CEFET-MG e UFSJ
Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Programa de Mestrado em Engenharia Elétrica
Modelagem e Controle de Sistemas - Análise e Modelagem de Sistemas

Jônathas Vinícius do Valle Silva

Caracterização de Sistemas Discretos no Tempo com Saturação de Atuadores e Atraso nos Estados

Belo Horizonte
2016

Jônathas Vinícius do Valle Silva

Caracterização de Sistemas Discretos no Tempo com Saturação de Atuadores e Atraso nos Estados

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, associação ampla entre CEFET-MG e UFSJ como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Modelagem e Controle de Sistemas - MCS. Linha de pesquisa: Análise e Modelagem de Sistemas - AMS.

Orientador: Prof. Dr. Valter J. S. Leite

Belo Horizonte
2016

Para Jéssica, minha vida, meu amor, meu porto seguro.

S586c Silva, Jônathas Vinicius do Valle.
Caracterização de sistemas discretos no tempo com saturação de atuadores e atraso nos estados. 2016.
112 p. il.

Orientador: Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite.

Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais/Universidade Federal de São João del-Rei. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

1. Atraso no estado. 2. Saturação de atuadores. 3. Caracterização de Sistemas Discretos. 4. Limitação na Taxa de Variação do Atraso. I. Leite, Valter Júnior de Souza. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. III. Universidade Federal de São João del-Rei. IV. Título.

CDU: 681.511.4

(Catalogação – Biblioteca Universitária – Campus Divinópolis – CEFET-MG)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Jônathas Vinícius do Valle Silva

"Caracterização de Sistemas Discretos no Tempo com Saturação de Atuadores e Atraso nos Estados"

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica – Associação Ampla entre a Universidade Federal de São João del-Rei e o Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais em 31 de Outubro de 2016 como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, aprovada pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite (Orientador)
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Eugênio de Bona Castelan Neto
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Luís Filipe Pereira Silva
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Eduardo Nunes Gonçalves
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Agradecimentos

Gostaria de agradecer, primeiramente, ao Pai Celestial, que me proporcionou a ambição na medida certa para sonhar e a força necessária para realizar esse sonho. “Até aqui me ajudou o Senhor!”

Agradeço também aos meus familiares. Ao meu pai Uilton, pelo apoio e amparo incondicionais durante toda a minha vida; À minha mãe Francisca, minha “Dona Maria”, cujo exemplo de dedicação, disciplina e superação conduz os meus passos; Ao meu irmão Harley, meu norte desde criança, através da liderança por imitação me tornei seu espelho; À minha irmã Priscila, personificação de meu amor, a melhor parte de mim; Ao nosso caçula, José Carlos, cuja chegada trouxe um novo sentido minha à vida.

À ela, minha princesa, meu amor, a mulher que escolhi e que também me escolheu para sermos um só. Por todo o tempo, dela por direito, que abdicou em prol desse trabalho, o meu muito obrigado à minha noiva Jéssica....

Aos colegas de curso. Ao Adriano, meu nobre companheiro de viagem, você não tem ideia o quanto foi fundamental à realização deste trabalho; À Ariany, minha “musa acadêmica”, por estar sempre pronta a atender minhas solicitações de ajuda; Ao Lucas, parceiro de todas as horas, meu incentivador e principal responsável por meu ingresso no mestrado; Ao Ângelo, mente mais brilhante que já conheci, sua obstinação e dedicação o tornaram uma referência para mim.

Aos amigos e funcionário do Cefet campus Divinópolis. Ao professor Dr. Luis Felipe, grande colaborador e responsável pelos resultados aqui apresntados. Aos amigos do Laboratório 315, com os quais passei bons momentos, vocês jamais serão esquecidos.

Aos irmãos da gloriosa Polícia Civil de Minas Gerais, em especial à Inspetoria de Investigadores da Delegacia Regional de Divinópolis, que tornou esse trabalho possível.

Aos colegas da República Paiol, em Divinópolis, pelos longos anos de convivência.

Ao meu mentor, orientador e amigo, professor Dr. Valter, por sempre me incentivar e investir

seu precioso tempo em minha vida acadêmica. Me recordarei eternamente de suas palavras, quando, em um momento de dificuldade, lhe procurei para desistir do mestrado: “Se desistir, eu vou entender, mas me sinto obrigado a insistir com você, porque sei que você tem perfil.” O senhor foi o limiar entre o meu sucesso e o meu fracasso, foi a minha última linha de defesa, a qual garantiu a realização desse sonho. Seria impossível demonstrar toda a minha gratidão por meio de palavras, mas saiba que o senhor tem o meu eterno respeito, consideração e amizade.

Aos membros da banca examinadora pelos comentários, sugestões e contribuições, as quais ajudaram a melhorar a qualidade e a redação final deste trabalho.

À CAPES, pelo apoio financeiro despendido neste trabalho.

Não é o mais forte que sobrevive,
nem o mais inteligente,
mas o que melhor se adapta às mudanças.
(*Leon C. MEGGINSON, Professor da Louisiana State University.* 1963*, Discurso sobre o trabalho "A Origem das Espécies", de Charles Darwin.*)

Resumo

A estabilização da classe de sistemas com atraso variante no tempo presente no estado e atuadores limitados em amplitude vem ganhando grande destaque na literatura. Isso deve-se ao fato de que estas duas características, atraso nos estados e atuadores limitados em amplitude, são inerentes à maioria dos sistemas reais. Assim, neste trabalho é proposta uma nova abordagem de estabilização de sistemas discretos no tempo com incertezas politópicas nas matrizes dinâmicas, atraso variante no tempo presente no estado e atuadores limitados em amplitude, sendo aplicadas leis de controle por realimentação estática de estados. Tal abordagem utiliza a condição generalizada de setor aplicada à não-linearidade de zona morta e a representação do sistema com atrasos por um sistema chaveado aumentado livre de atrasos. A caracterização da região de condições iniciais é feita em um espaço aumentado, reduzindo o convervadorismo das estimações normalmente encontradas na literatura. Embora as condições de síntese propostas sejam do tipo dependente do atraso, três tipos de leis de controle independente do atraso são investigadas: a primeira realimentando apenas o estado atual, a segunda realimentando o estado atual e o estado mais atrasado e a última realimentando todos os estados, atual e atrasados. Os resultados obtidos com as três leis de controle são comparados por meio de exemplos numéricos. Adicionalmente, são propostas condições convexas para tratar a variação máxima do atraso entre duas amostragens consecutivas, o que é novo na literatura para essa classe de sistemas. O desempenho do sistema pode ser especificado por meio do índice de desempenho da λ-contratividade. Para todos os casos, são propostos procedimentos de otimização convexa para maximização da região de condições iniciais. As condições propostas são aplicadas e discutidas em vários exemplos, dentre eles um exemplo escalar, facilitando a percepção do leitor sobre as técnicas usadas.

Palavras-chave: Atraso no estado, atuadores limitados em amplitude, caracterização de sistemas discretos, limitação da variação do atraso, λ-contratividade.

Abstract

The stabilization of discrete-time systems with time-varying state delay and saturating actuators has been received great attention in the literature. This is due to the fact that these two characteristics, state delay and saturating actuators, are inherent in most real systems. Thus, in this work a new approach is proposed to the stabilization of discrete-time systems with dynamic matrices under polytopic uncertainty, time-varying delay in the state, and saturating actuators, by delay independent state feedback control laws. Such an approach uses the generalized sector condition to handle dead zone non-linearity, and the representation of the system with delays by an augmented delay switching system. The characterization of the region of initial conditions is done in an augmented space, reducing the conservatism of the estimates usually found in the literature. Although the proposed synthesis conditions are of delay-dependent type, three types of delay independent control laws are investigated: the first feeding back only the current state; the second by feeding back the current state and the most delayed state; and the third control law that feeds back all states: the current one and the delayed ones. The results obtained with the three control laws are compared by numerical examples. Additionally, convex conditions to treat the maximum delay variation between two consecutive samplings are proposed, which is new in the literature for this class of systems. The closed-loop performance can be specified by the λ-contractivity performance index. For all cases, convex optimization procedures are proposed to maximize the region of initial conditions. The proposed conditions are applied and discussed in several examples, among them a scalar example, facilitating the reader's perception of the techniques used.

Keywords: State delay, saturating actuators, characterization of discrete systems, limitation of delay variation, λ-contractivity.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Acrônimos e Notação

Acrônimos

LMI	Linear Matrix Inequality (desigualdade matricial linear)
LMIs	Linear Matrix Inequalities (desigualdades matriciais lineares)
MIMO	Multiple-Input and Multiple-Output (múltiplas-entradas e múltiplas-saídas)
SeDuMi	Self-Dual-Minimization
SISO	Single-Input an Single-Output (uma entrada e uma saída)

Notação

n	ordem do sistema
N	número de vértices do politopo
p	número de entradas do sistema
$\bar{\tau}$	atraso máximo
$\Delta\tau_{\max}$	taxa de variação máxima do atraso
$\varphi_{\bar{\tau},k}$	sequência de estados
v_k	sinal de controle linear
$\mathtt{sat}(v_k)$	saturação do sinal de controle linear
$\triangleq$	igual por definição
$\exists$	existe
$\in$	pertence a
$\notin$	não pertence a
$\cup$	união
$\subset$	está contido em
z	variável linearizada
$\Psi(\cdot)$	zona morta
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{I}$	conjunto dos números inteiros
$\mathbb{I}_*$	conjunto dos números inteiros positivos
$\mathbf{I}$	matriz identidade de dimensões apropriadas
$\mathbf{0}$	matriz nula de dimensões apropriadas

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo é apresentada uma motivação para o trabalho e são estabelecidos os problemas investigados. Em seguida, define-se os objetivos a serem atingidos, sendo disposta a organização do texto.

1.1 Atuadores saturantes em sistemas com atrasos

Atrasos no estado podem advir da própria dinâmica do sistema, como consequência indesejada da ação de realimentação ou mesmo pela introdução intencional de atrasos na lei de controle (Gu, Kharitonov & Chen 2003).

Em geral, por estar associado ao tempo de transporte de massa, energia ou informação, o atraso está presente em diversos sistemas físicos, tais como processos biológicos, econômicos, químicos, mecânicos, dentre outras (Michiels & Niculescu 2007). Sua presença pode ocasionar perda de desempenho ou até mesmo a instabilidade no processo. Para uma visão geral sobre sistemas com atrasos veja (Gomes da Silva Jr. & Leite 2007) e em especial para o caso discreto no tempo, veja (Leite, Castro, Caldeira, Miranda & Gonçalves 2011).

As principais abordagens para tratar o problema de análise de estabilidade usam funções de Lyapunov-Krasovskii, como por exemplo (Mahmoud 2000, Fridman & Shaked 2005, Montagner, Leite, Tarbouriech & Peres 2005, Miranda & Leite 2011) para abordagens que tratam da estabilização de sistemas discretos no tempo com atrasos no estado. Uma abordagem alternativa, feita por Hetel, Daafouz & Iung (2008), transforma o sistema com atrasos variantes no estado em um sistema aumentado livre de atraso e chaveado pelo atraso.

Já a saturação nos atuadores está presente em praticamente todos os sistemas físicos, haja vista não haver sistema que disponha de energia infinita. Assim, sua presença é tanto

indesejável quanto inevitável, podendo levar o sistema à perda de desempenho ou até mesmo à instabilidade. Por esse motivo, na prática, os sistemas são projetados para operar fora da região de saturação dos atuadores.

Para demonstrar os efeitos da saturação nos atuadores em sistemas com atraso no estado, considere o sistema escalar discreto no tempo e com atraso no estado dado por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + A_d x_{k-\tau} + Bv_k, \\ y_k &= Cx_k \end{aligned} \tag{1.1}$$

em que $A = 2$, $A_d = -0.1$, $B = 1$, $C = 1$, $\tau = 1$, x_k e $y_k \in \mathbb{R}$ são, respectivamente, o estado e a saída do sistema no instante k.

Para verificar a estabilidade do sistema (1.1) em malha aberta, façamos $v_k = 0 \; \forall k > 0$ e apliquemos a Transformada Z na equação dinâmica do referido sistema, ocasião em que obtemos

$$\mathbf{I}z - A - A_d z^{-1} = 0,$$

ou ainda

$$\mathbf{I}z^2 - Az - A_d = 0. \tag{1.2}$$

Substituindo os valores de A e A_d e resolvendo a equação (1.2), obtemos as raízes $\rho_1 = 0.0513$ e $\rho_2 = 1.9487$. Assim, temos que o sistema (1.1) possui um autovalor (ρ_2) fora do círculo unitário, portanto, trata-se de um sistema instável.

É considerada uma realimentação estática de estados, definida por

$$v_k = Kx_k \; \forall k \geq 0. \tag{1.3}$$

Assim, um ganho estático que garante a estabilidade do sistema em malha fechada é dado por

$$K = -1.3675. \tag{1.4}$$

Para implementar o controlador obtido, foram consideradas quatro condições iniciais distintas, quais foram $x_{-1} = x_0 = 3$, 4, 5 e 6. A resposta temporal do sistema, bem como o sinal do atuador, para as condições iniciais citadas acima é apresentada na Figura 1.1.

Pode-se observar que a resposta temporal do sistema converge para todas as condições iniciais dadas, sendo que o sinal de controle em cada amostragem é tão maior quanto mais distante for a condição inicial da origem.

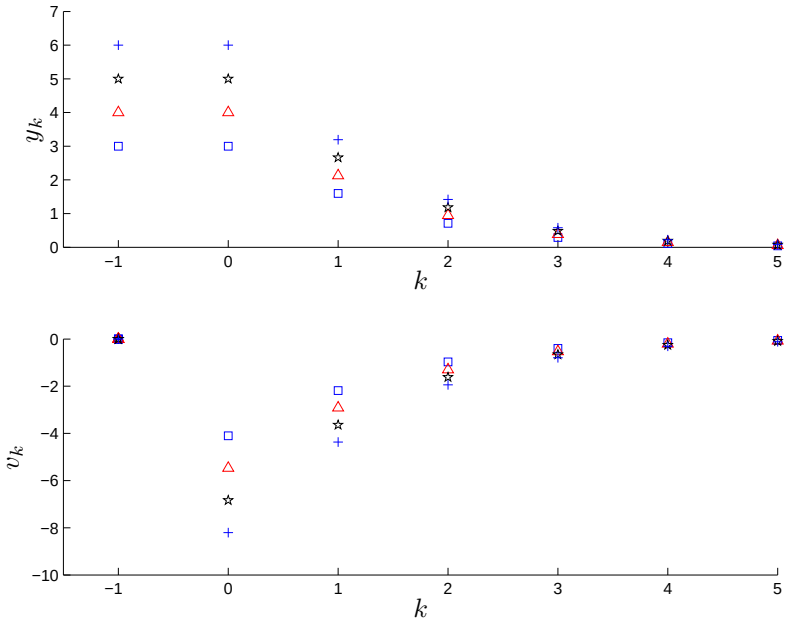


Figura 1.1: Resposta temporal do sistema (1.1) e sinal do atuador para as condições iniciais $x_{-1} = x_0 = 3$ ($\square$), 4 ($\triangle$), 5 ($\star$) e 6 ($+$).

Considere que o mesmo sistema esteja sujeito a uma saturação do atuador, ou seja,

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + A_d x_{k-\tau} + B\mathtt{sat}(v_k), \\ y_k &= Cx_k \end{aligned} \tag{1.5}$$

em que

$$\mathtt{sat}(v_k) = \begin{cases} 5, & \text{se } v_k > 5 \\ v_k, & \text{se } -5 \leq v_k \leq 5 \\ -5, & \text{se } v_k < -5 \end{cases} .$$

No intuito de investigar a influência da saturação na resposta temporal do sistema, o controlador obtido em (1.4) foi implementado no sistema (1.5) para as mesmas condições iniciais $x_{-1} = x_0 = 3$, 4, 5 e 6, sendo o resultado das evoluções temporais apresentado na Figura 1.2.

Note que a resposta temporal para a condição inicial $x_{-1} = x_0 = 3$ ($\square$) converge para a origem sem atingir a saturação do sinal do atuador. Já para as condições iniciais $x_{-1} = x_0 = 4$ ($\triangle$) e 5 ($\star$), o sinal do atuador satura nas primeiras amostragens, entretanto, sem instabilizar o sistema. Por fim, para a condição inicial $x_{-1} = x_0 = 6$ ($+$), o atuador satura a partir de $k = 1$ e o sistema fica instável. Esse comportamento está relacionado à limitação do sinal de controle. Para a condição inicial $x_{-1} = x_0 = 6$ essa limitação foi tão significativa que impossibilitou o controlador de levar o estado para a origem, instabilizando o sistema.

Neste trabalho, é proposta uma condição de síntese para sistemas com atraso no estado e saturação de atuador que permita o sinal do atuador saturar sem, no entanto, instabilizar

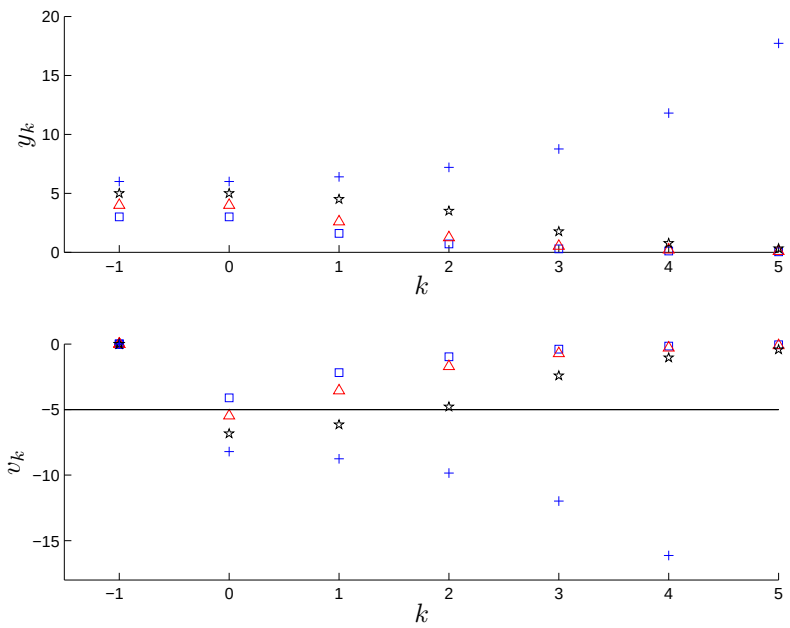


Figura 1.2: Resposta temporal do sistema (1.5) e sinal do atuador para as condições iniciais $x_{-1} = x_0 = 3$ ($\square$), 4 ($\triangle$), 5 ($\star$) e 6 ($+$), e limite da saturação do sinal do atuador ($-$).

o sistema.

1.2 O Problema

Seja o sistema Ω de dimensão n, com p sinais de entrada e q sinais de saída, tal que

$$\Omega : \left\{ \begin{array}{c} x_{k+1} = A(\alpha)x_k + A_d(\alpha)x_{k-\tau_k} + B(\alpha)\mathtt{sat}(v_k) \\ y_k = Cx_k \end{array} \right. , \tag{1.6}$$

em que $C \in \mathbb{R}^{q\times n}$, τ_k é o atraso no instante k contido no conjunto $\{1,2,\ldots,\bar{\tau}\}$, $x_k \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ é o vetor de estado no instante k e $v_k \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ é o vetor de sinal de controle no instante k.

As matrizes $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_d(\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $B(\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times p}$ são incertas e pertencentes a um conjunto politópico dado pela combinação convexa de N vértices conhecidos, de forma que

$$(A,A_d,B)(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(A_i,A_{di},B_i),\ \alpha \in \Xi$$

em que α é um vetor de parâmetros invariantes no tempo e Ξ corresponde ao simplex unitário

$$\Xi \triangleq \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1 \text{ e } \alpha_i \geq 0, i = 1,\ldots,N \right\}. \tag{1.7}$$

Considere também uma lei de controle linear que pode assumir três configurações

distintas, quais sejam

$$v_k = K_0 x_k \tag{1.8a}$$

$$v_k = K_0 x_k + K_{\bar{\tau}} x_{k-\bar{\tau}} \tag{1.8b}$$

$$v_k = \sum_{i=0}^{\bar{\tau}} K_i x_{k-i}. \tag{1.8c}$$

A função saturação vetorial descentralizada clássica $\mathtt{sat}(v_k)$ é dada de forma que

$$\mathtt{sat}(v_{k(i)}) = \begin{cases} \overline{u}_{(i)}, & \text{se } v_{k(i)} > \overline{u}_{(i)} \\ v_{k(i)}, & \text{se } \underline{u}_{(i)} \leq v_{k(i)} \leq \overline{u}_{(i)} \\ \underline{u}_{(i)}, & \text{se } v_{k(i)} < \underline{u} \end{cases}, \tag{1.9}$$

em que $\underline{u}$ e $\overline{u}$ são vetores de valores mínimos e máximos, respectivamente, assumidos por cada um dos p sinais de controle. Assim, temos que

$$\underline{u}_{(i)} \leq \mathtt{sat}(v_{k(i)}) \leq \overline{u}_{(i)}$$

é verificada em todo $k > 0$, para $i = 1, \ldots, p$.

A classe de sistemas com atraso nos estados é caracterizada por possuir um conjunto de condições iniciais e não uma única condição inicial, como ocorre com sistemas sem atraso, ou seja, a dinâmica do sistema depende do estado atual e dos estados atrasados. Assim, se φ é uma sequência de vetores, seu j-ésimo elemento é denotado por $[\varphi]_j$. A sequência $\varphi_{d,k} \in E_\phi$, com $E_\phi = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_{d+1}$, $E_j \subseteq \mathbb{R}^n$, tem como j-ésimo elemento $[\varphi_{d,k}]_j = x_{k+j-(d+1)} \in E_j$, $j = 1, \ldots, d+1$. Portanto,

$$\varphi_{d,k} = \{x_{k-d}, x_{k-(d-1)}, \ldots, x_k\}. \tag{1.10}$$

Com relação à estabilidade do sistema, segue a definição adaptada de (Niculescu, Dion & Dugard 1996).

Definição 1 (Estabilidade assintótica global) *O sistema (1.6) sob ação de uma das leis de controle (1.8) é dito globalmente assintoticamente estável se para toda condição inicial* $\|\varphi_{\bar{\tau},0}\| \leq \phi < \infty$*, em que* $\|\varphi_{\bar{\tau},0}\|$ *é a norma da sequência de condições iniciais, as respectivas trajetórias convergem para a origem, isto é,* $\lim_{k\to\infty} \varphi_{\bar{\tau},k} = \{\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}\}$.

Conforme será discutido mais a frente, em sistemas com saturação de atuadores, a estabilidade assintótica global somente pode ser alcançada caso o sistema em malha aberta seja estável (Lin & Saberi 1993), ou seja, a matriz $(A + BK)$ ser Schur estável não necessariamente

implica a estabilidade assintótica global do sistema em malha fechada. Assim, surge a definição de estabilidade assintótica local, enunciada a seguir.

Definição 2 (Estabilidade assintótica local) *O sistema (1.6) sob ação de uma das leis de controle (1.8) é dito localmente assintoticamente estável se para toda sequência de condição iniciais* $\varphi_{\bar{\tau},0} \in \mathcal{L}_V$*, as respectivas trajetórias convergem para a origem, isto é,* $\lim_{k\to\infty} \varphi_{\bar{\tau},k} = \{\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}\}$.

O intuito deste trabalho é propor uma condição de estabilização local que considere tanto a saturação do atuador (o sinal de controle pode saturar sem, no entanto, instabilizar o sistema) quanto o atraso no estado (síntese de um controlador que realimente o estado atual e os atrasados, ou seja, $\mathbb{K} = \begin{bmatrix} K_0 & K_1 & \ldots & K_{\bar{\tau}} \end{bmatrix}$). Há na literatura várias técnicas que tratam essas duas características (saturação no sinal de controle e atraso no estado) isoladas em sistemas discretos no tempo, entretanto, trabalhos que abordam as duas simultâneamente são escassos. Conforme será visto mais adiante, a extensão de uma dessas técnicas para outras classes de sistemas não é obvia.

Assim, os problemas investigados neste trabalho podem ser descritos como

Problema 1 (Estabilização local) *Seja o sistema (1.6) sob a ação de uma das leis de controle (1.8a)-(1.8c). Determine a matriz de ganho* $\mathbb{K}$ *que assegure a estabilidade assintótica local da malha fechada para um conjunto de condições iniciais* $\varphi_{\bar{\tau},0}$ *admissível.*

Problema 2 (Maximizar o Conjunto de Condições Iniciais) *Seja o sistema (1.6) sob a ação de uma das leis de controle (1.8a)-(1.8c). Determine a matriz de ganho* $\mathbb{K}$ *que maximize o conjunto das condições iniciais* $\varphi_{\bar{\tau},0}$ *admissíveis e assegure(m) a estabilidade assintótica local da malha fechada.*

1.3 Objetivos

Como objetivo principal deste trabalho, podemos citar a proposta de uma condição de estabilização local para síntese de um ganho estático $\mathbb{K}$ que assegure, para um conjunto de condições iniciais admissíveis, a estabilidade assintótica local em malha fechada de sistemas discretos no tempo com saturação de atuadores e atraso no estado. Além disso, espera-se estabelecer um problema de otimização que maximize o conjunto de condições iniciais admissíveis. Por

fim, este trabalho se propõe a apresentar algumas características e particularidades de sistemas discretos no tempo com saturação de atuadores e atraso no estado.

1.4 Organização da Dissertação

No Capítulo 2 é feita uma revisão da literatura na qual são apresentados os conceitos fundamentais necessários para desenvolvimento e compreensão do trabalho, dentre eles a saturação nos atuadores (com e sem atraso no estado), incertezas politópicas, estabilidade no sentido de Lyapunov e de Lyapunov-Krasovskii, além do índice de desempenho λ-contratividade. São apresentados também alguns problemas de síntese de controlador.

No Capítulo 3 é apresentado o resultado principal deste trabalho, o qual consiste em uma condição de estabilização de sistemas discretos no tempo, a parâmetros incertos, com saturação de atuadores e atraso no estado, considerando estruturas de controlador distintas. O resultado principal é adaptado para tratar a limitação na variação do atraso, a síntese com índice de desempenho λ-contratividade e a simplificação para o caso de sistemas precisamente conhecidos. Por fim, a otimização da região de condições iniciais admissíveis é tratada.

O Capítulo 4 traz exemplos e estudos de caso que consolidam os resultados apresentados neste trabalho. Um exemplo escalar precisamente conhecido é utilizado a fim de facilitar a visualização da região de atração pelo leitor. Em seguida, os parâmetros desse mesmo sistema são tratados como incertos e os resultados comparados com os obtidos para o caso precisamente conhecido. Um exemplo de ordem 2×2 é investigado com o intuito de melhor demonstrar as pecularidades dessa classe de sistemas. Ao final, é investigado a sítese para um sistema livre de atraso considerando a realimentação dos estados passados. Tal exemplo é utilizado como motivação para as perspectivas deste trabalho.

