilizada a mesma densidade de nós distribuídos no domínio do problema para o IEFGM e o método híbrido. E a mesma discretização da fronteira do cilindro foi adotada para o MOM e o IEFGM-MOM.

Para o cilindro de raio $a = 1{,}0\lambda_0$, observa-se que com aplicação tanto das FBP quanto da FBT, o IEFGM-MOMobteve erros menores que os métodos aplicados individualmente para $\boldsymbol{E}$e$\boldsymbol{M}$.Quanto ao cálculo de $\boldsymbol{J}$ melhores resultados sãoaobtidos com a aplicação do MOM. Novamente, é demonstrado que a utilização de FBT conquistam menores erros que com as FBP.

Para o cilindro de raio $a = 2{,}0\lambda_0$, não foi possível realizar o cálculo para o método IEFGM e para o IEFGM-MOM com aplicação de FBT,devido a limitação de memória do computador utilizado. Em relação aos resultados obtidos com a apicação do IEFGM-MOM e do MOM com FBP, observa-se que o MOM apresenta resultados melhores; porém é importante salientar que$\mathrm{E_M}(\%)$e$\mathrm{E_{MAX}}(\%)$apresentam a mesma ordem de grandeza. Acredita-se que com o aumento da discretização do IEFGM-MOM, melhores resultados possam ser alcançados.

Capítulo 6
Conclusão e Propostas de Continuidades

Com o crescente desenvolvimento deaplicações relacionadas ao espalhamento eletromagnético, frequentemente é necessário o cálculo do campo eletromagnético envolvido. Entretanto,nessas aplicações a obtenção de uma solução analítica para o problema é complexa ou até mesmo impossível. Nesse contexto, as técnicas numéricas tornam-se fundamentais para a solução desse tipo de problema.

As principais técnicas numéricas aplicadas à solução dos problemas de espalhamento eletromagnético sãoas técnicas diferenciais e integrais. Dentre as principais técnicas diferenciais pode-se destacar: o Método dos Elementos Finitos (FEM) e entre as técnicas integrais: o Método dos Momentos (MOM). Porém, as técnicas integrais e diferenciaisaplicadas separadamente apresentam vantagens e desvantagens, dependentes do tipo de problemas em que são aplicadas.Com o objetivo de superar as desvantagens de cada técnica individualmente, têm sido desenvolvidas técnicas híbridas, que combinam duas técnicas distintas, de forma a explorar os pontos fortes de cada uma, para a obtenção de soluções mais abrangentes e robustas. Dentre os principais métodos híbridosinvestigados, aplicados aos problemas de espalhamento eletromagnético, destaca-se a combinação do FEM-MOM. Essa combinação possui a vantagem de reduzir o domínio computacional do problema.

Conforme disponível na literatura, o FEM possui grande aplicabilidade, eficiência e precisão;porém, esse método requer a geração de uma malha, que para problemas com geometrias complexas, apresentam elevado custo computacional. Como forma de superar essa dificuldade, nas últimas décadas, os MM vêm sendo desenvolvidos, sendo o EFGM um dos métodos mais estabelecidos, e trata omesmo tipo de problemas que o FEM. O EFGM é bastante robusto, com grande facilidade para realizar a discretização de problemas com geometria complexa e apresenta boas taxas de convergência. Entretanto, no EFGM, a construção da função de forma é realizada pelo método MLS, que não cumpre a propriedade do delta de Krönecker, ou seja, suas funções de forma não podem

ser interpoladas. Como forma de contornar essa deficiência, o método IMLS é utilizado, garantindo assim a imposição das condições de contorno essenciais diretamente no sistema linear discretizado. O EFGM aplicado com o IMLS é chamado IEFGM.

Assim, levando em consideração as vantagens dos métodos híbridos e do IEFGM, em relação ao FEM, uma nova técnica híbrida, IEFGM-MOM,é apresentada nessa dissertação. Essa técnica é aplicadapara a análise do espalhamento eletromagnético por um cilindro dielétrico infinito.

