UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA ELÉTRICA

# ANÁLISE DO ESPALHAMENTO ELETROMAGNÉTICO VIA FEM-UPML

Giovanni Valvassoura
Belo Horizonte
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA ELÉTRICA

Giovanni Valvassoura

# ANÁLISE DO ESPALHAMENTO ELETROMAGNÉTICO VIA FEM-UPML

Dissertação de mestrado submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção de titulo de mestre em Engenharia Elétrica

Área de Concentração: Sistemas Elétricos
Linha de Pesquisa: Eletromagnetismo Aplicado
Orientador: Prof. Dr. Márcio Matias Afonso
Coorientador: Prof. Dr. Sandro Trindade Mordente Gonçalves
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Belo Horizonte
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA ELÉTRICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica– Associação Ampla entre a Universidade Federal de São João del-Rei e o Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais em 27 de junho de 2016 como requisito parcial para obtenção do titulo de Mestre em engenharia elétrica, aprovada pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Marcio Matias Afonso (Orientador)
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Sandro Trindade Mordente Gonçalves (Coorientador)
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Glaucio Lopes Ramos - UFSJ
Universidade Federal de São João Del Rei

Prof. Dr. Dalmy Freitas de Carvalho Júnior
Universidade de Itaúna

Belo Horizonte, 27 de junho de 2016.

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof.Dr. Marcio Matias Afonso por todo apoio, paciência, confiança e dedicação a este trabalho.

Aos professores do PPGEL pelos ensinamentos de extrema relevância para a execução deste trabalho.

Aos colegas de mestrado pelo apoio e companheirismo, tornando o ambiente de curso sempre agradável.

Aos meus pais, Geraldo e Ivanirdes, pelo total apoio, carinho e dedicação, sendo sempre fonte de incentivo para este trabalho.

Ao meu irmão, Giancarlo, pelo total incentivo e por sempre ser um exemplo para mim.

**RESUMO**

O fenômeno do espalhamento eletromagnético é de extrema relevância no mundo moderno. Esta relevância se deve as inúmeras pesquisas na área do eletromagnetismo e suas diversas aplicações. Tendo em vista a importância deste tema vários métodos numéricos são estudados para solução de problemas nesta área. Entre estes métodos o Método dos Elementos Finitos (FEM) se destaca por sua capacidade de modelar geometrias complexas e cujo domínio esteja preenchido por diferentes materiais. Para aplicar o FEM em problemas abertos, como o espalhamento eletromagnético, o truncamento do domínio é necessário. Neste trabalho o truncamento é realizado pela UPML. A UPML além apresentar baixa reflexão, tem como vantagem a possibilidade de ser colocada próxima ao objeto, gerando ganho computacional. A formulação e a implementação do FEM-UPML são apresentadas e a validação é desenvolvida por meio da comparação com a solução analítica para um condutor cilíndrico. São realizadas diversas simulações a fim de avaliar as características de projeto da UPML e suas relações com a precisão do método. As análises de erro demonstram a eficiência do método para o problema tratado.

*Palavras-chaves: Espalhamento Eletromagnético, Método dos Elementos Finitos, FEM, UPML.*

**ABSTRACT**

The electromagnetic scattering phenomenon is extremely important in the modern world. This importance is due to extensive research in electromagnetism area and its various applications. Given the importance of this issue several numerical methods are studied to solve problems in this area. Among these methods the Finite Element Method (FEM) stands out for its ability to model complex geometries and whose domain is filled with different materials. To apply the WEF in open problems such as electromagnetic scattering, the domain truncation is necessary. This work is done by truncation UPML. The UPML besides its low reflection, has the advantage of the possibility of being placed next to the object, generating computational gain. The design and implementation of the FEM-UPML is presented and the validation is performed by comparing with the analytical solution for a cylindrical conductor. They are performed several simulations to evaluate the UPML design features and its relations with the precision of the method. The error analysis demonstrate the effectiveness of the method to the problem treated.

*Keywords: Electromagnetic Scattering, Finite Element Method (FEM), UPML.*

**LISTA DE FIGURAS**

## LISTA DE TABELAS

## LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{B}$ | Densidade de fluxo magnético $(Wb/m^2)$ |
| $\boldsymbol{D}$ | Densidade de fluxo elétrico $(C/m^2)$ |
| $\boldsymbol{E}$ | Intensidade de campo elétrico $(V/m)$ |
| $\boldsymbol{H}$ | Intensidade de campo magnético $(A/m)$ |
| $\boldsymbol{J}$ | Densidade de corrente elétrica $(A/m^2)$ |
| $\boldsymbol{J_s}$ | Densidade superficial de corrente elétrica $(A/m^2)$ |
| $\boldsymbol{K_s}$ | Densidade superficial de corrente magnética $(A/m^2)$ |
| $k_0$ | Número de onda no espaço livre |
| $\varepsilon_0$ | Permissividade elétrica do espaço livre $(F/m)$ |
| $\varepsilon_r$ | Permissividade elétrica relativa do meio |
| $\mu_0$ | Permeabilidade magnética do espaço livre $(H/m)$ |
| $\mu_r$ | Permeabilidade magnética relativa do meio |
| $\lambda_0$ | Comprimento de onda no espaço livre $(m)$ |
| $\lambda$ | Comprimento de onda no interior do espalhador $(m)$ |
| $\sigma$ | Condutividade elétrica $(\Omega^{-1}/m)$ |
| $\rho_e$ | Densidade de carga elétrica $(C/m^2)$ |
| $\rho_{e_s}$ | Densidade superficial de carga elétrica $(C/m^2)$ |
| $\rho_{m_s}$ | Densidade superficial de carga magnética $(Wb/m^2)$ |

**SUMÁRIO**

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Considerações iniciais

Estudos sobre espalhamento eletromagnético são de extrema importância científica devido às inúmeras aplicações relevantes associadas a este fenômeno. Como exemplos de aplicações do espalhamento eletromagnético têm-se: detecção de fissuras em estruturas [1], diagnóstico precoce de enfermidades [2], detecção e identificação de minas e mapeamentos arqueológicos [3], [4], entre outras. As inúmeras possibilidades de aplicações deste fenômeno fomentam muitas pesquisas. Para a maioria dos problemas práticos a solução analítica torna-se extremamente trabalhosa, dessa forma deve-se empregar métodos numéricos para obter sua solução.

Neste trabalho o método numérico escolhido para resolver o problema de espalhamento é o Método dos Elementos Finitos (F*inite Element Method-FEM*). O nascimento do FEM pode ser considerado o trabalho publicado em 1941 por Richard Courant [5], porém o termo Método dos Elementos Finitos foi cunhado por Ray W. Clough, em 1960 [6]. A aplicação do FEM para solução de problemas de eletromagnetismo foi inicialmente feita por Peter Silvester em 1969 [7].

O FEM tem como princípio a divisão do domínio em elementos simples com formas e comprimentos arbitrários. Este procedimento permite a modelagem precisa dos objetos com forma geométrica complexa. Além disso, a densidade de elementos pode ser ajustada de acordo com a necessidade de cada problema. A incógnita, nos vértices de cada elemento, é aproximada por meio de uma função de interpolação e utilizando-se o método dos erros ponderados ou o método variacional, a equação diferencial parcial é transformada em um sistema algébrico de equações, no qual a matriz coeficientes é esparsa. A principal vantagem do FEM reside na sua capacidade de modelar geometrias complexas e cujo domínio esteja preenchido por diferentes materiais. Ademais, uma vez que o FEM gera matrizes esparsas ele representa uma economia computacional e também apresenta uma formulação relativamente simples, mesmo quando o domínio está preenchido com materiais não homogêneos e quando o espalhador tem forma geométrica complexa [1].

Para aplicar o FEM é necessária a divisão de todo o domínio do problema, entretanto o espalhamento eletromagnético é um problema aberto, dessa forma é necessária a inserção de uma fronteira artificial para fechamento do domínio.

Dentre as principais condições de contorno propostas destacam-se as do tipo ,*Absorbing Boundary Condition*, ABC.

Em 1977 foi proposta a primeira ABC, a condição de Engquinst-Majda, desenvolvida para superfície plana por meio da incidência dos campos [8]. Em 1980, a condição de Bayliss – Turkel foi proposta utilizando a aproximação assintótica do campo espalhado distante do objeto [9].

A partir do desenvolvimento destas ABC's, tornou-se possível o estudo de estruturas complexas em ambiente ilimitado utilizando o FEM. Como apresentam o inconveniente de reflexões espúrias para determinados ângulos de incidência, diversas formulações para as condições absorventes foram propostas [10]. A condição de Mur, publicada em 1981, que diminui as reflexões de campo para diversos ângulos de incidência [11]. Em 1986, o trabalho de Trefethen e Halpern (TH) propôs uma aproximação adequada a partir da série de Taylor para ser incorporada nas equações de Engquinst-Majda [12]. Nesse mesmo ano, Higdon apresentou uma formulação similar à de Bayliss-Turkel que é capaz de absorver ondas planas para determinados ângulos [13].

Um dos grandes problemas da inserção da fronteira artificial são as reflexões geradas a partir desta inserção, que por sua vez ocasionam erros. A fim de minimizá-las ou até mesmo eliminá-las, em 1992, foi publicada uma aproximação alternativa conhecida como absorvedores fictícios (*fictitious absorbers*) [14]. Essa região é formada internamente por camadas regulares dielétricas e a última por um condutor perfeito. Por meio da escolha conveniente dos seus parâmetros constitutivos e da sua espessura, ela é capaz de absorver ondas em uma ampla faixa de ângulos de incidência [15].

Estes absorvedores fictícios possuem como característica trabalhar em uma única frequência, fato este que exige sua remodelação para uma larga banda de frequência. Visando resolver este inconveniente Berenger desenvolveu as camadas perfeitamente casadas (perfect matched layer-PML) [16]. A PML é projetada para não gerar reflexões de ondas planas em qualquer frequência e com qualquer ângulo

de incidência, pois para cada ponto os parâmetros internos da camada são recalculados de forma que ocorra o perfeito casamento de impedâncias [15].

Em 1995, Sacks *et al.* propôs uma PML anisotrópica chamada de UPML [17]. A UPML é baseada nas equações de Maxwell, nas quais não existe subdivisão dos componentes de campo elétrico e magnético, fazendo com que sua formulação represente a realidade física. Apresentando eficiência igual à PML proposta por Berenger, porém, possuindo maior facilidade de programação e computacionalmente mais eficiente.

Portanto, devido a estas características, neste trabalho o problema do espalhamento eletromagnético é limitado pela condição UPML.

## 1.2 Objetivo

O objetivo geral desta dissertação é analisar o fenômeno do espalhamento eletromagnético utilizando o FEM com UPML.

E os objetivos específicos são:

- Obter a formulação para problemas de espalhamento eletromagnético em duas dimensões;
- Estudo do Método dos Elementos Finitos, FEM;
- Estudo da condição de contorno UPML;
- Implementação computacional do FEM com a UPML;
- Comparação dos resultados simulados com os analíticos;
- Análise das características da UPML.

## 1.3 Limitações do trabalho

Entre as limitações do trabalho, relacionam-se:

- O problema é tratado em duas dimensões;
- A fonte representada é uma onda plana;
- A formulação apresentada é aplicável a diversos tipos de espalhadores, porém o problema tratado nesta dissertação limita-se a um espalhador condutor cilíndrico.

## 1.4 Organização do texto

Esta dissertação está dividida em cinco capítulos. Neste primeiro capítulo é apresentada uma breve revisão bibliográfica do tema, a sua relevância, os objetivos traçados, as limitações do trabalho e a organização do texto.

No capítulo 2 são apresentados os conceitos físicos e matemáticos do fenômeno do espalhamento eletromagnético.

No capítulo 3 é apresentada a formulação do FEM para o problema do espalhamento eletromagnético. Neste capítulo também é apresentada a formulação da condição de contorno utilizada, UPML, e sua incorporação ao FEM. Por fim é feita a discretização da formulação utilizando o método de Galerkin.

O capítulo 4 apresenta os resultados obtidos e a comparação entre o resultado analítico e o simulado.

É desenvolvida no capítulo 5 a conclusão da dissertação e são apresentadas as propostas de trabalho futuro.

# 2 ESPALHAMENTO ELETROMAGNÉTICO

O objetivo deste capítulo é apresentar os conceitos envolvidos no fenômeno do espalhamento eletromagnético e as equações que o regem. Inicialmente o capítulo introduz os conceitos de irradiação e espalhamento eletromagnético e, em seguida, é apresentado às relações físicas fundamentais para a análise do problema. Ao término do capítulo são apresentados os métodos numéricos mais utilizados na solução do problema e justifica-se a escolha do Método dos Elementos Finitos.

## 2.1 Introdução

O fenômeno de espalhamento eletromagnético ocorre quando uma onda eletromagnética encontra com um obstáculo que a intercepta. Neste momento, os campos elétricos e magnéticos incidentes induzem corrente no objeto atingido. As correntes induzidas no objeto circulam na sua superfície e/ou no seu volume, fazendo-o exercer papel de uma antena que irradia campos eletromagnéticos espalhados. Os campos espalhados superpõem-se aos campos incidentes, alterando a configuração dos campos totais [1]. Desta forma, a expressão matemática para o campo total deve ser alterada para incluir a parcela do campo espalhado, conforme mostrado em (2.1) e (2.2):

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{s}} \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}^{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{H}^{\boldsymbol{s}} \tag{2.2}$$

onde $\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{i}}$ e $\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{i}}$ são os campos elétricos e magnéticos incidentes e $\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{s}}$ e $\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{s}}$ são os campos elétricos e magnéticos espalhados.

A figura 2.1 ilustra este fenômeno. No ponto (a) a fonte gera uma onda eletromagnética que propaga pelo espaço livre $\Omega_0$ e incide no ponto (b). A onda ao atingir o objeto induz correntes que circulam na sua superfície, tornando-o uma fonte de campo que também irradia campos eletromagnéticos.

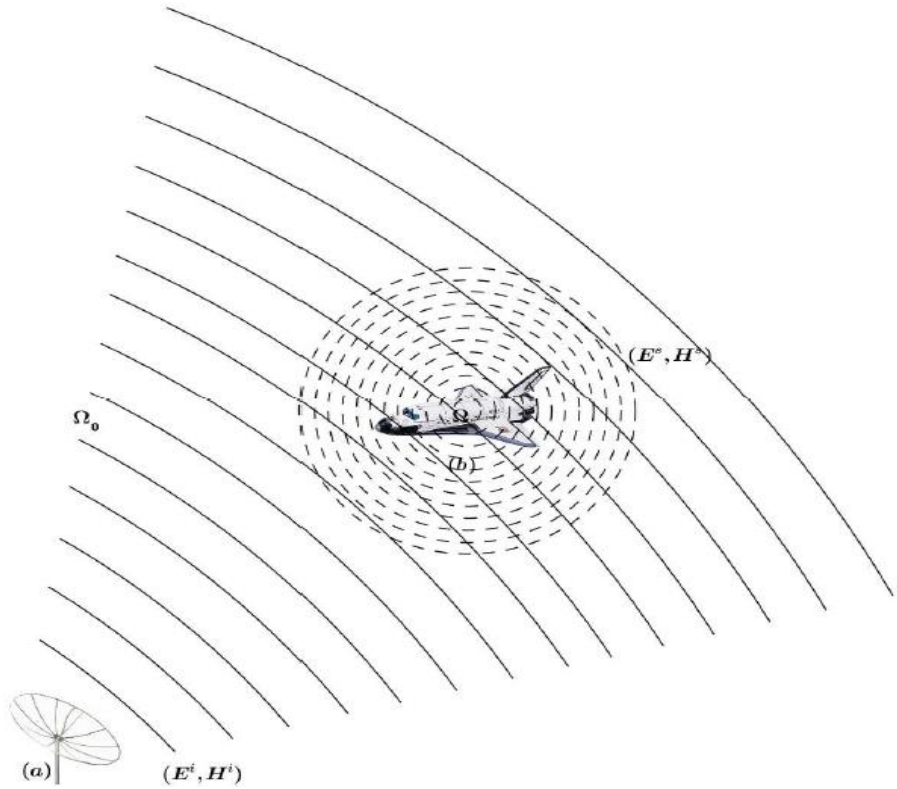


Figura 2.1: Espalhamento Eletromagnético: (a) fonte; (b) espalhador [10].

Para a modelagem de problemas relacionados ao espalhamento eletromagnético se faz necessário o entendimento das equações de Maxwell.