No Capítulo 5, são apresentados os comentários sobre os resultados obtidos, trabalhos produzidos e algumas propostas de trabalhos futuros. O Apêndice A contém lemas utilizados neste trabalho, bem como as respectivas provas.

Capítulo 2

Revisão da Literatura

2.1 Revisão da Literatura

A classe de sistemas com atraso no estado e saturação de atuadores tem sido tratada para o caso contínuo no tempo, por exemplo em (Cao, Lin & Hu 2002), no qual os autores utilizam uma função de Lyapunov, do tipo independente de parâmetros, muito comum na literatura, qual seja

$$V(x) = x^T P x, \tag{2.1}$$

com P simétrica e definida positiva. O trabalho apresenta duas condições de síntese, uma dependente do atraso e outra independente deste. A lei de controle utilizada trata-se de uma realimentação estática de estados que, diferente do que se proprõe no presente trabalho, não realimentam os estados atrasados.

Entretanto, para a classe de sistemas discretos no tempo com atrasos no estado, a saturação de atuadores é pouco tratada. Ao existir uma limitação na amplitude dos sinais do atuador, torna-se necessário caracterizar a chamada região de atração: sempre que as condições iniciais do sistema com atraso iniciar em tal região, a convergência das trajetórias correspondentes para a origem é assegurada. As condições iniciais correspondem a uma sequência $\varphi_{\bar{\tau},k}$ composta pelos vetores x_k, $x_{k-1}, \cdots$, $x_{k-\bar{\tau}}$, em que $\bar{\tau}$ é o maior valor assumido pelo atraso. Assim, a saturação influencia o conjunto das condições iniciais necessárias à unicidade das soluções. Tais condições iniciais são caracterizadas pela sequência de vetores de estados (caso discreto no tempo) definida sobre um intervalo (discreto) de tempo que vai do instante atual até um determinado instante no passado, corresponde ao atraso máximo presente no sistema.

Podem ser mencionados os trabalhos (Ghiggi, Gomes da Silva Jr., Leite &

Miranda 2008), (Xu, Feng, Zou & Huang 2012) e (Silva, Leite, Castelan & Klug 2014), em que são considerados atrasos variantes no tempo. No primeiro, os sistemas possuem incertezas politópicas e a região de condições iniciais admissíveis é caracterizada por uma ponderação entre a norma da sequência inicial ($||\varphi_{\bar{\tau},k}||$) e a norma de sua variação temporal ($||\Delta\varphi_{\bar{\tau},k}||$). Já no segundo são tratados sistemas com incertezas do tipo limitada em norma e a região de condições iniciais admissíveis é caracterizada por uma bola em torno da origem, dentro da qual devem estar todos os vetores de estado, sendo utilizada uma função de Lyapunov do tipo independente de parâmetros. Por fim, no último trabalho citado, são tratados sistemas fuzzy do tipo Takagi-Sugeno com atraso no estado, não sendo investigada a saturação, mas sim a restrição das trajetórias do sistema em malha fechada para uma região do espaço. Por isso, faz-se necessário caracterizar a região de atração, a qual, nesse caso, é feita por meio de uma região elipsoidal para os vetores x_k e uma bola para os demais elementos da sequência $\varphi_{\bar{\tau},k}$.

No presente trabalho é proposta uma nova caracterização da região de atração utilizando a abordagem introduzida em (Hetel et al. 2008). São propostas condições para a síntese de leis de controle e, a partir dessas, pode-se calcular estimativas menos conservadoras das sequências de estados iniciais admissíveis que asseguram a convergência das trajetórias do sistema em malha fechada para a origem.

Em (Haoussi & Tissir 2007), os autores estudam a classe de sistemas incertos contínuos no tempo com atraso constante no estado e saturação no sinal de controle. A função de Lyapunov utilizada é do tipo independente de parâmetros e a lei de controle não realimenta os estados atrasados. Já em (Bo, Jing & Hao 2014), os autores tratam um sistema contínuo no tempo com atraso variante no estado e saturação no sinal de controle. Mais uma vez, o funcional de Lyapunov adotado é do tipo independente de parâmetros e a lei de controle utilizada não alimenta os estados atrasados. A função de Lyapunov utilizada no presente trabalho é do tipo dependente de parâmetros e as leis de controle estudas podem ou não realimentar os estados atrasados.

A grande maioria dos trabalhos dispostos na literatura, como por exemplo (Fridman, Seuret & Richard 2004), (Miranda & Leite 2011) e (Silva, Leite, Castelan & Klug 2012), utilizam leis de controle dependentes do atraso. Tal abordagem, apesar de fornecer (na maioria das vezes) resultados menos conservadores, apresenta a necessidade de se conhecer o atraso a cada amostragem. Neste trabalho, embora as condições propostas sejam do tipo dependente do

atraso, as leis de controle não o são (vide equações (1.8a)-(1.8c)), facilitando a implementação dos controladores.

Todas as formulações propostas, incluindo o problema para maximização do tamanho da região de condições iniciais admissíveis, estão na forma de desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *linear matrix inequalities*).

2.2 Saturação nos atuadores

As restrições em atuadores estão presentes em todo sistema físico, podendo ser associadas aos limites físicos de atuadores: amplitude ou taxa de variação. Essas limitações restringem o desempenho do sistema em malha fechada, podendo levá-lo a pontos de equilíbrio diferentes do ponto de operação (que em geral são colocados na origem do espaço de estado) ou mesmo instabilizando-o (Tarbouriech, Garcia, Gomes da Silva Jr. & Queinnec 2011).

Em sistemas controlados digitalmente, é natural a utilização de modelos discretos no tempo para a síntese de controladores estabilizantes. Para compreender um pouco melhor o efeito da saturação nos atuadores, considere o sistema discreto no tempo dado por

$$\begin{array}{c} x_{k+1} = Ax_k + B\mathtt{sat}(v_k) \\ y_k = Cx_k \end{array}, \tag{2.2}$$

em que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ e $C \in \mathbb{R}^{q\times n}$, com uma lei de controle

$$v_k = Kx_k. \tag{2.3}$$

Note que, embora o sistema (2.2) em malha aberta seja linear, a presença da saturação $\mathtt{sat}(\cdot)$ no atuador insere uma não-linearidade na malha fechada. Conforme citado no capítulo anterior, tal saturação é uma função saturação vetorial descentralizada clássica definida em (1.9).

Um agravante no controle de sistemas com atuadores saturantes é o fato de que a estabilidade assintótica global em malha fechada somente pode ser alcançada caso o sistema em malha aberta seja estável (Lin & Saberi 1993). Do contrário, a convergência das trajetórias dos estados para a origem vai depender da condição inicial do sistema, mesmo se $(A + BK)$ for Schur estável. Assim, a síntese para essa classe de sistemas é baseada na estabilidade local, ou seja, a estabilidade assintótica da origem é garantida apenas para trajetórias originadas em um conjunto de condições iniciais denominado Região de Atração.

O Exemplo 1, retirado de (Tarbouriech et al. 2011) e discretizado com tempo de amostragem $T = 0.01s$, ilustra esse comportamento.

Exemplo 1 *Seja o sistema (2.2) com*

$$A = \begin{bmatrix} 1.0001 & 0.0100 \\ 0.0100 & 1.0001 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -0.0001 \\ -0.0100 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; e \; D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

sujeito à lei de controle 2.3.

A princípio, podemos constatar que o sistema em questão é instável em malha aberta e que um possível ganho estabilizante é dado por

$$K = \begin{bmatrix} 13 & 7 \end{bmatrix}.$$

Entretanto, se é considerada uma saturação no sinal de controle do tipo

$$|v_k| \leq 5, \tag{2.4}$$

pode-se constatar que, para algumas condições iniciais fora da região de atração, a trajetória dos estados não converge para a origem, conforme ilustrado pela Figura 2.1.

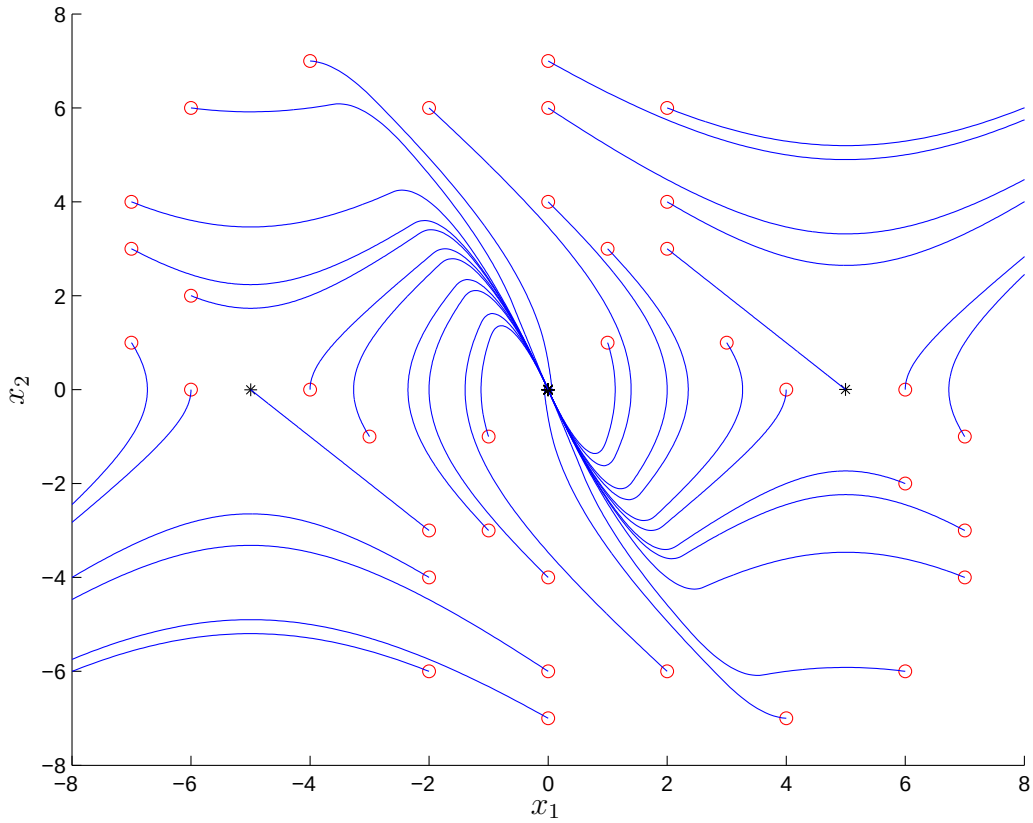


Figura 2.1: Trajetória dos estados para o Exemplo 1. Condições iniciais ($\circ$) e Pontos de equilíbrio ($*$).

A região de atração consiste em um conjunto de condições iniciais para as quais a convergência da trajetória dos estados para a origem é assegurada. Em geral, obter uma forma analítica que caracterize tal região em sua totalidade é praticamente impossível. A Figura 2.2 ilustra as condições iniciais ($|x_1| \leq 32$ e $|x_2| \leq 32$) para o sistema (2.2), sujeito à saturação de atuadores definida por (2.4), para as quais a trajetória dos estados convergem para a origem.

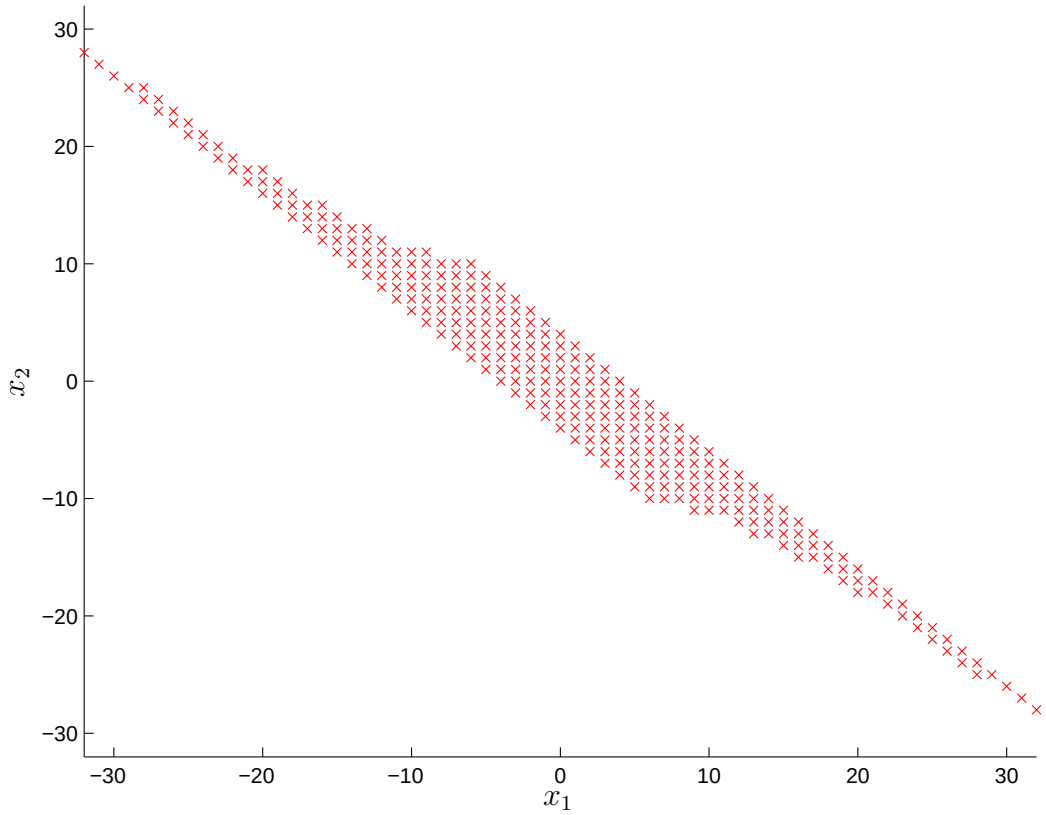


Figura 2.2: Condições iniciais que asseguram a estabilidade do sistema.

Da Figura 2.2 pode-se constatar o grau de complexidade dispendida para obtenção de uma representação analítica para esse conjunto de condições iniciais. Assim, o que se tem feito é buscar estimativas a partir dos conjuntos de níveis associados à função de Lyapunov e, indiretamente, otimizar a região de atração para que esta seja a maior possível. Para isso, várias abordagens são encontradas na literatura.

Em (Jungers & Castelan 2011) os autores tratam um sistema dependente de parâmetros variantes no tempo e com saturação nos atuadores, sendo utilizadas funções de Lyapunov também dependente de parâmetros. Para a lei de controle é utilizado um ganho estático de saída.

Tarbouriech et al. (2011) consideram três abordagens distintas para representar o

sistema (2.2) em malha fechada, quais sejam por modelos politópicos, por regiões de saturação ou por não-linearidades de setor. Tais abordagens, adaptadas para o caso discreto no tempo, são detalhadas mais a frente.

Tais abordagens também são tratadas em (Paim 2003), no qual um sistema contínuo no tempo sem atraso no estado e com saturação no sinal do atuador é investigado. Nesse trabalho, a autora faz uso da teoria de Lyapunov combinado com o Lema de Finsler para introduzir graus de liberdade adicionais às condições de estabilidade. O funcional de Lyapunov utilizada é do tipo independente de parâmetros.

Em todas as abordagens citadas, a determinação da região de atração, isto é, da região em que as condições inciais geram soluções cuja convergência para a origem é garantida, é uma tarefa difícil que quase sempre não possui solução analítica. Neste trabalho é considerada a saturação em amplitude no atuador, sendo ela modelada com auxílio da condição de setor de Lur'e (Khalil & Grizzle 1996).

2.2.1 Representação por Modelos Politópicos

Essa abordagem consiste em reescrever a função saturação, utilizando a lei de controle (2.3), como

$$\texttt{sat}(Kx_k) = \Gamma(\gamma(x_k))Kx_k,$$

em que $\Gamma(\gamma(x_k))$ é uma matriz diagonal cujos elementos $\gamma_{(i)}(x_k)$ são definidos como

$$\gamma_{(i)}(x_k) = \begin{cases} \frac{\overline{u}_{(i)}}{K_{(i)}x_k}, & \text{se } K_{(i)}x_k > \overline{u}_{(i)} \\ 1, & \text{se } \underline{u}_{(i)} \leq K_{(i)}x_k \leq \overline{u}_{(i)} \\ \frac{\underline{u}_{(i)}}{K_{(i)}x_k}, & \text{se } K_{(i)}x_k < \underline{u}_{(i)} \end{cases} \tag{2.5}$$

com o índice $i = 1, \ldots, p$ fazendo referência ao respectivo sinal de entrada e $K_{(i)}$ representando a i-ésima linha de K. Pela definição, podemos constatar que $0 < \gamma_{(i)} \leq 1 \; \forall x_k \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, p$. Dessa forma, temos que o sistema (2.2) é reescrito na forma

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A + B\Gamma(\gamma(x_k))K)\, x_k. \\ y_k &= Cx_k \end{aligned}$$

Considere o vetor γ_ℓ cujos elementos satisfaçam $0 < \gamma_{\ell(i)} \leq 1$ para $i = 1, \ldots, p$. Dessa forma, podemos definir o conjunto poliedral

$$S(K, \underline{u}_\gamma, \overline{u}_\gamma) = \{x \in \mathbb{R}^n : \underline{u}_\gamma \preceq Kx \preceq \overline{u}_\gamma\}, \tag{2.6}$$

com

$$\underline{u}_{\gamma(i)} = \frac{\underline{u}_{(i)}}{\gamma_{l(i)}} \quad \text{e} \quad \overline{u}_{\gamma(i)} = \frac{\overline{u}_{(i)}}{\gamma_{l(i)}},\ i = 1,\ldots,p.$$

Novamente pela definição, temos que $0 < \gamma_{\ell(i)} \leq \gamma_{(i)}(x_k) \leq 1$, com $i = 1,\ldots,p$, é verificada para todo $x_k \in S(K,\underline{u}_\gamma,\overline{u}_\gamma)$.

Associadas ao conjunto $S(K,\underline{u}_\gamma,\overline{u}_\gamma)$, é possível definir $N = 2^p$ matrizes diagonais $\Gamma(\gamma_\ell)$ cujos componentes diagonais assumirão valor 1 ou $\gamma_{l(i)}$. Por exemplo, suponha que o sistema (2.2) possua $p = 2$ sinais de entrada. Dessa forma, teríamos

$$\Gamma_1(\gamma_\ell) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \Gamma_2(\gamma_\ell) = \begin{bmatrix} \gamma_{\ell(1)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$
$$\Gamma_3(\gamma_\ell) = \begin{bmatrix} \gamma_{\ell(1)} & 0 \\ 0 & \gamma_{\ell(2)} \end{bmatrix}; \quad \Gamma_4(\gamma_\ell) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma_{\ell(2)} \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, para cada valor de $x \in S(K,\underline{u}_\gamma,\overline{u}_\gamma)$, a função de saturação $\texttt{sat}(Kx_k)$ pode ser representada como uma combinação convexa dos vetores $\Gamma_i(\gamma_l)Kx_k$, $i = 1,\ldots,2^p$, ou seja, para $N = 2^p$,

$$\texttt{sat}(Kx_k) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \Gamma_i(\gamma_l) K x_k,\ \alpha \in \Xi, \tag{2.7}$$

com

$$\Xi \triangleq \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1 \text{ e } \alpha_i \geq 0, i = 1,\ldots,N \right\}.$$

Por conseguinte, a dinâmica do sistema (2.2), utilizando a lei de controle (2.3), pode ser representada como a combinação convexa de $N = 2^p$ vértices, aqui definidos por $\mathbb{A}_i(\gamma_\ell) = A + B\Gamma_i(\gamma_\ell)K$, $i = 1,\ldots,2^p$, de forma que

$$x_{k+1} = \mathbb{A}(\alpha,\gamma_\ell)x_k = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbb{A}_i(\gamma_\ell) x_k.$$

Note que se A ou B possuem incertezas descritas por um politopo de κ parâmetros incertos, então a formatação apresentada resulta em uma representação com 2^κ vértices.

2.2.2 Representação por Regiões de Saturação

Outra abordagem utilizada para representar sistemas com saturação de atuadores consiste em dividir o espaço de estado em subregiões denominadas regiões de saturação, nas quais o sinal do atuador se comporta de forma linear. Tais subregiões são limitadas pelas fronteiras $K_{(i)}x_k \leq d_{(i)}$ ou $-K_{(i)}x_k \leq d_{(i)}$, em que $K_{(i)}$ representa a i-ésima linha do controlador

K. No caso do sistema (2.2), haverá 3^p regiões de saturação, sendo cada uma delas definidas pelo seguinte conjunto poliedral

$$S(R_j,d_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : R_j x \preceq d_j\}, \tag{2.8}$$

em que d_j é um vetor definido pelas entradas $\overline{u}$, $-\overline{u}$, $\underline{\mathrm{u}}$ e $-\underline{u}$, e R_j é uma matriz formada a partir das linhas de K e de $-K$. O Exemplo 2 facilitará a compreensão do emprego dessas matrizes.

Considere agora um vetor $\eta \in \mathbb{R}^p$ tal que cada elemento $\eta_{(i)}$, $i = 1,\ldots,p$, pode assumir os valores 1, 0 ou -1, de forma que

$$\eta_{(i)} = \begin{cases} 1, & \text{se } K_{(i)}x_k > \overline{u}_{(i)} \\ 0, & \text{se } \underline{u}_{(i)} \leq K_{(i)}x_k \leq \overline{u}_{(i)} \\ -1, & \text{se } K_{(i)}x_k < \underline{u}_{(i)} \end{cases}. \tag{2.9}$$

Associados a cada uma das 3^p regiões de saturação $S(R_j,d_j)$ haverá um vetor η_j, $j = 1,\ldots,3^p$, cada um deles representando uma combinação entre os sinais saturados e não-saturados do atuador. Pode-se constatar que para $\eta_j = \mathbf{0}$, a região de saturação é a própria região $S(K,\underline{u},\overline{u})$ definida em (2.6). Para os demais vetores η_j haverá pelo menos um sinal de controle saturado.

Logo, podemos reescrever a dinâmica do sistema (2.2), sujeito à lei de controle (2.3), da seguinte forma

$$x_{k+1} = \left(A + B\mathtt{diag}(1 - |\eta_{j(i)}|)K\right) x_k + Bu(\eta_j), \tag{2.10}$$

em que, para $j = 1,\ldots,3^p$ e $i = 1,\ldots,p$,

$$u_{(i)}(\eta_j) = \begin{cases} \overline{u}_{(i)} & \text{se } \eta_{j(i)} = 1 \\ 0, & \text{se } \eta_{j(i)} = 0 \\ \underline{u}_{(i)}, & \text{se } \eta_{j(i)} = -1 \end{cases}. \tag{2.11}$$

De forma genérica, se $x_k \in S(R_j,d_j)$, podemos reescrever a equação (2.10) como

$$x_{k+1} = \bar{A}_j x_k + p_j, \tag{2.12}$$

em que $\bar{A}_j = A + B\mathtt{diag}(1 - |\eta_{j(i)}|)K$ e $p_j = Bu(\eta_j)$, $j = 1,\ldots,3^p$.

Dessa forma, a trajetória de estados a cada amostragem k pode ser descrita pelo j-ésimo modelo local correspondente àquela região de saturação, sendo que na fronteira entre duas regiões de saturação os modelos locais são idênticos, podendo haver a comutação entre eles sem que haja saltos na trajetória dos estados.

Para consolidar essa abordagem, considere o Exemplo 2, também retirado de (Tarbouriech et al. 2011) e discretizado com tempo de amostragem $T = 0.01s$.

Exemplo 2 *Seja o sistema (2.2) em que*

$$A = \begin{bmatrix} 1.0010 & -0.0010 \\ 0.0010 & 0.9704 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0.0500 & 0 \\ 0 & 0.0099 \end{bmatrix};$$

$$K = \begin{bmatrix} -0.7156 & -0.0321 \\ -0.0138 & -1.3290 \end{bmatrix}; \qquad \bar{u} = -\underline{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Como o sistema possui $p = 2$ sinais de controle, serão definidas $3^p = 9$ regiões de saturação. Entretanto, devido ao fato do conjunto poliedral $S(R_j,d_j)$ ser simétrico ($\bar{u} = -\underline{u}$), será necessário analisar apenas 5 dessas regiões de saturação ($\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$, $\mathcal{R}_4$ e $\mathcal{R}_5$), sendo as demais ($\mathcal{R}_{-2}$, $\mathcal{R}_{-3}$, $\mathcal{R}_{-4}$ e $\mathcal{R}_{-5}$) calculadas por meio da multiplicação das matrizes $\bar{A}_j$ e R_j por -1, $j = 1, \ldots, 3^p$.

Região 1) $\eta_1 = \mathbf{0}$ (Região de Linearidade)

$$\bar{A}_1 = A + BK = \begin{bmatrix} 0.9652 & -0.0026 \\ 0.0008 & 0.9574 \end{bmatrix}; \quad p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} K \\ -K \end{bmatrix}; \qquad d_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Região 2) $\eta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0.9652 & -0.0026 \\ 0.0010 & 0.9704 \end{bmatrix}; \quad p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix};$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} -0.7156 & -0.0321 \\ 0.7156 & 0.0321 \\ -0.0138 & -1.3290 \end{bmatrix}; \quad d_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Região 3) $\eta_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\bar{A}_3 = \begin{bmatrix} 1.0010 & -0.0010 \\ 0.0010 & 0.9704 \end{bmatrix}; \quad p_3 = \begin{bmatrix} -25 \\ -2 \end{bmatrix};$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} -0.7156 & -0.0321 \\ -0.0138 & -1.3290 \end{bmatrix}; \quad d_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Região 4) $\eta_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\bar{A}_4 = \begin{bmatrix} 1.0010 & -0.0010 \\ 0.0008 & 0.9574 \end{bmatrix}; \quad p_4 = \begin{bmatrix} -25 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$R_4 = \begin{bmatrix} -0.7156 & -0.0321 \\ -0.0138 & -1.3290 \\ 0.0138 & 1.3290 \end{bmatrix}; \quad d_4 = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Região 5) $\eta_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\bar{A}_5 = \begin{bmatrix} 1.0010 & -0.0010 \\ 0.0010 & 0.9704 \end{bmatrix}; \quad p_5 = \begin{bmatrix} 25 \\ -2 \end{bmatrix};$$

$$R_5 = \begin{bmatrix} -0.7156 & -0.0321 \\ -0.0138 & -1.3290 \end{bmatrix}; \quad d_5 = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

A Figura (2.3) descreve as cinco regiões supracitadas.