Primeiramente,é apresentada no Capítulo 2a teoria eletromagnética envolvidapara o espalhamento eletromagnético por um cilindro dielétrico infinito, os símbolos e definições utilizados. É apresentada toda modelagem matemática por equações diferencias e integrais, assim como, apresentado o Método de Galerkin e o conceito do princípio da equivalência,necessários para o desenvolvimento dos métodos numéricos envolvidos.

No Capítulo 3édesenvolvida uma revisão da literatura disponível a respeito dos MM, com ênfase para o EFGM e sua adaptação para o IEFGM. Amodelagem matemática do IEFGM foi apresentada eaplicada ao espalhamento eletromagnético por um cilindro dielétrico infinito. Os resultados obtidosforam comparados com a respectiva solução analítica e validaram o método. Foi conduzida uma análise paramétrica com o objetivo de consolidar a modelagem apresentada. Essa análise demonstrou a importância da escolha apropriada dos parâmetros do IEFGM para precisão dos resultados.

No Capítulo 4é apresentada a modelagem matemática do MOM aplicado ao espalhamento eletromagnético por um cilindro dielétrico infinito, considerando funções de base e teste do tipo pulso e triângulo. Os resultados obtidos são comparados com a respectiva solução analítica e confirmam a eficácia doMOM, conforme já estabelecido na literatura.

Enfim, no Capítulo 5édesenvolvida uma revisão da literatura disponível para os métodos híbridos aplicados a problemas eletromagnéticos, com destaque para o método híbrido FEM-MOM. A partir das modelagens matemáticas apresentadas no Capítulo 3 e no Capítulo 4, em conjunto com a revisão da literatura, édesenvolvida a modelagem geral do método IEFGM-MOM. Essa modelagem éaplicadaao problema do espalhamento eletromagnético por um cilindro dielétrico infinito.Os resultados obtidos sãocomparados com a respectiva solução analítica, assim como com os resultados obtidos pelo IEFGM e MOM.

Em primeiro lugar é verificadaa validade e eficiência dos resultados gerados pelo IEFGM-MOM para solução do problema proposto.Conclui-se, ainda, que uma análise criteriosa dos parâmetros envolvidos no método, colaboram para gerar resultados melhores, ou seja, com erros baixos.

Sobre os resultados obtidos pelo IEFGM-MOM pode-se destacar:

1. Onúmero de nós distribuídos no domínio do problema interfere diretamente nos resultados obtidos; entretanto, esse parâmetro sozinho não garante bons resultados;
2. Arelação entre o número de pontos de integração e o número de nós é fundamental para a qualidade dos resultados obtidos. Éobservado que bons resultados são obtidos para uma relação acima de 35;
3. Os resultados alcançados para a solução com a aplicação de funções teste e base do tipo triangular são superiores aos obtidos com as aplicações de funções do tipo pulso, conforme esperado;
4. Para a solução base apresentada, o IEFGM-MOM obteve erros menores e/ou da mesma ordem que os obtidos pelo IEFGM e pelo MOM aplicados individualmente; entretanto, com maior tempo de processamento.
5. O IEFGM-MOM demonstrou-se aplicável a problemas de maior dimensão, obtendo bons resultados.

Este estudo desenvolveu e apresentou um ferramental teórico, analítico e numérico da técnica híbrida IEFGM-MOM. Espera-se que as análises apresentadas fomentem novas investigações científicas para o aprimoramento do método proposto.

6.1. Propostas de Continuidade

Devido as características do método híbrido IEFGM-MOM, verificou-se que essa ferramenta numérica é bastante robusta para a solução do problema de espalhamento eletromagnético. Tendo em vista a originalidade do método proposto, assim como o crescente número de pesquisas no âmbito dos métodos sem malhas, um grande número de análises pode ser realizado com o objetivo de exercitar as diversas possibilidades do método proposto. Assim, como trabalhos futuros são sugeridos os seguintes temas:

- Solução do problema externo pela Equação Integral de CampoCombinado (*Combined Field Integral Equation* - CFIE), com o objetivo de melhorar a precisão dos resultados.
- Solução do problema com distribuição de nós de modo arbitrário;
- Aplicação da formulação desenvolvida para diferentes formatos e composições do objeto, incluindo objetos com três dimensões;
- Aplicação da formulação desenvolvida para espalhadores com diversas camadas;
- Otimização do IEFGM-MOM.