## 2.2 Equações de Maxwell

As equações de Maxwell são fundamentais para entender qualquer fenômeno eletromagnético macroscópico [18]. Elas descrevem as leis físicas referentes às relações entre campo elétrico e magnético, cargas e correntes associados aos fenômenos eletromagnéticos. Na forma diferencial as equações são descritas conforme (2.3) a (2.6):

Lei de Gauss $\nabla . \boldsymbol{D} = \boldsymbol{\rho_s}$, (2.3)

Lei de Gauss para Campos magnéticos $\nabla . \boldsymbol{B} = 0$, (2.4)

Lei de Faraday $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ , (2.5)

Ampère-Maxwell $$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\,, \tag{2.6}$$

onde $\frac{\partial}{\partial t}$ é a derivada parcial temporal, $\boldsymbol{D}$ é a densidade de fluxo elétrico (C/m$^2$), $\boldsymbol{E}$ é a intensidade de campo elétrico (V/m) , $\boldsymbol{B}$ é a densidade de fluxo magnético (Wb/m$^2$), $\boldsymbol{H}$ é a intensidade de campo magnético (A/m), $\boldsymbol{J}$ é a densidade de corrente (A/m$^2$) e $\boldsymbol{\rho_s}$ é a densidade de carga livres (C/m$^3$).

As equações (2.3) a (2.6) são, muitas vezes, usadas em conjunto com a equação da continuidade, que relaciona variações da densidade de corrente $\boldsymbol{J}$ com a taxa de variação temporal da densidade de carga, conforme (2.7):

$$\nabla.\boldsymbol{J} = -\frac{\partial \boldsymbol{p_v}}{\partial t}\,. \tag{2.7}$$

Em problemas de espalhamento eletromagnético, a fonte está suficientemente afastada do espalhador, desta forma a onda que atinge o espalhador é plana e uniforme. Nesse caso, a região de fontes pode ser excluída da análise do problema, portanto $\boldsymbol{J} = 0\ e\ \boldsymbol{p_v} = 0$. Assume-se que os campos elétricos e magnéticos oscilam harmonicamente em uma única frequência angular $\omega$**,** desta forma o fenômeno do espalhamento ocorre em regime harmônico e as equações de Maxwell podem ser expressas no domínio da frequência, em que o fator temporal $e^{j\omega t}$, faz com que tais equações sejam independentes do tempo, por meio da substituição do operador $\frac{\partial}{\partial t}$ por $j\omega$ [19]. Uma vez que, para o caso harmônico, as equações (2.5) e (2.6) podem ser obtidas das equações (2.3) e (2.4), com o auxílio da equação (2.7), a forma harmônica das equações de Maxwell é dada pelas expressões (2.8) e (2.9):

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -j\omega\boldsymbol{B}, \tag{2.8}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = -j\omega\boldsymbol{D}, \tag{2.9}$$

onde $\omega$ é a frequência angular.

## 2.3 Relações constitutivas

As equações de Maxwell não possuem de forma direta as características do meio, dessa forma para definir a relação entre os campos e o meio físico se faz necessário o conhecimento das relações constitutivas. Essas relações descrevem as propriedades macroscópicas do meio considerado, são representadas por (2.10) a (2.12):

$$\boldsymbol{D} = \bar{\bar{\varepsilon}}\boldsymbol{E}, \tag{2.10}$$

$$\boldsymbol{B} = \bar{\bar{\mu}}\boldsymbol{H}, \tag{2.11}$$

$$\boldsymbol{J} = \bar{\bar{\sigma}}\boldsymbol{E}, \tag{2.12}$$

onde $\bar{\bar{\varepsilon}}$ ,$\bar{\bar{\mu}}$ e $\bar{\bar{\sigma}}$ são, respectivamente, a permissividade elétrica, a permeabilidade magnética e a condutividade elétrica do material em questão.

Os tensores presentes nas equações de (2.10) a (2.12) se tornam escalares quando os meios em estudo são lineares, homogêneos, isotrópicos e não dispersivos.

A partir das relações constitutivas é possível obter as equações de Maxwell na forma seguinte, conforme (2.13) e (2.14):

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -j\omega\mu\boldsymbol{H}, \tag{2.13}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = j\omega\varepsilon\boldsymbol{E}. \tag{2.14}$$

Normalmente os termos $\varepsilon$ e $\mu$ são definidos em função de seus valores no espaço livre em:

$$\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0, \tag{2.15}$$

$$\mu = \mu_r\mu_0. \tag{2.16}$$

onde $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\frac{F}{m}$ é a permissividade elétrica do espaço livre, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\frac{H}{m}$ é a permeabilidade magnética do espaço livre, $\varepsilon_r$ é a permissividade

elétrica relativa e $\mu_r$ é a permeabilidade magnética relativa. Além das relações constitutivas, é necessário definir as condições de interface.

## 2.4 Condições de Interface

As equações de Maxwell regem o comportamento dos campos elétricos e magnéticos no interior e exterior de um meio. Na interface entre dois meios diferentes podem ocorrer variações abrupta dos parâmetros constitutivos que ocasionam descontinuidade dos campos [19]. Dessa forma as derivadas dos campos não modelam o fenômeno nas fronteiras, sendo necessária uma descrição dos próprios campos, em vez do comportamento de suas derivadas.

A Figura 2.2 ilustra a interface entre dois meios distintos. O vetor unitário normal $\hat{n}$ está direcionado do meio 2 para o meio 1.

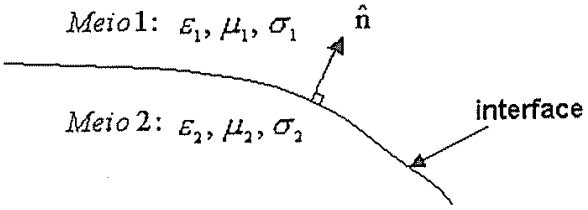


Figura 2.2: Interface entre dois meios [1].

As condições de interface entre dois meios quaisquer são relacionadas conforme (2.15) a (2.18) [9]:

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E_1} - \boldsymbol{E_2}) = -\boldsymbol{k_s}, \tag{2.15}$$

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H_1} - \boldsymbol{H_2}) = \boldsymbol{J_s}, \tag{2.16}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{D_1} - \boldsymbol{D_2}) = \boldsymbol{\rho_{es}}, \tag{2.17}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{B_1} - \boldsymbol{B_2}) = \boldsymbol{p_{ms}}, \tag{2.18}$$

onde $\boldsymbol{n}$ é o vetor normal a fronteira de separação com direção do meio 2 para o meio 1, $\boldsymbol{k_s}$ é a densidade superficial de corrente magnética (V/m), $\boldsymbol{J_s}$ é a densidade

superficial decorrente elétrica (A/m), $\boldsymbol{\rho_{es}}$ é a densidade superficial de carga elétrica (C/m$^2$) e $\boldsymbol{\rho_{ms}}$ é a densidade superficial de carga magnética (Wb/m$^2$).

Sendo o meio 2, na figura 2.2, um condutor elétrico perfeito e sabendo que o campo é nulo em seu interior  as condições de interface são reduzidas, conforme (2.19) a (2.22), [9]:

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E_1} = 0, \tag{2.19}$$

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H_1} = \boldsymbol{J_s}, \tag{2.20}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{D_1} = \boldsymbol{\rho_{es}}, \tag{2.21}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{B_1} = 0. \tag{2.22}$$

Com $\sigma_2 = \infty$, as equações (2.19) e (2.21) mostram que o campo elétrico só existirá na direção normal. As equações (2.20) e (2.22) mostram que existirá circulação de corrente na superfície do condutor dada pelo componente tangencial do campo magnético e o campo magnético na direção normal é nulo [1].

Sendo os meios 1 e 2 dielétricos e considerando que não haja correntes ou cargas superficiais , as equações são reduzidas e apresentadas de (2.23) a (2.36) [9]:

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E_1} = n \times \boldsymbol{E_2}, \tag{2.23}$$

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H_1} = n \times \boldsymbol{H_2}, \tag{2.24}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{D_1} = n \cdot \boldsymbol{D_2}, \tag{2.25}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{B_1} = n \cdot \boldsymbol{B_2}. \tag{2.26}$$

Por meio da análise das equações (2.23) a (2.26) verifica-se que os campos elétrico e magnético tangenciais são contínuos na fronteira e as componentes normais são descontínuos devido a variação de $\varepsilon\ e\ \mu$.

## 2.5 Equação de Onda

O fenômeno do espalhamento eletromagnético está diretamente relacionado com a propagação de ondas eletromagnéticas. Desta forma, pode-se obter a solução para problemas deste tipo por meio da solução da equação de onda de Helmholtz para campos eletromagnéticos.

As equações (2.11) e (2.12) são equação diferencias de primeira ordem e estão acopladas, ou seja, os campos $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ aparecem em cada uma delas. É possível desacoplá-las tomando o rotacional de ambos os lados das equações e aplicando as identidades vetoriais apresentadas no Apêndice A. A formulação completa para equação de onda elétrica e magnética é apresentada no Apêndice B. Após as manipulações necessárias obtêm-se as equações de onda em (2.27) e (2.28):

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + k_0^2 \boldsymbol{E} = 0, \tag{2.27}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} + k_0^2 \boldsymbol{H} = 0, \tag{2.28}$$

onde $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ é o numero de onda, sendo $\varepsilon_0$ a permissividade elétrica no ar, $\mu_0$ a permeabilidade magnética no ar e $\omega$ a frequência angular.

Devido a semelhança entre as equações (2.27) e (2.28), pode-se escrever a forma generalizada da equação de onda, conforme (2.29):

$$\nabla^2 \boldsymbol{U} + k_0^2 \boldsymbol{U} = 0 \tag{2.29}$$

onde $\boldsymbol{U}$ é o campo elétrico $\boldsymbol{E}$ ou o campo magnético $\boldsymbol{H}$.

Assumindo que a radiação da onda ocorra em um meio infinito sem alterações constitutivas em uma determinada direção, não há variações espaciais na propagação nesta direção e as derivadas das componentes eletromagnéticas nessa direção são nulas. Dessa forma, é possível simplificar o problema tridimensional para um problema bidimensional. Considerando que isso ocorra na direção z, então, tem-se caracterizados os modos Transverso Magnético e o Transverso Elétrico,

onde $H_{\hat{z}} = 0\ e\ E_{\hat{z}} = 0$, respectivemente. Dessa forma a equação (2.29) pode ser simplificada na equação (2.30), conforme [10]:

$$\nabla \cdot (\alpha_1 \nabla U_z) + k_0^2 \alpha_2 U_z = 0, \tag{2.30}$$

onde $\alpha_1 = {\mu_r}^{-1}\ e\ \alpha_2 = \varepsilon_r$ para a formulação do campo elétrico, $\alpha_1 = {\varepsilon_r}^{-1}\ e\ \alpha_2 = \mu_r$ para a formulação do campo magnético e $k_0$ a constante de propagação do espaço livre.

A equação (2.30) representa a equação de onda para a propagação de um campo elétrico ou magnético e possui apenas uma única solução quando relacionada com as condições de contorno.

## 2.6 Condições de contorno

Em problemas onde o domínio se estende até o infinito, o problema é dito aberto [1]. O fenômeno do espalhamento eletromagnético se enquadra neste grupo de problemas abertos. Para que a solução do problema seja única se faz necessário a definição de uma condição sobre as fronteiras no infinito. Essa condição é conhecida como condição *Sommerfeld* [1]. Para problemas onde as fontes e os espalhadores estão imersos em espaço livre e a uma distância finita da origem de um sistema de coordenadas qualquer, a condição de contorno de *Sommerfeld* assume, em duas dimensões, conforme (2.31) [1]:

$$\lim_{\rho \to \infty} \sqrt{\rho} \left( \frac{\partial \boldsymbol{U_z}}{\partial \rho} + j k_0 U_z \right) = 0, \tag{2.31}$$

onde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. A equação (2.31) indica que o campo e a sua derivada normal devem ser nulos no infinito, para que seja possível solucionar o problema.

Além da condição de Sommerfield, alguns métodos numéricos, incluindo o FEM, baseiam-se na limitação do domínio por meio da inserção de uma fronteira fictícia. Neste trabalho é utilizada a condição de contorno chamada UPML.

## 2.7 Métodos numéricos para problemas de espalhamento eletromagnético

O problema do espalhamento eletromagnético comumente é resolvido por meio de forma analítica ou utilizando métodos numéricos. A forma analítica é mais precisa, porém em diversos casos reais ela se torna inviável. Dessa forma, é comum a utilização de métodos numéricos para encontrar o valor aproximado para estes problemas. Na área de eletromagnetismo existem dois tipos principais de métodos numéricos para a solução de equações diferencias parciais: os métodos integrais e os métodos diferencias.

O Método dos Momentos, que se encontra no grupo dos métodos integrais, é baseado na resolução de equações integrais por redução a um sistema matricial de equações algébricas lineares [10]. Este método possui alguns inconvenientes onde se destaca: a ampla necessidade de armazenamento de dados e o tempo de simulação, esses inconvenientes resultam em certa limitação a sua aplicação para objetos com geometria complexa [10]. O alto custo computacional nesse caso é devido ao completo preenchimento das matrizes e ao crescimento delas com o quadro do número de incógnitas [20].

Nos métodos diferencias ocorre a geração de matrizes esparsas que crescem quase de forma linear com o tamanho do problema. Dessa forma esses métodos, normalmente, acabam sendo mais eficientes que o integral para problemas relativamente grandes, pois apresentam menor custo computacional. No grupo dos métodos diferenciais destacam-se: o Método das Diferenças Finitas (FDM) e o Método dos Elementos Finitos (FEM) [10].

O Método das Diferenças Finitas é um método aproximado para solucionar equações diferenciais. Sua implementação baseia-se na substituição da operação de diferenciação por uma subtração entre pontos do domínio, seguida de uma divisão pelo intervalo entre esses pontos. Obtém-se, dessa forma, um sistema de equações algébricas em que as incógnitas são os valores das grandezas nos nós. Devido à sua simplicidade, é um método apropriado para tratar domínios não lineares, não homogêneos e anisotrópicos. Entretanto, o FDM possui um inconveniente: não representa com facilidade os campos na interface de meios diferentes [10].

No Método dos Elementos Finitos (FEM) o valor da incógnita nos nós é obtido a partir da contribuição de cada elemento. A incógnita no interior de cada elemento é aproximada por uma função de interpolação e por meio do método de resíduos ponderados a equação original é transformada em um sistema algébrico de equações em que uma matriz de coeficientes esparsa é obtida. A malha gerada pelo FEM é facilmente ajustável, ou seja, ao dividir o domínio em elementos de forma e tamanho arbitrários, é possível solucionar com maior precisão problemas com geometrias arbitrárias e com variações abruptas de campo [22]. Outra vantagem do FEM é a facilidade em descrever domínios não lineares, não homogêneos e anisotrópicos. Uma desvantagem do FEM é que ele não trata de forma isolada problemas abertos, porém esta desvantagem pode ser solucionada utilizando uma condição de contorno absorvente.

As condições de contorno absorventes (ABC's) são impostas em uma fronteira artificial, localizada a uma distância do espalhador. Essas condições devem fazer essa fronteira ser o mais transparente possível para o campo espalhado, causando assim o mínimo de reflexão não física na fronteira. Pode-se destacar com essas características as condições de Engquist-Majda e Bayliss-Turkel [8], [9]. As ABC's tem como desvantagem a exigência de que as ondas incidam de forma perpendicular sobre a superfície que a contém. Um modo alternativo à ABC é usar um meio material absorvente. Idealmente, o meio absorvente deve possuir uma espessura de poucas arestas da malha do espaço computacional, sendo irreflexivo a qualquer onda incidente sobre todo seu espectro de frequência, altamente absorvente e eficiente na região de campo próximo ou de campo distante [25]. Destacam-se a PML proposta por Berenger [16] e a UPML proposta por Sacks [17].

# 3 FORMULAÇÃO FEM-UPML

Neste capítulo é apresentada a formulação do Método dos Elementos Finitos bidimensional para problemas de espalhamento eletromagnético. São apresentadas as formulações fortes e fracas do problema e a incorporação da UPML.

## 3.1 Descrição do problema

A Figura 3.1 ilustra o problema a ser tratado neste trabalho, onde um cilindro de secção transversal com comprimento axial infinito na direção *z* é imerso no espaço livre. Uma onda eletromagnética *TEz* incide na direção *+x* ortogonal ao eixo do cilindro.

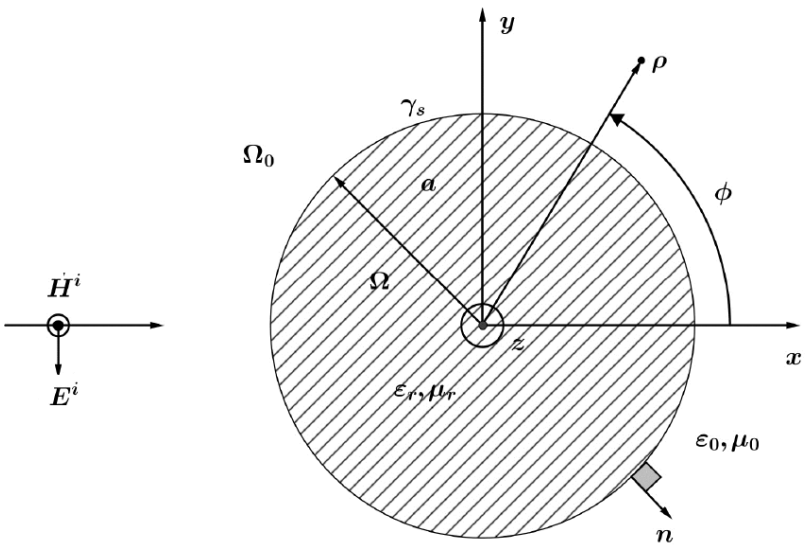


Figura 3.1: Secção transversal de um cilindro infinito [10].