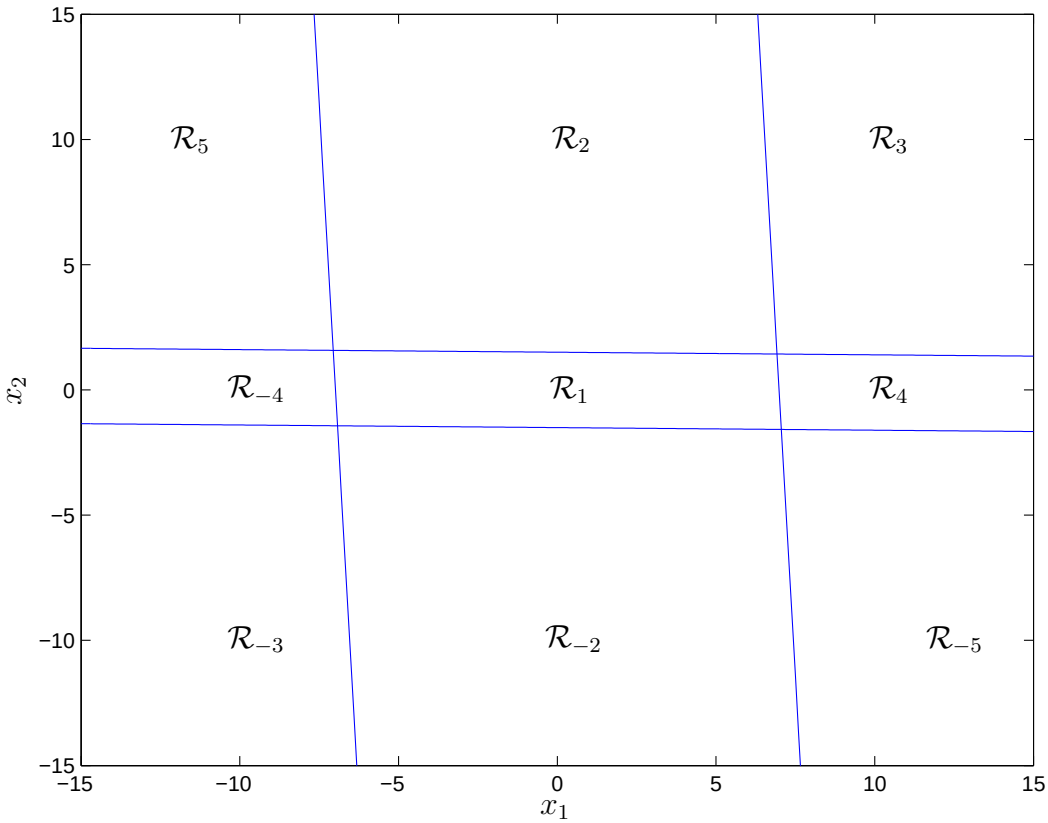


Figura 2.3: Regiões de Saturação para o Exemplo 2.

2.2.3 Representação por Não-Linearidades de Setor

Uma última abordagem citada por Tarbouriech et al. (2011) se baseia em tratar o sistema (2.2) como um problema de Lur'e. Para isso, detalhemos a função saturação vetorial descentralizada clássica, definida por

$$\mathtt{sat}(v_{(i)k}) = \begin{cases} \bar{u}_{(i)}, & \text{se } v_{(i)k} > \bar{u}_{(i)} \\ v_{(i)k}, & \text{se } \underline{u}_{(i)} \leq v_{(i)k} \leq \bar{u}_{(i)} \\ \underline{u}_{(i)}, & \text{se } v_{(i)k} < \underline{u}_{(i)} \end{cases}, \tag{2.13}$$

com $i = 1, \ldots, p$, em que os índices (i) indicam a qual atuador se refere o sinal de controle, enquanto $\underline{u}$ e $\bar{u}$ representam, respectivamente, os valores mínimo e máximo desse sinal.

Um ponto importante é destacar a diferença entre u_k, que é o sinal de controle real aplicado ao sistema pelo atuador (com saturação: $\underline{u}_{(i)} \leq u_{k(i)} \leq \bar{u}_{(i)}$), e v_k, que é o sinal de controle calculado pelo controlador (sem saturação).

Outro conceito muito utilizado na saturação do sinal de controle é o da função Zona Morta, enunciada a seguir.

Definição 3 (Zona Morta, $\Psi(v_k)$) *A Zona Morta de um sinal saturado é definida por* $\Psi(v_k) = v_k - \mathtt{sat}(v_k)$*, ou seja,* $\Psi(v_k) = \begin{bmatrix}\psi(v_{k_{(1)}}) & \cdots & \psi(v_{k_{(p)}})\end{bmatrix}^T$*, em que*

$$\psi(v_{k(i)}) = \begin{cases} v_{k(i)} - \bar{u}_{(i)}, & se\ v_{k(i)} > \bar{u}_{(i)} \\ 0, & se\ \underline{u}_{(i)} \leq v_{k(i)} \leq \bar{u}_{(i)} \\ v_{k(i)} - \underline{u}_{(i)}, & se\ v_{k(i)} < \underline{u}_{(i)} \end{cases},$$

para $i = 1, \ldots, p$.

A Figura 2.4(a) ilustra a função de saturação do sinal de controle, enquanto a Figura 2.4(b) ilustra a respectiva Zona Morta. Por meio do segmento de reta $\rho_{(i)} v_{k(i)}$ $(-*)$ temos que

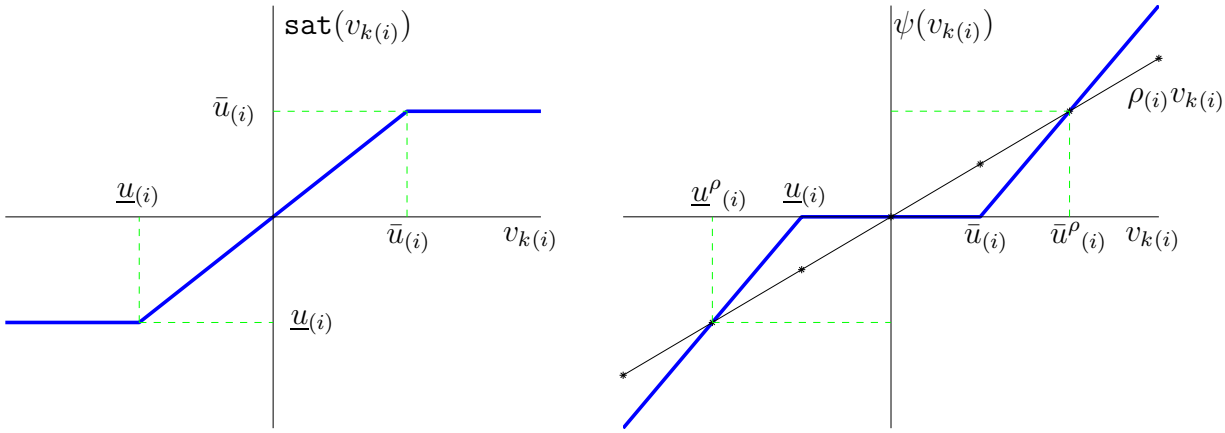
$$\underline{u}^{\rho}{}_{(i)} = \frac{\underline{u}_{(i)}}{1 - \rho_{(i)}} \text{ e } \bar{u}^{\rho}{}_{(i)} = \frac{\bar{u}_{(i)}}{1 - \rho_{(i)}},$$

com $i = 1, \ldots, p$.

Lançando mão novamente da lei de controle (2.3), podemos estabelecer um novo conjunto poliedral que irá definir a não linearidade para o setor $\rho_{(i)} \in [0,1[$, $i = 1, \ldots, p$, qual seja

$$S(K, \underline{u}^{\rho}, \bar{u}^{\rho}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \underline{u}^{\rho} \leq Kx \leq \bar{u}^{\rho}\}. \tag{2.14}$$

Note que para $\rho_{(i)} = 0$ esse conjunto poliedral corresponde à região de linearidade da função de saturação.



(a) Função de saturação. (b) Zona Morta.

Figura 2.4: Função de saturação e Zona Morta.

Uma forma matemática de se testar se uma função pertence ao setor definido por $S(K,\underline{u}^{\rho},\bar{u}^{\rho})$ é a condição clássica de setor, enunciada a seguir.

Definição 4 (Condição Clássica de Setor) *Para todo $x_k \in S(K,\underline{u}^{\rho},\bar{u}^{\rho})$, a não linearidade $\psi(v_k)$ satisfaz a seguinte condição*

$$\psi(v_k)^T T(\psi(v_k) - \Lambda K x_k) \leq 0,$$

para alguma matriz $T \in \mathbb{R}^{p\times p}$ diagonal definida positiva e Λ diagonal com $\Lambda_{(i,i)} = \rho_{(i)}$, $i = 1,\ldots,p$.

Em (Gomes da Silva Jr. & Tarbouriech 2005) é proposto um aprimoramento da condição clássica de setor denominada condição generalizada de setor, a qual é enunciada a seguir.

Lema 1 (Condição Generalizada de Setor) *Para todo $x_k \in S(K-G,\underline{u}^{\rho},\bar{u}^{\rho}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \underline{u}^{\rho} \preceq (G-K)x \preceq \bar{u}^{\rho}\}$, a não linearidade $\psi(v_k)$ satisfaz a seguinte condição*

$$\psi(v_k)^T T(\psi(v_k) - G x_k) \leq 0,$$

para alguma matriz $T \in \mathbb{R}^{p\times p}$ diagonal definida positiva e uma matriz $G \in \mathbb{R}^{p\times n}$.

Gomes da Silva Jr. & Tarbouriech (2005) utilizam um funcional de Lyapunov independente de parâmetros tradicionalmente utilizado na literatura, qual seja

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t),$$

com P simétrica e definida positiva. Tal contribuição possibilitou tratar casos em que se permite a saturação no sinal de controle, a qual é levada em conta de forma explícita na etapa de síntese do controlador.

2.2.4 Saturação nos atuadores e Atraso no estado

No caso de sistemas com atraso no estado e saturação nos atuadores, a extensão das abordagens citadas na Subseção 2.2 não é óbvia, pois uma diferença fundamental está na caracterização das condições iniciais que envolvem estados atrasados. Essa dificuldade obriga uma caracterização mais geral do espaço de condições iniciais, aumentando a complexidade dos problemas de análise de estabilidade e de projeto de controladores.

Como visto no início deste capítulo, há poucos trabalhos sobre saturação em sistemas discretos no tempo com atraso no estado. Pode-se citar (Xu et al. 2012), no qual é investigada a estabilização robusta de sistemas discretos no tempo com atraso no estado e saturação no atuador. A função de Lyapunov utilizado também é do tipo apresentado em (2.1), ou seja, independente de parâmetros. Mais uma vez é utilizada a realimentação estática de estados a qual realimenta apenas o estado atual.

Outro ponto importante abordado no presente trabalho é a limitação da taxa de variação do atraso. Nessa abordagem, considera-se que o atraso possui uma variação máxima de até $\Delta\tau_{\max}$ entre duas amostragens consecutivas, ou seja,

$$|\tau_{k+1} - \tau_k| \leq \Delta\tau_{\max}.$$

Na literatura é possível encontrar trabalhos que abordem a faixa de variação do atraso para sistemas discreto no tempo, entretanto, condições que levam em conta uma taxa de variação limitada para o atraso não foram localizadas nas buscas realizadas.

2.3 Incertezas

Quando se modela um sistema físico, muitos dos parâmetros não são conhecidas de maneira exata ou então não são fixos durante todo o período de funcionamento do sistema. Assim, faz-se necessário utilizar técnicas de controle robusto, ou seja, tratar as incertezas do modelo relacionado ao sistema real. A título de exemplificação, considere o seguinte sistema, adaptado de (de Oliveira 2015).

$$x_{k+1} = Ax_k, \tag{2.15}$$

em que

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} a & 5 \\ 5 & b \end{bmatrix} \text{ e } x_k = \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix}.$$

Durante o levantamento do modelo desse sistema, foram verificados vários valores distintos para a e b, de forma que $\underline{a} < a < \bar{a}$ e $\underline{b} < b < \bar{b}$. Portanto, a matriz A do sistema (2.15) é incerta e pode ser representada por uma combinação convexa de $N = 2^{\wp}$ vértices, em que $\wp$ é o número de parâmetros incertos independentes. A essa combinação convexa é dado o nome de Politopo, cuja definição, retirada de (Boyd, Ghaoui, Feron & Balakrishnan 1994), é apresentada a seguir.

Definição 5 (Politopo) *É uma interseção de subespaços, formando um conjunto convexo limitado por seus vértices.*

Como a matriz A possui 2 parâmetros incertos a e b, tem-se que o politopo será composto por $N = 2^2 = 4$ vértices. Assim, a matriz A passará a ser representada por $A(\alpha)$, em que $\alpha \in \Xi$, conforme equação (1.7).

Desta forma, pode-se escrever

$$A(\alpha) = A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3 + A_4\alpha_4,$$

em que

$$A_1 = \begin{bmatrix} \underline{a} & 5 \\ 5 & \underline{b} \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} \underline{a} & 5 \\ 5 & \bar{b} \end{bmatrix}, \; A_3 = \begin{bmatrix} \bar{a} & 5 \\ 5 & \underline{b} \end{bmatrix} \text{ e } A_4 = \begin{bmatrix} \bar{a} & 5 \\ 5 & \bar{b} \end{bmatrix}.$$

2.4 Estabilidade

O conceito de estabilidade está diretamente relacionado à energia do sistema. Quando a energia do sistema decai assintoticamente, a trajetória do estado converge assintoticamente para a origem.

A princípio, considere a classe de sistemas livres de atrasos dada por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k, \\ y_k &= Cx_k. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Uma metodologia muito utilizada para se avaliar a estabilidade assintótica do sistema (2.16) é o Segundo Método de Lyapunov, apresentado no teorema a seguir e que foi adaptado de (de Oliveira 2015).

Teorema 1 *(Teorema de Lyapunov) O sistema (2.16) é dito globalmente assintoticamente estável se e somente se existir uma função real $V(x_k)$, denominada função de Lyapunov, tal que:*

i) $V(x_k) > 0 \; \forall x_k \neq \mathbf{0}$ *e* $V(x_k) = 0 \Leftrightarrow x_k = \mathbf{0}$,

ii) $V(x_k) \to \infty$ *quando* $\|x_k\| \to \infty$, *e*

iii) $\Delta V(x_k) = V(x_{k+1}) - V(x_k) < 0 \; \forall x_k \neq \mathbf{0}$ *e* $\Delta V(x_k) = 0 \Leftrightarrow x_k = \mathbf{0}$.

Uma interpretação para a função de Lyapunov $V(x_k)$ é que ela representa o quantitativo de energia do sistema em relação a seu ponto de equilíbrio, sendo que nesse ponto a função de energia $V(x_k)$ assume valor nulo. A estabilidade do sistema está associada ao decaimento de $V(x_k)$ ao longo do tempo. Assim, com o decaimento assintótico de $V(x_k)$, as variáveis de estado convergem, também de forma assintótica, para um ponto de equilíbrio. Uma escolha possível para a função de Lyapunov é dada por

$$V(x_k) = x_k^T P x_k, \tag{2.17}$$

com $P = P^T > 0$ e $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, o que atende aos dois primeiros requisitos citados no Teorema 1. O último requisito desse teorema é satisfeito se

$$\Delta V(x_k) = V(x_{k+1}) - V(x_k) < 0. \tag{2.18}$$

Substituindo x_{k+1} da equação (2.16) na equação (2.17), temos

$$\begin{aligned} \Delta V(x_k) &= (Ax_k)^T P (Ax_k) - x_k^T P x_k < 0 \\ &= x_k^T A^T P A x_k - x_k^T P x_k < 0 \\ &= x_k^T [A^T P A - P] x_k < 0. \end{aligned}$$

Logo, para garantir a estabilidade do sistema, temos que

$$A^T P A - P < 0, \text{ com } P > 0.$$

Manipulando a equação acima, temos

$$P - A^T P P^{-1} P A > 0. \tag{2.19}$$

Aplicando o Complemento de Schur (Vide Apêndice A) à inequação (2.19), chegamos a

$$\begin{bmatrix} P & A^T P \\ \star & P \end{bmatrix} > 0. \tag{2.20}$$

Dessa forma, podemos reescrever o Teorema 1, para o caso de sistemas discretos no tempo, da seguinte forma:

Teorema 2 *(Teorema de Lyapunov - Caso discreto no tempo) O sistema linear e discreto no tempo (2.16) é dito globalmente assintoticamente estável se e somente se existir uma matriz $P = P^T > 0$ tal que a desigualdade matricial (2.20) é satisfeita.*

Considere agora que o sistema (2.16) esteja sujeito ao atraso τ_k incerto, ou seja

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + A_d x_{k-\tau_k}, \\ y_k &= Cx_k \end{aligned} \tag{2.21}$$

com $1 \leq \tau_k \leq \bar{\tau}$ e a sequência de condições iniciais dada por $\varphi_{\bar{\tau},0} = \{x_{-\bar{\tau}}, x_{-\bar{\tau}+1}, \ldots, x_0\}$. Uma abordagem muito comum na literatura para análise da estabilidade dessa classe sistemas é o método de Lyapunov-Krasovskii, enunciado no teorema a seguir, adaptado de (Stojanovic, Debeljkovic & Mladenovic 2007).

Teorema 3 *(Teorema de Lyapunov-Krasovskii) O sistema (2.21) é dito globalmente assintoticamente estável se existir uma função real $V(x_k)$, denominada função de Lyapunov-Krasovskii, e funções não-decrescentes s e $w : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, com $s(0) = w(0) = 0$, $s(k) > 0$ e $w(k) > 0$ $\forall k > 0$, tal que:*

i) $0 < V(x_k) < s(\|x_k\|_{\mathbb{D}})$ $\forall x_k \neq \mathbf{0}$ *e* $V(x_k) = 0 \Leftrightarrow x_k = \mathbf{0}$, *e*

ii) $\Delta V(x_k) = V(x_{k+1}) - V(x_k) < -w(\|x_k\|_{\mathbb{D}})$ $\forall x_k \neq \mathbf{0}$ *e* $\Delta V(x_k) = 0 \Leftrightarrow x_k = \mathbf{0}$,

$\forall x_k \in \mathbb{D}$, *sendo $\mathbb{D}$ o espaço de funções que mapeam um intervalo discreto em $\mathbb{R}^n$.*

Assim, uma condição suficiente (mas não necessária) para a estabilidade do sistema pode ser obtida independentemente do valor do atraso τ_k. Para tanto, considere a seguinte candidata à função de Lyapunov-Krasovskii (L-K) (de Oliveira 2015)

$$V(x_k) = x_k^T P x_k + \sum_{j=-1}^{-\bar{\tau}} x_{k+j}^T S x_{k+j}.$$

Logo, temos que o sistema (2.16) será estável se existir $P > 0$ e $S > 0$ tal que

$$\Delta V(x_k) = V(x_{k+1}) - V(x_k) < 0,$$

ou ainda,

$$\Delta V(x_k) = x_{k+1}^T P x_{k+1} - x_{k-\bar{\tau}}^T S x_{k-\bar{\tau}} + x_k^T (S-P) x_k < 0. \tag{2.22}$$

Utilizando o Lema de Finsler (Vide Apêndice A), a verificação de (2.22) sujeito a (2.16) é equivalente à condição $i)$ do lema de Finsler. Com ω_k, $Q(\alpha)$ e $\mathcal{B}(\alpha)$ escolhidos como:

$$\omega_k = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k \\ x_{k-\tau_k} \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ \star & S-P & 0 \\ \star & \star & -S \end{bmatrix} \text{ e } \mathcal{B} = \begin{bmatrix} -I & A & A_d \end{bmatrix},$$

temos que a afirmativa $i)$ do Lema de Finsler satisfaz $\Delta V(x_k) < 0$ (descrita pela equação (2.22)) para o sistema (2.16). Sendo assim, da afirmativa $iv)$ do mesmo lema, caso exista uma matriz $\mathcal{X}$ a qual pode ser reescrita como

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} F \\ G \\ H \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n \times n},$$

o sistema será estável. Uma condição suficiente independente do atraso (e portanto conservadora) para a estabilidade do sistema, pode ser dada por

$$\begin{bmatrix} P - F - F^T & FA - G^T & FA_d - H^T \\ \star & S - P + GA + A^T G^T & GA_d + A^T H^T \\ \star & \star & HA_d + A_d^T H^T - S \end{bmatrix} < 0, \tag{2.23}$$

Essa condição garante a estabilidade do sistema para qualquer valor finito de atraso invariante no tempo.

Conforme já dito, neste trabalho propõe-se obter uma condição de análise para sistemas com atraso variante no tempo, ou seja, sistemas em que τ_k assume um valor distinto a cada amostra k, e que esteja sujeito a saturação de atuador.

Outra questão inerente à estabilidade são as condições iniciais do sistema. Niculescu et al. (1996) afirmam que um sistema é dito globalmente assintoticamente estável se para toda condição inicial as respectivas trajetórias convergem para a origem. Nesse contexto, surgem duas vertentes: a estabilidade global e a estabilidade local. A estabilidade global abrange toda e qualquer condição inicial $x(0) \in \mathbb{R}^n$, enquanto a estabilidade local é assegurada para um subconjundo de $\mathbb{R}^n$ que contenha a origem, caracterizando o conjunto de estados iniciais admissíveis. Aqui, esse conjunto pode ser caracterizado por uma sequência $\varphi_{\bar{\tau},k}$.

Conforme já citado na subseção 2.2, para o caso de sistemas com saturação nos atuadores a estabilidade global somente é possível se o sistema em malha aberta for estável.

Caso contrário, deve-se investigar a estabilidade local para um conjunto de condições iniciais $\varphi_{\bar{\tau},k}$. Em geral, deseja-se que esse conjunto seja o maior possível.

2.5 Desempenho

O desempenho do sistema pode ser otimizado por meio de índices de desempenho, tais como $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$, IAE, dentre outros. Neste trabalho é utilizada a λ-contratividade como índice de desempenho temporal.

A λ-contratividade é um índice de desempenho relacionado ao decaimento da função de energia do sistema, ou seja, a variação da função de energia $V(x_k)$ é limitada por um fator $\lambda \in]0,1]$. Assim, segue a definição adaptada de (Corso 2009).

Definição 6 (λ-contratividade) *O sistema (2.16) é dito λ-contrativo, com relação às trajetórias do sistema, se existir uma função de Lyapunov $V(x_k)$ que verifique*

$$\triangle_\lambda V(x_k) = V(x_{k+1}) - \lambda V(x_k) < 0, \tag{2.24}$$

para $\lambda \in]0,1]$.

Note que $\triangle V(x_k)$, dada pela equação (2.18), é um caso particular de $\triangle_\lambda V(x_k)$ no qual $\lambda = 1$. Assim, uma condição de estabilidade para sistemas livres de atraso mais geral do que a proposta na equação (2.20) é dada por

$$\begin{bmatrix} \lambda P & A^T P \\ \star & P \end{bmatrix} > 0, \tag{2.25}$$

em que $1 - \lambda$, com $\lambda \in]0,1]$, é a taxa de decaimento mínima assegurada entre as amostragens, ou seja, a taxa de decaimento mínima assegurada será tão maior quanto menor for o fator λ.

Da equação (2.24), pode-se evidenciar a restrição que a λ-contratividade impõe ao decaimento da função de energia, qual seja

$$\mathcal{F}(V(\cdot)) = \frac{V(x_{k+1})}{V(x_k)} < \lambda. \tag{2.26}$$

Corso, Castelan, Moreno & De Pieri (2009) demonstram que o volume da região de condições iniciais admissíveis ($\varphi_{\bar{\tau},k}$) é reduzido à medida em que se diminui o fator λ.

2.6 Problemas de Síntese de Controlador

Considere o sistema a seguir

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + A_d x_{k-\tau_k} + Bv_k, \\ y_k &= Cx_k \end{aligned} \tag{2.27}$$

com $\underline{\tau} \leq \tau_k \leq \bar{\tau}$.

A lei de controle v_k pode ser projetada de várias maneiras, seja por realimentação dinâmica, por realimentação estática de saída ($v_k = Ky_k$) ou por realimentação estática de estado ($v_k = Kx_k$), sendo esta última utilizada neste trabalho.

Leite & Miranda (2008) utilizam uma lei de controle por realimentação estática de estados do tipo

$$v_k = Kx_k + K_d x_{k-\tau_k}. \tag{2.28}$$

Utilizando essa lei de controle, temos que a equação dinâmica do sistema (2.27) pode ser reescrita como

$$x_{k+1} = \tilde{A}x_k + \tilde{A}_d x_{k-\tau_k}, \tag{2.29}$$

em que

$$\tilde{A} = A + BK \text{ e } \tilde{A}_d = A_d + BK_d.$$

Note que a equação (2.29) possue a mesma estrutura da equação dinâmica do sistema (2.21) discutido na Seção 2.4. Os autores utilizam, ainda, uma candidata à função de L-K dada por

$$V(x_k) = \sum_{v=1}^{3} V_v(x_k) > 0,$$

em que

$$V_1(x_k) = x_k^T P x_k,$$

$$V_2(x_k) = \sum_{j=k-\tau_k}^{k-1} x_j^T S x_j, \text{ e}$$

$$V_3(x_k) = \sum_{=2-\bar{\tau}}^{\underline{\tau}} \sum_{j=k+-1}^{k-1} x_j^T S x_j.$$

Dessa forma, é proposta uma condição independente do atraso que garante a estabilidade do sistema para qualquer atraso $\tau_k \in [1,\bar{\tau}]$.

Apesar da condição proposta em (Leite & Miranda 2008) ser independente do atraso, tal abordagem exige o conhecimento prévio do atraso a cada amostragem, ou seja, em tempo real, o que representa uma exigência a mais para o controle de determinados sistemas.

Neste trabalho são propostas leis de controle independentes do atraso que são obtidas a partir de condições dependentes do atraso.

2.7 Comentários Finais

Neste capítulo foi feita uma revisão bibliográfica abordando os principais problemas investigados neste trabalho. Foi discutida a dificuldade em se aplicar as técnicas utilizadas em sistemas com saturação nos atuadores em sistemas com atraso no estado, ocasião em que é proposta uma nova abordagem do problema para sistemas dessa classe.

Capítulo 3

Saturação de atuador em sistemas com atrasos

Neste capítulo é apresentado um estudo para tratar a saturação em sistemas com atrasos. O sistema com atraso é representado por um sistema chaveado pelo atraso. A função de saturação é descrita a partir da zona morta e a condição de setor é utilizada para tratar a síntese de controladores que assegurem a estabilidade local. São tratados os casos precisamente conhecidos e com incertezas politópicas nas matrizes dinâmicas do sistema. Uma nova caracterização da região de atração é proposta, sendo discutido, também, o problema de otimização utilizado.