Apêndice A
Identidades de Green

Asidentidades de Greenformam um conjunto de três igualdades vetoriais envolvendo integrais(BALANIS, 1989)e(SADIKU, 2012).

Enunciado:

Seja U um conjunto aberto limitado de$\mathbb{R}^n$com fronteira $\partial U \in C^1$, se $u, v \in C^2(\overline{U})$, então:

1. $$\int_U \Delta u dx = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial v} dS, \tag{A.1}$$

2. $$\int_U Du \cdot Dv dx = -\int_U u \Delta v dx + \int_U \frac{\partial u}{\partial v} u dS, \tag{A.2}$$

3. $$\int_U (u\Delta v - u\Delta v) dx = \int_{\partial U} \left(\frac{\partial u}{\partial v} u - \frac{\partial u}{\partial v} v\right) dS, \tag{A.3}$$

onde$v$ é o vetor unitário exterior a normal.

Referências Bibliográficas

AFONSO, M. M. **Métodos Híbridos na Solução de Problemas de Espalhamento Eletromagnético**. Tese, Departamento de Engenharia Elétrica, UFMG, Belo Horizonte.

ALI, M. W.; HUBING, T. H.; DRENIAK, J. L. A hybrid FEM/MOM technique for electromagnetic scattering and radiation from dielectric objects with attached wires. **Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on**, 19, Nov 1997. pp.304,314.

ARAÚJO, B. M. **Técnicas de Computação Paralela Aplicadas em Métodos Sem Malha**. Dissertação, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, CEFET-MG, Belo Horizonte.

ATLURI, S. N.; ZHU, T. A new meshless local petrov-galerkin (mlpg) approach in computational mechanics. **Computational Mechanics**, 1998. 117-127.

BALANIS, C. A. **Advanced engineering electromagnetics**. 1ª. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1989. 981 p. ISBN 978-0-471-62194-2.

BELYTSCHKO, T.; LU, Y. Y.; GU, L. Element-free Galerkin methods. **Int. J. Numer. Methods Eng.** , v. 37, p. 229–256, 1994.

BELYTSCHKO, T.; LU, Y.; GU, L. **Crack propagation by element-free galerkin methods**. [S.l.]: Engineering Fracture Mechanics, v. 51, 1995. 295-315 p.

BOTTAUSCIO, O.; CHIAMPI, M.; MANZIN, A. Eddy current problems in non linear media by element-free Galerkin method. **Journal of MAgnetism and Magnetic Materials**, v. 304, n. 2, p. 823-825, Set 2006.

CERRI, G. et al. MoM-FDTD hybrid technique for analysing scattering problems. **Electronics Letters**, v. 34, n. 5, p. 438-440, Mar 1998. ISSN ISSN: 0013-5194 DOI: 10.1049/el:19980394.

CINGOSKI, V. et al. Element-Free Galerkin Method for Eletromagnetic Field Computation. **IEEE Transactions on Magnetics**, 34 No. 5, 1998. 3236-3239.

CINGOSKI, V.; MIYAMOTO, N.; YAMASHITA, H. Hybrid element-free Galerkin - finite element method for electromagnetics field computation. **IEEE Transactions on Magnetics**, 36 No.4, 2000. 1543-1547.

CLEVELAND, W. S. **Visualizing Data**. Murray Hill: [s.n.], 1993.

COPPOLI, E. H. D. R. **Modelagem de dispositivos eletromagnéticos através de métodos sem malha**. Tese, Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis.