Na Figura 3.1, $\Omega_0$ representa o espaço livre, $\Omega$ o domínio do objeto, $\Upsilon_s$ a superfície do espalhador, **n** o vetor normal a superfície do objeto, $\boldsymbol{a}$ o raio do espalhador, **ρ** a distância de observação a partir do centro da secção transversal e $\boldsymbol{E^i}$ e $\boldsymbol{H^i}$ representam os campos elétrico e magnético incidentes, respectivamente.

Como demonstrado na seção 2.5, o problema pode ser tratado de forma bidimensional. Para isso é considerado que o campo incidente e as propriedades do material do espalhador não variam ao longo do seu eixo.

## 3.2 Forma Forte

A equação 3.1 rege o fenômeno do espalhamento eletromagnético em conjunto com a condição de radiação de Sommerfeld, equação 3.2, e com a condição de contorno absorvente [10]:

$$\nabla \cdot (\alpha_1 \nabla U) + k_0^2 \alpha_2 U = 0 \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{3.1}$$

$$\alpha_1 \frac{\partial U}{\partial n} = -\Psi \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \gamma_s. \tag{3.2}$$

A equação (3.1) apresenta o comportamento dos campos no interior do domínio, enquanto a equação (3.2) estabelece a condição de interface para os campos sobre a fronteira $\gamma_s$. Essas equações são denominadas como a formulação forte para problemas de espalhamento eletromagnético em duas dimensões. Esta formulação exige que a solução $U$ satisfaça a equação (3.1) em todo ponto do domínio. Como o domínio pode estar preenchido por diferentes materiais e na interface desses materiais a equação (3.1) não é satisfeita, a exigência passa a ser difícil de ser cumprida [1].

## 3.3 Forma Fraca

Uma forma de contornar a dificuldade apresentada pela formulação forte é a utilização de um resíduo. Dessa forma tem-se:

$$R = \nabla.(\alpha_1 \nabla u) + k_0^2 \alpha_2 u \ , \tag{3.3}$$

onde $u$ é aproximação para o campo $U$.

Aplicando o método dos resíduos ponderados, integrando-se o resíduo em todo domínio, multiplicando por uma função de ponderação $w$ e forçando a integral a zero, teremos a formulação fraca [10].

$$\int_\Omega [\nabla.(\alpha_1 \nabla u)] w d\Omega + \int_\Omega k_0^2 \alpha_2 w u d\Omega = 0 \tag{3.4}$$

Após manipulações matemáticas, apresentadas no Apêndice C, a equação (3.4) pode ser reescrita da seguinte forma, conforme (3.5):

$$\int_{\Omega} \nabla w.(\alpha_1 \nabla u) d\Omega - \int_{\Omega} k_0^2 \alpha_2 w u d\Omega - \int_{\Omega} \alpha_1 w \frac{\partial u}{\partial n} d\gamma_s = 0. \tag{3.5}$$

O método dos elementos finitos exige que o domínio seja fechado. Como o problema do espalhamento eletromagnético encontra-se no espaço livre se faz necessária a limitação do domínio computacional. A limitação do domínio pode ser realizada por meio da inserção de uma fronteira artificial. Para reduzir as reflexões não físicas que a inserção desta fronteira produz é imposta uma condição de contorno sobre ela. Neste trabalho a condição de contorno escolhida é a UPML.

## 3.4 UPML

A PML é projetada para simulações no espaço livre, sendo baseada na utilização de camadas absorventes e no conceito de absorver, teoricamente sem reflexões espúrias, a onda eletromagnética para qualquer frequência e ângulo de incidência.

A PML proposta por Berenger é um meio hipotético baseado em um modelo matemático. Este modelo não é um meio físico. Devido à dependência da coordenada os termos de perdas, se tal meio físico existisse, devem ser anisotrópicos [26].

Um modelo físico, baseado em um meio anisotrópico perfeitamente casado, foi inicialmente proposto por Sacks [17]. Para uma única interface, o meio anisotrópico é uniaxial e composto por tensores magnéticos e elétricos. Este meio funciona tão bem quanto a PML proposta por Berenger e evitando a divisão do campo não físico [26]. Este modelo é conhecido como PML uniaxial, ou UPML.

Antes de entrar especificamente na formulação teórica da condição de contorno UPML se faz necessário estabelecer bases sobre o comportamento de uma onda plana em um meio com perdas. O detalhamento desta base é estabelecido no Apêndice D.

Após estabelecer estas bases é possível o desenvolvimento da formulação para um meio composto pela UPML.

### 3.4.1 Onda incidente em um meio UPML

Considerando uma onda plana harmônica, descrita pela equação (3.6), propagando na região 1, definida na Figura 3.2, que é o semi-espaço isotrópico em *x* < 0, assume-se que esta onda é incidente na região 2, o semi-espaço *x* > 0, compreendido por um meio anisotrópico tendo os tensores permissividade elétrica e permeabilidade magnética dados pela equação (3.7),

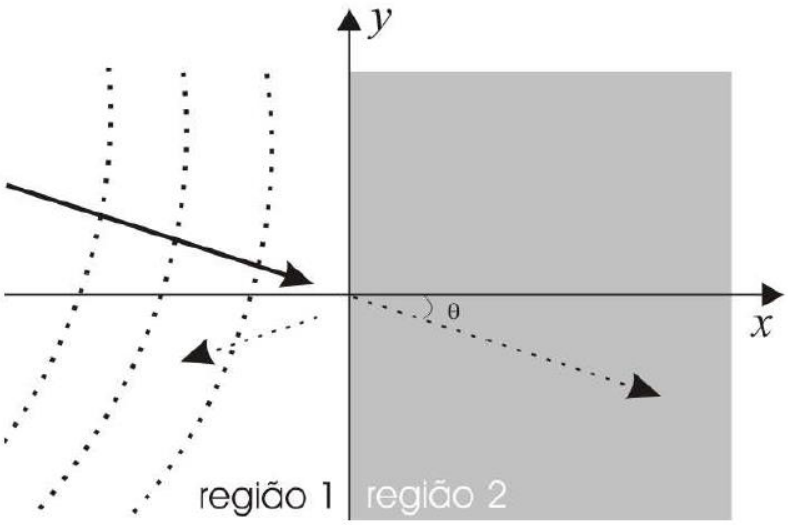


Figura 3.2: Onda incidente da região 1 para região 2 [25].

$$\boldsymbol{H^i} = H_0 e^{-j\beta_{1_x}x - j\beta_{1_y}y} \tag{3.6}$$

$$\overline{\overline{\varepsilon_2}} = \varepsilon_2 \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \qquad \overline{\overline{\mu_2}} = \mu_2 \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

onde $H_0 = 1$ é a intensidade de campo magnético, $\beta_{1_x}\ e\ \beta_{1_y}$ são as constantes de fase e $a, b, c\ e\ d$ são valores reais quaisquer.

Os campos excitados na região 2 são também ondas planas por natureza e satisfazem as equações de Maxwell. Assim, obtêm-se (3.8):

$$\boldsymbol{\beta_2} \times \boldsymbol{E} = \omega \overline{\overline{\mu}}_2 \boldsymbol{H}\ ; \qquad \boldsymbol{\beta_2} \times \boldsymbol{H} = -\omega \overline{\overline{\varepsilon}}_2 \boldsymbol{E}, \tag{3.8}$$

onde $\beta_2 = \beta_{2_x}\hat{a}_x + \beta_{2_y}\hat{a}_y$ é um vetor de onda na região 2 anisotrópica. Por sua vez, este permite a derivação para a equação de onda (3.9):

$$\boldsymbol{\beta_2} \times \left(\bar{\bar{\varepsilon}}_2^{-1}\boldsymbol{\beta_2}\right) \times \boldsymbol{H} + \omega^2\bar{\bar{\mu}}_2\boldsymbol{H} = 0. \tag{3.9}$$

A equação (3.9) pode ser representa na forma matricial por (3.10):

$$\begin{bmatrix} k_2^2c - (\beta_{2_y})^2b^{-1} & \beta_{2_x}\beta_{2_y}b^{-1} & 0 \\ \beta_{2_x}\beta_{2_y}b^{-1} & k_2^2d - (\beta_{2_x})^2b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & k_2^2d - \left(\beta_{2_x}\right)^2b^{-1} - (\beta_{2_y})^2a^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = 0 \tag{3.10}$$

onde $k_2^2 = \omega^2\mu_2\varepsilon_2$.

A relação de dispersão para o meio uniaxial na região 2 é obtida ao se igualar o determinante da matriz a zero. Resolvendo para $\beta_{2_x}$, encontra-se a existência de quatro autovalores como soluções. Convenientemente, estas soluções podem ser desacopladas em modos *TEz,* equação (3.11), e *TMz,* equação (3.12), propagando para frente e para trás em relação à interface, o que satisfaz as relações de dispersão, conforme [26]:

$$k_2^2 - \left(\beta_{2_x}\right)^2b^{-1}d^{-1} - \left(\beta_{2_y}\right)^2a^{-1}d^{-1} = 0 \qquad TE_z\left(H_x, H_y = 0\right), \tag{3.11}$$

$$k_2^2 - \left(\beta_{2_x}\right)^2b^{-1}d^{-1} - \left(\beta_{2_y}\right)^2b^{-1}c^{-1} = 0 \qquad TM_z(H_z = 0). \tag{3.12}$$

O coeficiente de reflexão na interface *x* = 0 das regiões 1 e 2 pode agora ser encontrado. Assumindo uma onda *TEz* incidente na região 1. Então, na região 1, isotrópica, os campos podem ser expressos como uma superposição dos campos incidente e refletido e são dados por (3.13) e (3.14):

$$\boldsymbol{H_1} = H_0(1 + \Gamma e^{2j\beta_{1_x}x})e^{-j\beta_{1_x}x - j\beta_{1_y}y}\hat{a}_z\ , \tag{3.13}$$

$$\boldsymbol{E_1} = [-\frac{\beta_{1_y}}{\omega\varepsilon_1}(1 + \Gamma e^{2j\beta_{1_x}x})\hat{a}_x + \frac{\beta_{2_x}}{\omega\varepsilon_1}(1 - \Gamma e^{2j\beta_{1_x}x})]H_0\tau e^{-j\beta_{2_x}x - j\beta_{2_y}y}\hat{a}_y\ . \tag{3.14}$$

A onda transmitida para a região 2 é também *TEz* com características de propagação governadas pela equação (3.11). Estes campos são expressos em (3.15) e (3.16):

$$\boldsymbol{H_2} = H_0 \tau e^{-j\beta_{2_x} x - j\beta_{2_y} y} \hat{a}_z \ , \tag{3.15}$$

$$\boldsymbol{E_2} = [-\frac{\beta_{2_y}}{\omega \varepsilon_2 a} \hat{a}_x + \frac{\beta_{2_x}}{\omega \varepsilon_2 b}] H_0 \tau e^{-j\beta_{2_x} x - j\beta_{2_y} y} \hat{a}_y \ , \tag{3.16}$$

onde $\Gamma$ e $\tau$ são os coeficientes de reflexão e transmissão do campo magnético, respectivamente. Estes são obtidos impondo a continuidade dos campos $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ tangenciais em $x$ = 0, e são dados por (3.17):

$$\Gamma = \frac{\beta_{1_x} - \beta_{2_x} b^{-1}}{\beta_{1_x} + \beta_{2_x} b^{-1}} \qquad \tau = 1 + \Gamma = \frac{2\beta_{1_x}}{\beta_{1_x} + \beta_{2_x} b^{-1}} \ . \tag{3.17}$$

Além disso, para todos os ângulos de incidência tem-se (3.18):

$$\beta_{2_y} = \beta_{1_y}, \tag{3.18}$$

devido ao casamento de fase na interface $x$ = 0. Substituindo (3.18) em (3.11) e resolvendo para $\beta_{2_x}$ tem-se (3.19):

$$\beta_{2_x} = \sqrt{k_2^2 bd - (\beta_{1_y})^2 a^{-1} b} \ . \tag{3.19}$$

Assim, se $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \ e \ \mu_1 = \mu_2, d = b \ e \ a^{-1} = b,$ obtem-se $k_2 = k_1$ e

$$\beta_{2_x} = \sqrt{k_2^2 bd - \left(\beta_{1_y}\right)^2 b^2} = b\sqrt{k_1^2 - (\beta_{1_y})^2} = b\beta_{1_x}. \tag{3.20}$$

Substituindo (3.20) em (3.17) resulta em $\Gamma = 0$ para todo $\beta_{1_x}$. Assim, a interface entre as regiões 1 e 2 não apresenta reflexão para qualquer ângulo de incidência.

A dedução acima pode ser repetida para a polarização TMz. Aqui, o coeficiente de reflexão do campo elétrico é o dual de (3.17) e é encontrado

substituindo $b$ com $d$ (e vice versa), e $a$ com $c$. Para este caso, ao se fazer *b = d* e *c-1=d* atinge-se a condição onde não há reflexão de onda. Combinando os resultados para os casos TEz e TMz, conclui-se que a transmissão da onda para a região 2 ocorre sem reflexão quando esta é composta por um meio uniaxial tendo os tensores conformes (3.21), [26]:

$$\bar{\bar{\varepsilon}}_1 = \varepsilon_1 \bar{\bar{s}}; \qquad \bar{\bar{\mu}}_1 = \mu_1 \bar{\bar{s}}; \qquad \bar{\bar{s}} = \begin{bmatrix} s_x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & s_x & 0 \\ 0 & 0 & s_x \end{bmatrix}. \tag{3.21}$$

A propriedade irreflexiva é independente do ângulo de incidência, polarização e frequência da onda incidente. Além disso, de (3.11) e (3.12), as características de propagação de ondas com polarização *TE* e *TM* são idênticas. Chama-se este de meio PML uniaxial (UPML) em reconhecimento à anisotropia uniaxial e ao casamento perfeito [26].

Similar a PML de Berenger, a propriedade irreflexiva do meio UPML na região 2 é válida para qualquer $s_x$ . Por exemplo, escolhendo $s_x = 1 + \frac{\sigma_x}{j\omega\varepsilon_1} = 1 - \frac{j\sigma_x}{\omega\varepsilon_1}$. A partir de (3.20) tem-se (3.22):

$$\beta_{2_x} = (1 - \frac{\sigma_x}{j\omega\varepsilon_1})\beta_{1_x}. \tag{3.22}$$

Nota-se que a parte real de $\beta_{2_x}$ é idêntica à de $\beta_{1_x}$. Combinado com (3.18), isto implica em velocidades de fase das ondas incidente e transmitidas idênticas para todos os ângulos de incidência. A impedância intrínseca da região 2 é também idêntica àquela da região 1, uma consequência do meio ser perfeitamente casado.

Finalmente, substituindo (3.18) e (3.22) em (3.15) e (3.16) tem-se os campos transmitidos para o meio UPML da região 2 para a onda *TEz* incidente conforme (3.23) e (3.24):

$$\boldsymbol{H_2} = H_0 e^{-j\beta_{1_x}x - j\beta_{1_y}y} e^{-\sigma_x x \eta_1 \cos\theta} \hat{a}_z \ , \tag{3.23}$$

$$\boldsymbol{E_2} = [-s_x \eta_1 \sin\theta \ \hat{a}_x + \eta_1 \cos\theta \ \ \hat{a}_y] H_0 e^{-j\beta_{1_x}x - j\beta_{1_y}y} e^{-\sigma_x x \eta_1 \cos\theta}, \tag{3.24}$$

onde $\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}$ e θ é o ângulo de incidência em relação ao eixo x. Assim, a onda transmitida no meio UPML se propaga com a mesma velocidade de fase que a onda incidente, enquanto simultaneamente é atenuada exponencialmente ao percorrer o eixo *x* normal a interface entre as Regiões 1 e 2. O fator de atenuação é independente da frequência, embora dependa de *θ* e da condutividade σ do meio UPML.

Definido as características da condição de contorno UPML se faz necessário incorporá-la o FEM.