3.1 Sistemas com Atraso e Saturação

Seja o sistema discreto no tempo sujeito a atraso nos estados e saturação no sinal de controle dado por:

$$\Omega : \left\{ \begin{array}{c} x_{k+1} = A(\alpha)x_k + A_d(\alpha)x_{k-\tau_k} + B(\alpha)\mathtt{sat}(v_k) \\ y_k = C(\alpha)x_k \end{array} \right. , \tag{3.1}$$

sujeito à condição inicial $\varphi_{\bar{\tau},0} = \{x_{-\bar{\tau}},x_{-\bar{\tau}+1},\ldots,x_0\}$. Nesse sistema, $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado no instante k, v_k é o sinal de controle no instante k, $\mathtt{sat}(v_k)$ é uma função saturação vetorial descentralizada clássica, conforme descrita em (2.13), e τ_k é o atraso no instante k contido no conjunto $\{1,2,\ldots,\bar{\tau}\}$. As matrizes $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_d(\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times p}$ e $C(\alpha) \in \mathbb{R}^{q\times n}$ são incertas e pertencentes a um conjunto politópico dado pela combinação convexa de N vértices conhecidos, de forma que

$$(A,A_d,B,C_i)(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(A_i,A_{di},B_i,C_i), \tag{3.2}$$

em que α é um vetor de parâmetros invariantes no tempo e pertencente ao simplex unitário

$$\Xi \triangleq \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1 \text{ e } \alpha_i \geq 0, i = 1, \ldots, N \right\}. \tag{3.3}$$

Conforme mencionado na Seção 2.2, o termo $\texttt{sat}(v_k)$ insere uma não-linearidade no sistema (3.1), podendo levá-lo à instabilidade. Portanto, a síntese da lei de controle por meio de técnicas convencionais (lineares) coloca em risco o desempenho do sistema. Neste trabalho são investigadas três leis de controle distintas, todas por realimentação estática de estados e independentes do atraso, quais sejam:

$$v_k = K_0 x_k \tag{3.4a}$$

$$v_k = K_0 x_k + K_{\bar{\tau}} x_{k-\bar{\tau}} \tag{3.4b}$$

$$v_k = \sum_{i=0}^{\bar{\tau}} K_i x_{k-i}, \tag{3.4c}$$

com $K_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$,$i = 1, \ldots, \bar{\tau}$. Essas leis de controle, as quais independem do conhecimento prévio do valor do atraso a cada instante, podem ser reescritas como

$$v_k = \mathbb{K} \bar{x}_k, \tag{3.5}$$

em que $\mathbb{K} \in \mathbb{R}^{p \times (\bar{\tau}+1)n}$ é a matriz de ganho estático que assume, respectivamente, as estruturas

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} K_0 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{3.6a}$$

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} K_0 & \mathbf{0} & \cdots & K_{\bar{\tau}} \end{bmatrix} \tag{3.6b}$$

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} K_0 & K_1 & \cdots & K_{\bar{\tau}} \end{bmatrix}, \tag{3.6c}$$

e o vetor aumentado de estado, $\bar{x}_k \in \mathbb{R}^{(\bar{\tau}+1)n}$, é dado por

$$\bar{x}_k = \begin{bmatrix} x_k^T & x_{k-1}^T & \cdots & x_{k-\bar{\tau}}^T \end{bmatrix}^T. \tag{3.7}$$

3.2 O Problema

Devido à saturação do atuador, a estabilidade assintótica global do sistema em malha fechada somente pode ser alcançada caso o sistema em malha aberta seja estável (Lin & Saberi 1993). Do contrário, é necessário investigar a estabilidade local, ou seja, a estabilidade assintótica do sistema é garantida apenas para trajetórias originadas em um conjunto de condições iniciais que inclui a origem. Nesse caso, é necessário que a sequência (ou seus elementos)

$\varphi_{\bar{\tau},0}$ pertença a um conjunto de condições inciais admissíveis, o que é proposto no Problema 1. Em geral, deseja-se que esse conjunto de condições iniciais seja o maior possível, ocasião em que se apresenta o Problema 2.

Conforme proposto por Hetel et al. (2008), o sistema com atrasos variantes no tempo (3.1) pode ser descrito como um sistema aumentado livre de atrasos e chaveado pelo valor do atraso com auxílio do vetor aumentado de estados (3.7):

$$\bar{x}_{k+1} = \Lambda(\alpha,\tau_k)\bar{x}_k + \mathbb{B}(\alpha)\mathtt{sat}(v_k), \tag{3.8}$$

em que

$$\Lambda(\alpha,\tau_k) = \left[\begin{array}{cccc|c} A(\alpha) & \Sigma_1(\alpha,\tau_k) & \cdots & \Sigma_{\bar{\tau}-1}(\alpha,\tau_k) & \Sigma_{\bar{\tau}}(\alpha,\tau_k) \\ \hline & & \mathbf{I}_{n\bar{\tau}} & & \mathbf{0}_{n\bar{\tau}\times n} \end{array}\right], \tag{3.9}$$

com

$$\Sigma_i(\alpha,\tau_k) = \begin{cases} A_d(\alpha), & i = \tau_k \\ \mathbf{0}_{n\times n}, & i \neq \tau_k \end{cases} \quad \forall i = 1,\ldots,\bar{\tau},$$

e

$$\mathbb{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} B(\alpha) \\ \mathbf{0}_{n\bar{\tau}\times p} \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

Note que, devido à saturação do sinal de controle v_k, o sinal $u_k = \mathtt{sat}(v_k)$ efetivamente aplicado ao sistema (3.1) pertence, a cada instante de tempo, a um conjunto poliedral $\mathbb{S}(\underline{u},\bar{u})$ dado por

$$\mathbb{S}(\underline{u},\bar{u}) = \{u_k \in \mathbb{R}^p : \underline{u}_{(i)} \leq u_{(i)k} \leq \bar{u}_{(i)},\ \forall i = 1,\ldots,p\}, \tag{3.11}$$

em que $\underline{u}_{(i)}$ e $\bar{u}_{(i)}$ correspondem aos valores mínimos e máximos para cada uma das entradas $i = 1,\ldots,p$.

Assim, o conjunto de estados para os quais os sinais de controle $u_{(i)k}$ não saturam é chamado de região linear do modelo e pode ser definido pelo conjunto poliedral $\mathbb{S}_L(\mathbb{K},\underline{u},\bar{u})$ dado por

$$\mathbb{S}_L(\mathbb{K},\underline{u},\bar{u}) = \{\bar{x}_k \in \mathbb{R}^{n(\bar{\tau}+1)} : \underline{u}_{(i)} \leq \mathbb{K}_{(i)}\bar{x}_k \leq \bar{u}_{(i)},\ \forall i = 1,\ldots,p\}, \tag{3.12}$$

em que $\mathbb{K}_{(i)}$ representa a i-ésima linha de $\mathbb{K}$. Nesse conjunto poliedral $\mathbb{S}_L$, o sistema (3.8) admite um modelo local linear. Com isso, se $\bar{x}_k \in \mathbb{S}_L(\mathbb{K},\underline{u},\bar{u})$, então $\bar{x}_{k+1}$ pode ser calculado por

$$\bar{x}_{k+1} = \Lambda(\alpha,\tau_k)\bar{x}_k + \mathbb{B}(\alpha)v_k. \tag{3.13}$$

Entretanto, o fato de $\bar{x}_k \in \mathbb{S}_L(\mathbb{K},\underline{u},\bar{u})$ não assegura que $\bar{x}_{k+1}$ também estará nesse conjunto. Portanto, ainda que (3.13) seja schur-estável, são necessárias condições adicionais para garantir que a trajetória de estados iniciada em $\mathbb{S}_L(\mathbb{K},\underline{u},\bar{u})$ convirja para a origem.

Considere a lei de controle (3.5)-(3.6) aplicada ao sistema (3.8), de forma que

$$\bar{x}_{k+1} = \Lambda(\alpha,\tau_k)\bar{x}_k + \mathbb{B}(\alpha)\mathtt{sat}(\mathbb{K}\bar{x}_k).$$

Somando e subtraindo $\mathbb{B}(\alpha)\mathbb{K}\bar{x}_k$ no segundo termo da equação acima, tem-se

$$\bar{x}_{k+1} = \Lambda(\alpha,\tau)\bar{x}_k + \mathbb{B}(\alpha)\mathtt{sat}(\mathbb{K}\bar{x}_k) + \mathbb{B}(\alpha)\mathbb{K}\bar{x}_k - \mathbb{B}(\alpha)\mathbb{K}\bar{x}_k,$$

ou ainda

$$\bar{x}_{k+1} = (\Lambda(\alpha,\tau) + \mathbb{B}(\alpha)\mathbb{K})\bar{x}_k - \mathbb{B}(\alpha)(\mathbb{K}\bar{x}_k - \mathtt{sat}(\mathbb{K}\bar{x}_k)). \tag{3.14}$$

Utilizando o conceito de zona morta, descrito na Definição 3 (Vide Subseção 2.2.3), temos que

$$\Psi(v_k) = \Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k) = \mathbb{K}\bar{x}_k - \mathtt{sat}(\mathbb{K}\bar{x}_k),$$

o qual, substituído em (3.14), resulta em

$$\bar{x}_{k+1} = \big(\Lambda(\alpha,\tau_k) + \mathbb{B}(\alpha)\mathbb{K}\big)\bar{x}_k - \mathbb{B}(\alpha)\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k).$$

Para simplificar a notação, façamos

$$\tilde{\Lambda}(\alpha,\tau_k) = \Lambda(\alpha,\tau_k) + \mathbb{B}(\alpha)\mathbb{K}, \tag{3.15}$$

ficando o sistema (3.8) em malha fechada com (3.5)-(3.6) expresso como

$$\bar{x}_{k+1} = \tilde{\Lambda}(\alpha,\tau_k)\bar{x}_k - \mathbb{B}(\alpha)\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k). \tag{3.16}$$

A condição generalizada de setor, proposta em (Gomes da Silva Jr. & Tarbouriech 2005) e enunciada no Lema 1, é utilizada para a obtenção dos resultados principais deste trabalho. Assim, se $\bar{x}_k \in \mathbb{S}$, com

$$\mathbb{S} \triangleq \left\{\bar{x}_k \in \mathbb{R}^{(\bar{\tau}+1)n} : \left|(\mathbb{K}_{(\ell)} - G_{(\ell)})\bar{x}_k\right| \leq v_{0(\ell)}\right\}, \tag{3.17}$$

$\bar{v}_{(\ell)} = -\underline{v}_{(\ell)} = v_{0(\ell)} > 0$, $l = 1,\ldots,p$, e $G \in \mathbb{R}^{p\times(\bar{\tau}+1)n}$, então a relação

$$\Psi(\mathbb{K}_{(\ell)}\bar{x}_k)^T T[\Psi(\mathbb{K}_{(\ell)}\bar{x}_k) - G_{(\ell)}\bar{x}_k] \leq 0 \tag{3.18}$$

é verificada para qualquer T diagonal e definida positiva. O índice ℓ indica a qual atuador o sinal se refere e $J_{(\ell)}$ representa a ℓ-ésima linha da matriz J.

Em (Hetel et al. 2008), os autores utilizam uma candidata à função de Lyapunov-Krasovskii (L-K) $V(\varphi_{\bar{\tau},k},\tau_k) > 0$ para o sistema (3.1) assumindo que não exista incerteza nas matrizes, isto é, $A(\alpha) = A$, $A_d(\alpha) = A_d$, $B(\alpha) = B$, e $C(\alpha) = C$, dada por

$$V(\varphi_{\bar{\tau},k},\tau_k) = \sum_{i=0}^{\bar{\tau}} \sum_{j=0}^{\bar{\tau}} x_{k-i}^T P_{\tau_k}^{i,j} x_{k-j}, \tag{3.19}$$

em que $P_{\tau_k}^{i,j^T} = P_{\tau_k}^{j,i} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, i, $j = 0,\ldots,\bar{\tau}$. De acordo com os autores, a candidata à função L-K (3.19) representa a forma mais geral dessas funções.

Note que pode-se reescrever as matrizes simétricas $P_{\tau_k}^{i,j}$, não necessariamente definidas positivas, na forma aumentada $\Phi(\tau_k) = \Phi(\tau_k)^T > 0$, cujos blocos $[\Phi(\tau_k)]_{i,j} = P_{\tau_k}^{i,j}$, $i,j = 0,\ldots,\bar{\tau}$, ou seja,

$$\Phi(\tau_k) = \begin{bmatrix} P_{\tau_k}^{0,0} & P_{\tau_k}^{0,1} & \cdots & P_{\tau_k}^{0,\bar{\tau}} \\ \star & P_{\tau_k}^{1,1} & \cdots & P_{\tau_k}^{1,\bar{\tau}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \star & \star & \cdots & P_{\tau_k}^{\bar{\tau},\bar{\tau}} \end{bmatrix} > 0. \tag{3.20}$$

Assim, a candidata a função de L-K dada em (3.19) pode ser reescrita, em função de $\Phi(\tau_k)$ e de $\bar{x}_k$, na forma

$$V(\varphi_{\bar{\tau},k},\tau_k) = \bar{x}_k^T \Phi(\tau_k) \bar{x}_k. \tag{3.21}$$

Para o caso de sistemas dependente de parâmetros, investigado neste trabalho, não é possível utilizar a candidata a função de L-K descrita em (3.21), pois $\Phi(\alpha,\tau_k)$, necessária para a estimativa da região de atração, seria calculada pela inversa de uma combinação convexa de dimensão infinita em α, ou seja,

$$\Phi(\alpha,\tau_k) = \left[\sum_{i=1}^{N} \alpha_i W_i(\tau_k)\right]^{-1},$$

não sendo possível o seu cômputo. Assim, a princípio, será utilizada neste trabalho a candidata a função de L-K dada por

$$V(\varphi_{\bar{\tau},k},\alpha,\tau_k) = \bar{x}_k^T W(\alpha,\tau_k)^{-1} \bar{x}_k, \tag{3.22}$$

em que

$$W(\alpha,\tau_k) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i W_i(\tau_k),\ \alpha \in \Xi, \tag{3.23}$$

e

$$\Phi(\alpha,\tau_k) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left[W_i(\tau_k)\right]^{-1}, \ \alpha \in \Xi.$$

Note que

$$\left[\sum_{i=1}^{N} \alpha_i W_i(\tau_k)\right]^{-1} \neq \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left[W_i(\tau_k)\right]^{-1},$$

e que a necessidade de se estimar a região de atração, característica da classe de sistemas com saturação, implicou a utilização da candidata a função de L-K (3.22) e não uma extensão direta de (3.21), como poderia ser feito para o caso de sistemas sem saturação. Mais adiante a candidata a função de L-K (3.21) será utilizada na condição proposta para sistemas precisamente conhecidos (Seção 3.5).

Segundo o Teorema de Lyapunov-Krasosvskii (Stojanovic et al. 2007), a função (3.22) é dita ser uma função L-K se $V(\varphi_{\bar{\tau},k},\alpha,\tau_k) > 0$ e

$$\triangle V(\varphi_{\bar{\tau},k},\alpha,\tau_k) = V(\varphi_{\bar{\tau},k+1},\alpha,\tau_{k+1}) - V(\varphi_{\bar{\tau},k},\alpha,\tau_k) < 0. \tag{3.24}$$

Logo, a estabilidade assintótica do sistema (3.8) para $\mathbb{K}$ dado é assegurada quando a desigualdade (3.24) é verificada junto com a positividade de $W(\alpha,\tau_k)^{-1}$, $\forall \alpha \in \Xi$.

Note que os valore de $\bar{x}_k$ tais que $V(\varphi_{\bar{\tau},k},\alpha,\tau_k)$ é constante definem uma superfície de Lyapunov ou superfície de nível. Logo, se $\bar{x}_k$ está na fronteira da superfície de nível, então $\triangle V(\varphi_{\bar{\tau},k},\alpha,\tau_k) < 0$ garante que $\bar{x}_{k+1}$ pertence ao interior do conjunto denominado superfície de nível. Esse conjunto é dito, portanto, contrativo. Por essa razão, a estabilidade e estabilização do sistema (3.1) é feita com o auxílio de um conjunto de nível, conforme definido a seguir.

Definição 7 (Conjunto de nível, $\mathcal{L}_V$) *Se (3.22) é uma função L-K, então o conjunto de nível $\mathcal{L}_V$ associado é definido como a intersecção dos conjuntos elipsoidais dados pelas matrizes $W(\alpha,\tau_k)^{-1} = \Phi(\alpha,\tau_k)$, $\forall \alpha \in \Xi$ e $\tau_k \in \{1,\ldots,\bar{\tau}\}$.*

Conforme apresentado por Jungers & Castelan (2011), o conjunto $\mathcal{L}_V$ pode ser calculado como indicado no lema a seguir.

Lema 2 *Assuma uma função L-K dada por (3.22). O conjunto de nível $\mathcal{L}_V$ associado a essa função é dado por*

$$\mathcal{L}_V = \bigcap_{\substack{\tau \in \{1,\ldots,\bar{\tau}\} \\ \alpha \in \Xi}} \mathcal{E}(W(\alpha,\tau)^{-1}) = \bigcap_{\substack{\tau \in \{1,\ldots,\bar{\tau}\} \\ i \in \mathrm{I}[1,N]}} \mathcal{E}(W_i(\tau)^{-1}), \tag{3.25}$$

em que $\mathcal{E}(W_i(\tau)^{-1})$*são conjuntos definidos por*

$$\mathcal{E}(W_i(\tau)^{-1}) = \left\{\bar{x}_k \in \mathbb{R}^{(\bar{\tau}+1)n};\ \bar{x}_k^T W_i(\tau)^{-1}\bar{x}_k \leq 1\right\}. \tag{3.26}$$

A prova desse lema é encontrada em (Jungers & Castelan 2011).

Destaca-se que neste capítulo, o conjunto $\mathcal{L}_V$ é utilizado para representar o conjunto de condições inicias seguras e, portanto, tem-se que $\bar{x}_0 \in \mathcal{L}_V \subseteq \mathbb{S}$.

3.3 Caracterização das Regiões de Atração

A caracterização exata da região de atração não é uma tarefa fácil nem mesmo para sistemas livre de atraso (Tarbouriech et al. 2011). Para sistemas com atraso no estado essa tarefa se muito difícil, pois há uma infinidade de sequências que o vetor de condições iniciais $\varphi_{\tau,0}$ pode assumir (Silva 2016). Portanto, o que se pode fazer é caracterizar um subconjunto da região de atração, o maior possível, de forma que se possua uma estrutura analítica definida.

Uma caracterização comumente encontrada na literatura trata apenas a norma da sequência $\varphi(\bar{\tau},0)$, conhecida como caracterização da bola (Xu et al. 2012). Nessa abordagem, a sequência de condições inicias admissíveis é limitada por um escalar positivo c, de forma que

$$\|\varphi(\bar{\tau},0)\| \leq c,\ \forall\tau = 1,\ldots,\bar{\tau}. \tag{3.27}$$

Pode-se constatar que essa caracterização se mostra muito conservadora, tendo em vista que a região obtida será limitada pela menor distância possível da origem que um elemento da sequência $\varphi_{\bar{\tau},0}$ pode estar..

Uma outra caracterização encontrada na literatura consiste em considerar um conjunto para a norma de $\varphi(\bar{\tau},0)$ e outro para a norma de $\Delta\varphi(\bar{\tau},0)$ (Ghiggi et al. 2008). Dessa forma, tanto sequência de condições inicias admissíveis quanto a taxa de variação dessa sequência são limitadas de modo que

$$\beta_1\|\varphi(\bar{\tau},0)\| + \beta_2\|\Delta\varphi(\bar{\tau},0)\| \leq 1,\ \forall\tau = 1,\ldots,\bar{\tau}, \tag{3.28}$$

em que β_1 e β_2 são escalares positivos.

Outro forma de caracterizar a região de estabilidade, proposta em (Silva 2016)consiste em utilizar o conjunto descrito em (3.29) com $\Phi(\alpha,\tau_k)$ definido por

$$\Phi(\alpha,\tau_k) = \begin{bmatrix} Q(\alpha,\tau_k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R \end{bmatrix},$$

em que $Q(\alpha,\tau_k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $R \in \mathbb{R}^{n\bar{\tau}\times\bar{\tau}}$. Nesta forma de caracterização, os termos nulos presentes na matriz $\Phi(\alpha,\tau_k)$ promovem um desacoplamento das condições iniciais atuais (no instante $k = 0$) com as condições iniciais atrasadas. Tal abordagem foi testada utilizando um tratamento similar ao utilizado neste trabalho, em que o sistema com atrasos é representado como um sistema chaveado sem atrasos, porém sem considerar incertezas. Além disso, o sistema analisado era variante no tempo: um modelo fuzzy de Takagi-Sugeno. A seguir o leitor poderá constatar que essa caracterização é um caso particular da caracterização aqui tratada.

Neste trabalho, a caracterização da região de estabilidade $\mathcal{L}_V$ é dada por

$$\mathcal{L}_V = \bigcap_{\tau\in\{1,\ldots,\bar{\tau}\},\alpha\in\Xi} \mathcal{E}(W(\alpha,\tau_k)^{-1}), \tag{3.29}$$

em que $\mathcal{E}(W(\alpha,\tau_k)^{-1})$, $\tau \in 1,\ldots,\bar{\tau}$, são os conjuntos

$$\mathcal{E}(W(\alpha,\tau_k)^{-1}) = \left\{\bar{x}_k \in \mathbb{R}^{(\bar{\tau}+1)n};\ \bar{x}_k^T W(\alpha,\tau_k)^{-1}\bar{x}_k \leq 1\right\}$$

e $W(\alpha,\tau_k)^{-1}$ é definido conforme descrito em (3.23).

3.4 Contribuição Principal

Nesta seção são apresentados e discutidos os resultados principais deste trabalho. Os exemplos e estudos de casos que consolidam tais resultados são abordados no Capítulo 4.

3.4.1 Estabilização

Considere a candidata à função L-K, definida (3.22), de forma que

$$V(\varphi_{\bar{\tau},k},\alpha,\tau_k) = \bar{x}_k^T W(\alpha,\tau_k)^{-1}\bar{x}_k > 0, \tag{3.30}$$

e

$$\triangle V(\varphi_{\bar{\tau},k},\alpha,\tau_k) = V(\varphi_{\bar{\tau},k+1},\alpha,\tau_{k+1}) - V(\varphi_{\bar{\tau},k},\alpha,\tau_k) < 0. \tag{3.31}$$

Da Definição 1 (Vide Subseção 2.2.3), temos que

$$\psi(\mathbb{K}\bar{x}_k)^T T(\psi(\mathbb{K}\bar{x}_k) - G\bar{x}_k) \leq 0 \tag{3.32}$$

para todo $\bar{x}_k \in S(\mathbb{K} - G,\underline{v},\bar{v})$, em que

$$\mathbb{S}(\mathbb{K} - G,\underline{u},\bar{u}) = \{\bar{x}_k \in \mathbb{R}^{(\bar{\tau}+1)n} : \underline{u} \preceq (\mathbb{K} - G)\bar{x}_k \preceq \bar{u}\}. \tag{3.33}$$

Das equações (3.31) e (3.32), podemos garantir a estabilidade do sistema (3.1) fazendo

$$\triangle V(\varphi_{\bar{\tau},k},\alpha,\tau_k) < \psi(\mathbb{K}\bar{x}_k)^T T(\psi(\mathbb{K}\bar{x}_k) - G\bar{x}_k) \tag{3.34}$$

ao mesmo tempo em que asseguramos u_k no conjunto $\mathbb{S}(\mathbb{K} - G,\underline{u},\bar{u})$.

Partindo da inequação (3.34) e visando incluir a região de estabilidade $\mathcal{L}_V$, definida em (3.29), no conjunto poliedral $\mathbb{S}(\mathbb{K} - G,\underline{u},\bar{u})$, podemos enunciar o seguinte teorema, o qual proporciona uma solução para o Problema 1.

Teorema 4 *Se existirem matrizes* $\mathbf{0} < W(\alpha,\tau) = W(\alpha,\tau)^T \in \mathbb{R}^{(\bar{\tau}+1)n\times(\bar{\tau}+1)n}$, *com* $\alpha \in \Xi$ *(3.3) e* $\tau = 1,\ldots,\bar{\tau}$, *matriz diagonal* $0 < S \in \mathbb{R}^{p\times p}$, *e matrizes* $U \in \mathbb{R}^{(\bar{\tau}+1)n\times(\bar{\tau}+1)n}$, $Y \in \mathbb{R}^{p\times(\bar{\tau}+1)n}$ *e* $Z \in \mathbb{R}^{p\times(\bar{\tau}+1)n}$, *tais que*

$$\begin{bmatrix} -W(\alpha,\tau^+) & \Lambda(\alpha,\tau)U + \mathbb{B}(\alpha)Y & -\mathbb{B}(\alpha)S \\ \star & W(\alpha,\tau) - U - U^T & Z^T \\ \star & \star & -2S \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{3.35}$$

e

$$\begin{bmatrix} W(\alpha,\tau) - U^T - U & (Y_{(\ell)} - Z_{(\ell)})^T \\ \star & -v_{0(\ell)}^2 \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}, \tag{3.36}$$

sejam satisfeitas para todo $\alpha \in \Xi$, τ, $\tau^+ = 1,\ldots,\bar{\tau}$ *e* $\ell = 1,\ldots,p$, *então a matriz da lei de controle (3.5), calculada a partir de*

$$\mathbb{K} = YU^{-1}, \tag{3.37}$$

é tal que o sistema (3.1) em malha fechada é localmente assintoticamente estável para qualquer sequência de condições iniciais pentencentes ao conjunto $\mathcal{L}_V \subseteq \mathbb{S}$.