COPPOLI, E. H. R.; MESQUITA, R. C.; SILVA, R. S. Periodic boundary conditions in element free Galerkin method. **COPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering**, v. 28 No. 4, p. 922-934, 2009.

COPPOLI, E. H. R.; SILVA, R. S.; MESQUITA, R. C. Treatment of material discontinuity in meshless methods for EM problems using interpolating moving least squares. **IET 7th International Conference on Computation in Electromagnetics 2008 Proceedings of the International Conference**, Brighton, UK, p. 154-155, 2008.

CRUELLAS, J. C.; FERRANDO, M. **Feedback formulation for multiple scatterers**. Antennas and Propagation Society International Symposium, 1988. AP-S. Digest. [S.l.]: [s.n.]. June 1988. p. 400-403 vol.1.

CRUELLAS, J. C.; FERRANDO, M. **Scattering of dielectric cylinders using feedback formulation and segmentation**. Antennas and Propagation Society International Symposium, 1989. AP-S. Digest. [S.l.]: [s.n.]. June 1989. p. 1402-1405 vol.3.

DUHAMEL, D.; NGUYEN, T. M. Finite element computation of absorbing boundary conditions for time-harmonic wave problems,". **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,** 2009. 37-40.

FREZZA, F. et al. Short-pulse electromagnetic scattering by buried perfectly conducting cylinders. **IEEE Geoscience and remote sensing letters**, 4, 2007. 611-615.

FRIES, T.-P.; MATTHIES, H.-G. **Classification and Overview of Meshfree Methods**. Department of Mathematics and Computer Science, Technical University Braunschweig, Brunswick, Germany.

GIBSON, W. C. **The Method of Moments in Electromagnetics**. SEcond Edition. ed. New York: Taylor & Francis Group, LLC, 2015.

GOLDEN, K. M. et al. Inverse electromagnetic scattering models for sea ice. **IEEE Transactions on geoscience and remote sensing**, 36, 1998. 1675-1704.

GUEDES, C. M. F. M. **Métodos sem Malha em Problemas de Mecânica Computacional - Aplicação a Processos de Enformação Plástica**. Tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto.

HARRINGTON, R. F. **Field Computation by Moment Method**. New York: [s.n.], 1968.

HARRINGTON, R. F. **Time-Harmonic Electromagnetic Fields**. [S.l.]: Wiley-IEEE Press, 2001.

HOPPE, D. J.; EPP, L. W.; LEE, J.-F. A Hybrid Symmetric FEM/MOM Formulation Applied to Scattering by Inhomogeneous Bodies of Revolution. **Antennas and Propagation, IEEE Transactions on**, vol.42, no.6, Jun 1994. pp.798 - 805.

ILIC, M. M. et al. Higher Order Hybrid FEM-MoM Technique for Analysis of Antennas and Scatterers. **IEEE TRANSACTIONS ON ANTENNAS AND PROPAGATION, VOL. 57, NO. 5,** May 2009.

ILIC, M. M.; NOTAROS, B. M. Higher Order FEM-MoM Domain Decomposition for 3-D Electromagnetic Analysis. **Antennas and Wireless Propagation Letters, IEEE**, v. 8, p. 970-973, 2009. ISSN ISSN: 1536-1225 DOI: 10.1109/LAWP.2009.2030139.

ILIC, M. M.; NOTAROS, B. M. **Computation of FEM-domain fields in the higher order hybrid FEM-MoM solution**. Antennas and Propagation Society International Symposium (APSURSI), 2010 IEEE. [S.l.]: [s.n.]. July 2010. p. 1-4.

JANKOVIC, D. et al. A hybrid method for the solution of scattering from inhomogeneous dielectric cylinders of arbitrary shape. **Antennas and Propagation, IEEE Transactions on**, Sep 1994. pp.1215 - 1222.

JIN, J. The Finite Element Method in Electromagnetics. In: JIN, J. **The Finite Element Method in Electromagnetics**. 2nd. ed. [S.l.]: Wiley-IEEE Press, 2002. p. 780. ISBN 978-0471438182.