### 3.4.2 Incorporação da UPML ao FEM

A incorporação da UPML ao método dos elementos finitos é realizada por meio da inserção dos tensores apresentados anteriormente nas equações de Maxwell, sendo escritas conforme (3.25) e (3.26):

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = j\omega\epsilon\bar{\bar{s}}\boldsymbol{E}, \tag{3.25}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = j\omega\mu\bar{\bar{s}}\boldsymbol{H}. \tag{3.26}$$

Dessa forma pode-se obter as equações de onda para campo elétrico e campo magnético descritas nas equações (3.27) e (3.28), respectivamente:

$$\nabla \cdot ({\mu_r}^{-1}\bar{\bar{s}}\nabla\boldsymbol{E}) + k_0^2\varepsilon_r\bar{\bar{s}}\boldsymbol{E} = 0, \tag{3.27}$$

$$\nabla \cdot ({\varepsilon_r}^{-1}\bar{\bar{s}}\nabla\mathbf{H}) + k_0^2\mu_r\bar{\bar{s}}\boldsymbol{H} = 0. \tag{3.28}$$

Devido à similaridade das equações (3.27) e (3.28) podemos escrever da seguinte maneira, (3.29):

$$\nabla \cdot (\alpha_1\nabla\mathbf{u}) + k_0^2\alpha_2\boldsymbol{u} = 0, \tag{3.29}$$

onde $\alpha_1 = \mu_r^{-1}\bar{\bar{s}}^{-1}, \alpha_2 = \varepsilon_r\bar{\bar{s}}$ e $u = E_z$ para formulação do campo elétrico e $\alpha_1 = {\varepsilon_r}^{-1}\bar{\bar{s}}^{-1}, \alpha_2 = \mu_r\,\bar{\bar{s}}\ e\ u = H_z$ para a formulação do campo magnético.

Neste trabalho será analisado o espalhamento sobre um cilindro condutor. A formulação para um espalhador condutor pode ser simplificada. Para isso se expande a equação (3.29) em campo incidente e campo espalhado. Por meio da manipulação matemática apresentada no Apêndice E e seguindo os mesmos procedimentos apresentados nas seções 3.2 e 3.3 tem-se a equação simplificada (3.30) para o campo espalhado usando FEM-UPML. Esta simplificação possibilita um ganho computacional, tendo em vista que o campo incidente é apenas calculado na superfície do objeto espalhador, (3.30) [28]:

$$\int_{\Omega} \nabla w.(\alpha_1 \nabla u^s) - k_0^2 \alpha_2 w.u^s d\Omega + \int_{\Upsilon_a} w \frac{\partial u^s}{\partial n} d\Upsilon = -\int_{\Upsilon_s} w \frac{\partial u^i}{\partial n}\, d\Upsilon\ . \qquad (3.30)$$

Em casos práticos a absorção da onda eletromagnética não é completa. Dessa forma a onda atinge a condição de contorno externa à UPML, a terminação, e retorna ao domínio computacional de interesse. Usualmente, para garantir que ocorra a menor reflexão na terminação, é utilizado como terminação um condutor perfeito (PEC). O campo elétrico tangencial é zero no interior de um PEC, portanto a integral na fronteira $\Upsilon_a$, a integral no contorno, anula-se em toda região do domínio [25]. Dessa forma a equação a ser solucionada pelo método é dada por (3.31):

$$\int_{\Omega} \nabla w.(\alpha_1 \nabla u^s) d\Omega - \int_{\Omega} k_0^2 \alpha_2 w.u^s d\Omega = -\int_{\Upsilon_s} w \frac{\partial u_i}{\partial n}\, d\Upsilon\ . \qquad (3.31)$$

### 3.4.3 Projeto da UPML

A construção da UPML é desenvolvida por meio da definição de alguns parâmetros, entre eles o grau de gradação ($m$), o fator de reflexão ($R$), $k_{max}$, etc. Estes parâmetros são escolhidos para que ocorra a melhor absorção da onda, desta forma obtendo o menor valor de campo ao término da camada.

Inicialmente é necessário determinar a equação que irá definir o valor dos argumentos do tensor $\bar{\bar{s}}$. Este tensor pode ser definido por (3.32), conforme [26]:

$$\bar{\bar{s}} = \begin{bmatrix} \frac{s_y s_z}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_x s_z}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s_x s_y}{s_z} \end{bmatrix}, \tag{3.32}$$

onde $s_x, s_y$ $e$ $s_z$ é dado por (3.33):

$$s_x = k_x - \frac{j\sigma_x}{\omega\varepsilon_1}. \quad s_y = k_y - \frac{j\sigma_y}{\omega\varepsilon_1}. \quad s_z = k_z - \frac{j\sigma_z}{\omega\varepsilon_1}. \tag{3.33}$$

Os argumentos do tensor $\bar{\bar{s}}$ terão valores distintos em diferentes áreas da malha, a Figura 3.3 apresenta esta informação. Na área de interseção entre os planos $x$ e $y$ $S_z = 1$, entre $x_{min}$ e $x_{max}$ $S_y = S_z = 1$ e entre $y_{min}$ e $y_{max}$ $S_x = S_z = 1$. Nota-se que para um problema em duas dimensões $S_z$ será sempre 1. No interior da malha, ou seja, no espaço estudado $S_x = S_y = S_z = 1$.

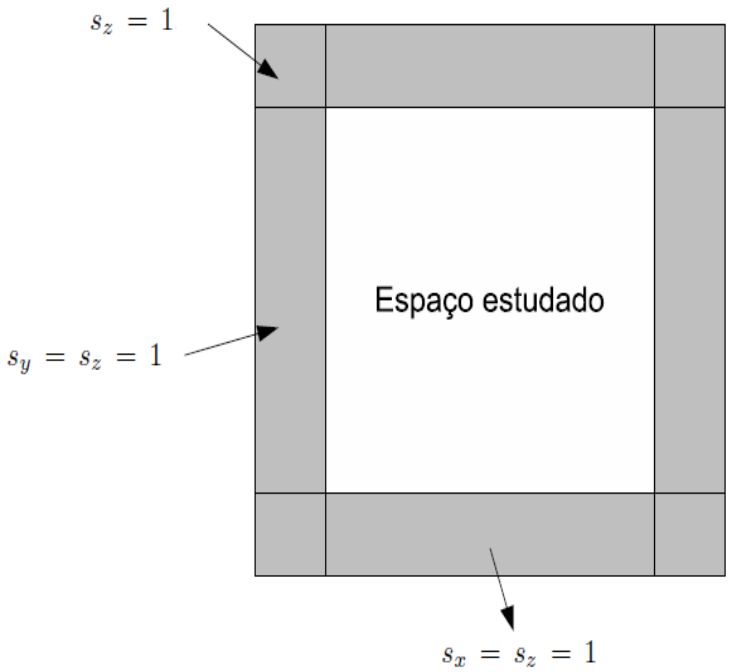


Figura 3.3: Representação da UPML e valor dos tensores em cada região.

Para determinar $S_x$ $e$ $S_y$ é necessário definir $\sigma_x$ $e$ $\sigma_y$. Esta definição deve levar em conta os efeitos numéricos devido à amostragem espacial finita, dessa forma caso seja definido um único valor de $\sigma$ na malha é gerado reflexões espúrias

significativas de ondas na superfície do meio UPML, [25]. Para reduzir estas reflexões é definido que $\sigma$ cresça ao longo da direção normal à interface gradualmente a partir de zero, [16]. Assumindo este perfil de variação gradual da condutividade $\sigma$ em um meio UPML de espessura $L$ terminado em PEC, tem-se a partir de (3.24), o fator de reflexão (3.34):

$$R(\theta) = e^{-2\eta cos\theta \int_0^L \sigma(x)dx} \ . \tag{3.34}$$

Vários perfis são sugeridos para gradações de $\sigma$ e $k$. O mais eficiente é o que usa a variação polinomial no meio UPML [16], tem-se (3.35) a (3.38):

$$\sigma_x = (\frac{x}{L})^m \sigma_{max} \ , \tag{3.35}$$

$$\sigma_y = (\frac{y}{L})^m \sigma_{max} \ , \tag{3.36}$$

$$k_x = 1 + (k_{max} - 1)\left(\frac{x}{L}\right)^m, \tag{3.37}$$

$$k_y = 1 + (k_{max} - 1)\left(\frac{y}{L}\right)^m, \tag{3.38}$$

onde $x$ e $y$ são as posições do elemento na camada, $m$ é o grau de gradação do polinômio, $k$ é o fato de escalonamento de coordenadas, $k_{max}$ é o máximo valor do fator de escalonamento de coordenadas e $\sigma_{max}$ é o máximo valor da condutividade.

A condutividade máxima é dada por (3.39), [16]:

$$\sigma_{max} = -\frac{\epsilon_0 c \ ln(R)}{\left(\frac{2}{m+1}\right)L} \ , \tag{3.39}$$

onde, $\in_0$ permeabilidade no vácuo, $c$ velocidade da luz, $R$ é reflexão desejada, $m$ o grau de gradação e $L$ a espessura da camada.

Após a definição dos parâmetros da UPML devem-se determinar as funções de aproximação para que seja possível obter a solução para a equação (3.31).

### 3.5 Método de Galerkin

As discretizações das variáveis físicas, campo ($u^s$) e função de ponderação ($w$), são realizadas por meio da aplicação do método de Galerkin. Neste método a função base é desenvolvida igual à função de ponderação, desta forma, (3.40) e (3.41):

$$u^s = \sum_{i=1}^{n} N_i d_i, \tag{3.40}$$

$$w = \sum_{j=1}^{n} N_j c_j, \tag{3.41}$$

onde $c_j$ é um constante arbitraria não nula, $u^s$ representa a função de aproximação, $n$ é a quantidade de funções de expansão $N_i$ e $N_j$ escolhidas e $d_i$ são os coeficientes a serem determinados.

Substituindo as equações (3.40) e (3.41) na equação (3.42), tem-se (3.42) [10]:

$$\int_{\overline{\Omega}^e} [\nabla \sum_{j=1}^{n} N_j c_j \cdot (\alpha_1 \nabla \sum_{i=1}^{n} N_i d_i) - k_0^2 \alpha_2 \sum_{j=1}^{n} N_j c_j \sum_{i=1}^{n} N_i d_i] d\overline{\Omega}^e - \int_{\gamma} \sum_{j=1}^{n} N_j c_j \left[\frac{\partial u_i}{\partial n}\right] d\Upsilon = 0, \tag{3.42}$$

colocando $c_j$ em evidência, tem-se (3.43):

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \, [\int_{\overline{\Omega}^e} [\nabla N_j \cdot (\alpha_1 \nabla \sum_{i=1}^{n} N_i d_i) - k_0^2 \alpha_2 N_j \sum_{i=1}^{n} N_i d_i] d\overline{\Omega}^e - \int_{\gamma} \sum_{j=1}^{n} N_j \left[\frac{\partial u_i}{\partial n}\right] d\Upsilon = 0, \tag{3.43}$$

o termo $c_j$ pode assumir qualquer valor, portanto o argumento deve ser nulo. Tendo assim, (3.44):

$$\sum_{e=1}^{n_e}[\int_{\overline{\Omega}^e}[\nabla N_j \cdot (\alpha_1 \nabla \sum_{i=1}^{n} N_i d_i) - k_0^2 \alpha_2 N_j \sum_{i=1}^{n} N_i d_i] d\overline{\Omega}^e$$

$$- \int_{\gamma} \sum_{j=1}^{n} N_j \left[\frac{\partial u_i}{\partial n}\right] d\Upsilon] = 0, \tag{3.44}$$

onde $n_e$ é a quantidade de elementos gerados pela discretização do domínio $\overline{\Omega}$.

Após a aplicação do método de Galerkin o domínio está discretizado sendo possível assim sua modelagem computacional. A equação (3.44) pode ser representada na forma matricial. As incógnitas deste sistema matricial são os valores de campos em cada ponto do domínio.

O sistema matricial possui a seguinte forma, (3.45):

$$[K] \times [d] = [f]. \tag{3.45}$$

A matriz $K$ recebe as contribuições de cada elemento, sendo uma matriz quadrada de ordem m, onde m é número de nós onde o campo é desconhecido. O vetor $f$, de dimensão m, recebe as contribuições relacionadas aos valores conhecidos do sistema, estes valores estão associados ao termo $u^i$ e $d$ são as incógnitas do sistema, ou seja, os nós onde deseja se conhecer os valores de campo, é associado ao campo $u$.

O sistema gerado tem como características ser esparso, é utilizado o método do Gradiente Biconjugado para solucionar, este método é aplicado através da função BICG do *Matlab.*

# 4 RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados e as análises obtidas por meio do FEM-UPML. São apresentados os parâmetros de construção da UPML e suas características. São realizadas, em seguida, análises sobre a sensibilidade do método.

## 4.1 Descrição do problema

Diversos espalhadores reais podem ser aproximados por uma estrutura cilíndrica, dessa forma os cilindros representam uma das mais importantes classes de espalhadores presentes na literatura [19].

Neste trabalho são usados cilindros circulares condutores, estes cilindros possuem raio *a*, são infinitos na direção *z* e recebem incidência de uma onda plana normal do tipo $TE_Z$ na direção *x*+. A frequência da onda é 0,3 Ghz, dessa forma tem-se $\lambda = 1$. O campo espalhado $H_z$ é avaliado na superfície do semicírculo superior do cilindro. A figura 4.1 representa a geometria do problema.

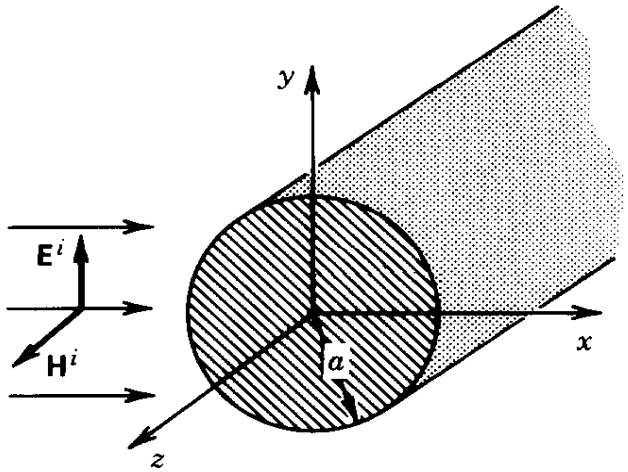


Figura 4.1: Espalhador cilíndrico de raio $a$ e comprimento infinito em z. $\boldsymbol{E^i}$ é o campo elétrico incidente e $\boldsymbol{H^i}$ é campo magnético incidente [19].

Este é um problema clássico da teoria eletromagnética e possui solução analítica [19]. Devido à incidência normal ao eixo *z* e as características eletromagnéticas dos espalhadores utilizados não variarem nessa direção, este problema pode ser tratado de forma bidimensional. A figura 4.2 representa o problema na forma bidimensional.

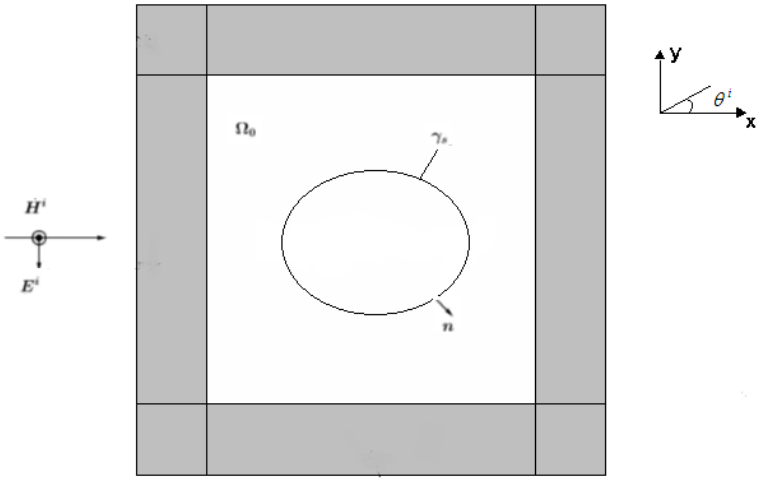


Figura 4.2: Geometria do problema em duas dimensões.

A formulação do problema descrito é apresentada no Capítulo 3 e a equação a ser solucionada pelo FEM é a equação 3.45, repetida aqui apenas por conveniência, em (4.1):

$$\int_{\Omega} \nabla w.(\alpha_1 \bar{\bar{s}} \nabla u^s) d\Omega - \int_{\Omega} k_0^2 \alpha_2 \bar{\bar{s}} w.u^s d\Omega = -\int_{\Upsilon_s} w \frac{\partial u_i}{\partial n} \, d\Upsilon. \qquad (4.1)$$

Após a definição do problema, se faz necessário validar o código criado e apresentar os parâmetros de análise utilizados.

## 4.2 Validação da Formulação e Aspectos da análise

A validação é realizada por meio da comparação entre a solução numérica obtida pelo código elaborado com a solução analítica. Os parâmetros escolhidos para a validação são: raio do espalhador cilíndrico condutor igual 0,3$\lambda$ e ângulo de incidência da onde igual a 180º. O domínio é construído e discretizado no Matlab.

Para validar o método é definida uma camada de espessura 1,4$\lambda$, com distância do objeto de 0,3$\lambda$. A malha gerada possui 6.976 elementos e 3.608 nós. A Figura 4.3 apresenta a malha utilizada.