Prova 1 *: Se (3.35) é verificada, então a positividade de* $V(\varphi_{\bar{\tau},k},\alpha,\tau_k)$ *dada em (3.22) é assegurada. Substituindo-se* Y *e* Z *por* $\mathbb{K}U$ *e* GU, *respectivamente, obtém-se*

$$\begin{bmatrix} -W(\alpha,\tau^+) & \Lambda(\alpha,\tau)U + \mathbb{B}(\alpha)\mathbb{K}U & -\mathbb{B}(\alpha)S \\ \star & W(\alpha,\tau) - U - U^T & (GU)^T \\ \star & \star & -2S \end{bmatrix} < \mathbf{0} \tag{3.38}$$

Usando o fato $-U^T W(\alpha,\tau)^{-1}U \leq W(\alpha,\tau) - U^T - U$, *veja (Geromel, Korogui & Bernussou 2007), pode-se obter*

$$\tilde{\Theta}(\alpha,\tau) = \begin{bmatrix} -W(\alpha,\tau^+) & \Lambda(\alpha,\tau)U + \mathbb{B}(\alpha)\mathbb{K}U & -\mathbb{B}(\alpha)S \\ \star & -U^T W(\alpha,\tau)^{-1}U & (GU)^T \\ \star & \star & -2S \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \tag{3.39}$$

Da regularidade de U e aplicando a transformada de congruência $\Theta(\alpha,\tau) = \mathcal{T}^T\tilde{\Theta}(\alpha,\tau)\mathcal{T}$, com

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & S^{-1} \end{bmatrix},$$

temos que

$$\Theta(\alpha,\tau) = \begin{bmatrix} -W(\alpha,\tau^+) & \Lambda(\alpha,\tau) + \mathbb{B}(\alpha)\mathbb{K} & -\mathbb{B}(\alpha) \\ \star & -W(\alpha,\tau)^{-1} & G^TS^{-1} \\ \star & \star & -2S^{-T} \end{bmatrix} < \mathbf{0}.$$

Fazendo $\tilde{\Lambda}(\alpha,\tau) = \Lambda(\alpha,\tau) + \mathbb{B}(\alpha)\mathbb{K}$ e aplicando o complemento de Schur, obtém-se

$$\Theta(\alpha,\tau) = \begin{bmatrix} -W(\alpha,\tau)^{-1} & G^TS^{-1} \\ \star & -2S^{-T} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\Lambda}(\alpha,\tau)^T \\ -\mathbb{B}(\alpha)^T \end{bmatrix} W(\alpha,\tau^+)^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\Lambda}(\alpha,\tau) & -\mathbb{B}(\alpha) \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \tag{3.40}$$

Pré- e pós-multiplicando (3.40) por X_k^T e X_k, respectivamente, em que

$$X_k = \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k) \end{bmatrix},$$

temos

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \bar{x}_k^T & \Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k^T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -W(\alpha,\tau)^{-1} & G^TS^{-1} \\ \star & -2S^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k) \end{bmatrix} \\ &\qquad + \begin{bmatrix} \bar{x}_k^T & \Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k^T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Lambda}(\alpha,\tau)^T \\ -\mathbb{B}(\alpha)^T \end{bmatrix} W(\alpha,\tau^+)^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\Lambda}(\alpha,\tau) & -\mathbb{B}(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k) \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \bar{x}_k^TW(\alpha,\tau)^{-1}\bar{x}_k + 2\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k)^TS^{-T}G\bar{x}_k - 2\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k)^TS^{-T}\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k) \\ &\qquad + \left[\bar{x}_k^T\tilde{\Lambda}(\alpha,\tau)^T - \Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k^T)\mathbb{B}(\alpha)^T\right] W(\alpha,\tau^+)^{-1} \left[\tilde{\Lambda}(\alpha,\tau)\bar{x}_k - \mathbb{B}(\alpha)\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k)\right] < \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Se $2\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k)^TS^{-T}G\bar{x}_k - 2\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k)^TS^{-T}\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k) = -2\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k)^TS^{-T}(\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k) - G\bar{x}_k)$, então podemos substituir $\tilde{\Lambda}(\alpha,\tau)\bar{x}_k - \mathbb{B}(\alpha)\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k)$ por $\bar{x}_{k+1}$, veja (3.16), e reagrupar a equação acima na forma

$$\Omega_k \equiv \bar{x}_{k+1}^TW(\alpha,\tau^+)^{-1}\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k^TW(\alpha,\tau)^{-1}\bar{x}_k - 2\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k)^TS^{-T}(\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k) - G\bar{x}_k) < 0. \tag{3.41}$$

Sendo $S^{-T} = T$ e $\Delta V(\varphi_{\bar{\tau},k},\alpha,\tau_k) = \bar{x}_{k+1}^TW(\alpha,\tau_{k+1})^{-1}\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k^TW(\alpha,\tau_k)^{-1}\bar{x}_k$, veja (3.22) – (3.24), então temos que

$$\Delta V(\varphi_{\bar{\tau},k},\alpha,\tau_k) - 2\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k)^TT(\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k) - G\bar{x}_k) \leq \Omega_k < 0. \tag{3.42}$$

Portanto, conclui-se que a factibilidade de (3.35) assegura a negatividade de $\Delta V(\varphi_{\bar{\tau},k},\alpha,\tau_k)$ e verifica a condição generalizada de setor (Vide Definição 1 na Subseção 2.2.3).

Assim, a partir do teorema de Lyapunov-Krasovskii (Stojanovic et al. 2007), é assegurada a estabilidade local do sistema linear discreto no tempo com atraso de tempo variante no estado e saturação do sinal de controle (3.1) em malha fechada sob a lei de controle (3.5) com ganho dado por (3.37) sempre que a trajetória de estado evoluirem no interior do conjunto $\mathbb{S}$.

Assuma que além de (3.35), o conjunto de LMIs (3.36) também seja verificado. Como $-U^T W(\alpha,\tau)^{-1} U \leq W(\alpha,\tau) - U^T - U$, *substitui-se* $-U^T W(\alpha,\tau)^{-1} U$ *por* $W(\alpha,\tau) - U^T - U$ *em (3.36), pré e pós-multiplicando o resultado por* $\mathrm{diag}\{U^{-T},1\}$, *para obter um minorante de (3.36) dado por*

$$\begin{bmatrix} -W(\alpha,\tau)^{-1} & (\mathbb{K}_{(\ell)} - G_{(\ell)})^T \\ \star & -v_{0(\ell)}^2 \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}. \tag{3.43}$$

Aplicando o complemento de Schur em (3.43) e pré- e pós-multiplicando o resultado por $\bar{x}_k^T$ *e* $\bar{x}_k$, *respectivamente, obtém-se*

$$-\bar{x}_k^T W(\alpha,\tau_k)^{-1} \bar{x}_k + v_{0(\ell)}^{-2} \bar{x}_k^T (\mathbb{K}_{(\ell)} - G_{(\ell)})^T (\mathbb{K}_{(\ell)} - G_{(\ell)}) \bar{x}_k \leq \mathbf{0}. \tag{3.44}$$

Isso implica que o conjunto elipsoidal $\bigcap_{\tau\in\{1,\ldots,\bar{\tau}\},\alpha\in\Xi} \mathcal{E}(W(\alpha,\tau_k)^{-1})$, *que pelo Lema 2 é dado por* $\left\{\bar{x}_k \in \mathbb{R}^{(\bar{\tau}+1)n};\ \bar{x}_k^T W(\alpha,\tau_k)^{-1} \bar{x}_k \leq 1\right\}$, *está contido em* $\mathbb{S}$. *Portanto, verificando as LMIs (3.36), garante-se que* $\mathcal{L}_V \subseteq \mathbb{S}$ *e qualquer trajetória do sistema em malha fechada iniciando em* $\mathcal{L}_V$ *permanece em* $\mathbb{S}$.

Note que o Teorema 4 é uma condição de dimensão infinita em $\alpha \in \Xi$, portanto, torna-se inviável numericamente. Entretanto, explorando a estrutura de $\Lambda(\alpha,\tau_k)$, dada em (3.9) com (3.2)-(3.3), de $\mathbb{B}(\alpha)$, dada em (3.10) com (3.2)-(3.3), e a estrutura de $W(\alpha,\tau_k)$, dada em (3.23) com (3.2)-(3.3), pode-se obter o seguinte corolário

Corolário 1 *Se existirem matrizes* $\mathbf{0} < W_{i,\tau} = W_{i,\tau}^T \in \mathbb{R}^{(\bar{\tau}+1)n\times(\bar{\tau}+1)n}$, $\tau = 1,\ldots,\bar{\tau}$, $i = 1,\ldots,N$, *matriz diagonal* $\mathbf{0} < S \in \mathbb{R}^{p\times p}$, *e matrizes* $U \in \mathbb{R}^{(\bar{\tau}+1)n\times(\bar{\tau}+1)n}$, $Y \in \mathbb{R}^{p\times(\bar{\tau}+1)n}$ *e* $Z \in \mathbb{R}^{p\times(\bar{\tau}+1)n}$, *tais que*

$$\begin{bmatrix} -W_{i,\tau^+} & \Lambda_{i,\tau} U + \mathbb{B}_i Y & -\mathbb{B}_i S \\ \star & W_{i,\tau} - U - U^T & Z^T \\ \star & \star & -2S \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{3.45}$$

e

$$\begin{bmatrix} W_{i,\tau} - U^T - U & (Y_{(\ell)} - Z_{(\ell)})^T \\ \star & -v_{0(\ell)}^2 \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}, \tag{3.46}$$

sejam satisfeitas para τ, $\tau^+ = 1,\ldots,\bar{\tau}$, $\ell = 1,\ldots,p$ *e* $i = 1,\ldots,N$, *então a matriz da lei de controle (3.5), calculada a partir de*

$$\mathbb{K} = YU^{-1}, \tag{3.47}$$

é tal que o sistema (3.1)-(3.3) em malha fechada com a lei de controle (3.5) é localmente assintoticamente estável para qualquer sequência de condições iniciais pentencentes ao conjunto $\mathcal{L}_V \subseteq \mathbb{S}$.

A prova do Corolário 1 segue-se à semelhança da prova do Teorema 4, explorando a formação convexa das matrizes envolvidas.

Conforme já mencionado, a matriz $\mathbb{K}$, na lei de controle (3.5), pode assumir as três estruturas apresentadas em (3.6a)-(3.6c). Em (3.6c), na qual se realimenta todos os vetores de estado, nenhuma restrição é feita sobre as matrizes U e Y. Para os ganhos dados em (3.6a) (realimenta-se somente o estado atual) e (3.6b) (realimenta-se o estado atual e o estado com máximo atraso) é necessário impor certas restrições para as matrizes Y e U, quais sejam:

$$U_{(3.6a)} = U_{(3.6b)} = \begin{bmatrix} U_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \star & U_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \star & \star & \cdots & U_{\bar{\tau}+1} \end{bmatrix}, \tag{3.48}$$

$$Y_{(3.6a)} = \begin{bmatrix} Y_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \text{ e} \tag{3.49}$$

$$Y_{(3.6b)} = \begin{bmatrix} Y_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & Y_{\bar{\tau}+1} \end{bmatrix}, \tag{3.50}$$

com $U_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i = 1, \ldots, \bar{\tau}+1$, Y_1 e $Y_{\bar{\tau}+1} \in \mathbb{R}^{p\times n}$, sendo que os índices das matrizes indicam a qual estrutura se referem.

3.4.2 Limitando a taxa de variação do atraso, $\Delta\tau_{\max}$

Um desdobramento imediato da formulação aqui proposta está no tratamento de taxas limitadas para a variação do atraso. Esse problema ainda não foi tratado na literatura no âmbito dos sistemas discretos no tempo com atrasos no estado. Em muitos casos, o atraso não varia do seu valor mínimo ao seu valor máximo em apenas uma iteração, sendo essa variação limitada por um valor $\Delta\tau_{\max}$. Ou seja, a variação do atraso em duas amostras consecutivas é limitada por

$$|\tau_{k+1} - \tau_k| \leq \Delta\tau_{\max}, \tag{3.51}$$

em que $\Delta\tau_{\max} < \bar{\tau}$. Ao limitar a taxa de variação do atraso, espera-se, por exemplo, obter uma maior região de atração $\mathcal{E}(\Phi(\cdot))$.

Para isso, considere o conjunto $\mathcal{C}_{\tau^+}(\tau)$, definido por

$$\mathcal{C}_{\tau^+}(\tau) = \{\tau^+ \in \mathbb{I}_* : \max(1, \tau - \Delta\tau_{\max}) \leq \tau^+ \leq \min(\bar{\tau}, \tau + \Delta\tau_{\max})\}, \tag{3.52}$$

no qual estarão contidos todos os valores de τ^+, citado no Teorema 4, que agora estarão relacionados a τ. A título de compreensão, a Figura 3.1 ilustra as possíveis combinações entre $\tau^+ \in \mathcal{C}_{\tau^+}(\tau)$ e τ, considerando um atraso máximo $\bar{\tau} = 10$, para duas limitações na variação do atraso: $\Delta\tau_{\max} = 2$ ($\square$) e $\Delta\tau_{\max} = 5$ ($*$).

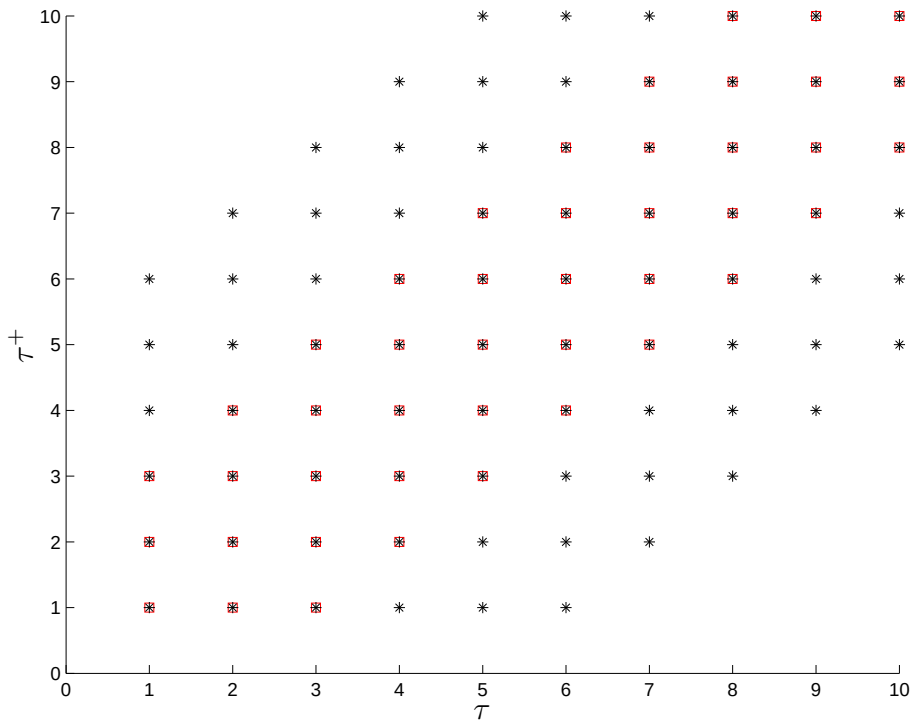


Figura 3.1: Combinações possíveis entre $\tau^+ \in \mathcal{C}_{\tau^+}(\tau)$ e τ para $\Delta\tau_{\max} = 2$ ($\square$) e $\Delta\tau_{\max} = 5$ ($*$), considerando $\bar{\tau} = 10$.

Nessa figura pode-se verificar alguns casos particulares do conjunto $\mathcal{C}_{\tau^+}(\tau)$. Por exemplo, para a limitação na variação do atraso dada por $\Delta\tau_{\max} = 2$, temos que

$$\begin{gathered}
\mathcal{C}_{\tau^+}(1) = \{1,2,3\}; \\
\mathcal{C}_{\tau^+}(2) = \{1,2,3,4\}; \\
\mathcal{C}_{\tau^+}(3) = \{1,2,3,4,5\}; \\
\mathcal{C}_{\tau^+}(4) = \{2,3,4,5,6\}; \\
\mathcal{C}_{\tau^+}(5) = \{3,4,5,6,7\}; \\
\mathcal{C}_{\tau^+}(6) = \{4,5,6,7,8\}; \\
\mathcal{C}_{\tau^+}(7) = \{5,6,7,8,9\}; \\
\mathcal{C}_{\tau^+}(8) = \{6,7,8,9,10\}; \\
\mathcal{C}_{\tau^+}(9) = \{7,8,9,10\}; \text{ e} \\
\mathcal{C}_{\tau^+}(10) = \{8,9,10\}.
\end{gathered}$$

Dessa forma, um novo teorema é enunciado a seguir considerando uma limitação $\Delta\tau_{\max}$ na taxa de variação do atraso.

Teorema 5 *Se existirem matrizes* $\mathbf{0} < W(\alpha,\tau) = W(\alpha,\tau)^T \in \mathbb{R}^{(\bar{\tau}+1)n\times(\bar{\tau}+1)n}$, *com* $\alpha \in \Xi$ *(3.3) e* $\tau = 1,\ldots,\bar{\tau}$, *matriz diagonal* $0 < S \in \mathbb{R}^{p\times p}$, *e matrizes* $U \in \mathbb{R}^{(\bar{\tau}+1)n\times(\bar{\tau}+1)n}$, $Y \in \mathbb{R}^{p\times(\bar{\tau}+1)n}$ *e* $Z \in \mathbb{R}^{p\times(\bar{\tau}+1)n}$, *tais que (3.35) e (3.36) sejam satisfeitas para todo* $\alpha \in \Xi$, $\tau = 1,\ldots,\bar{\tau}$, $\tau^+ \in \mathcal{C}_{\tau^+}(\tau)$ *dado em (3.52), e* $\ell = 1,\ldots,p$, *então a matriz da lei de controle (3.5), calculada a partir de(3.37), é tal que o sistema (3.1) em malha fechada é localmente assintoticamente estável para qualquer sequência de condições iniciais pentencentes ao conjunto* $\mathcal{L}_V \subseteq \mathbb{S}$.

Prova 2 *: A prova deste teorema segue-se à semelhança da prova do Teorema 1, considerando-se os valores de transição possíveis para o valor do atraso dados em (3.52).*

Mais uma vez, o teorema enunciado apresenta dimensão infinida em $\alpha \in \Xi$. Assim, explorando novamente a estrutura de $\Lambda(\alpha,\tau_k)$, dada em (3.9) com (3.2)-(3.3), de $\mathbb{B}(\alpha)$, dada em (3.10) com (3.2)-(3.3), e a estrutura de $W(\alpha,\tau_k)$, dada em (3.23) com (3.2)-(3.3), enunciamos um novo corolário, a partir do Teorema 5, a seguir.

Corolário 2 *Se existirem matrizes* $\mathbf{0} < W_{i,\tau} = W_{i,\tau}^T \in \mathbb{R}^{(\bar{\tau}+1)n\times(\bar{\tau}+1)n}$, $\tau = 1,\ldots,\bar{\tau}$, $i = 1,\ldots,N$, *matriz diagonal* $0 < S \in \mathbb{R}^{p\times p}$, *e matrizes* $U \in \mathbb{R}^{(\bar{\tau}+1)n\times(\bar{\tau}+1)n}$, $Y \in \mathbb{R}^{p\times(\bar{\tau}+1)n}$ *e* $Z \in \mathbb{R}^{p\times(\bar{\tau}+1)n}$, *tais que (3.45) e (3.46) sejam satisfeitas para* $\tau = 1,\ldots,\bar{\tau}$ *e* $\tau^+ \in \mathcal{C}_{\tau^+}(\tau)$ *dado em (3.52),* $\ell = 1,\ldots,p$ *e* $i = 1,\ldots,N$ *indicando o vértice de cada politopo, então a matriz da lei de controle (3.5), calculada a partir de (3.47) é tal que o sistema (3.1)-(3.3) em malha fechada é localmente assintoticamente estável para qualquer sequência de condições iniciais pentencentes ao conjunto* $\mathcal{L}_V \subseteq \mathbb{S}$.

Novamente, a prova do Corolário 2 segue-se à semelhança da prova do Teorema 4 considerando-se a convexidade da construção das matrizes do sistema e dos valores de transição possíveis para o valor do atraso dados em (3.52).

3.4.3 $\lambda-$contratividade

Conforme já mencionado, a propriedade de $\lambda-$contratividade é utilizada como índice de desempenho para a resposta do sistema. Segue uma variação da Definição 6.

Definição 8 (λ-contratividade - Sistema incerto) *O sistema incerto (3.1)-(3.3) é dito λ-contrativo, com relação às trajetórias do sistema, se* $\forall\alpha \in \Xi$ *verifica-se*

$$\triangle_\lambda V(\varphi_{\bar{\tau},k},\alpha,\tau_k) = V(\varphi_{\bar{\tau},k+1},\alpha,\tau_{k+1}) - \lambda V(\varphi_{\bar{\tau},k},\alpha,\tau_k) < 0, \tag{3.53}$$

para $\varphi_{\tau,0} \in \mathcal{L}_V$, $\tau_k \in \{1,\ldots,\bar{\tau}\}$ *e* $\lambda \in\ ]0,1]$.

A partir dessa definição, pode-se formular um novo teorema, enunciado a seguir.

Teorema 6 *Dado* $\lambda \in\ ]0,1]$, *considere que existam matrizes* $\mathbf{0} < W(\alpha,\tau) = W(\alpha,\tau)^T \in \mathbb{R}^{(\bar{\tau}+1)n\times(\bar{\tau}+1)n}$, *com* $\alpha \in \Xi$ *(3.3) e* $\tau = 1,\ldots,\bar{\tau}$, *matriz diagonal* $\mathbf{0} < S \in \mathbb{R}^{p\times p}$ *e matrizes* $U \in \mathbb{R}^{(\bar{\tau}+1)n\times(\bar{\tau}+1)n}$, $Y \in \mathbb{R}^{p\times(\bar{\tau}+1)n}$ *e* $Z \in \mathbb{R}^{p\times(\bar{\tau}+1)n}$, *tais que*

$$\begin{bmatrix} -W(\alpha,\tau^+) & \Lambda(\alpha,\tau)U + \mathbb{B}(\alpha)Y & -\mathbb{B}(\alpha)S \\ \star & \lambda^{-1}W(\alpha,\tau) - U - U^T & Z^T \\ \star & \star & -2S \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{3.54}$$

e (3.36) sejam satisfeitas para τ, $\tau^+ = 1,\ldots,\bar{\tau}$ *e* $\ell = 1,\ldots,p$. *Então, a matriz da lei de controle (3.5), calculada a partir de (3.37), é tal que o sistema (3.1) em malha fechada é localmente assintoticamente estável, com índice de convergência* λ, *para qualquer sequência de condições iniciais pentencentes ao conjunto* $\mathcal{L}_V \subseteq \mathbb{S}$.

Prova 3 *: A prova deste teorema segue-se idêntica à do Teorema 1, exceto pelo termo* $\Delta V(\varphi_{\bar{\tau},k},\alpha,\tau_k)$, *descrito pelas equações (3.22)-(3.24), que é substituído pelo termo mais geral* $\triangle_\lambda V(\varphi_{\bar{\tau},k},\alpha,\tau_k)$, *descrito pela equação (3.53).*

Explorando novamente a estrutura de $\Lambda(\alpha,\tau_k)$, dada em (3.9) com (3.2)-(3.3), de $\mathbb{B}(\alpha)$, dada em (3.10) com (3.2)-(3.3), e a estrutura de $W(\alpha,\tau_k)$, dada em (3.23) com (3.2)-(3.3), pode-se enunciar um novo corolário a partir do Teorema 6, dado por

Corolário 3 *Dado* $\lambda \in\ ]0,1]$, *considere que existam matrizes* $\mathbf{0} < W_{i,\tau} = W_{i,\tau}^T \in \mathbb{R}^{(\bar{\tau}+1)n\times(\bar{\tau}+1)n}$, *com* $i = 1,\ldots,N$ *indicando o vértice de cada politopo,* $\tau = 1,\ldots,\bar{\tau}$, *matriz diagonal* $\mathbf{0} < S \in \mathbb{R}^{p\times p}$ *e matrizes* $U \in \mathbb{R}^{(\bar{\tau}+1)n\times(\bar{\tau}+1)n}$, $Y \in \mathbb{R}^{p\times(\bar{\tau}+1)n}$ *e* $Z \in \mathbb{R}^{p\times(\bar{\tau}+1)n}$, *tais que*

$$\begin{bmatrix} -W_{i,\tau^+} & \Lambda_{i,\tau}U + \mathbb{B}_iY & -\mathbb{B}_iS \\ \star & \lambda^{-1}W_{i,\tau} - U - U^T & Z^T \\ \star & \star & -2S \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{3.55}$$

e (3.46) sejam satisfeitas para τ, $\tau^+ = 1,\ldots,\bar{\tau}$ *e* $\ell = 1,\ldots,p$. *Então, a matriz da lei de controle (3.5), calculada a partir de (3.37), é tal que o sistema (3.1) em malha fechada é localmente assintoticamente estável, com índice de convergência* λ, *para qualquer sequência de condições iniciais pentencentes ao conjunto* $\mathcal{L}_V \subseteq \mathbb{S}$.

A prova deste corolário segue-se idêntica à prova do Teorema 6, explorando a formação convexa das matrizes envolvidas.

Conforme feito no Corolário 2, o resultado do Corolário 3 pode ser reescrito para o caso de limitação da taxa de variação do atraso.

3.5 Simplificação para o caso Precisamente Conhecido

O problema de otimização descrito em (3.64) pode ser simplificado para o caso de sistemas precisamente conhecido. Para tanto, basta considerar $\alpha \in \Xi$ com $N = 1$, ou seja, um politopo com um único vértice.

Conforme já mencionado, para o caso precisamente conhecido, foi utilizada a candidata a função de L-K (3.19), proposta por (Hetel et al. 2008), com $\Phi(\tau_k)$ definida em (3.20). Assim, as novas condições de estabilidade e inclusão são apresentadas no seguinte corolário.

Corolário 4 *Se existirem matrizes* $\mathbf{0} < W(\tau) = W(\tau)^T \in \mathbb{R}^{(\bar{\tau}+1)n\times(\bar{\tau}+1)n}$, *com* $\tau = 1,\ldots,\bar{\tau}$, *matriz diagonal* $\mathbf{0} < S \in \mathbb{R}^{p\times p}$, *e matrizes* $U \in \mathbb{R}^{(\bar{\tau}+1)n\times(\bar{\tau}+1)n}$, $Y \in \mathbb{R}^{p\times(\bar{\tau}+1)n}$ *e* $Z \in \mathbb{R}^{p\times(\bar{\tau}+1)n}$, *tais que*

$$\begin{bmatrix} -W(\tau^+) & \Lambda(\tau)U + \mathbb{B}Y & -\mathbb{B}S \\ \star & W(\tau) - U - U^T & Z^T \\ \star & \star & -2S \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{3.56}$$

$$\begin{bmatrix} W(\tau) - U^T - U & (Y_{(\ell)} - Z_{(\ell)})^T \\ \star & -v_{0(\ell)}^2 \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \tag{3.57}$$

sejam satisfeitas para τ, $\tau^+ = 1,\ldots,\bar{\tau}$ *e* $\ell = 1,\ldots,p$, *então a matriz da lei de controle (3.5), calculada a partir de*

$$\mathbb{K} = YU^{-1}, \tag{3.58}$$

é tal que o sistema (3.1) em malha fechada é localmente assintoticamente estável para qualquer sequência de condições iniciais pentencentes ao conjunto $\mathcal{L}_V \subseteq \mathbb{S}$.

Note que no caso das condições do Corolário 4 serem satisfeitas, a função de Lyapunov que assegura a estabilidade é dada por

$$V(\varphi_{\bar{\tau},k},\tau_k) = \bar{x}_k^T \Phi(\tau_k)\bar{x}_k,$$

para $\tau_k = 1,\ldots,\bar{\tau}$.

Ainda para a classe de sistemas precisamente conhecidos, para especificar o desempenho do controlador por meio do índice $\lambda \in]0,1]$, é proposto outro corolário, qual seja

Corolário 5 *Dado* $\lambda \in]0,1]$, *considere que existam matrizes* $\mathbf{0} < W_\tau = W_\tau^T \in \mathbb{R}^{(\bar{\tau}+1)n\times(\bar{\tau}+1)n}$, *com* $\tau = 1,\ldots,\bar{\tau}$, *matriz diagonal* $\mathbf{0} < S \in \mathbb{R}^{p\times p}$ *e matrizes* $U \in \mathbb{R}^{(\bar{\tau}+1)n\times(\bar{\tau}+1)n}$, $Y \in \mathbb{R}^{p\times(\bar{\tau}+1)n}$ *e* $Z \in \mathbb{R}^{p\times(\bar{\tau}+1)n}$, *tais que*

$$\begin{bmatrix} -W(\tau^+) & \Lambda(\tau)U + \mathbb{B}Y & -\mathbb{B}S \\ \star & \lambda^{-1}W(\tau) - U - U^T & Z^T \\ \star & \star & -2S \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{3.59}$$

e

$$\begin{bmatrix} W(\tau) - U^T - U & (Y_{(\ell)} - Z_{(\ell)})^T \\ \star & -v_{0(\ell)}^2 \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}, \tag{3.60}$$

sejam satisfeitas para τ, $\tau^+ = 1, \ldots, \bar{\tau}$ *e* $\ell = 1, \ldots, p$. *Então, a matriz da lei de controle (3.5), calculada a partir de (3.58), é tal que o sistema (3.1) em malha fechada é localmente assintoticamente estável, com índice de convergência* λ, *para qualquer sequência de condições iniciais pentencentes ao conjunto* $\mathcal{L}_V \subseteq \mathbb{S}$.