KULASEGARAM, S. et al. Corrected Smooth Particle Hydrodynamics - A Meshless Method for Computational Mechanics. **ECCOMAS 2000, CIMNE**, Barcelona, 11-14 Setember 2000.

LANCASTER, P.; SALKAUSKAS, K. **Surfaces generated by moving least squares methods**. [S.l.]: Math. Comput, v. 37, 1981. 141–158 p.

LEI, L.; HU, J.; HU, H.-Q. **Hybrid MSDDM with FEM-BI for multiple composite structures**. Antennas, Propagation EM Theory (ISAPE), 2012 10th International Symposium on. [S.l.]: [s.n.]. Oct 2012. p. 882-885.

LI, S. Q.; FANG, J.; WANG, W. B. Electromagnetic scattering from two adjacent cylinders. In: IEEE transactions on geoscience and remote sensing. **IEEE Geoscience and remote sensing letters**, 36, 1998. 1981-1985.

LING, F.; SHENG, X. Q.; JIN, J. M. Hybrid MoM/SBR and FEM/SBR methods for scattering by large bodies with inhomogeneous protrusions. **Antennas and Propagation Society International Symposium**, 13-18 July 1997. pp.644 - 647.

LIU, G. R. Mesh Free Methods: Moving beyond the Finite Element Method. 2º Edition. ed. [S.l.]: CRC Press LLC, 2003.

LIU, G. R.; GU, Y. T. An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming. Springer, Dordrecht.: [s.n.], 2005.

LIU, J.; JIN, J. M. A novel hybridization of higher order finite element and boundary integral methods for electromagnetic scattering and radiation problems. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 49, no.12**, Dec 2001. 1794-1806.

LIU, P.; JIN, Y. Q. Numerical simulation of bistatic scattering from a target at low altitude above rough sea surface under an EM-wave incidence at low grazing angle by using the Finite Element Method. **IEEE Transactions on antennas and propagation**, 52, 2004. 1205-1210.

LIU, W. K. et al. Reproducing kernel particle methods for structural dynamics. **International Journal Numerical Methods in Engineering**, 1995. 1655-1679.

LUCY, L. B. A numerical approach to the testing of fission thesis, v. 82(12), p. 1013-1024, 1977.

LYNCH, D. R.; PAULSEN, K. D.; STROHBEHN, J. W. Hybrid element method for unbounded electromagnetic problems in hyperthermia. **Int. J. Numerical Methods in Eng., vol. 23**, 1986. 1915-1937.

MARÉCHAL, Y. A Meshless Method for Eletromagnetic Field Computation. **Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo**, Ouro Preto, 1996. 122-127.

MARQUES, G. N. et al. **Interpolating EFGM for computing continuous and discontinuous electromagnetic**. (03321640710823082).

MARROCCO, G.; FARI, S.; BARDATI, F. **A hybrid FDTD-MoM procedure for the modeling of electromagnetic radiation from cavity-backed apertures**. Antennas and Propagation Society International Symposium, 2001. IEEE. [S.l.]: [s.n.]. July 2001. p. 302-305 vol.4.

MAUTZ, J. R.; HARRINGTON, R. F. **A Combined-Source Solution for Radiation and Scattering from a Perfectly Conducting Body**. Technical Report TR-78-3, Department of Electrical and Computer Engineering , Syracuse University, New York.

MENDEZ, S. F.; HUERTA, A. Imposing Essential Boundary Conditions in Mesh-Free Methods. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, p. 1257-1275, 2004.

MOHSIN, S. A.; SHEIKH, N. M. **Scattering by implants during MRI:** A simplified computational approach. Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA), 2010 International Conference on. [S.l.]: [s.n.]. Sept 2010. p. 517-520.

MOREIRA, M. V. **Avaliação do Espalhamento por Estruturas Filamentares Utilizando o Método dos Momentos**. Dissertação, Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica, CEFET-MG, Belo Horizonte.