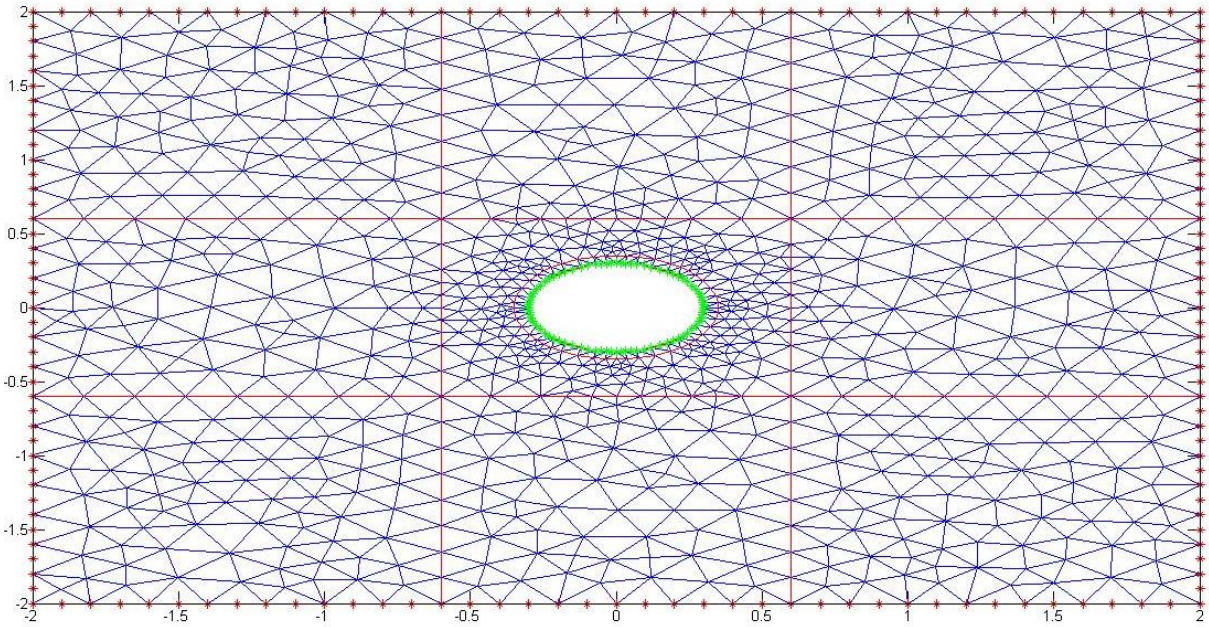


Figura 4.3: Malha de validação com UPML.

A Figura 4.4 apresenta a solução analítica e o resultado numérico obtido por meio do FEM-UPML, pode-se observar que o resultado obtido é muito próximo do analítico, desta forma fica claro a eficácia do método.

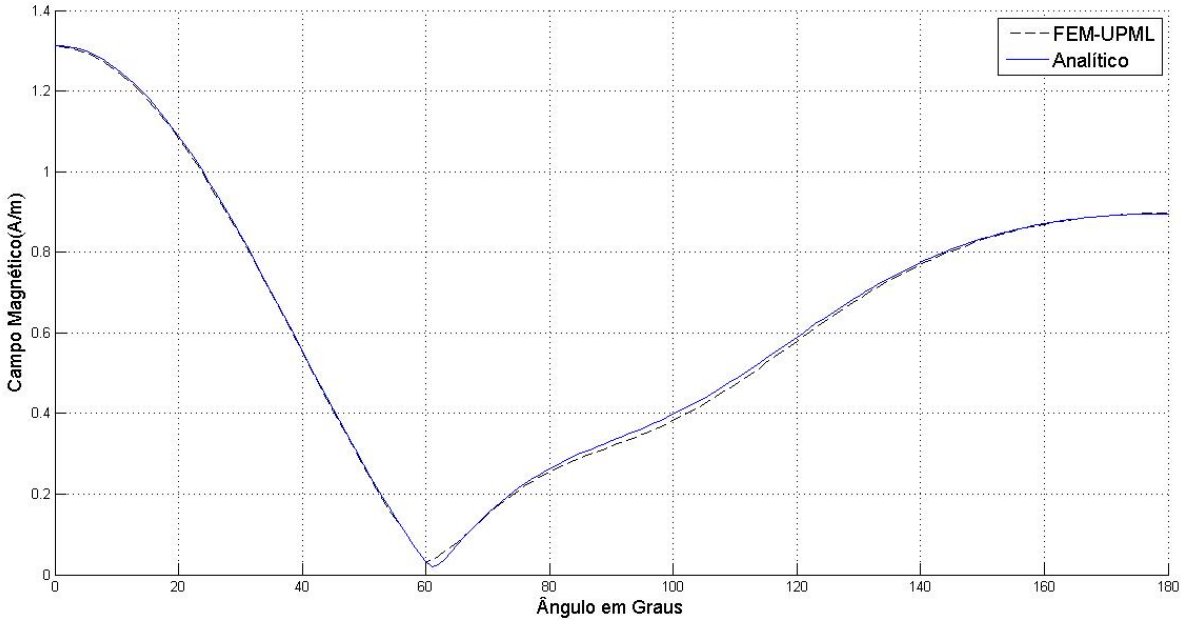


Figura 4.4: Campo magnético na superfície do espalhador x FEM-UPML.

O erro absoluto médio encontrado é de 0,53% e o erro relativo médio é de 3,75%.

A partir da validação do código é necessário determinar parâmetros e medidas de erro para facilitar a análise do método. Neste trabalho serão utilizadas as seguintes medidas de erro, apresentadas em (4.2) a (4.5):

$$\epsilon L2 = [\frac{\sum_{i=1}^{n}(H_{sim}-H_a)^2}{\sum_{i=1}^{n}{H_a}^2}]^{\frac{1}{2}}, \tag{4.2}$$

$$\epsilon r = \left|\frac{H_a-H_{sim}}{H_a}\right| * 100, \tag{4.3}$$

$$\epsilon mr = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{H_a-H_{sim}}{H_a}\right| * 100, \tag{4.4}$$

$$eam = \sum_{1}^{n}|H_a - H_{sim}| * 100, \tag{4.5}$$

onde $\epsilon l2$ é a norma L2 relativa, $\epsilon r$ é o erro relativo, $\epsilon mr$ é o erro relativo médio, $eam$ é o erro médio absoluto, $H_{sim}$ é o campo magnético obtido numericamente pelo método FEM-UPML, $H_a$ é o campo magnético analítico e $n$ é o total de pontos analisados.

## 4.3 Análise da condição UPML

Nesta seção é analisado o comportamento da condição de contorno UPML. Para realizar esta análise é considerado alguns aspectos determinantes na precisão do método. Inicialmente são avaliados os parâmetros necessários para o projeto da UPML, entre eles o grau de gradação ($m$), a reflexão ($R$), $Kmax$, etc. Após as definições destes parâmetros são analisados: a distância do objeto para a camada, a espessura da camada e a variação do raio do objeto condutor.

Para todas as análises dos parâmetros da UPML são utilizados: raio do cilindro condutor de 0,3$\lambda$, distância do condutor para a camada de 0,1$\lambda$ e espessura da camada 1,6$\lambda$.

### *4.3.1 Grau de gradação m*

O grau de gradação representa a maneira que a condutividade ($\sigma$) varia dentro da camada. Para realizar o teste para obter o melhor valor de $m$ para o problema tratado neste trabalho, são fixados $k_{max} = 6$ e $R = e^{-16}$.

Na Tabela 4.1 são apresentados os valores de erros pra vários $m$ testados. O valor de $m = 3$ é o que apresenta o melhor resultado nós testes realizados

| $m$ | Erro médio Absoluto |
|---|---|
| 1 | 3,91 |
| 2 | 0,94% |
| 3 | 0,67% |
| 4 | 1,07% |
| 5 | 1,69% |

Tabela 4.1: Erros médios absolutos para variação do parâmetro $m$.

### *4.3.2 Reflexão $R$*

O parâmetro $R$ está presente na equação que determina o $\sigma_{max}$. Este parâmetro representa a reflexão desejada dentro da camada. Na literatura um valor usual é de $R = e^{-16}$, conforme [25]. Neste teste o valor de R é variado de $e^{-1}$ até $e^{-30}$. A Figura 4.5 apresenta o erro variando o valor de $R$, é mantido $m = 3$ e $k_{max} = 6$.

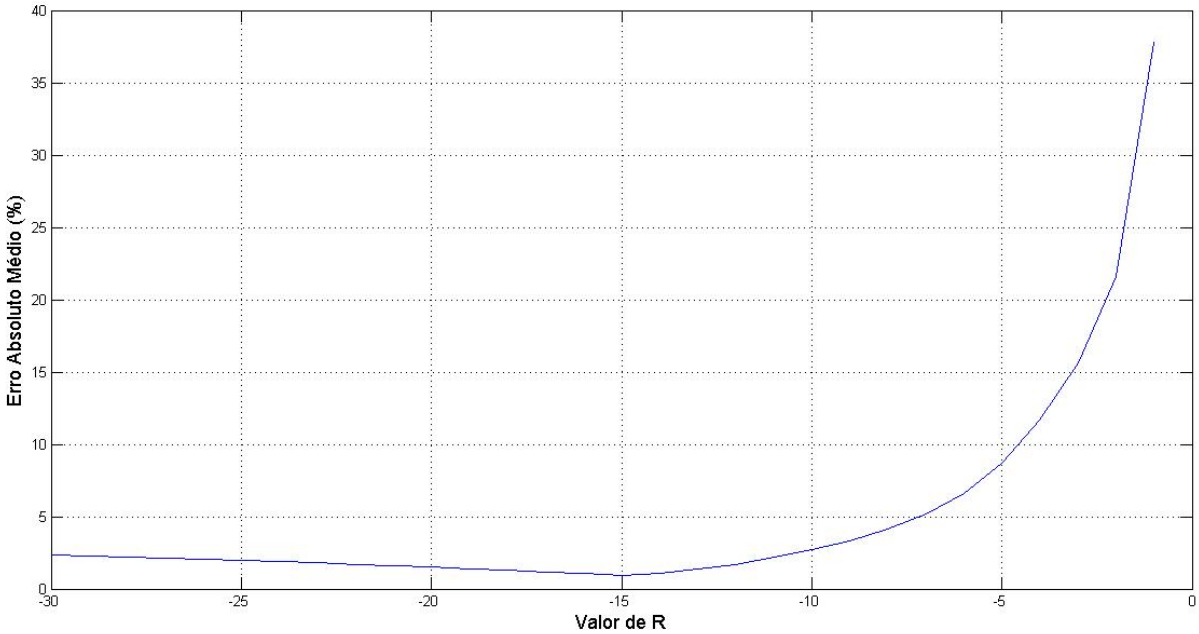


Figura 4.5: Erro médio absoluto x Reflexão R

Analisando a Figura 4.5 observa-se que o erro diminui até certo momento com a diminuição de $R$, porém após o valor de $R = e^{-16}$ o erro passa a subir. Dessa forma, confirma-se com este resultado que o melhor valor de $R$ é $e^{-16}$.

### *4.3.3 O fator de escalamento de coordenadas $k$*

O parâmetro $k$ está presente na equação de cálculo dos tensores $s_x$ e $s_y$, desta forma é mais um dos parâmetros que influenciam na precisão do método. Esse parâmetro segue o mesmo grau polinomial de gradação proposto para $\sigma$, dessa forma é determinado um valor máximo de $k$ ($k_{max}$) para realizar essa gradação. O aumento de $k$ reduz a velocidade de fase da onda, o que significa um aumento artificial do índice de refração, fazendo com que o desempenho da UPML seja melhorado nos casos de incidência mais obliqua [25]. Na literatura o valor de $k_{max} = 6$ demosntrou ser o melhor valor [25]. A fim de determinar se para o problema tratado neste trabalho este valor segue sendo o melhor são realizados testes alterando o valor de $k_{max}$. Para isso é fixado $m = 3$ e $R = e^{-16}$.

A Figura 4.6 apresenta os resultados obtidos e o campo magnético analítico como forma de comparação.

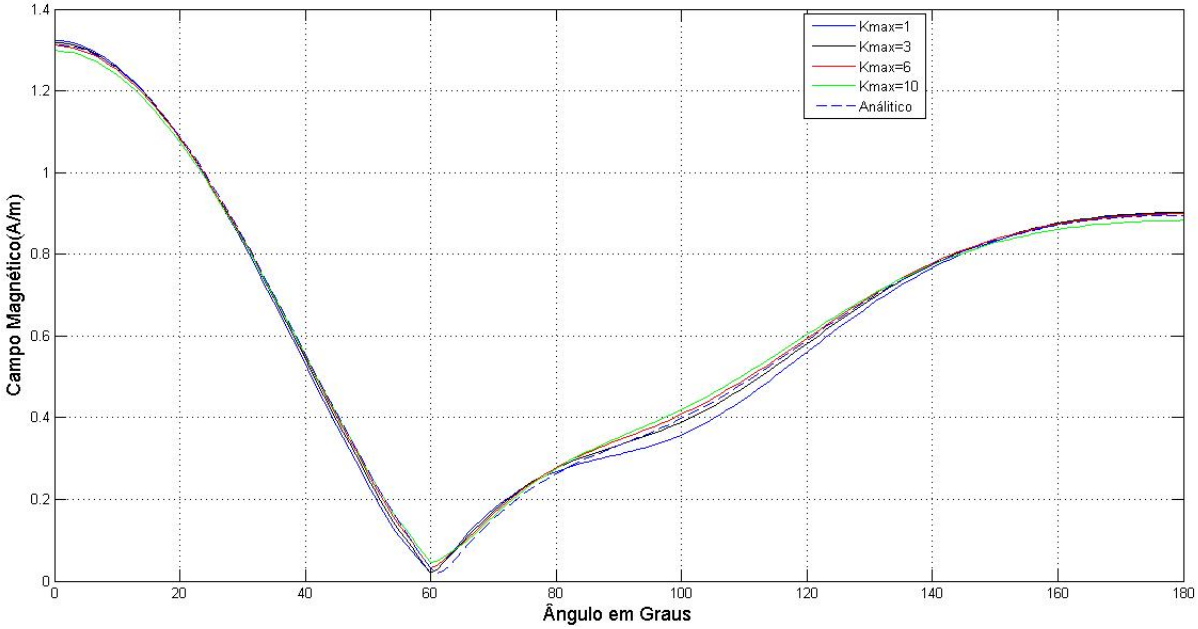


Figura 4.6: Campo magnético sobre o condutor variando-se $k_{max}$.

A Tabela 4.2 apresenta os valores de erro médio relativo para todos os testes realizado. Pode-se notar que o menor erro é obtido utilizando $k_{max} = 6$.

| $k_{max}$ | Erro médio Relativo |
|---|---|
| 1 | 6,6% |
| 3 | 4,12% |
| 6 | 3,7% |
| 10 | 5,04% |

Tabela 4.2: Erros médios relativos para variação do parâmetro $k_{max}$.

### *4.3.4 Avaliação do comportamento do campo dentro da camada*

A UPML é projetada visando à atenuação do campo gerando assim a menor reflexão possível no domínio. Um dos principais parâmetros da camada é $\sigma_{max}$. É necessário encontrar um equilíbrio deste parâmetro, já que com um valor muito pequeno de $\sigma_{max}$ o decaimento do campo não é o suficiente para eliminar a reflexão. Enquanto que para um valor alto de $\sigma_{max}$ ocorrem reflexões, pois a malha de elementos finitos é insuficiente para modelar a repentina variação das propriedades do material [27]. A Figura 4.7 apresenta o comportamento do campo dentro da camada para valores diferentes de $\sigma_{max}$.