Mais uma vez, conforme feito no Corolário 2, o resultado dos corolários 4 e 5 pode ser reescrito para o caso de limitação da taxa de variação do atraso.

3.6 Problema de Otimização

Um objetivo de interesse na aplicação do Teorema 4 é o de maximizar a região de condições iniciais seguras, ou seja, obter $\mathcal{L}_V \subseteq \mathbb{S}$ o maior possível. Isso pode ser obtido por meio de uma terceira LMI que irá promover o aumento do conjunto $\mathcal{L}_V$.

Corso (2009) utiliza um conjunto modelo poliedral $\Gamma \triangleq \{v_r \in \mathbb{R}^n,\, r = 1, \ldots, n_r\}$, no qual v_r são os vetores das direções nas quais se pretende maximizar a região de atração, e um fator escalar β para o problema de otimização, sendo incluída a condição de relaxação dada por

$$\begin{bmatrix} \mu & v_r^T \\ v_r & W_{i,\tau} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, i = 1, \ldots, N,\ \tau = 1, \ldots, \bar{\tau},\ r = 1, \ldots, n_r, \tag{3.61}$$

em que $\mu = \frac{1}{\beta^2}$. A desigualdade acima é equivalente a $\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} v_r^T\right) W(\alpha,\tau)^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} v_r\right) \leq 1$, para cada valor de α_i, τ e r, garantindo, assim, a inclusão $\frac{1}{\sqrt{\mu}}\Gamma \subset \mathcal{L}_V$. Portanto, o problema de otimização utilizado pelo autor se resume em minimizar μ sujeito às condições de relaxação (3.61), de estabilidade e de inlcusão.

Neste trabalho será abordada outra alternativa, a qual consiste em maximizar

$$\mathcal{D}(H) \triangleq \{\bar{x}_k \in \mathbb{R}^n : 0 < \bar{x}_k^T H \bar{x}_k \leq 1\}, \tag{3.62}$$

que está incluso em $\mathcal{L}_V$. Tal inclusão é assegurada a partir de

$$\begin{bmatrix} H & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & W_{i,\tau} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0},\ \tau = 1, \ldots, \bar{\tau}. \tag{3.63}$$

Portanto, o procedimento de otimização convexa utilizado neste trabalho, o qual se propõe a solucionar o Problema (2), é dado por

$$\mathcal{P}_{\alpha,\mathcal{S}} \begin{cases} \min & \text{traço}(H) \\ \text{sujeito a} & (3.35),\ (3.36) \text{ e } (3.63). \end{cases} \tag{3.64}$$

Para se especificar o desempenho do controlador, por meio do índice de desempenho $\lambda \in]0,1]$, aplica-se o seguinte problema de otimização:

$$\mathcal{P}_{\alpha,\lambda} \left\{ \begin{array}{rl} \min & \text{traço}(H) \\ \text{sujeito a} & (3.55),\ (3.46) \text{ e } (3.63). \end{array} \right. \tag{3.65}$$

Para o caso de sistemas precisamente conhecido, a relaxação da região de atração é obtida por meio da seguinte condição:

$$\begin{bmatrix} H & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & W(\tau) \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \tag{3.66}$$

Assim, o problema de otimização a seguir se propõe a solucionar o Problema (2) para o caso de sistemas precisamente conhecido.

$$\mathcal{P}_{\mathcal{S}} \left\{ \begin{array}{rl} \min & \text{traço}(H) \\ \text{sujeito a} & (3.56),\ (3.57) \text{ e } (3.66). \end{array} \right. \tag{3.67}$$

Ainda para sistemas do tipo precisamente conhecido, caso deseja-se especificar o índice de desempenho λ-contratividade, aplica-se o problema de otimização apresentado a seguir.

$$\mathcal{P}_{\lambda} \left\{ \begin{array}{rl} \min & \text{traço}(H) \\ \text{sujeito a} & (3.59),\ (3.60) \text{ e } (3.66), \end{array} \right. \tag{3.68}$$

3.7 Custo Computacional

As condições apresentadas nos corolários 1-5, testadas com o solver LMILab, apresentam custo computacional da ordem de

$$\mathcal{O} = \mathcal{K}^3 \mathcal{L}, \tag{3.69}$$

em que $\mathcal{K}$ é o número de variáveis escalares e $\mathcal{L}$ o número de linhas nas LMIs. A Tabela 3.1 apresenta os valores de $\mathcal{K}$ e $\mathcal{L}$ para cada condição aqui proposta.

Tabela 3.1: Valores de $\mathcal{K}$ (variáveis escalares) e $\mathcal{L}$ (linhas de LMIs) para as condições propostas.

	$\mathcal{K}$	$\mathcal{L}$
Corolário 1	$\mathcal{K}_1$	$\mathcal{L}_1$
Corolário 3	$\mathcal{K}_1$	$\mathcal{L}_1$
Corolário 2	$\mathcal{K}_1$	$\mathcal{L}_2$
Corolário 4	$\mathcal{K}_2$	$\mathcal{L}_3$
Corolário 5	$\mathcal{K}_2$	$\mathcal{L}_3$

em que

$$\mathcal{K}_1 = n^2(\bar{\tau}+1)^2 + (\bar{\tau}N+1) + p(n\bar{\tau}+n+p),$$
$$\mathcal{K}_2 = n^2(\bar{\tau}+1)^2 + (\bar{\tau}+1) + p(n\bar{\tau}+n+p),$$
$$\mathcal{L}_1 = (2n(\bar{\tau}+1)+p)N\bar{\tau}^2 + [(\bar{\tau}+1)n+1]pN\bar{\tau},$$
$$\mathcal{L}_2 = N[2n(\bar{\tau}+1)+p][\bar{\tau}^2 - 2(\bar{\tau}-\Delta\tau_{\max}-1)! + [(\bar{\tau}+1)n+1]pN\bar{\tau}],\ \forall\Delta\tau_{\max} < \bar{\tau}-1$$
$$\mathcal{L}_3 = [2n(\bar{\tau}+1)+p][\bar{\tau}^2 - 2(\bar{\tau}-\Delta\tau_{\max}-1)! + [(\bar{\tau}+1)n+1]p\bar{\tau}],\ \forall\Delta\tau_{\max} < \bar{\tau}-1.$$

Conforme já mencionado, o Corolário 1 corresponde ao Teorema 4 aplicado apenas aos vértices do politopo. Das variáveis citadas acima, temos que n é a ordem do sistema, p é o número de entradas do sistema, $\bar{\tau}$ é o atraso máximo, N é o número de vértices do politopo e $\Delta\tau_{\max}$ é a taxa de variação máxima entre atrasos de amostragens consecutivas.

Na sequência, são calculados três valores de custo: $\mathcal{O}_1 = \mathcal{K}_1^3\mathcal{L}_1$, que é relacionado ao custo computacional para o cômputo dos corolários 1, 3 e 2; $\mathcal{O}_2 = \mathcal{K}_1^3\mathcal{L}_2$, relacionado ao esforço computacional para o cômputo do Corolário 4; e $\mathcal{O}_3 = \mathcal{K}_2^3\mathcal{L}_3$, vinculado ao custo computacional associado com cômputo dos corolários 4 e 5.

A Figura 3.2 ilustra o custo computacional $\mathcal{O} = \mathcal{K}^3\mathcal{L}$ em função da ordem n do sistema considerando alguns valores para N ($N = 1$ ou sistema precisamente conhecido ($-\triangle$), $N = 2$ ($-*$), $N = 4$ ($-\circ$) e $N = 6$ ($-\square$)). Para isso, considerou-se $p = 1$, $\bar{\tau} = 2$ e $\Delta\tau_{\max} = 1$.

Pode-se constatar que o custo computacional $\mathcal{O}_3$ apresentou a mesma curva para todos os valores de N. Isso deve-se ao fato desse custo referir-se aos corolários 4 e 5, que tratam de sistemas precisamente conhecidos, sendo, portanto, considerado $N = 1$ para todas as curvas.

Já a Figura 3.3 ilustra o custo computacional $\mathcal{O} = \mathcal{K}^3\mathcal{L}$ em função da ordem n do sistema considerando alguns valores $\bar{\tau}$ ($\bar{\tau} = 1$ ($-\triangle$), $\bar{\tau} = 2$ ($-*$), $\bar{\tau} = 3$ ($-\circ$) e $\bar{\tau} = 4$ ($-\square$)). Para isso, considerou-se $p = 1$, $N = 1$ (sistemas precisamente conhecidos) e, novamente, $\Delta\tau_{\max} = 1$.

Nessa figura pode-se constatar que as curvas dos custos computacionais $\mathcal{O}_2$ e $\mathcal{O}_3$ são semelhantes. Isso deve-se ao fato de que $\mathcal{L}_2$ se diferencia de $\mathcal{L}_3$ apenas pelo fator N que é multiplicado. Como $N = 1$, $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_3$. O mesmo ocorre entre $\mathcal{K}_1$ e $\mathcal{K}_2$.

3.8 Comentários Finais

Neste capítulo foi formalizado o problema a ser investigado, bem como apresentada a forma de caracterização da região de atração utilizada. Foram apresentados os resultados alcançados, assim como o problema de otimização empregado. Por fim, discutiu-se o custo computacional das condições apresentadas.

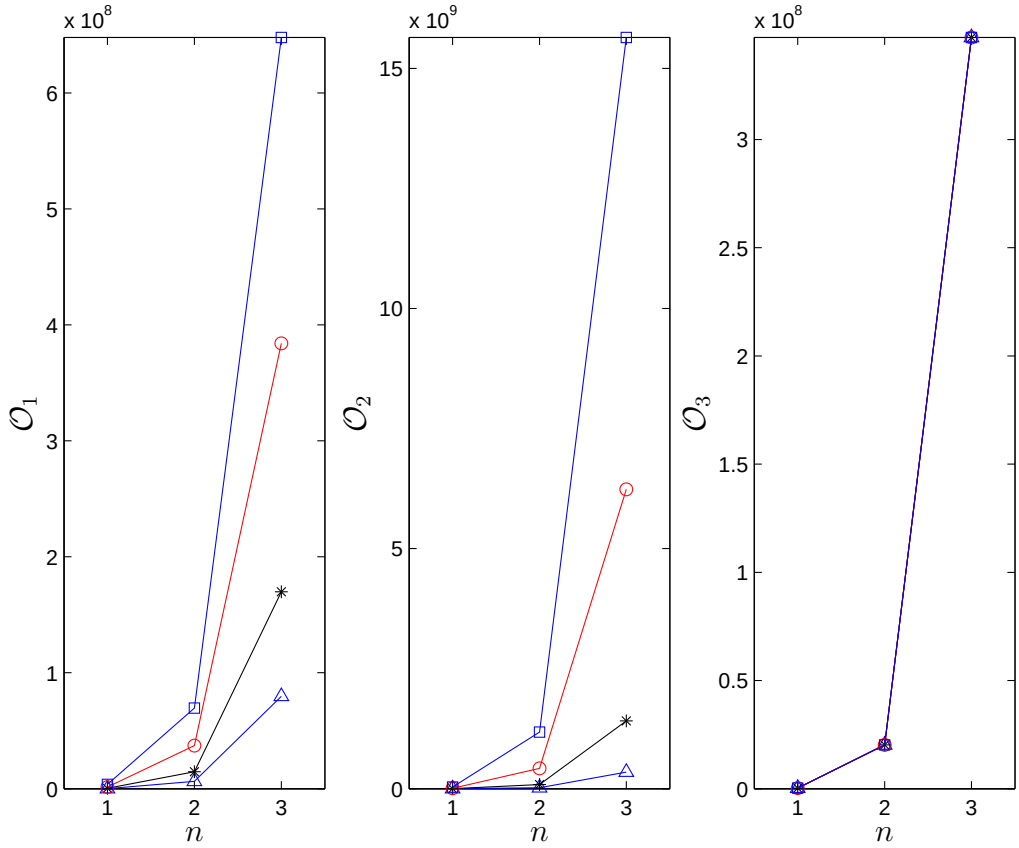


Figura 3.2: Custo computacional $\mathcal{O} = \mathcal{K}^3\mathcal{L}$ em função da ordem n do sistema, com $p = 1$, $\bar{\tau} = 2$ e $\Delta\tau_{\max} = 1$, para $N = 1$ $(-\triangle)$, $N = 2$ $(-*)$, $N = 4$ $(-\circ)$ e $N = 6$ $(-\square)$.

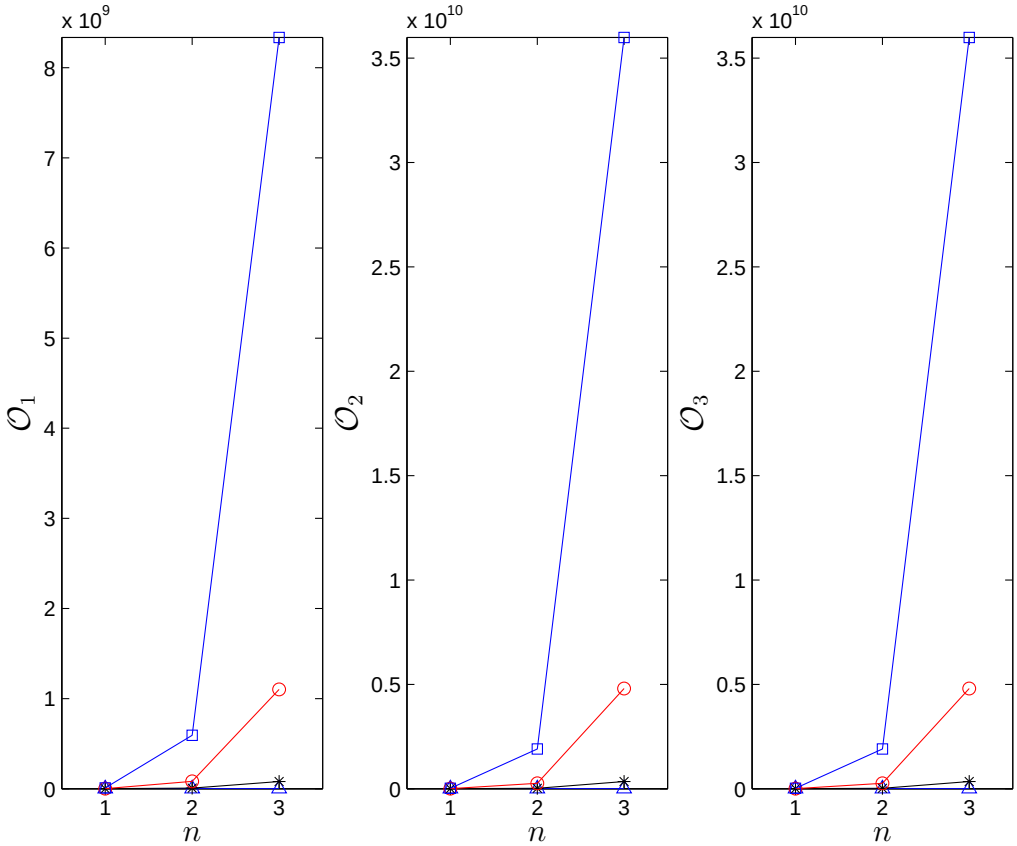


Figura 3.3: Custo computacional $\mathcal{O} = \mathcal{K}^3\mathcal{L}$ em função da ordem n do sistema, com $p = 1$, $N = 1$ e $\Delta\tau_{\max} = 1$, para $\bar{\tau} = 1$ $(-\triangle)$, $\bar{\tau} = 2$ $(-*)$, $\bar{\tau} = 3$ $(-\circ)$ e $\bar{\tau} = 4$ $(-\square)$.

Capítulo 4

Exemplos e Estudo de Casos

Neste capítulo as condições desenvolvidas e discutidas no Capítulo 3 são aplicadas em exemplos e estudos de casos. Para facilitar a visualização da região caracterizada pelas condições desenvolvidas no Capítulo 3, estas são inicialmente aplicadas a um sistema escalar precisamente conhecido com atraso máximo $\bar{\tau} = 2$, sendo em seguida consideradas incertezas politópicas nos coeficientes do sistema. Na sequência, as condições são aplicadas a um sistema de ordem $n = 2$, desta vez visando ilustrar as particularidades da condição. Ao final, é investigado a síntese para um sistema livre de atraso considerando a realimentação dos estados passados. Tal exemplo é utilizado como motivação para as perspectivas deste trabalho.

4.1 Caso Escalar Precisamente Conhecido

Por simplicidade e para permitir ao leitor uma melhor visualização dos resultados, considere o sistema (3.1) como um sistema escalar precisamente conhecido, ou seja,

$$\Omega : \left\{ \begin{array}{c} x_{k+1} = Ax_k + A_d x_{k-\tau_k} + B\mathtt{sat}(v_k) \\ y_k = Cx_k \end{array} \right. , \tag{4.1}$$

cujas matrizes são dadas por

$$A = 2,\ A_d = -0.1,\ B = 1 \text{ e } C = 1,$$

com um atraso máximo $\bar{\tau} = 2$ e saturação do atuador dada por $|u_k| \leq u_0 = 0.7$. Conforme observado adiante, esta escolha permite ao leitor uma melhor percepção das condições propostas neste trabalho.

Para verificar a estabilidade do sistema (4.1) em malha aberta, cosiderou-se $v_k =$

$\mathbf{0}$ $\forall k \geq 0$ e, a princípio, um atraso constante e unitário, isto é, $\tau_k = 1$ $\forall k \geq 0$. Foi aplicada a Transformada $\mathcal{Z}$ na equação dinâmica do sistema (4.1), ocasião em que obtemos

$$\mathbf{I}z - A - A_d z^{-1} = 0,$$

ou ainda

$$\mathbf{I}z^2 - Az - A_d = 0. \tag{4.2}$$

Substituindo os valores de A e A_d e resolvendo a equação (4.2), obtém-se as raízes $\rho_1 = 0.0513$ e $\rho_2 = 1.9487$. Note que para um atraso fixo $\tau = 1$ o sistema (4.1) possui um autovalor (ρ_2) fora do círculo unitário, portanto, trata-se de um sistema instável.

Voltando ao sistema original, com $1 \leq \tau_k \leq 2$, e no intuito de se obter a maior região de atração possível, foi aplicado o problema de otimização dado em (3.67), sendo obtido o seguinte ganho estático

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} -1.9401 & 0.0713 & 0.05 \end{bmatrix}, \tag{4.3}$$

ou seja, $v_k = -1.9401x_k + 0.0713x_{k-1} + 0.05x_{k-2}$ estabiliza o sistema (4.1). Do problema de otimização (3.67) também foram obtidas as seguintes matrizes:

$$W(1) = \begin{bmatrix} 0.6131 & 1.6139 & 2.0088 \\ 1.6139 & 19.8391 & 20.1681 \\ 2.0088 & 20.1681 & 37.8271 \end{bmatrix}, \quad W(2) = \begin{bmatrix} 0.6131 & 1.6084 & 2.0122 \\ 1.6084 & 19.7553 & 20.1146 \\ 2.0122 & 20.1146 & 37.8784 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 0.6141 & 1.6255 & 2.0292 \\ 1.6250 & 19.9831 & 20.3894 \\ 2.0277 & 20.3816 & 38.1676 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 2.1101 & -0.1258 & -0.0450 \\ -0.1258 & 0.1180 & -0.0561 \\ -0.0450 & -0.0561 & 0.0589 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} -0.9741 & -0.7083 & -0.5727 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} -0.4769 & -0.4614 & -0.4516 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} -0.9276 & 0.0311 & 0.0209 \end{bmatrix}.$$

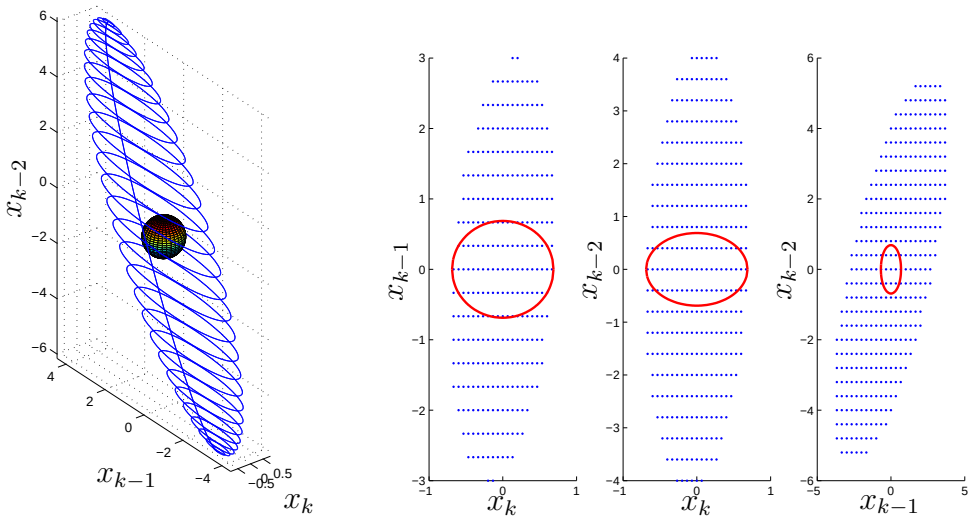
A Figura 4.1 ilustra a estimativa da região de atração, obtida por meio da interseção dos elipsóides, e, a título de comparação, a correspondente bola comumente utilizada na literatura para caracterizar a região das condições iniciais. O raio da caracterização da bola é obtido por meio da equação

$$\text{raio} = \bigcap_{i=1}^{\bar{\tau}} \frac{1}{\sqrt{\rho_{\max}(W(i)^{-1})}},$$

em que $\rho_{\max}(\cdot)$ indica máximo autovalor de uma matriz. Já na Figura 4.1(b) são apresentados os cortes das regiões de atração definidas pela proposta deste trabalho $(\cdot)$ e pela norma máxima da

sequencia de condições iniciais (−) da sequência de condições iniciais (caracterização da bola) nos três planos do espaço.

Utilizando uma grade de pontos igualmente espaçados em $\mathbb{R}^3$, pode-se avaliar a proporção dos volumes da bola, aqui denotado $\mathcal{B}_0$, e do elipsóide. Neste caso, constatou-se que o volume do elipsóide é 3952.5% maior que o volume da bola. Portanto, verifica-se uma significativa redução de conservadorismo na estimação da região de condições iniciais. Foi verificado também que essa proporção é reduzida na medida em que a norma de A_d se aproxima da norma de A, o que é explicitado, mais à frente, e ilustrado na Figura 4.4.



(a) Visualização espacial.

(b) Cortes nos planos: Região de Atração (·) e Caracterização da norma máxima (−).

Figura 4.1: Região de Atração e Caracterização da norma máxima.

A Figura 4.2(a) apresenta os cortes da região de atração juntamente com o limiar da saturação do sinal de controle, ou seja, os valores das condições iniciais que fazem $|u_k| > u_0$. A Figura 4.2(b) é uma expansão da Figura 4.2(a), na qual é possível visualizar os limiares de saturação no corte $x_{k-1} \times x_{k-2}$. Assim, é possível determinar em qual porção dessa região o sinal de controle vai saturar.

Visando avaliar a saturação do sinal de controle, o controlador (4.3) foi implementado considerando a condição inicial $x_{-2} = x_{-1} = 0$ e $x_0 = 0.6885$, que está localizada na superfície do elipsóide mostrado na Figura 4.1(a). A correspondente resposta temporal é apresentada na Figura 4.3, na qual pode-se constatar a saturação do atuador nas primeiras amostras e também a estabilização do sistema.

Considere então que no sistema (4.1) A_d é multiplicada por um fator δ, de forma

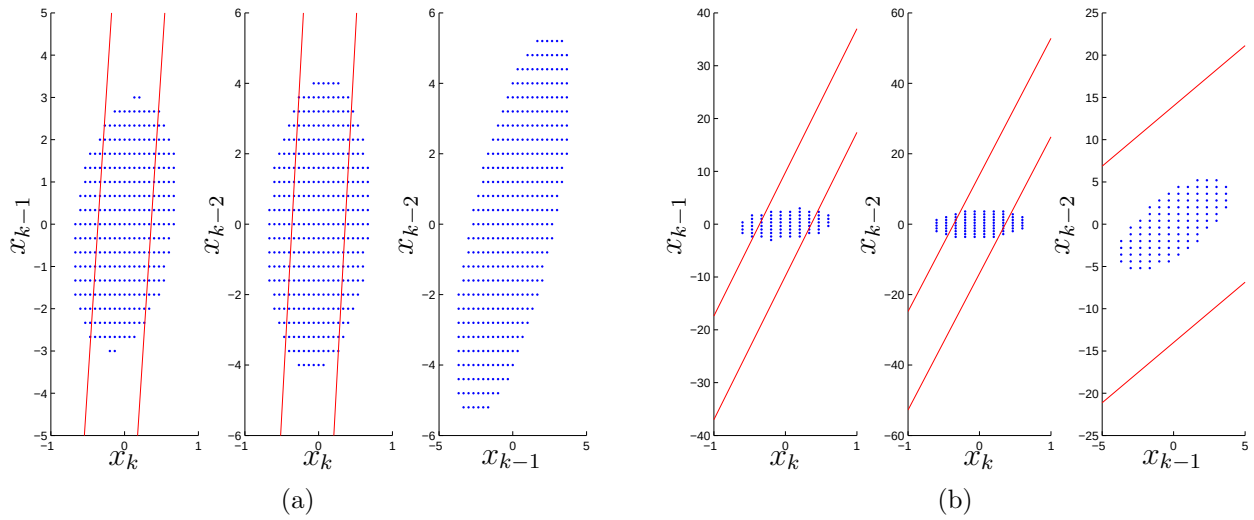


Figura 4.2: Região de Atração ($\cdot$) e Limiares de Saturação ($-$).