MORGAN, M. A. et al. Finite element-boundary integral formulation for electromagnetic scattering. **Wave Motion, vol. 6**, 1984. 91-103.

MORGAN, M. A.; WELCH, B. E. The field feedback formulation for electromagnetic scattering computations. **IEEE Trans. Antennas Propagat. vol. AP-34**, Dec. 1986. 1377-1382.

MORGAN, M. A.; WELCH, T. B. Field feedback computation of scattering by 2-D penetrable objects. **Antennas and Propagation, IEEE Transactions on**, v. 40, n. 4, p. 445-450, Apr 1992. ISSN ISSN: 0018-926X DOI: 10.1109/8.138848.

NAYROLES, B.; TOUZOT, G.; VILLON, P. **Generalizing the finite element method:** diffuse approximation and diffuse elements. [S.l.]: Comput. Mech., v. 10, 1992. 307–318 p.

PARREIRA, G. et al. The element-free Galerkin method in three-dimensional electromagnetic problem. **IEEE Transactions on Magnetics**, 42 No. 2, 2006a. 711-714.

PARREIRA, G. F. et al. Efficient algorithms and data structures for element-free Galerkin method. **IEEE Transactions on Magnetics**, 42 No. 4, 2006b. 659-662.

PAULSEN, K. D.; LYNCH, D. R.; STROHBEHN, J. W. Threedimensional finite, boundary, and hybrid elements solutions of the Maxwell equations for lossy dielectric media. **IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-36, no. 4,** April 1988. 682-693.

PEKEL, U.; MITTRA, R. A first order hybrid FEM/MOM approach for the analysis of two dimensional structures. **Microw. Opt. Tech. Lett.,vol. 8, no. 2**, Fev. 1995.

PETERSON, A. F.; SCOOTT, L. R.; MITTRA, R. Computational Methods for Electromagnetics. [S.l.]: Wiley-IEEE Press, 1997.

PINTO, A. G. M. **Análise das Condicoes Absorventes De Engquist-Majda e Bayliss-Turkel Aplicadas ao Espalhamento Eletromagnético**. Dissertação, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, CEFET-MG, Belo Horizonte.

PINTO, A. G. M. et al. **Espalhamento eletromagnético solucionado via FEM-ABC**. X Simpósio de Mecânica Computacional. Belo Horizonte: [s.n.]. 2012. p. 8.

PORTO, T. D. B. O. P. **Análise Paramétrica do Método Sem Malha Element Free Galerkin em Problemas Eletrostáticos**. Dissertação, Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica - PPGEL, CEFET-MG, Belo Horizonte.

RESENDE, U. D. C. **Análise de Antenas Refletoras Circularmente Simétricas com a Presença de Corpos Dielétricos**. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerasi (UFMG), Belo Horizonte.

RESENDE, U. D. C. et al. Analysis of Element Free Galerkin Interloping Moving Least Square Method in an Electrostatic Problem. **MICROWAVE AND OPTICAL TECHNOLOGY LETTERS**, Vol. 57, No. 6, June 2015.

RESENDE, U. D. C.; COPPOLI, E. H. R.; AFONSO, M. M. A Meshless Approach Using EFG Interpolating Moving Least-Squares Method in 2-D Electromagnetic Scattering Analysis. **Magnetics, IEEE Transactions on**, v. 51, p. 1-4, March 2015.

RESENDE, U. D. C.; MOREIRA, M. V.; AFONSO, M. M. 7. Evaluation of Singular Integral Equation in MoM Analysis of Arbitrary Thin Wire Structures. **IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS**, VOL. 50, NO. 2, FEBRUARY 2014.

REZENDE, V. **O método de Galerkin**. Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá.

RICHMOND, R. F. Digital Computer Solution of the Rigorous Equation for Scattering Problems. **Procedings of the IEEE**, August 1965. 796-804.

SADIKU, M. N. O. **Numerical Techniques in electromagnetics**. 2nd. ed. Nova Iorque: [s.n.], 2000.