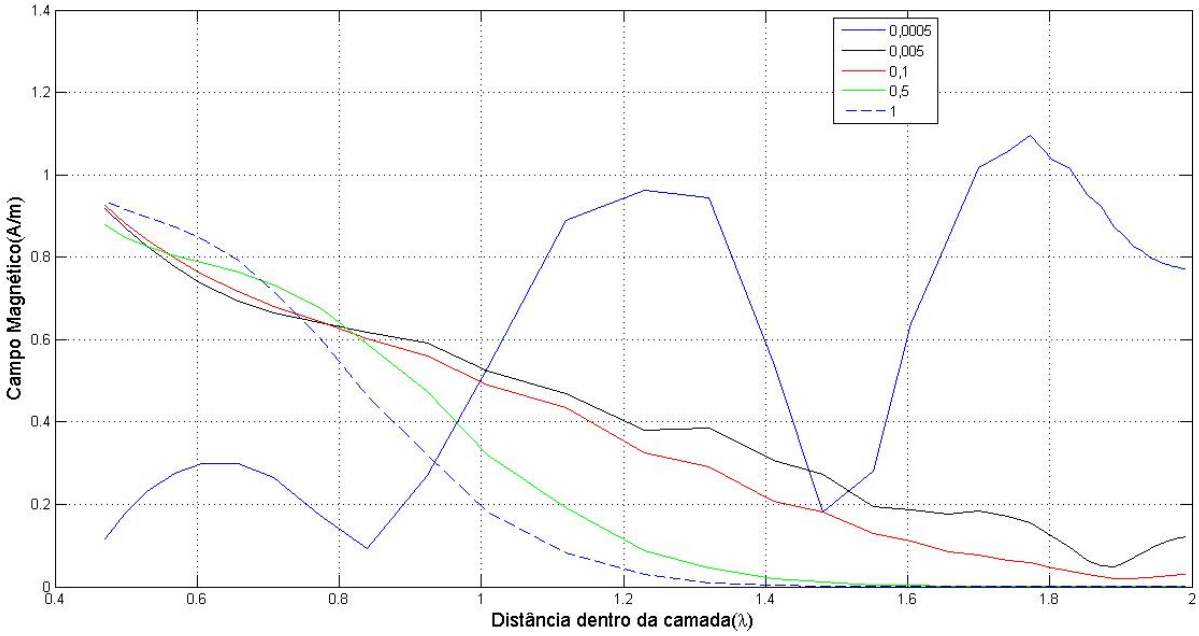


Figura 4.7: Análise do comportamento do campo devido a variação do $\sigma_{max}$.

Analisando a Figura 4.7 é possível notar o equilíbrio encontrado no valor do $\sigma_{max}$, representado pela curva na cor vermelha, onde a atenuação ocorre de forma mais "suave" e o campo chega praticamente à zero na terminação. A Tabela 4.3 apresenta os valores de erro para os valores $\sigma_{max}$ testados.

| $\sigma_{max}$ | Erro médio absoluto | Norma L2 Relativa |
|---|---|---|
| 0,0005 | 78,22% | 3,4944 |
| 0,05 | 2,76% | 0,1194 |
| 0,1 | 0,76% | 0,0386 |
| 0,5 | 3,83% | 0,1757 |
| 1 | 5,06% | 0,2703 |

Tabela 4.3: Erros médios absolutos e a norma L2 relativa para variação do $\sigma_{max}$.

Os testes realizados demonstram que o melhor resultado para $\sigma_{max}$é de 0,1, sendo o erro médio absoluto encontrado para este valor de 0,76%.

### *4.3.5 Análise da variação da distância da fronteira artificial para o espalhador*

A proximidade da fronteira artificial com o objeto espalhador interfere na precisão, porém como o projeto da UPML visa o casamento perfeito do meio com a camada é possível colocar a camada bem próximo do objeto e obter uma ótima precisão do método.

A Figura 4.8 apresenta a solução para um objeto espalhador condutor de raio 0,3λ, com a onda incidindo na direção +*x* com angulo de 180º. É variada a distância da camada UPML ao objeto espalhador de 0,1*λ* até 2,7*λ* e mantém-se a espessura da camada fixa em 1,2*λ*.

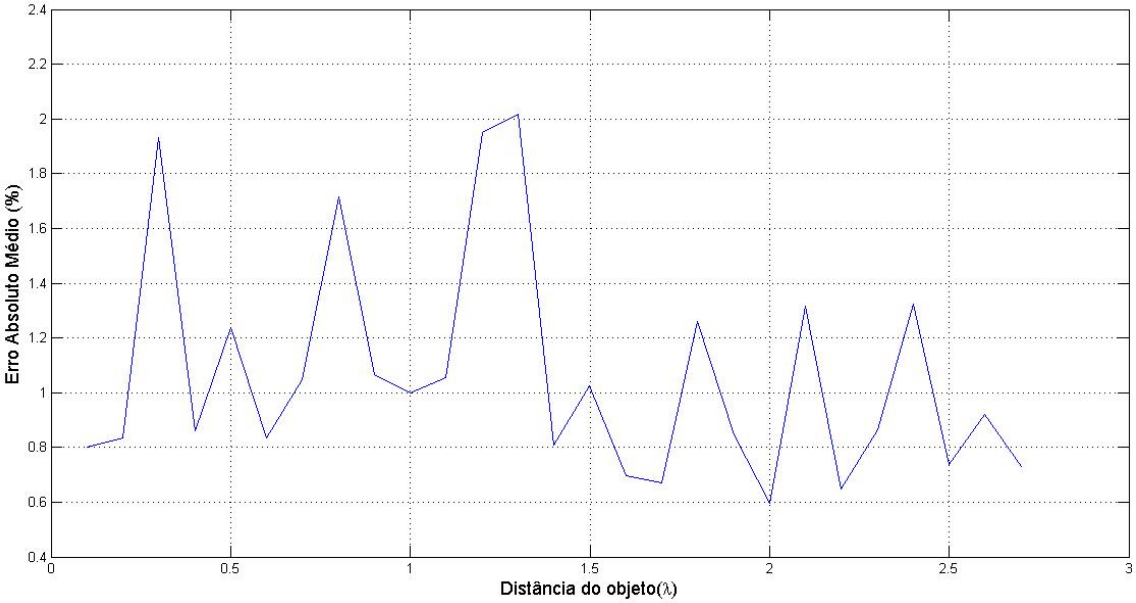


Figura 4.8:Erro Absoluto Percentual x Distância do objeto da camada

Analisando o gráfico é possível notar uma grande oscilação do erro, apresentando erros baixos para várias distâncias diferentes. Dessa forma, a melhor opção é aquela de menor distância, já que assim o número de elementos necessários é menor gerando um custo computacional menor.

A Tabela 4.4 destaca dados do teste realizado, apresentando os valores médios de erro, seus mínimos e máximos, e também o número de elementos e nós médios. Analisando os valores de máximos e mínimos nota-se que a diferença entre eles é pequena. Isso demonstra que mesmo apresentado uma determinada oscilação, esta oscilação não gera valores de erros elevados.

| | UPML |
|---|---|
| Media de Nº de Elementos | 7431 |
| Media de Nº de Nós | 3830 |
| Erro médio absoluto máximo | 2,0 % |
| Erro médio absoluto mínimo | 0,59% |
| Média do Erro médio relativo | 1,06% |
| Erro L2 relativo máximo | 0,0638 |
| Erro L2 relativo mínimo | 0,0269 |
| Média do Erro L2 relativo | 0,0448 |

Tabela 4.4: Dados relativos ao teste de variação da distância da fronteira.

Os testes realizados demonstram que o menor valor de erro médio absoluto é de 0,59% para uma distância de 2$\lambda$ e o maior valor de 2% para 1,3$\lambda$.

### *4.3.6 Análise da variação da espessura da camada UPML*

Para avaliar a relevância da espessura da camada UPML na precisão do método é fixada a distância do objeto em 0,1 λ, $m$=3, $R = e^{-16}$e $k_{max} = 6$ e variado a espessura entre 0,4 $\lambda$ até 3,6 $\lambda$ com passo de 0,1. A Figura 4.9 apresenta os resultados. Pode-se notar que a partir da espessura 1,2 $\lambda$ o resultado passa a convergir para um erro baixo próximo de 1,1%.

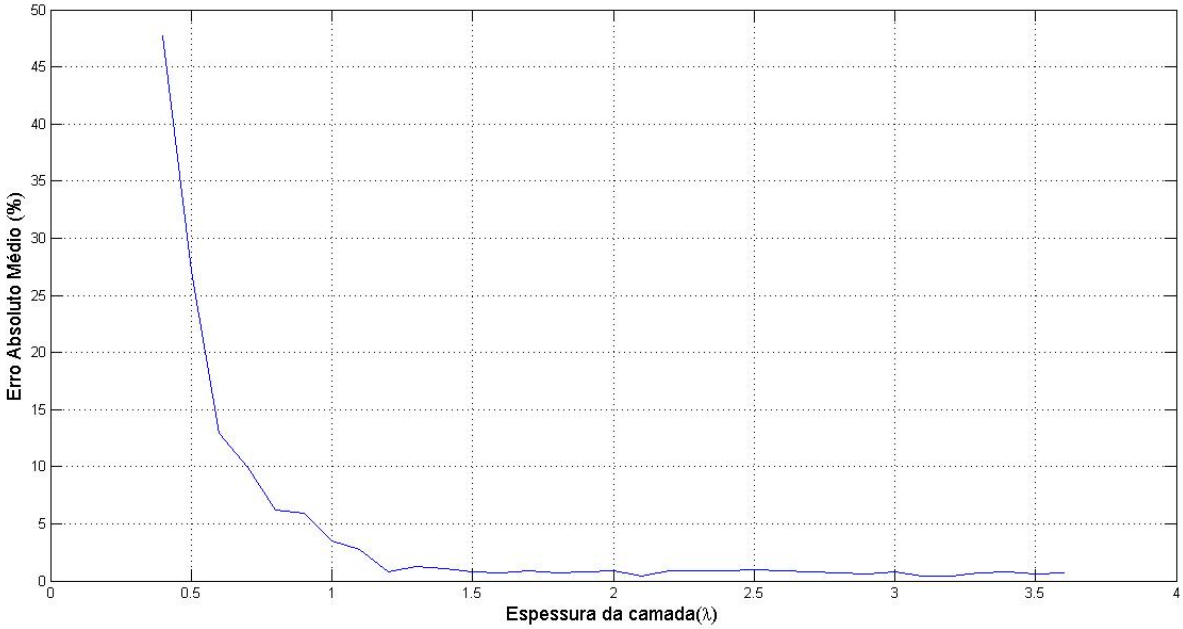


Figura 4.9:Erro absoluto percental x espessura da camada.

A Tabela 4.5 apresenta os dados do teste realizado. Analisando-a pode-se destacar que apesar de um alto valor de erro máximo, apresentado com espessuras pequenas, na maior parte do teste o erro permanece baixo.

| | UPML |
|---|---|
| Media de Nº de Elementos | 6257 |
| Media de Nº de Nós | 3237 |
| Erro médio absoluto máximo | 47,7% (0,4 espessura) |
| Erro médio absoluto mínimo | 0,39% (3,2 espessura) |
| Média do Erro médio relativo | 4,10% |
| Erro L2 relativo máximo | 2,54(0,4 espessura) |
| Erro L2 relativo mínimo | 0,0235( 3,1 espessura) |
| Média do Erro L2 relativo | 0,2080 |

Tabela 4.5: Dados do teste de variação da espessura

### *4.3.7 Análise da variação do raio do objeto condutor.*

Nesta análise é realizada a variação do raio do espalhador, são mantidos fixos $m = 3, kmax = 6$ e $R = e^{-16}$, a espessura em 1,3 $\lambda$ e a distância para a camada de 0,1$\lambda$.

A Figura 4.10 apresenta o erro relativo para um cilindro de raio 0,1$\lambda$. A malha gerada possui 4.296 elementos e 2.228 nós.

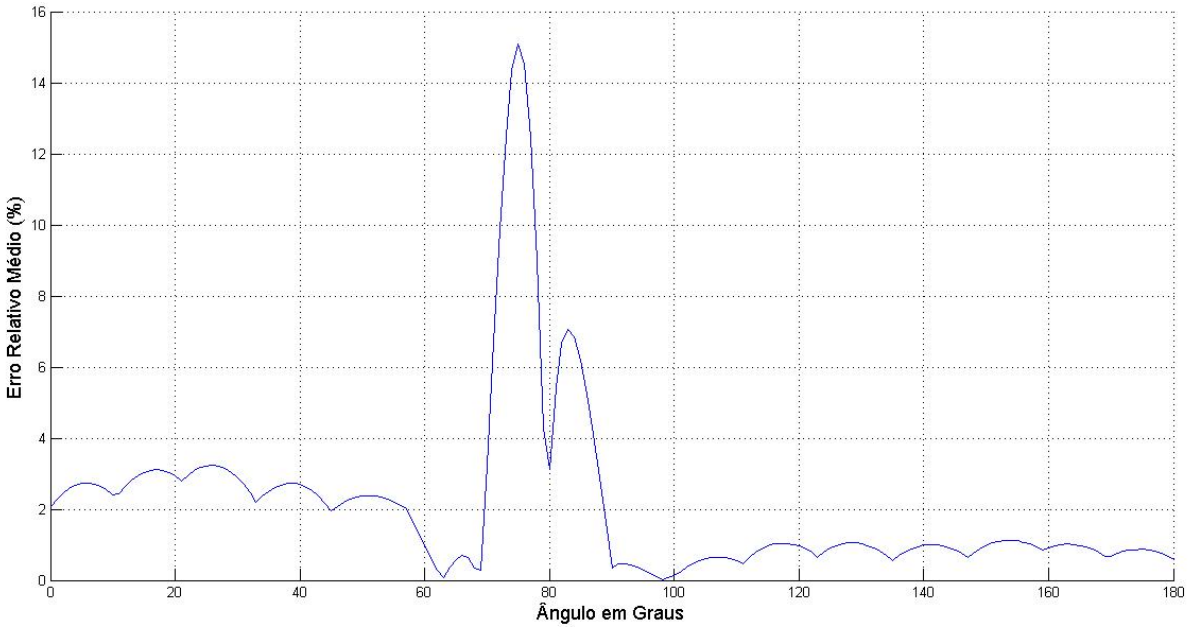


Figura 4.10: Erro Relativo x ângulo sobre a superficie do condutor de raio 0,1 $\lambda$.

É possível notar, avaliando a Figura 4.10, que o erro se mantem abaixo de 2% na maioria dos pontos testados, ocorrendo apenas um pico de erro elevado em 75º. A Tabela 4.6 apresenta os valores de mínimo e máximo, o erro médio relativo e o erro médio absoluto.

| | |
|---|---|
| Erro relativo máximo | 15,81% (75º) |
| Erro relativo mínimo | 0,002% (90º) |
| Erro médio relativo | 1,91% |
| Erro médio absoluto | 0,63% |

Tabela 4.6: Medições de erro para condutor de raio 0,1 $\lambda$.

A Figura 4.11 apresenta os resultados para um cilindro de raio 0,6$\lambda$. A malha gerada possui 7.360 elementos e 3.828 nós.

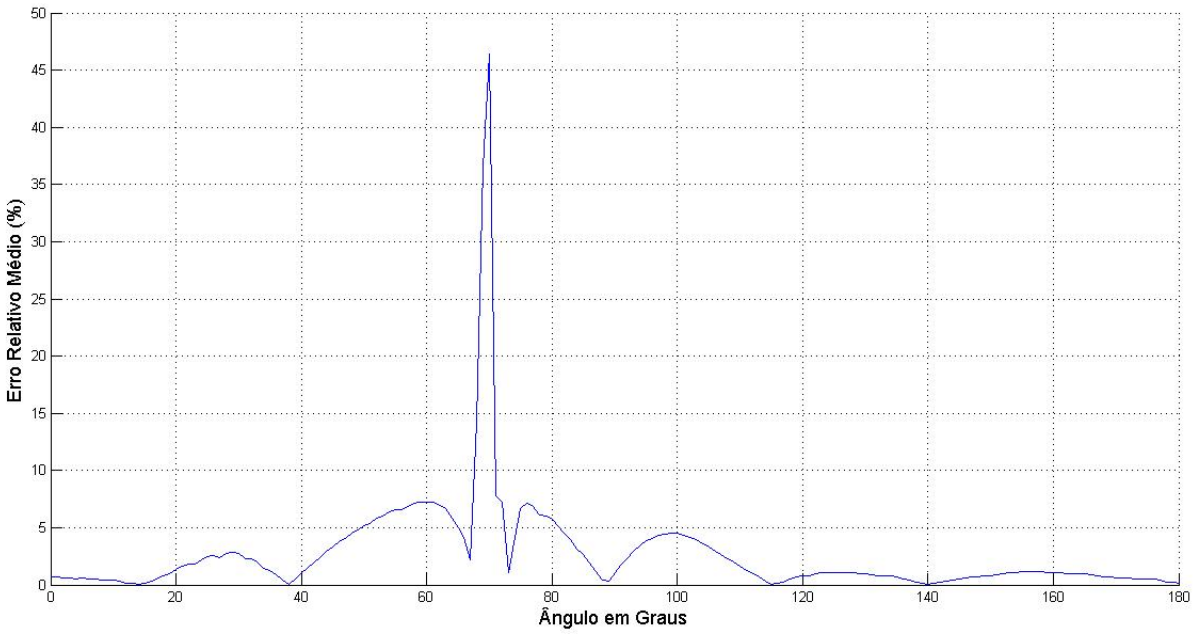


Figura 4.11: Erro Relativo x ângulo sobre a superficie do condutor de raio 0,6 $\lambda$.

Analisando a Figura 4.11, nota-se um comportamento parecido com o encontrado anteriormente. Na maioria dos pontos o erro permanece baixo, ocorrendo apenas um pico de erro elevado.

| | |
|---|---|
| Erro relativo máximo | 46,38% (71º) |
| Erro relativo mínimo | 0,0013% (140º) |
| Erro médio relativo | 2,65% |
| Erro médio absoluto | 1,09% |

Tabela 4.7: Medições de erro para condutor de raio 0,6 $\lambda$.