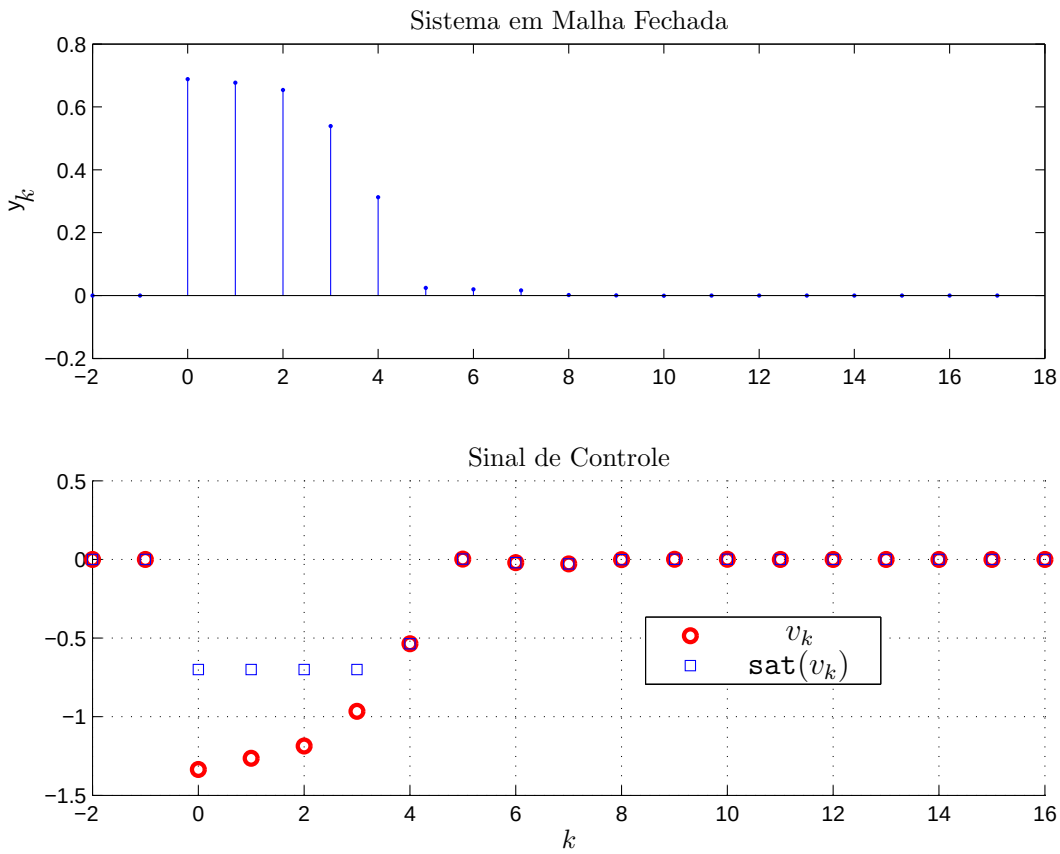


Figura 4.3: Resposta do sistema (4.1) para condição inicial $x_{-2} = x_{-1} = 0$ e $x_0 = 0.6885$, sinal de controle sem saturação ($\circ$) e sinal do atuador ($\square$).

que

$$x_{k+1} = 2x_k - 0.1\delta x_{k-\tau_k} + \texttt{sat}(v_k). \tag{4.4}$$

Variou-se o valor de δ entre 1 e 9, sendo que para cada valor foi resolvido o problema de

otimização (3.67) para as três estruras de ganho descritas em (3.6), sendo calculados, por meio de uma grade de pontos igualmente espaçados em $\mathbb{R}^3$, os volumes dos elipsóides obtidos. O elipsóide de maior volume corresponde à estrutura (3.6c), e o menor à estrutura (3.6a).

São apresentadas na Figura 4.4 as razões dos volumes, na parte superior, $\mathcal{V}_{(3.6c)}/\mathcal{V}_{(3.6a)}$ ($\square$), $\mathcal{V}_{(3.6b)}/\mathcal{V}_{(3.6a)}$ ($\circ$), $\mathcal{V}_{(3.6c)}/\mathcal{V}_{(3.6b)}$ ($*$) e, na parte inferior, $\mathcal{V}_{(3.6c)}/\mathcal{B}_0$ ($\triangle$), em que os subíndices referem-se aos números das equações que definem as estruturas dos ganhos utilizados e $\mathcal{B}_0$ representa o volume obtido com a caracterização da norma máxima das condições iniciais.

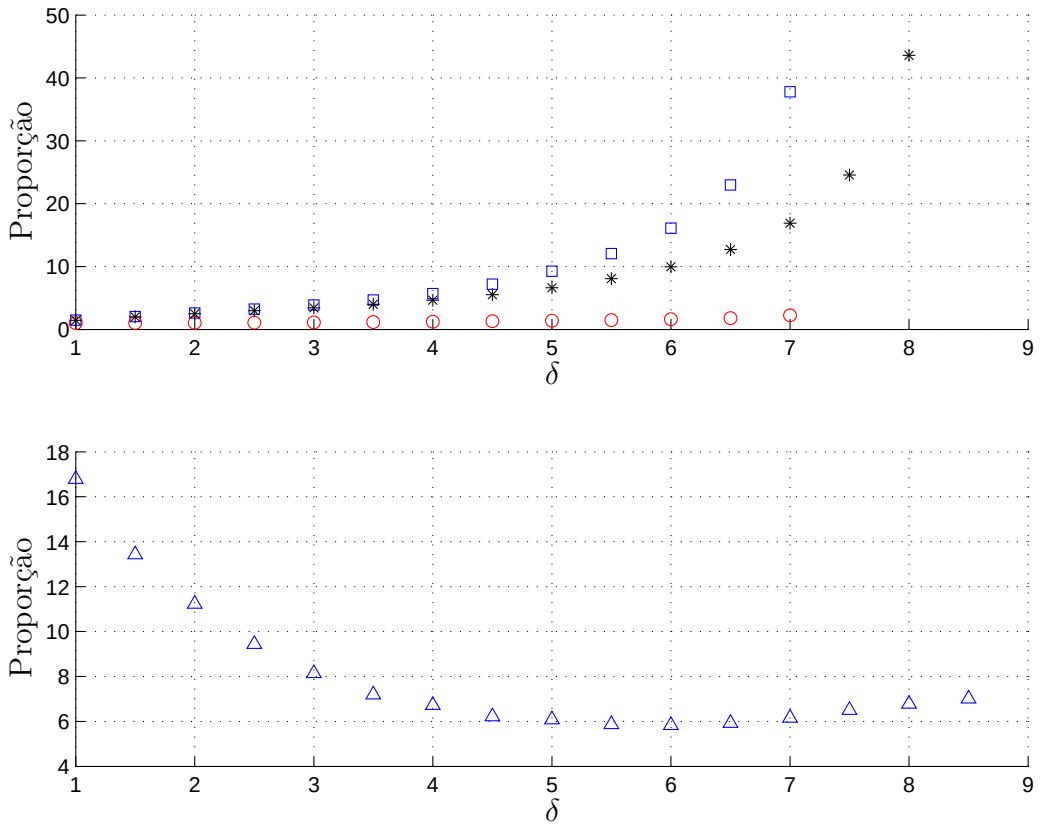


Figura 4.4: Razão dos volumes $\mathcal{V}_{(3.6c)}$ ($\square$) e $\mathcal{V}_{(3.6b)}$ ($\circ$) em relação ao volume $\mathcal{V}_{(3.6a)}$, do volume $\mathcal{V}_{(3.6c)}$ em relação ao volume $\mathcal{V}_{(3.6b)}$ ($*$) e do volume $\mathcal{V}_{(3.6c)}$ em relação ao volume $\mathcal{B}_0$ ($\triangle$), todos em função de δ.

Note que, quanto maior a norma de A_d em relação à norma de A, mais relevante passa a ser a realimentação dos estados atrasados. Conforme já mensionado, a proporção entre os volumes $\mathcal{V}_{(3.6c)}$ e $\mathcal{B}_0$ diminui à medida em que a norma de A_d se aproxima da norma de A. Isso pode ser verificado na Figura 4.4 parte inferior, em que a razão $\mathcal{V}_{(3.6c)}/\mathcal{B}_0$ diminui com o aumento de δ. Entretanto, nota-se nessa mesma figura que para valores de δ superiores

a 6 a razão $\mathcal{V}_{(3.6c)}/\mathcal{B}_0$, que até então diminuia, volta a aumentar à medida em que δ (e, consequentemente, a norma de A_d) cresce. Para explicar esse comportamento, note que o elipsóide apresentado na Figura 4.1(a) (obtido para $\delta = 1$) está mais distribuído ao londo dos eixos x_{k-1} e x_{k-2} do que ao longo do eixo x_k. Quando se varia o valor de δ é como se essa maior distribuição fosse transferida, de forma progressiva, de um eixo para outro. Assim, o elipsóide vai se aproximando de uma esfera até que, em certo ponto ($\delta = 6$), volta a crescer em determinada direção.

Com relação às estruturas do controlador, para $\mathbb{K}_{(3.6c)}$, o valor máximo pelo qual se pode multiplicar a matriz A_d, para $\bar{\tau} = 2$, sem impossibilitar a estabilização do sistema em malha fechada foi de $\delta = 19.9$. Já os limites encontrados para as estruturas de controlador $\mathbb{K}_{(3.6a)}$ e $\mathbb{K}_{(3.6b)}$ foram, respectivamente, $\delta = 7$ e $\delta = 8$, conforme apresentado na Figura 4.4.

Em particular, para $\delta = 7$ foram obtidos os ganhos $\mathbb{K}_{(3.6c)} = \begin{bmatrix}-1.4998 & 0.4789 & 0.3497\end{bmatrix}$, $\mathbb{K}_{(3.6a)} = \begin{bmatrix}-1.9934 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $\mathbb{K}_{(3.6b)} = \begin{bmatrix}-1.6534 & 0 & 0.2422\end{bmatrix}$. Também foram obtidos as seguintes matrizes

$$W(1)_{(3.6c)} = \begin{bmatrix}3.8175 & 5.1279 & 5.5948\\ 5.1279 & 8.0973 & 8.4554\\ 5.5948 & 8.4554 & 10.6855\end{bmatrix}, \quad W(2)_{(3.6c)} = \begin{bmatrix}3.8109 & 5.1124 & 5.5895\\ 5.1124 & 8.0674 & 8.4378\\ 5.5895 & 8.4378 & 10.6844\end{bmatrix},$$

$$U_{(3.6c)} = \begin{bmatrix}3.8191 & 5.1305 & 5.6032\\ 5.1299 & 8.1011 & 8.4681\\ 5.5998 & 8.4630 & 10.7015\end{bmatrix}, \quad H_{(3.6c)} = \begin{bmatrix}1.8561 & -0.9237 & -0.2404\\ -0.9237 & 1.1723 & -0.4433\\ -0.2404 & -0.4433 & 0.5703\end{bmatrix},$$

$$Y_{(3.6c)} = \begin{bmatrix}-1.3130 & -0.8558 & -0.6062\end{bmatrix}, \quad Z_{(3.6c)} = \begin{bmatrix}-0.6008 & -0.4676 & -0.4006\end{bmatrix},$$

$$G_{(3.6c)} = \begin{bmatrix}-0.5864 & 0.1846 & 0.1235\end{bmatrix},$$

$$W(1)_{(3.6a)} = \begin{bmatrix}0.1394 & 0.0075 & -0.0150\\ 0.0075 & 0.1500 & 0.0174\\ -0.0150 & 0.0174 & 0.2862\end{bmatrix}, \quad W(2)_{(3.6a)} = \begin{bmatrix}0.1395 & 0.0070 & -0.0152\\ 0.0070 & 0.1631 & 0.0167\\ -0.0152 & 0.0167 & 0.2785\end{bmatrix},$$

$$U_{(3.6a)} = \begin{bmatrix}0.1443 & 0 & 0\\ 0 & 0.1527 & 0\\ 0 & 0 & 0.2989\end{bmatrix}, \quad H_{(3.6a)} = \begin{bmatrix}7.2402 & -0.4097 & 0.4192\\ -0.4097 & 6.7406 & -0.4247\\ 0.4192 & -0.4247 & 3.6398\end{bmatrix},$$

$$Y_{(3.6a)} = \begin{bmatrix}-0.2877 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad Z_{(3.6a)} = \begin{bmatrix}-0.0252 & -0.0172 & -0.0665\end{bmatrix},$$

$$G_{(3.6a)} = \begin{bmatrix}-0.1749 & -0.1127 & -0.2225\end{bmatrix},$$

$$W(1)_{(3.6b)} = \begin{bmatrix} 0.1878 & 0.0514 & 0.0194 \\ 0.0514 & 0.2323 & 0.0961 \\ 0.0194 & 0.0961 & 0.7167 \end{bmatrix}, \quad W(2)_{(3.6b)} = \begin{bmatrix} 0.1880 & 0.0504 & 0.0198 \\ 0.0504 & 0.2367 & 0.0938 \\ 0.0198 & 0.0938 & 0.7171 \end{bmatrix},$$

$$U_{(3.6b)} = \begin{bmatrix} 0.1879 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2291 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6090 \end{bmatrix}, \quad H_{(3.6b)} = \begin{bmatrix} 5.6686 & -1.2611 & 0.0157 \\ -1.2611 & 4.8390 & -0.6145 \\ 0.0157 & -0.6145 & 1.4786 \end{bmatrix},$$

$$Y_{(3.6b)} = \begin{bmatrix} -0.3106 & 0 & 0.1475 \end{bmatrix}, \quad Z_{(3.6b)} = \begin{bmatrix} -0.0211 & -0.0304 & -0.0270 \end{bmatrix},$$

$$G_{(3.6b)} = \begin{bmatrix} -0.1122 & -0.1327 & -0.0444 \end{bmatrix}.$$

Cada um desses ganhos gera uma região formada pela interseção de dois elipsóides (pois $\bar{\tau} = 2$), regiões estas denotadas, respectivamente, por $\mathcal{E}(W_{(3.6c)})$, $\mathcal{E}(W_{(3.6a)})$ e $\mathcal{E}(W_{(3.6b)})$. Essas regiões têm suas interseções com os planos do espaço de estado apresentados na Figura 4.5. Conforme esperado, a menor região, marcada com $*$, corresponde à realimentação definida por (3.6a) e a maior, marcada com $\cdot$, à realimentação completa do estado atrasado, (3.6c).

Utilizando novamente uma grade de pontos igualmente espaçados em $\mathbb{R}^3$, constatam-se as seguintes relações aproximadas de volume, $\mathcal{V}(\cdot)$: $\mathcal{V}_{(3.6b)} \approx 2.238\mathcal{V}_{(3.6a)}$, $\mathcal{V}_{(3.6c)} \approx 16.89\mathcal{V}_{(3.6b)}$ e $\mathcal{V}_{(3.6c)} \approx 37.80\mathcal{V}_{(3.6a)}$. O maior volume obtido no elipsóide $\mathcal{E}(W_{(3.6c)})$ é explicado pela estrutura de $\mathbb{K}_{(3.6c)}$ que realimenta todo o estado atrasado do sistema.

Outra investigação, conforme discutido na subseção 3.4.2, é feita considerando diferentes taxas de variação no atraso τ_k. Para isso, o problema de otimização (3.67) foi aplicado ao sistema (4.1) sujeito à restrição (3.51) para valores de atraso máximo na lista $\bar{\tau} \in \{3,4,5,6,7\}$, ou seja, fazendo $\tau = 1, \ldots, \bar{\tau}$ e $\tau^+ = \max(1,\tau - \Delta\tau_{\max}), \ldots, \min(\bar{\tau},\tau + \Delta\tau_{\max})$.

Na Figura 4.6 são mostrados os aumentos percentuais na região de atração em relação ao caso com maior taxa possível de variação do atraso, isto é, $|\Delta\tau_k|_{\max} = \bar{\tau} - 1$. Por questões de escala e visualização, não foi incluído nessa figura o aumento da região de atração proporcionado para o caso de atraso incerto e invariante no tempo, isto é, pela limitação $|\Delta\tau|_{\max} = 0$. Tal limitação representou os maiores aumentos na região de atração, que foram de 32.92%, 69.76%, 141.03%, 279.76% e 534.25% para $\bar{\tau} = 3$, $\bar{\tau} = 4$, $\bar{\tau} = 5$, $\bar{\tau} = 6$ e $\bar{\tau} = 7$, respectivamente. Em todos os casos, observa-se que ao reduzir a variação máxima do atraso, o volume da região de condições iniciais aumenta.

Por fim, o desempenho do controlador obtido pela condição do Coroláio 5 foi posto à prova, sendo aplicado o problema de otimização (3.68) ao sistema (4.1) para $\lambda = 0.5$ e $\lambda = 1$.

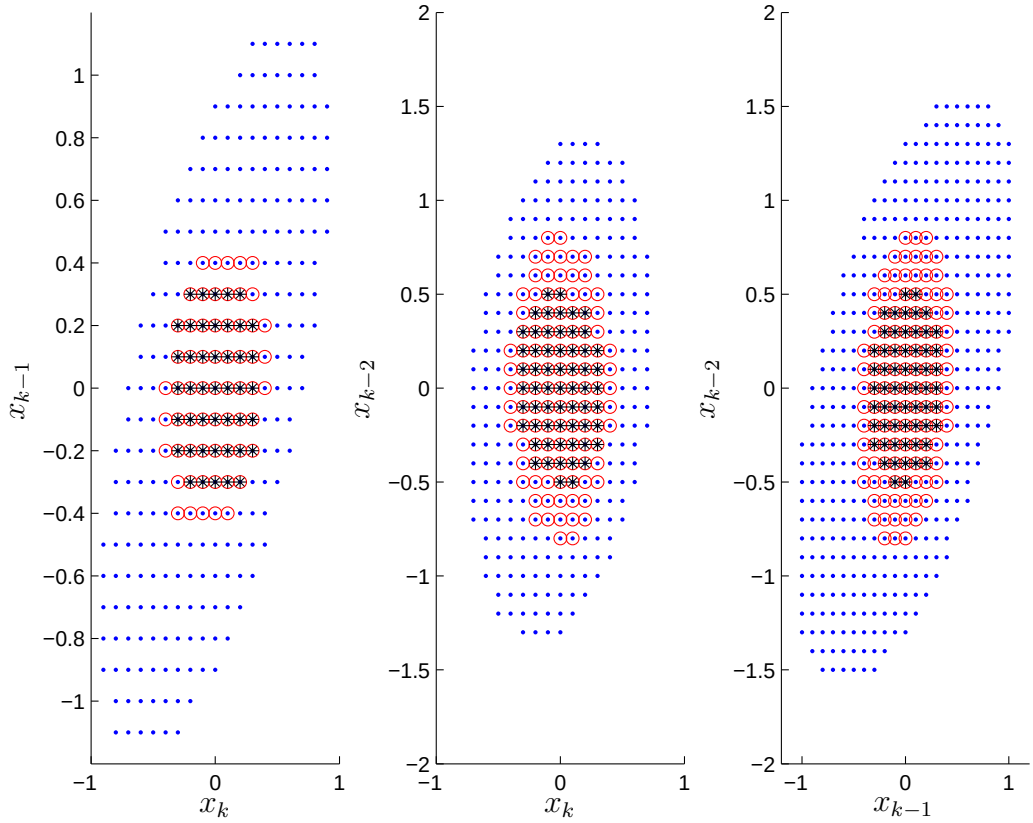


Figura 4.5: Corte nas três dimensões das Regiões de Atração: $\mathcal{E}_{(3.6c)}$ $(\cdot)$, $\mathcal{E}_{(3.6b)}$ $(\circ)$ e $\mathcal{E}_{(3.6a)}$ $(*)$.

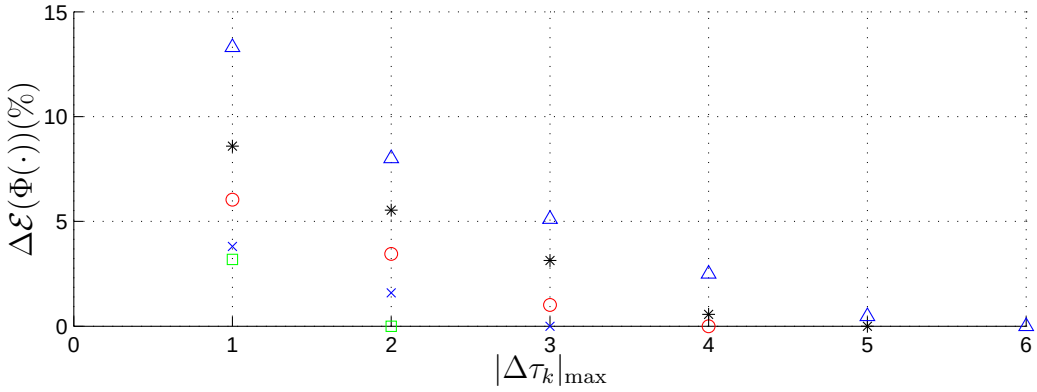


Figura 4.6: Aumento percentual da Região de Atração, em função da limitação da taxa de variação do atraso, para $\bar{\tau} = 3$ $(\square)$, $\bar{\tau} = 4$ $(\times)$, $\bar{\tau} = 5$ $(\circ)$, $\bar{\tau} = 6$ $(*)$ e $\bar{\tau} = 7$ $(\triangle)$.

Conforme discutido na Subseção 3.4.3, tal problema de otimização promove a estabilização do sistema com a restrição

$$\triangle_\lambda V(\varphi_{\bar{\tau},k},\tau_k) = V(\varphi_{\bar{\tau},k+1},\tau_{k+1}) - \lambda V(\varphi_{\bar{\tau},k},\tau_k) < 0,$$

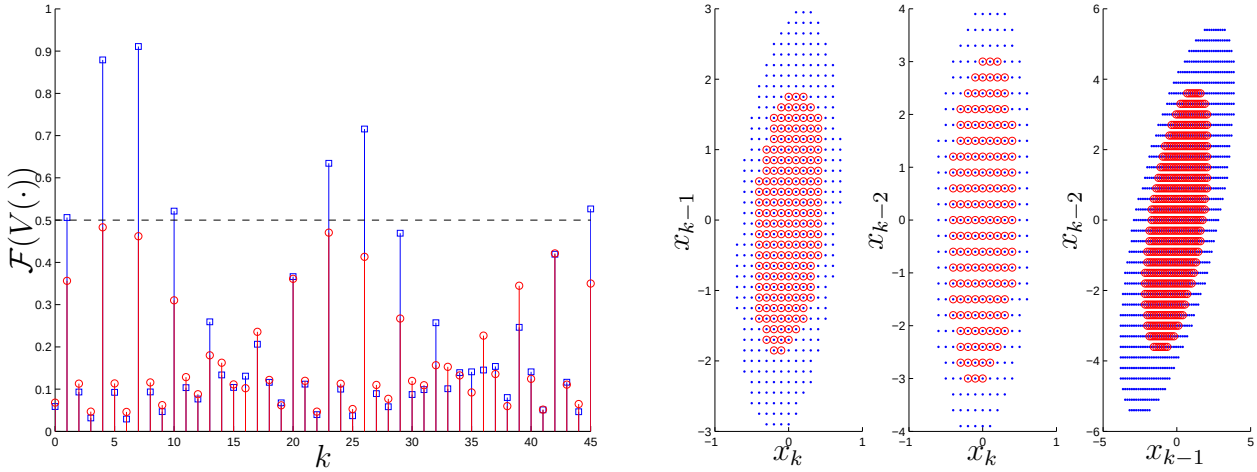
ou seja, a taxa de decaimento da função de energia deve ser limitada a um fator λ, de forma

que

$$\mathcal{F}(V(\cdot)) = \frac{V(\varphi_{\bar{\tau},k+1},\tau_{k+1})}{V(\varphi_{\bar{\tau},k},\tau_k)} < \lambda. \tag{4.5}$$

A Figura 4.7(a) ilustra os valores de $\mathcal{F}(V(\cdot))$ para $\lambda = 0.5$ e $\lambda = 1$. Nesta figura pode-se constatar que, para $\lambda = 0.5$, $\mathcal{F}(V(\cdot))$ não ultrapassa o limite da linha tracejada, verificando a condição (4.5) para todas as amostras, e que o mesmo não ocorre para $\lambda = 1$.

Já na Figura (4.7(b)) são apresentadas a estimativa da região de atração $(\cdot)$, obtida com $\lambda = 1$, e a região de desempenho $(\circ)$, obtida com $\lambda = 0.5$. Note que uma redução no fator λ acarreta uma redução no volume da região, o que, a princípio, sugere que a condição seja conservadora. Entretanto, o leitor deve se ater ao fato de que aqui é feita uma comparação entre a estimativa da região de atração e a região de desempenho. Assim, ganha-se em desempenho ao custo de uma redução na região de estabilidade.



(a) Taxa de decaimento da função de energia $V(\varphi_{\bar{\tau},k},\tau_k)$ para $\lambda = 1$ $(\square)$ e $\lambda = 0.5$ $(\circ)$.

(b) Estimativa da região de atração $(\cdot)$, $\lambda = 1$, e região de desempenho $(\circ)$, $\lambda = 0.5$.

Figura 4.7: Síntese com λ-contratividade.

4.2 Caso Escalar com Incertezas politópicas

Assuma o sistema (4.1) sujeito a um parâmetro incerto $|\xi| \leq 0.3$, tal que $A(\xi) = (1+\xi)A$, $A_d(\xi) = (1+\xi)A_d$ e $B(\xi) = (1+\xi)B$, em que os valores nominais $A = 2$, $A_d = -0.1$ e $B = 1$ são os mesmos utilizados na Seção 4.2. Portanto, os $N = 2$ vértices desse politopo são definidos pelos seguintes valores de matrizes

$$\begin{gathered} A_1 = (1-0.3)A = 0.7A,\ A_2 = (1+0.3)A = 1.3A, \\ A_{d1} = (1-0.3)A_d = 0.7A_d,\ A_{d2} = (1+0.3)A_d = 1.3A_d, \\ B_1 = (1-0.3)B = 0.7B \text{ e } B_2 = (1+0.3)B = 1.3B. \end{gathered}$$

Considere novamente um atraso máximo $\bar{\tau} = 2$ e uma saturação do sinal de controle dada por $|v_k| \leq v_0 = 0.7$.

Foi aplicado o problema de otimização (3.64) ao sistema supracitado, sendo obtido o controlador

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} -1.9570 & 0.0657 & 0.0500 \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

Portanto, a lei de controle (3.5), com o controlador dado em (4.6), garante a estabilidade do sistema. Além disso, foram obtidos os seguintes valores para as demais matrizes

$$W_1(1) = \begin{bmatrix} 0.3866 & 0.9959 & 1.3976 \\ 0.9959 & 13.3036 & 13.8152 \\ 1.3976 & 13.8152 & 30.3381 \end{bmatrix}, \quad W_1(2) = \begin{bmatrix} 0.3859 & 0.9901 & 1.3815 \\ 0.9901 & 13.2907 & 13.6218 \\ 1.3815 & 13.6218 & 30.0159 \end{bmatrix},$$

$$W_2(1) = \begin{bmatrix} 0.3753 & 0.8949 & 1.1234 \\ 0.8949 & 11.8676 & 12.0802 \\ 1.1234 & 12.0802 & 22.7629 \end{bmatrix}, \quad W_2(2) = \begin{bmatrix} 0.3753 & 0.8941 & 1.1246 \\ 0.8941 & 11.8544 & 12.0767 \\ 1.1246 & 12.0767 & 22.7841 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 0.3755 & 0.8985 & 1.1292 \\ 0.8979 & 11.9114 & 12.1450 \\ 1.1286 & 12.1470 & 22.8726 \end{bmatrix}, \qquad H = \begin{bmatrix} 3.2956 & -0.1802 & -0.0670 \\ -0.1802 & 0.1933 & -0.0936 \\ -0.0670 & -0.0936 & 0.0970 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} -0.6195 & -0.3690 & -0.2687 \end{bmatrix}, \qquad Z = \begin{bmatrix} -0.2258 & -0.2200 & -0.2154 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} -0.6899 & 0.0184 & 0.0149 \end{bmatrix},$$

sendo que em $W_i(j)$, o índice i indica o i-ésimo vértice do politopo e j corresponde ao valor do atraso considerado.