SADIKU, M. N. O. **Elementos de eletromagnetismo**. 5ª. ed. [S.l.]: Bookman, 2012. 702 p. ISBN 9788540701502.

SOLEAU, S.; BOUILLARD, P. **One-dimensional dispersion analysis for the element-free galerkin method for the helmholtz equation**. 6. ed. [S.l.]: Internacional Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 47, 2000. 1169-1188 p.

TAFLOVE, A.; UMASHANKAR, K. A hybrid moment method/finite difference time-domain approach to electromagnetic coupling and aperture penetration into complex geometries. **IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. AP-30, no. 4**, Jul 1982. 617-627.

TOPA, T.; KARWOWSKI, A. **Efficient Evaluation of Equivalent-Principle Sources in MoM-FDTD Hybrid Method by Employing Spatial Interpolation and Adaptive Sampling**. Electromagnetic Compatibility, 2007. EMC 2007. IEEE International Symposium on. [S.l.]: [s.n.]. July 2007. p. 1-4.

TOPA, T.; KARWOWSKI, A. **Efficient wideband analysis of electromagnetic problems using the awe adaptive technique with the hybrid MoM-FDTD method**. Microwaves, Radar and Wireless Communications, 2008. MIKON 2008. 17th International Conference on. [S.l.]: [s.n.]. May 2008. p. 1-4.

TRINTINALIA, L. C. **Análise de Espalhamento Eletromagnético por Corpos Condutores e Dielétricos**. São Paulo: Universidade de São Paulo - Escola Politécnica, 2008.

VIANA, S. A. **Estudo dos métodos sem malha na resolução de problemas eletromagnéticos**. Dissertação, Escola de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

VIDAL, C. F. V. P. **1. Análise do Espalhamento Eletromagnético por Corpos de Revolução pelo Método dos Momentos Utilizando Integrais Elípticas**. Dissertação, Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica , CEFET-MG, Belo Horizonte.

VOUVAKIS, M. N. et al. A Symmetric FEM-IE Formulation With a Single-Level IE-QR Algorithm for Solving Electromagnetic Radiation and Scattering Problems. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 52 No. 11**, November 2004. 3060-3070.

XUAN, L. et al. Element-free Galerkin method in pulse eddy currents. **International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics**, v. 19 Nos 1/4, p. 463-466, 2004.

XUAN, L.; UPDA, L. Element free Galerkin method for static and quasi-static electromagnetic field computation. **IEEE Transactions on Magnetics**, 40 no. 1, 2004. 12-20.

YU, B.; WANG, J.; SUN, X. A Bi-Boundary FEM-BEM Approach for Open Structure Optical Waveguide Problems. **Lightwave Technology, Journal of**, v. 27, n. 14, p. 2765-2770, July 2009. ISSN ISSN: 0733-8724 DOI: 10.1109/JLT.2009.2016583.

YUAN, X. Three-Dimensional Electromagnetic Scattering from Inhomogeneous Objects by the Hybrid Moment and Finite Element Method. **IEEE TRANSACTIONS ON MICROWAVE THEORY AND TECHNIQUES**, v. 38, p. 1053 - 1058, August 1990.

YUAN, X.; LYNCH, D. R.; STROHBEHN, J. W. Coupling of Finite Element and Moment Methods for Electromagnetic Scattering from Inhomogeneous Objects. **IEEE TRANSACTIONS ON ANTENNAS AND PROPAGATION, VOL. 38, NO. 3**, p. 386 - 393, March 1990.

YUAN, X.; LYNCH, D. R.; STROHBEHN, J. W. Coupling of finite element and moment methods for electromagnetic scattering from inhomogeneous objects. **Antennas and Propagation, IEEE Transactions on**, 38, Mar 1990. pp.386,393.

ZHU, T.; ATLURI, S. N. A modified collocation method and a penalty formulation for enforcing the essential boundary conditions in the element free galerkin method. **Computational Mechanics**, v. 21, p. 211-222, 1998.