A Figura 4.12 apresenta os resultados para um cilindro de raio 1$\lambda$. A malha gerada possui 9.160 elementos e 4.760 nós.

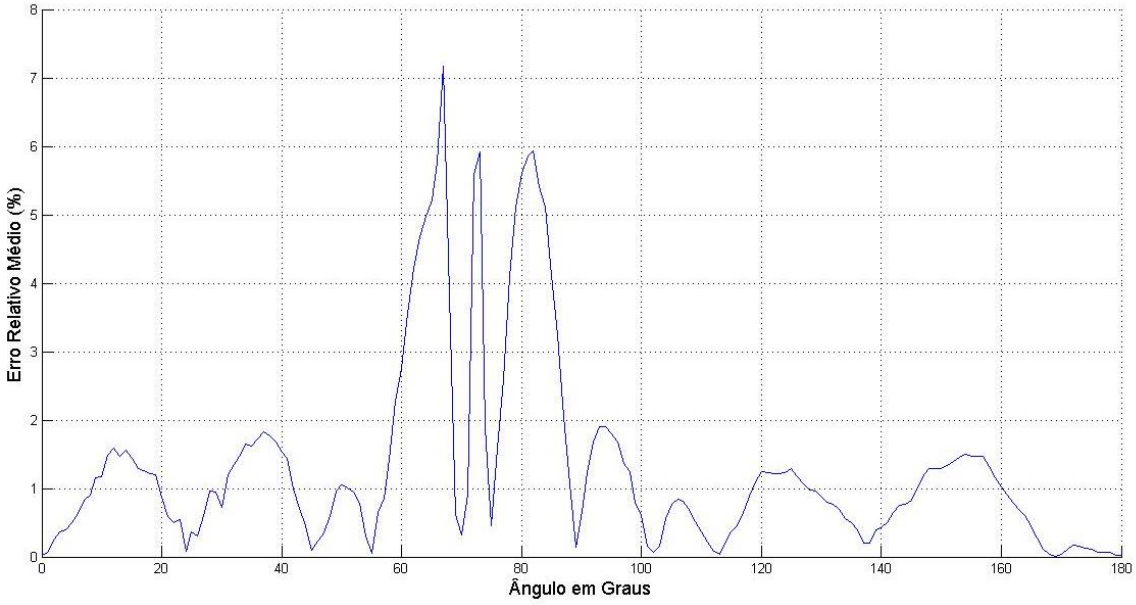


Figura 4.12: Erro Relativo x ângulo sobre a superficie do condutor de raio 1 $\lambda$.

| | |
|---|---|
| Erro relativo máximo | 7,09% (73º) |
| Erro relativo mínimo | 0,021% (168º) |
| Erro médio relativo | 1,29% |
| Erro médio absoluto | 0,83% |

Tabela 4.8: Medições de erro para condutor de raio 1λ.

A Figura 4.13 apresenta os resultados para um cilindro de raio 2 $\lambda$. A malha gerada possui 13.792 elementos e 7.156 nós.

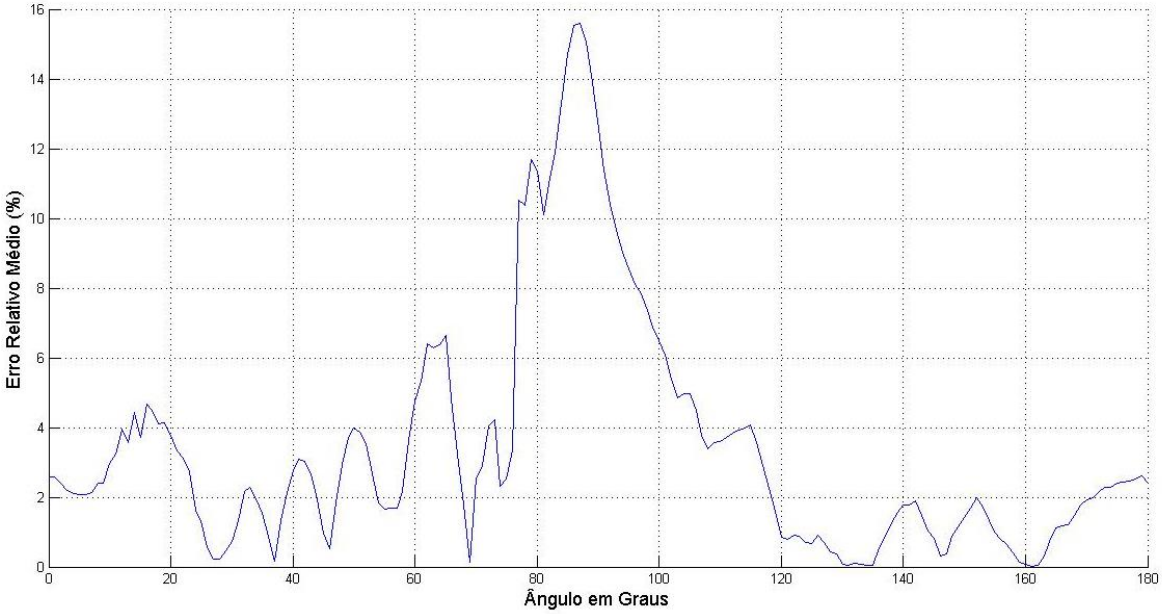


Figura 4.13: Erro Relativo x ângulo sobre a superficie do condutor de raio 2 $\lambda$.

Analisando a Figura 4.13, pode-se notar que ocorrem maiores valores de erro acima de 2% para o teste com condutor de raio 2$\lambda$, em comparação com os testes apresentados anteriormente. Isso ocorre devido à espessura da camada ter sido mantida em 1,3$\lambda$. Em testes realizados com a camada de espessura 3$\lambda$, é possível notar uma sensível diminuição dos erros relativos no decorrer dos ângulos e uma queda do erro médio absoluto de 2,15% para 1,82%.

| | |
|---|---|
| Erro relativo máximo | 15,61% (87º) |
| Erro relativo mínimo | 0,0089% (132º) |
| Erro médio relativo | 3,48% |
| Erro médio absoluto | 2,15% |

Tabela 4.9: Medições de erro para condutor de raio 2 $\lambda$.

Testando o método para alguns tamanhos distintos de condutor, é possível verificar a eficácia do mesmo em tratar o problema diante a estas variações sem comprometer de forma significativa o custo computacional, tendo em vista que para um condutor de raio 1$\lambda$ o método apresentou erros baixos, apresentados na Tabela 4.8, com um número de menos de 10 mil elementos.

## 5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, o problema abordado é de espalhamento eletromagnético bidimensional de um condutor cilíndrico infinito e sem perdas. Para tratar este problema desenvolveu-se a formulação do Método dos Elementos Finitos combinado com a condição de contorno UPML. Também implementou-se um código computacional fundamentando nesta formulação. Este código avalia o campo magnético espalhado sobre a superfície do condutor. O código é validado e analisando por meio da comparação com a solução analítica. Para esta comparação também desenvolveu-se a solução analítica.

A UPML é construída a partir da definição dos seus parâmetros. Para tal, foram encontrados na literatura valores de otimização destes parâmetros. Visando determinar se estes valores seriam os ideais para o problema tratado, foram realizados testes sobre estes parâmetros para determinar os melhores valores. Por meio destes testes chegou-se aos valores de $m = 3, k_{max} = 6$ e $R = e^{-16}$, valores estes compatíveis com a literatura de referência. Além da determinação destes parâmetros, avaliou-se o comportamento da condutividade máxima ($\sigma_{max}$). Esta avaliação demonstrou que existe um valor de equilíbrio onde esta condutividade atenua o campo de forma “suave” dentro da camada, dessa forma evitando variações súbitas do campo e garantido que o campo chegue mínimo a terminação da camada.

Após determinar a construção da UPML, analisou-se a influência da distância da camada para o objeto espalhador. A UPML possui a possibilidade de ser colocada bem próxima ao objeto sem gerar um número elevado de reflexões. A análise confirmou esta possibilidade, tendo em vista que com apenas 0,1λ de distancia o erro encontrado foi menor que 1%. Também ficou demonstrado que a variação desta distância interfere na precisão do método, porém de forma pouco significativa. Mesmo variando a distância de 0,1λ até 2,7λ a diferença do erro mínimo para o máximo foi de 1,4%. Dessa forma, visando um menor custo computacional escolheu-se a distância de 0,1λ como a distância ideal.

Determinada a distância, avaliou-se a espessura da camada. Esta avaliação demonstrou que a espessura da camada possui uma influência maior na precisão

que a distância, já que espessuras pequenas geraram erros elevados, porém, após a espessura de 1,2λ o erro converge para um valor de erro em torno de 1,1%.

Por fim, testou-se a eficácia do método diante de tamanhos de espalhadores diferentes. Foram testados para raios de 0,1λ, 0,6λ, 1λ e 2λ. Os resultados demonstraram a eficácia do método, mesmo para o condutor de raio 2λ sem prejudicar o custo computacional do método.

A combinação do Método dos Elementos Finitos com a condição de contorno UPML se mostrou bastante eficiente no tratamento de problemas de espalhamento eletromagnético. Dessa forma como trabalhos futuros são sugeridos:

- Desenvolvimento da formulação para espalhadores dielétricos.
- Análise do campo elétrico e magnético em regiões distantes;
- Aplicação da formulação desenvolvida para objetos com geometrias irregulares
- Aplicação do FEM-UPML usando ABC's como terminações.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS


[1] M. M. Afonso, “Métodos Híbridos na Solução de Problemas de Espalhamento Eletromagnético”, Belo Horizonte, 2003.

[2] W. H. Harrison F. K. Storm, R. S. Elliott and D. L. Morton. Clinical RF hyperthermia by magnetic-loop induction: A new approach to human câncer therapy. IEEE *Trans. On Microwave theory and Techniques,* Mtt-30(8):1149-1158, August 1982.

[3] J. M. Carcione. Ground radar simulation for Archaelogical applications. *Geophysical Prospecting*, (44):871 – 888,1996.

[4] P. S. Debroux. 3D modelling of the electromagnetic response of geophysical targets using the FDTD method. *Geophysical Prospecting*, (44):457 – 468,1996.

[5] R. Courant, "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations," *Buletin Amererican Mathematical Society*, (49) 1–23, 1943.

[6] R.W. Clough, "The finite element method in plane stress analysis", Proc. 2nd A.S.C.E. Conf. on Electronic Computation, Pittsburg, Pa., Sept. 1960.

[7] P. P. Silvester, “Finite element solution of homogeneous waveguide problems,” *Alta Frequenza,* n. 38, pp. 313-317, 1969.

[8] B. Engquist e A. Majda, “Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Wave,” *Mathematics of Computation,* vol. 31, n. 139, pp. 629-651, 1977.

[9] A. Bayliss e E. Turquel, “Radiation Boundary Conditions for Wave-like equatons,” *Communications on Pure and Applied Mathematics,* vol. 33, pp. 707 725, 1980.

[10] A. G. Pinto, “Análise das Condições Absorventes de Engquist-Majda e Bayliss-Turkel Aplicadas ao Espalhamento Eletromagnético,” Belo Horizonte, 2012.

[11] G. Mur, “Absorbing Boundary Conditions for the Finite-Difference Approximation of the Time-Domain Electromagnetic-Field Equations,” *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility,* Vols. 1 de 2 EMC-23, n. 4, pp. 377-382, 1981.

[12] L. N. Trefethen e L. Halpern, “Well-Posedness of One-Way Wave Equations and Absorbing Boundary Conditions,” *Mathematics of Computation,* vol. 47, n. 16, pp.421-435, 1986.

[13] R. L. Higdon, “Absorbing Boundary Condition for Difference Approximation to the Multidimensional Wave Equation,” *Mathematics of Computation,* vol. 47, pp. 437-459,1986.

[14] J.-M. Jin, J. L. Volakis e V. V. Liep, “An engineer's approach for terminating finite element meshes in scattering analysis,” em *Antennas and Propagation Society International Symposium*, 1991.

[15] J. Jin, The Finie Element Method in Electromagnetics, Nova York: John Wiley & Sons, 2002.

[16] J.-P. Berenger, “A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves,” *Journal of Computational Physics,* n. 114, pp. 185-200, 1993.

[17] Z. S. Sacks, D. M. Kingsland, R. Lee, and J. F. Lee, “A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition,” IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. 43, pp. 1460–1463, Dec. 1995.

[18] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory.* Nova York, 1941.

[19] Balanis, C. A. *Advanced Engineering Electromagnetics.* Editora John Wiley & Sons, Inc, 1989.

[20] D. A. Salgado e M. P. Pinto, *O Método dos Elementos Finitos como Ferramenta para Projeto de Malhas de Aterramento Subestações,* São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2009.

[21] L.S. Barbosa, “FEM-ABC Aplicado à Solução de Problemas de Espalhamento Eletromagnético”, Belo Horizonte 2011.

[22] Gómez-Revuelto, I; Garcia-Castillo, L.E; Pardo, D; Demkowicz, L.E. *A two-dimensional self-adaptive hp finite element method for the analysis of open region problems in electromagnetics.* In: IEEE Transactions on magnetics, vol. 43, nº 4, pp. 1337-1340, 2007.

[23] A. Bayliss e E. Turquel, “Radiation Boundary Conditions for Wave-like equatins,” *Communications on Pure and Applied Mathematics,* vol. 33, pp. 707-725, 1980.

[24] A. G. M. Pinto, M. M. Afonso, L. S. Barbosa e U. C. e. C. E. H. R. Resende, *Electromagnetic Scattering computed by FEM-ABC,* Ouro Preto, MG, 2011.

[25] M. Souza, “Inclusão do Meio UPML no Método dos Elementos Finitos no Domínio do Tempo Aplicado ao Eletromagnetismo”. Curitiba, 2008.

[26] A. TAFLOVE and S. C. HAQUESS, *Computational Electrodynamics,The Finite Difference Time Domain Method*, 2nd ed. Artech House., 2000.

[27] F. Sircilli, V. A. Serrão, M. A. R. Franco, J. C. da S. Lacava, *Análise Numérica Bidimensional de Seção Reta Radar pelo Método dos Elementos Finitos,* São Paulo, SP, 2004.

[28] E.J. Silva, N. Ida, *A Comparison of Absorbing Boundary Conditions (ABCs) to Perfectly Matched Layers (PML) in the 2D Frequency Domain Finite Element Method,* Belo Horizonte, MG, 2000.

[29] J. Wu, D.M. Kingsland, J. Lee, R. Lee, “A Comparison of Anisotropic PML to Berenger’s PML and Its Application to the Finite-Element Method for EM Scattering,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 45, NO 1, Janeiro 1997.

[30] U. Pekel, R. Mittra, “An Application of the Perfectly Matched Layer (PML) Concept to the Finite Element Method Frequency Domain Analysis of Scattering Problems,” *IEEE Microwave and Guided Wave Letters.*, vol. 5, NO 8, Augusto 1995.

[31] A.C Polycarpou, M. R. Lyons, C.A. Balanis, “A Two-Dimensional Finite Element Formulation of the Perfectly Matched Layers,” *IEEE Microwave and Guided Wave Letters.*, vol. 6, NO 9, Setembro 1996.

[32] M. Movahhedi, A. Abdipour, H. Ceric, A. Sheikholeslami, S. Selberherr, “Optimization of the Perfectly Matched Layer for the Finite Element Time-Domain Method,” *IEEE Microwave and Guided Wave Letters.*, vol. 17, NO 1, Janeiro 2007.

## APÊNDICES

### Apêndice A: Identidades Vetoriais

Nesta seção são apresentadas as identidades vetoriais utilizadas neste trabalho.

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{C}$ são campos vetoriais, enquanto $V$ é um campo escalar, então:

$$\boldsymbol{A}.(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}.(\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}.(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}); \quad \text{(A-1)}$$

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A}.\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}; \quad \text{(A-2)}$$

$$\nabla.(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}.(\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}.(\nabla \times \boldsymbol{B}); \quad \text{(A-3)}$$

$$\boldsymbol{\nabla}.(V\boldsymbol{A}) = V\,\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}.\boldsymbol{\nabla}V; \quad \text{(A-4)}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}.(\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{A}; \quad \text{(A-5)}$$

$$\boldsymbol{\nabla}.(\boldsymbol{\nabla}V) = \boldsymbol{\nabla}^2 V; \quad \text{(A-6)}$$

## Apêndice B: Equação de Onda

As equações de Maxwell possuem os campos elétricos e magnéticos acoplados nas leis de Faraday e de Ampère. É possível através de manipulações vetoriais estas equações podem ser desacopladas e dessa forma reescritas para se obter uma equação diferencial de segunda ordem conhecida como equação de onda [19].

### B-1 Formulação para o campo elétrico *($TM_z$)*

A permeabilidade relativa pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \tag{B-1}$$

a Lei de Faraday pode ser reescrita:

$$\frac{1}{\mu_r}\nabla \times \boldsymbol{E} = -j\omega\mu_0\boldsymbol{H}, \tag{B-2}$$

e aplicando o rotacional em ambos os lados tem-se:

$$\nabla \times (\frac{1}{\mu_r}\nabla \times \boldsymbol{E}) = -j\omega\mu_0\nabla \times \boldsymbol{H}. \tag{B-3}$$

Considerando um problema onde a geometria não varia em $z$, ou seja, $\frac{\partial y}{\partial z} = 0$ em duas dimensões e que o campo elétrico é continuo ao longo do eixo $\hat{z}$, ou seja, $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_z}\hat{\boldsymbol{z}}$.

O rotacional de $\boldsymbol{E}$, com $\boldsymbol{E_z} = u$, é:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial y}u\,\hat{a}_x - \frac{\partial}{\partial x}u\,\hat{a}_y, \tag{B-4}$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r}\nabla \times \boldsymbol{E}\right) = \begin{bmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{1}{\mu_r}\frac{\partial u}{\partial y} & -\frac{1}{u_r}\frac{\partial u}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}, \tag{B-5}$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r}\nabla \times \boldsymbol{E}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{u_r}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{u_r}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{a}_y + \left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{u_r}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{u_r}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\hat{a}_z, \tag{B-6}$$

Como $\boldsymbol{E}$ é uniforme na direção $\hat{a}_z$:

$$\frac{\partial}{\partial z}\big(f(x,y,z)\big) = 0 \tag{B-7}$$

As derivadas na direção az são nulas o rotacional pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r}\nabla \times \boldsymbol{E}\right) = \left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{u_r}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{u_r}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\hat{a}_z \tag{B-8}$$

No rotacional do campo magnético a densidade de fluxo elétrico pode ser substituída por $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$**:**

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + j\omega\varepsilon\boldsymbol{E} \tag{B-9}$$

Substituindo $\boldsymbol{E} = u\hat{a}_z$ em (B-8), tem-se:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{u_r}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{u_r}\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -j\omega\mu_0 J_z + \omega^2\mu_0\varepsilon_0 u \tag{B-10}$$

Se $J_z = 0$ no domínio e $k_0^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0$, então:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{u_r}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{u_r}\frac{\partial u}{\partial y}\right) - k_0^2\varepsilon_r u = 0 \tag{B-11}$$

A equação (B-11) é conhecida como a equação de onda para o campo elétrico.

## B-2 Formulação para o campo elétrico *($TE_z$)*

Utilizando o mesmo procedimento é possível obter a equação desacoplada em função do campo magnético com o uso da Lei de Ampère. Assumindo $J_z = 0$, tem-se:

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = j\omega\varepsilon\boldsymbol{E} \tag{B-12}$$

a permeabilidade do material pode ser descrita como:

$$\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0 \tag{B-13}$$

e a equação (B-12) pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{\varepsilon_r}\nabla \times \boldsymbol{H} = j\omega\varepsilon_0\boldsymbol{E} \tag{B-14}$$

Aplicando rotacional em ambos os lados da equação (B-14), tem:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon_r}\nabla \times \boldsymbol{H}\right) = j\omega\varepsilon_0\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} \tag{B-15}$$

Considerando um problema onde a geometria não varia em $z$, ou seja, $\frac{\partial y}{\partial z} = 0$ em duas dimensões e que o campo elétrico é continuo ao longo do eixo $\hat{z}$, ou seja, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H_z}\hat{\boldsymbol{z}}$.

O rotacional de $\boldsymbol{H}$, com $\boldsymbol{H_z} = u$, é:

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial y}u\,\hat{a}_x - \frac{\partial}{\partial x}u\,\hat{a}_y, \tag{B-16}$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon_r}\nabla \times \boldsymbol{H}\right) = \begin{bmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{1}{\mu_r}\frac{\partial u}{\partial y} & -\frac{1}{u_r}\frac{\partial u}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}, \tag{B-17}$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon_r}\nabla \times \boldsymbol{H}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{a}_y + \left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\hat{a}_z, \quad \text{(B-18)}$$

As derivadas na direção $\hat{a}_z$ serão nulas, devido ao fato do campo H não variar nesta direção, desta forma, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \quad \text{(B-19)}$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon_r}\nabla \times \boldsymbol{H}\right) = \left[-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\hat{a}_z \quad \text{(B-20)}$$

Eliminando o rotacional da intensidade de campo elétrico da equação (B-15) e efetuando as substituições, tem-se:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \omega^2\mu_0\varepsilon_0\mu_r u, \quad \text{(B-21)}$$

Assumindo e $k_0^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0$, então:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\epsilon_r}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\epsilon_r}\frac{\partial u}{\partial y}\right) - k_0^2\mu_r u = 0 \quad \text{(B-22)}$$

A equação (B-22) e conhecida como a equação de onda para o campo magnético.

## B-3 Formulação Geral

Devida a semelhança entre as equações de onda para o campo elétrico e magnético, estas podem ser expressas de uma única forma:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha_1\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha_1\frac{\partial u}{\partial y}\right) + k_0^2\alpha_2 u = 0, \quad \text{(B-23)}$$

onde $\alpha_1 = {\mu_r}^{-1}$ $e$ $\alpha_2 = \varepsilon_r$ para a formulação do campo elétrico, e $\alpha_1 = {\varepsilon_r}^{-1}$ $e$ $\alpha_2 = \mu_r$ para a formulação do campo magnético e $k_0$ a constante de propagação do espaço livre.

Dessa forma, a equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\nabla \cdot (\alpha_1 \nabla \mathrm{u}) + k_0^2 \alpha_2 u = 0 \tag{B-24}$$

## Apêndice C: Forma Fraca

A forma fraca amplia o universo das funções empregadas como aproximação, isso se deve ao fato das exigências quanto à continuidade serem menos rigorosas que as da equação original. Nessa equação, a derivada segunda possui solução, mas não é possível a utilização de aproximações lineares [48] e [10].

Assim, se faz necessário considerar a existência de uma solução para $u$ que satisfaça a equação a menos de um resíduo. Assim, é possível encontrar a formulação fraca para o problema.

Seja *S* o espaço das funções admissíveis, onde:

$$S = \{u \in H^1(\Omega) e \ u = \phi, \quad \forall \vec{x} \in \gamma_g\} \tag{C-1}$$

$$V = \{w \in H^1(\Omega) e \ w = 0, \quad \forall \vec{x} \in \gamma_g\} \tag{C-2}$$

onde $H^1$ é o espaço das funções de teste e representa o conjunto das funções que possuem derivada primeira de quadrado integrável.

Seja $R$ o resíduo para a forma forte definido por:

$$R = \nabla \cdot (\alpha_1 \nabla \mathrm{u}^*) + k_0^2 \alpha_2 u^*, \tag{C-3}$$

onde $u^*$ é uma aproximação para $u$.

Integrando-se o resíduo e igualando a integral à zero, tem-se:

$$\int_\Omega \{\nabla \cdot (\alpha_1 \nabla \mathrm{u}^*) + k_0^2 \alpha_2 u^*\} w \, d\Omega = 0, \qquad \forall w \in V, \tag{C4}$$

Onde $w$ é a função peso.

Utilizando a identidade vetorial (A-4) a primeira a integral do resíduo pode ser escrita como:

$$\int_\Omega w[\nabla \cdot (\alpha_1 \nabla \mathrm{u}^*)] d\Omega = \int_\Omega \nabla \cdot (w \alpha_1 \nabla \mathrm{u}^*) d\Omega - \int_\Omega \nabla \mathrm{w} \cdot (\alpha_1 \nabla \mathrm{u}^*) d\Omega \tag{C-5}$$

Aplicando o teorema da Divergência e as identidades vetoriais apresentadas no Apêndice A, tem-se:

$$\int_{\Omega} w[\nabla \cdot (\alpha_1 \nabla \mathrm{u}^*)] d\Omega = \int_{\Omega} w\alpha_1 \nabla \mathrm{u}^* . \hat{n} d\gamma - \int_{\Omega} \nabla \mathrm{w} \cdot (\alpha_1 \nabla \mathrm{u}^*) d\Omega \qquad \text{(C-6)}$$

sendo:

$$\nabla u^* . \hat{n} = \frac{\partial u^*}{\partial n}, \qquad \text{(C-7)}$$

assim, tem-se:

$$\int_{\Omega} w[\nabla \cdot (\alpha_1 \nabla \mathrm{u}^*)] d\Omega = \int_{\Omega} w\alpha_1 \frac{\partial u^*}{\partial n} d\gamma - \int_{\Omega} \nabla \mathrm{w} \cdot (\alpha_1 \nabla \mathrm{u}^*) d\Omega \qquad \text{(C-8)}$$

Portanto, a integral do resíduo pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} w\alpha_1 \frac{\partial u^*}{\partial n} d\gamma - \int_{\Omega} \nabla \mathrm{w} \cdot (\alpha_1 \nabla \mathrm{u}^*) d\Omega + \int_{\Omega} k_0^2 \alpha_2 w u^* d\Omega = 0, \qquad \text{(C-9)}$$

E a Forma fraca define-se como achar $u^* \in S$ tal que:

$$\int_{\Omega} \nabla \mathrm{w} \cdot (\alpha_1 \nabla \mathrm{u}^*) d\Omega - \int_{\Omega} k_0^2 \alpha_2 w u^* d\Omega - \int_{\gamma} \alpha_1 w \frac{\partial u^*}{\partial n} d\gamma = 0, \forall \mathrm{w} \in \mathrm{V}, \qquad \text{(C-10)}$$

## Apêndice D: Onda plana incidente em meio com perdas

Considerando uma onda plana senoidal incidindo sobre um material com perdas, com ângulo arbitrário θ relativo ao eixo x e considerando uma onda do tipo $TE_z$ incidente na região 1 , o material sem perdas do semi- espaço x < 0, para região 2 o material do semi-espaço x > 0 possuindo condutividade elétrica σ como demonstra a figura 3.3.

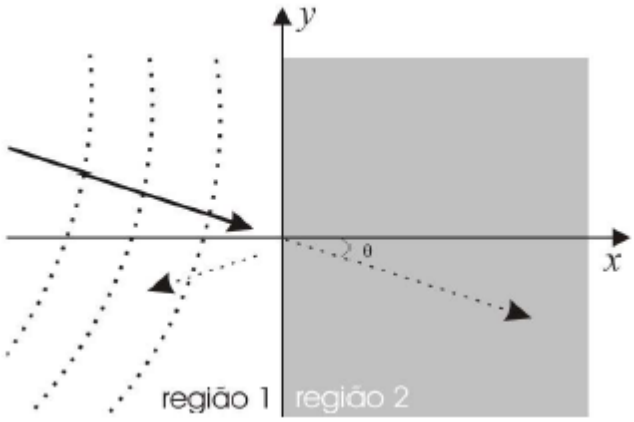


Figura 3.3: Onda incidente da região 1 para região 2. [25]

O campo magnético da onda é dado por [26]:

$$\boldsymbol{H^i} = H_0 e^{-j\beta_{1_x}x - j\beta_{1_y}y}\hat{a}_z \qquad \text{(D-1)}$$

onde $\boldsymbol{H^i}$ é o campo magnético incidente, $\beta_{1_x}$ $e$ $\beta_{1_y}$ são as constantes de fase.

Na região 1 o campo é dado por [26]:

$$\boldsymbol{H_1} = H_0(1 + \Gamma e^{2j\beta_{1_x}x})e^{-j\beta_{1_x}x - j\beta_{1_y}y}\hat{a}_z \qquad \text{(D-2)}$$

$$\boldsymbol{E_1} = [-\frac{\beta_{1_y}}{\omega\varepsilon_1}(1 + \Gamma e^{2j\beta_{1_x}x})\hat{a}_x + \frac{\beta_{1_x}}{\omega\varepsilon_1}(1 - \Gamma e^{2j\beta_{1_x}x})]H_0 e^{-j\beta_{1_x}x - j\beta_{1_y}y}\hat{a}_y \qquad \text{(D-3)}$$

E na região 2:

$$\boldsymbol{H_2} = H_0 \tau e^{-j\beta_{2_x}x - j\beta_{2_y}y}\hat{a}_z \qquad \text{(D-4)}$$

$$\boldsymbol{E_2} = [-\frac{\beta_{2_y}}{\omega\varepsilon_2(1+\frac{\sigma}{j\omega\varepsilon_2})}\hat{a}_x + \frac{\beta_{2_x}}{\omega\varepsilon_2(1+\frac{\sigma}{j\omega\varepsilon_2})}]H_0 \tau e^{-j\beta_{2_x}x - j\beta_{2_y}y}\hat{a}_y \qquad \text{(D-5)}$$

Onde Γ e $\tau$ são os coeficientes de reflexão e transmissão, respectivamente, e:

$$\beta_{1_x} = k_1 \cos\theta \qquad \beta_{1_y} = k_1 \sin\theta \,\} \qquad x < 0 \tag{D-6}$$

$$\beta_{2_x} = \sqrt{(k_2)^2 \left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon_2}\right)\left(1 + \frac{\sigma^*}{j\omega\varepsilon_2}\right) - (\beta_{2_y})^2}\} \qquad x > 0 \tag{D-7}$$

Onde $k_i = \omega\sqrt{\mu_i \varepsilon_i}$ para $i = 1{,}2$. Fazendo valer a continuidade dos campos tangenciais em x=0, tem-se que $\beta_{2_y} = \beta_{1_y} = k_1 \sin\theta$ e:

$$\Gamma = \frac{\frac{\beta_{1_x}}{\omega\varepsilon_1} - \frac{\beta_{2_x}}{\omega\varepsilon_2(1+\frac{\sigma}{j\omega\varepsilon_2})}}{\frac{\beta_{1_x}}{\omega\varepsilon_1} + \frac{\beta_{2_x}}{\omega\varepsilon_2(1+\frac{\sigma}{j\omega\varepsilon_2})}}; \qquad \tau = 1 + \Gamma \tag{D-8}$$

Para incidência normal ( $\theta = 0$) tem-se:

$$\Gamma = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \tag{D-9}$$

Onde

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}; \qquad \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2(1+\frac{\sigma^*}{j\omega\varepsilon_2})}{\varepsilon_2(1+\frac{\sigma}{j\omega\varepsilon_2})}} \tag{D-10}$$

Podemos estabelecer $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad \mu_1 = \mu_2$ e reforçar ainda mais a condição:

$$\frac{\sigma^*}{\mu_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_1} \quad \rightarrow \quad \sigma^* = \frac{\sigma\mu_1}{\varepsilon_1} = \sigma(\eta_1)^2 \tag{D-11}$$

Com $k_1 = k_2 \; e \; \eta_1 = \eta_2$ tem-se $\Gamma = 0$, e:

$$\beta_{2_x} = \left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon_2}\right) k_1 = k_1 - j\sigma\eta_1 \tag{D-12}$$

E o campos na região 2 serão:

$$\boldsymbol{E_2} = \eta_1 H_0 e^{-jk_1 x} e^{-\sigma\eta_{1x}} \hat{a}_y \tag{D-13}$$

$$\boldsymbol{H_2} = H_0 e^{-jk_1 x} e^{-\sigma\eta_{1x}} \hat{a}_z \tag{D-14}$$

É possível notar que para uma incidência normal a onda transmitida na região 2 atenua de forma exponencial na direção normal. Mesmo estando em um meio com perdas a velocidade da onda independe da frequência. Portanto o material da região 2 (com perdas elétricas e magnéticas definidas pela equação (3.16) ) é perfeitamente casado com o material da região 1 , para uma onda com incidência normal. [26]

## Apêndice E: Simplificação da formulação para espalhador condutor

A simplificação da equação é feita através da expansão do campo $u$, em $u = u^i + u^s$:

$$\nabla \cdot (\alpha_1 \nabla \mathbf{u}) + k_0^2 \alpha_2 \boldsymbol{u} = 0 \tag{E-1}$$

$$\nabla \cdot (\alpha_1 \nabla \mathbf{u}^{\boldsymbol{i}}) + k_0^2 \alpha_2 \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{i}} + \nabla \cdot (\alpha_1 \nabla \mathbf{u}^{\boldsymbol{s}}) + k_0^2 \alpha_2 \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{s}} = 0 \tag{E-2}$$

Tem-se:

$$\nabla \cdot (\alpha_1 \nabla \mathbf{u}^{\boldsymbol{i}}) = -k_0^2 \alpha_2 \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{i}} \tag{E-3}$$

Portanto:

$$-k_0^2 \alpha_2 \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{i}} + k_0^2 \alpha_2 \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{i}} + \nabla \cdot (\alpha_1 \nabla \mathbf{u}^{\boldsymbol{s}}) + k_0^2 \alpha_2 \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{s}} = \mathbf{0} \tag{E-4}$$

$$\nabla \cdot (\alpha_1 \nabla \mathbf{u}^{\boldsymbol{s}}) + k_0^2 \alpha_2 \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{s}} = 0 \tag{E-5}$$