A Figura 4.8 apresenta os cortes nos planos da estimativa da região de atração obtida. A título de comparação, essa figura ilustra também os cortes nos planos da estimativa da região de atração obtida para o caso precisamente conhecido na Seção , ou seja, para $A_1 = A_2 = A$, $A_{d1} = A_{d2} = A_d$ e $B_1 = B_2 = B$.

Utilizando uma grade de pontos igualmente espaçados em $\mathbb{R}^3$, constatou-se a seguinte relação aproximada de volume, $\mathcal{V}(\cdot)$: $\mathcal{V}(\mathcal{E}_P) = 2.1012\mathcal{V}(\mathcal{E}_{P(\alpha)})$, em que $\mathcal{E}_P$ e $\mathcal{E}_{P(\alpha)}$ são, respectivamente, as regiões de atração obtidas para o sistema precisamente conhecido e para o sistema incerto.

Considerando a combinação convexa dos vértices

$$\{A,A_d,B\}(\alpha) = 0.2222\{A_1,A_{d1},B_1\} + 0.7778\{A_2,A_{d2},B_2\},$$

ou seja, utilizando um $\alpha = 0.2222$ fixo, o controlador $\mathbb{K}$ obtido foi implementado com a condição

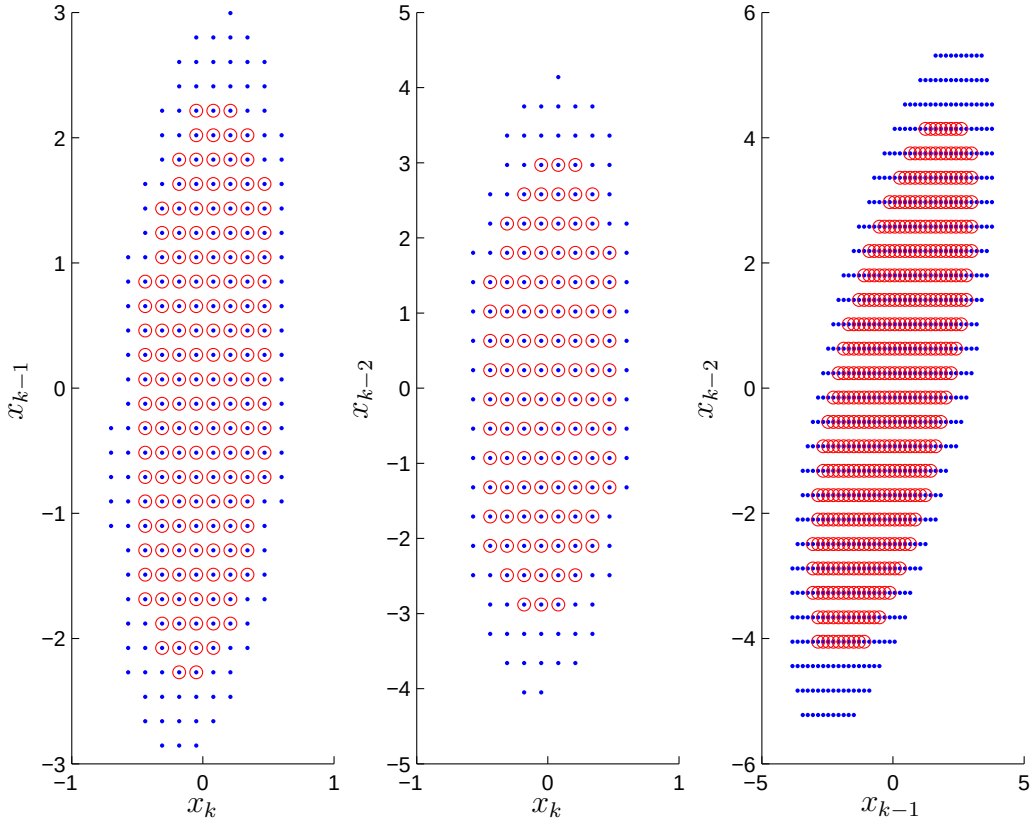


Figura 4.8: Região de Atração: Sistema Precisamente Conhecido ($\cdot$) e Sistema Incerto ($\circ$).

inicial $x_{-2} = 0.0113$, $x_{-1} = 0.0302$ e $x_0 = -0.5477$, sendo a resposta do sistema apresentada na Figura (4.9).

Pode-se constatar da figura que o sinal de controle satura nas duas primeiras amostragens sem, no entanto, instabilizar o sistema.

Considere novamente o sistema (3.1), em que a matrix A_d é multiplicada por um fator δ, ou seja

$$x_{k+1} = A(\alpha)x_k + A_d(\alpha)\delta x_{k-\tau_k} + B(\alpha)\mathtt{sat}(v_k). \tag{4.7}$$

Variou-se o valor de δ entre 1 e 9, sendo que para cada valor foi resolvido o problema de otimização (3.64) para as três estruras de ganho descritas em (3.6), sendo calculados os volumes dos elipsóides obtidos. Mais uma vez, a região de maior volume corresponde à estrutura (3.6c), e a de menor à estrutura (3.6a), conforme esperado.

São apresentadas na Figura 4.10 as razões dos volumes $\mathcal{V}_{(3.6c)}/\mathcal{V}_{(3.6a)}$ ($\square$), $\mathcal{V}_{(3.6b)}/\mathcal{V}_{(3.6a)}$ ($\circ$) e $\mathcal{V}_{(3.6c)}/\mathcal{V}_{(3.6b)}$ ($\triangle$), em que os subíndices referem-se aos números das equações que definem as estruturas dos ganhos utilizados.

Note que, quanto maior a norma de A_d em relação à norma de A, mais relevante

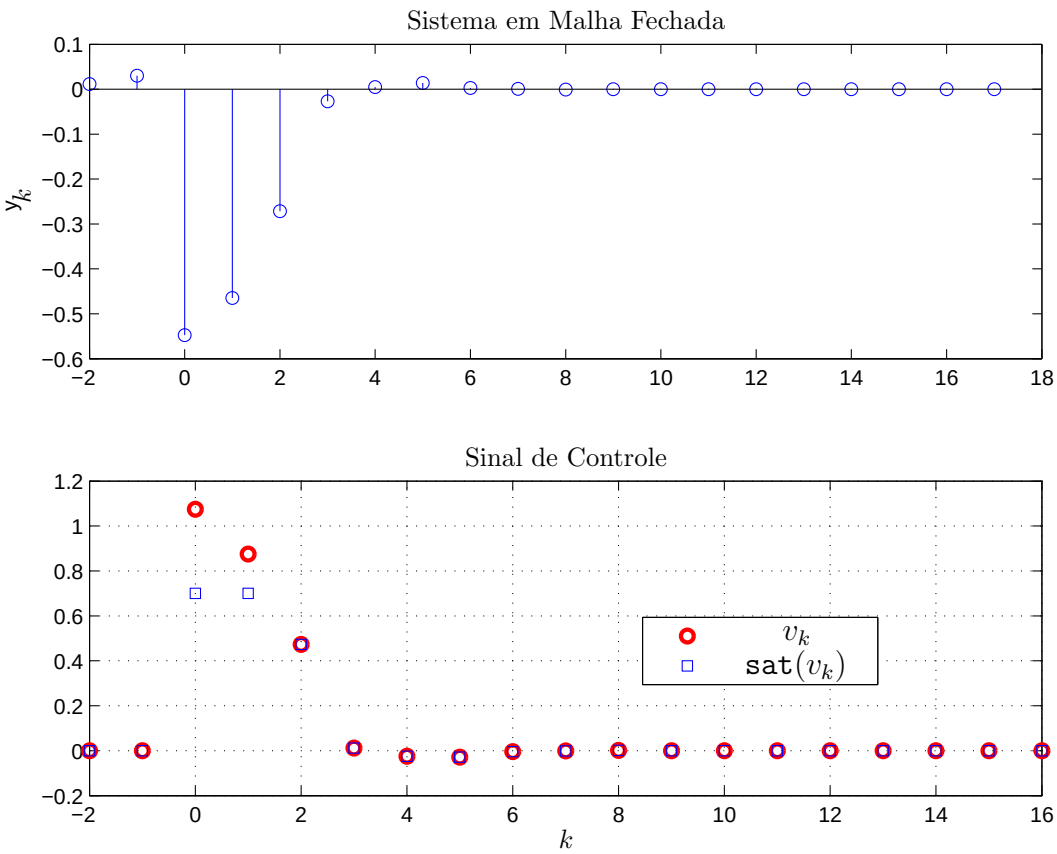


Figura 4.9: Resposta do sistema para condição inicial $x_{-2} = 0.0113$, $x_{-1} = 0.0302$ e $x_0 = -0.5477$, sinal de controle sem saturação (○) e sinal do atuador (□).

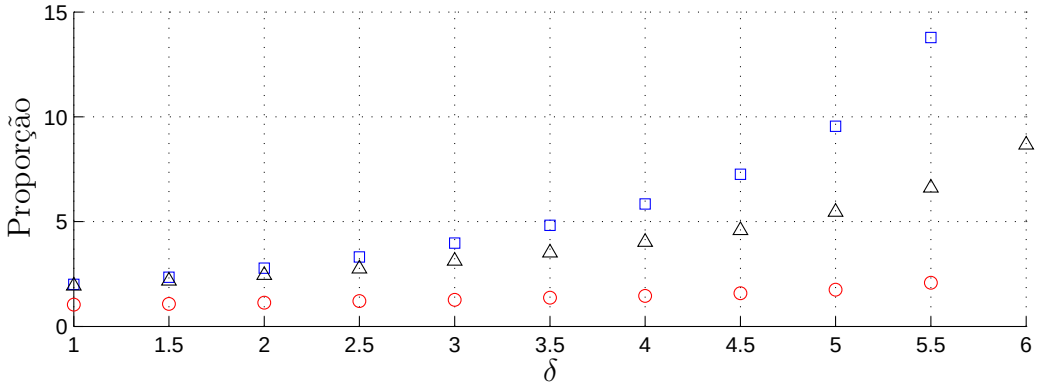


Figura 4.10: Razão dos volumes $\mathcal{V}_{(3.6c)}$ (□) e $\mathcal{V}_{(3.6b)}$ (○) em relação ao volume $\mathcal{V}_{(3.6a)}$ e do volume $\mathcal{V}_{(3.6c)}$ em relação ao volume $\mathcal{V}_{(3.6b)}$ (△), todos em função de δ.

passa a ser a realimentação dos estados atrasados. Para uma estrutura de controlador $\mathbb{K}_{(3.6c)}$, o valor máximo pelo qual se pode multiplicar a matriz A_d sem impossibilitar a estabilidade do sistema em malha fechada foi de $\delta = 14.5$. Já os limites para as estruturas de controlador $\mathbb{K}_{(3.6a)}$ e $\mathbb{K}_{(3.6b)}$ foram, respectivamente, $\delta = 5.5$ e $\delta = 6$, conforme apresentado na Figura 4.10. Se

comparado com os resultados apresentados na Figura 4.4 (sistemas precisamente conhecidos), podemos constatar que os limites de δ, para os quais a estabilização do sistema é possível, foram reduzidos.

Em particular, para $\delta = 5$ foram obtidos $\mathbb{K}_{(3.6c)} = \begin{bmatrix}-1.7262 & 0.3084 & 0.2447\end{bmatrix}$, $\mathbb{K}_{(3.6b)} = \begin{bmatrix}-1.7796 & 0 & 0.1707\end{bmatrix}$ e $\mathbb{K}_{(3.6a)} = \begin{bmatrix}-1.9240 & 0 & 0\end{bmatrix}$. Além disso, foram obtidos os seguintes valores para as demais matrizes

$$W_1(1)_{(3.6c)} = \begin{bmatrix}0.7635 & 1.2199 & 1.5671\\ 1.2199 & 3.1023 & 3.4848\\ 1.5671 & 3.4848 & 5.8824\end{bmatrix}, \quad W_1(2)_{(3.6c)} = \begin{bmatrix}0.7289 & 1.1544 & 1.4174\\ 1.1544 & 3.0102 & 3.1607\\ 1.4174 & 3.1607 & 5.2881\end{bmatrix},$$

$$W_2(1)_{(3.6c)} = \begin{bmatrix}0.6898 & 1.0792 & 1.2489\\ 1.0792 & 2.7873 & 2.9370\\ 1.2489 & 2.9370 & 4.4333\end{bmatrix}, \quad W_2(2)_{(3.6c)} = \begin{bmatrix}0.6897 & 1.0786 & 1.2488\\ 1.0786 & 2.7857 & 2.9362\\ 1.2488 & 2.9362 & 4.4337\end{bmatrix},$$

$$U_{(3.6c)} = \begin{bmatrix}0.6902 & 1.0802 & 1.2505\\ 1.0802 & 2.7902 & 2.9414\\ 1.2503 & 2.9409 & 4.4395\end{bmatrix}, \quad H_{(3.6c)} = \begin{bmatrix}3.8081 & -1.1391 & -0.3179\\ -1.1391 & 1.5295 & -0.6922\\ -0.3179 & -0.6922 & 0.7738\end{bmatrix},$$

$$Y_{(3.6c)} = \begin{bmatrix}-0.5523 & -0.2844 & -0.1651\end{bmatrix}, \quad Z_{(3.6c)} = \begin{bmatrix}-0.1517 & -0.1343 & -0.1220\end{bmatrix},$$

$$G_{(3.6c)} = \begin{bmatrix}-0.3856 & 0.0518 & 0.0468\end{bmatrix},$$

$$W_1(1)_{(3.6a)} = \begin{bmatrix}0.1602 & 0.0129 & 0.0046\\ 0.0129 & 0.2351 & -0.0058\\ 0.0046 & -0.0058 & 0.4606\end{bmatrix}, \quad W_1(2)_{(3.6a)} = \begin{bmatrix}0.1600 & 0.0124 & 0.0028\\ 0.0124 & 0.2464 & -0.0088\\ 0.0028 & -0.0088 & 0.4460\end{bmatrix},$$

$$W_2(1)_{(3.6a)} = \begin{bmatrix}0.1585 & 0.0170 & -0.0080\\ 0.0170 & 0.1889 & 0.0222\\ -0.0080 & 0.0222 & 0.3683\end{bmatrix}, \quad W_2(2)_{(3.6a)} = \begin{bmatrix}0.1586 & 0.0167 & -0.0079\\ 0.0167 & 0.1909 & 0.0221\\ -0.0079 & 0.0221 & 0.3660\end{bmatrix},$$

$$U_{(3.6a)} = \begin{bmatrix}0.1619 & 0 & 0\\ 0 & 0.1938 & 0\\ 0 & 0 & 0.3771\end{bmatrix}, \quad H_{(3.6a)} = \begin{bmatrix}6.3806 & -0.5949 & 0.1735\\ -0.5949 & 5.3876 & -0.3360\\ 0.1735 & -0.3360 & 2.7563\end{bmatrix},$$

$$Y_{(3.6a)} = \begin{bmatrix}-0.3116 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad Z_{(3.6a)} = \begin{bmatrix}-0.0326 & -0.0208 & -0.0729\end{bmatrix},$$

$$G_{(3.6a)} = \begin{bmatrix}-0.2015 & -0.1072 & -0.1935\end{bmatrix},$$

$$W_1(1)_{(3.6b)} = \begin{bmatrix} 0.1820 & 0.0339 & 0.0394 \\ 0.0339 & 0.3104 & 0.0264 \\ 0.0394 & 0.0264 & 0.9451 \end{bmatrix}, \quad W_1(2)_{(3.6b)} = \begin{bmatrix} 0.1823 & 0.0311 & 0.0408 \\ 0.0311 & 0.3283 & 0.0098 \\ 0.0408 & 0.0098 & 0.9505 \end{bmatrix},$$

$$W_2(1)_{(3.6b)} = \begin{bmatrix} 0.1788 & 0.0459 & 0.0176 \\ 0.0459 & 0.2595 & 0.1050 \\ 0.0176 & 0.1050 & 0.7974 \end{bmatrix}, \quad W_2(2)_{(3.6b)} = \begin{bmatrix} 0.1788 & 0.0456 & 0.0176 \\ 0.0456 & 0.2609 & 0.1043 \\ 0.0176 & 0.1043 & 0.7967 \end{bmatrix},$$

$$U_{(3.6b)} = \begin{bmatrix} 0.1785 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2512 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6836 \end{bmatrix}, \quad H_{(3.6b)} = \begin{bmatrix} 5.8617 & -1.0397 & 0.0073 \\ -1.0397 & 4.2558 & -0.5370 \\ 0.0073 & -0.5370 & 1.3264 \end{bmatrix},$$

$$Y_{(3.6b)} = \begin{bmatrix} -0.3176 & 0 & 0.1167 \end{bmatrix}, \quad Z_{(3.6b)} = \begin{bmatrix} -0.0304 & -0.0369 & -0.0331 \end{bmatrix},$$

$$G_{(3.6b)} = \begin{bmatrix} -0.1701 & -0.1468 & -0.0485 \end{bmatrix},$$

sendo que em $W_i(j)$, o índice i indica o i-ésimo vértice do politopo e j corresponde ao valor do atraso considerado.

Cada um desses ganhos gera uma região formada pela interseção de $\bar{\tau}N = 4$ elipsóides, regiões estas denotadas, respectivamente, por $\mathcal{E}(W_{(3.6c)})$, $\mathcal{E}(W_{(3.6a)})$ e $\mathcal{E}(W_{(3.6b)})$. Tais regiões têm suas interseções com os planos do espaço de estado apresentados na Figura 4.11. Conforme esperado, a menor região, marcada com $*$, corresponde à realimentação definida por (3.6a) e a maior, marcada com $\cdot$, à realimentação completa do estado atrasado, (3.6c).

Utilizando novamente uma grade de pontos igualmente espaçados em $\mathbb{R}^3$, constatam-se as seguintes relações aproximadas de volume, $\mathcal{V}(\cdot)$: $\mathcal{V}_{(3.6b)} \approx 1.748\mathcal{V}_{(3.6a)}$, $\mathcal{V}_{(3.6c)} \approx 5.462\mathcal{V}_{(3.6b)}$ e $\mathcal{V}_{(3.6c)} \approx 9.548\mathcal{V}_{(3.6a)}$. Novamente, o maior volume obtido no elipsóide $\mathcal{E}_{(3.6c)}$ é explicado pela estrutura de $\mathbb{K}_{(3.6c)}$ que realimenta todo o estado atrasado do sistema.

No intuido de se investigar os efeitos da limitação da taxa de variação do atraso, conforme discutido na subseção 3.4.2, foi aplicado o problema de otimização (3.64) ao sistema (3.1) sujeito à restrição (3.51) para valores de atraso máximo na lista $\bar{\tau} \in \{3,4,5,6,7\}$, ou seja, fazendo $\tau = 1, \ldots, \bar{\tau}$ e $\tau^+ = \max(1,\tau - \Delta\tau_{\max}), \ldots, \min(\bar{\tau},\tau + \Delta\tau_{\max})$.

Na Figura 4.12 são mostrados os aumentos percentuais na região de atração em relação ao caso com maior taxa possível de variação do atraso, isto é, $|\Delta\tau_k|_{\max} = \bar{\tau} - 1$. Note que a diferença entre os resultados apresentados nessa figura e os apresentados na Figura (4.6) é bem sutil. Novamente, por questões de escala e visualização, não foi incluido nessa figura o aumento da região de atração proporcionado para o caso de atraso incerto e invariante no tempo, isto é, pela limitação $|\Delta\tau|_{\max} = 0$. Tal limitação representou os maiores aumentos na

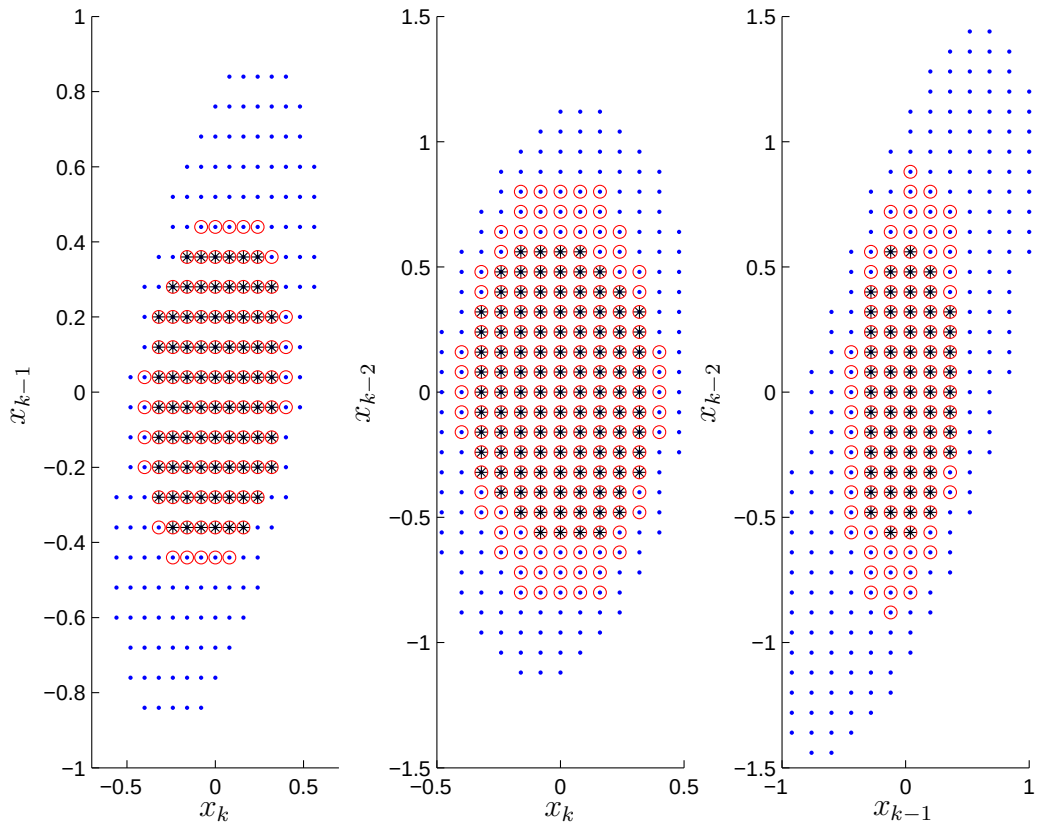


Figura 4.11: Corte nas três dimensões das Regiões de Atração: $\mathcal{E}_{(3.6c)}$ $(\cdot)$, $\mathcal{E}_{(3.6a)}$ $(*)$ e $\mathcal{E}_{(3.6b)}$ $(\circ)$.

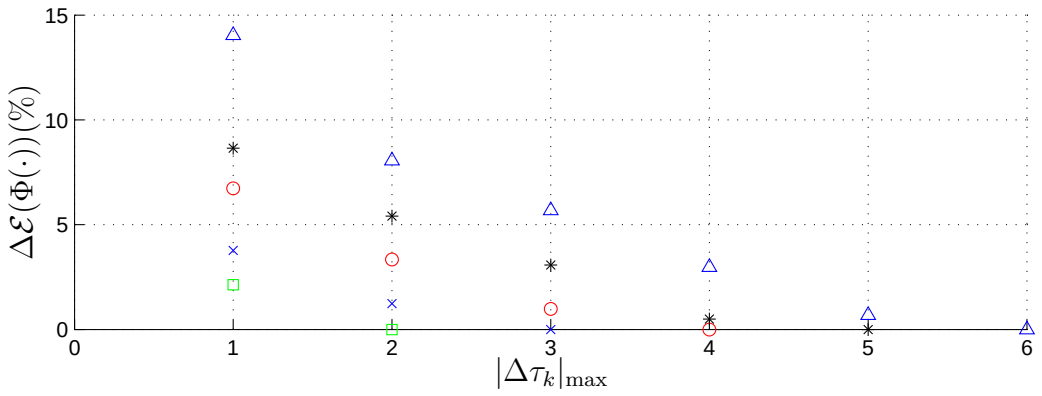


Figura 4.12: Aumento percentual da Região de Atração, em função da limitação da taxa de variação do atraso, para $\bar{\tau} = 3$ $(\square)$, $\bar{\tau} = 4$ $(\times)$, $\bar{\tau} = 5$ $(\circ)$, $\bar{\tau} = 6$ $(*)$ e $\bar{\tau} = 7$ $(\triangle)$.

região de atração, que foram de 23.79%, 59.27%, 124.26%, 242.68% e 481.99% para $\bar{\tau} = 3$, $\bar{\tau} = 4$, $\bar{\tau} = 5$, $\bar{\tau} = 6$ e $\bar{\tau} = 7$, respectivamente. Em todos os casos, observa-se que ao reduzir a variação máxima do atraso, o volume da região de condições iniciais aumenta.

Com o propósito de testar o desempenho do controlador obtido pela condição proposta, foi aplicado o problema de otimização (3.65) ao sistema (3.1) para $\lambda = 0.5$ e $\lambda = 1$, de

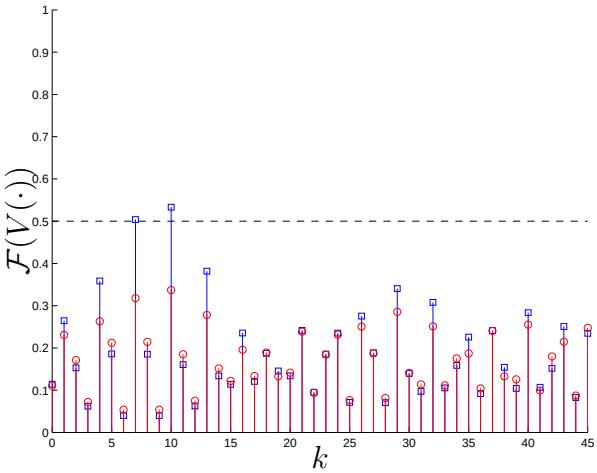
forma semelhante ao que foi feito no final da Seção 4.2. Conforme discutido na Subseção 3.4.3, tal problema de otimização promove a estabilização do sistema com a restrição

$$\triangle_\lambda V(\varphi_{\bar{\tau},k},\alpha,\tau_k) = V(\varphi_{\bar{\tau},k+1},\alpha,\tau_{k+1}) - \lambda V(\varphi_{\bar{\tau},k},\alpha,\tau_k) < 0,$$

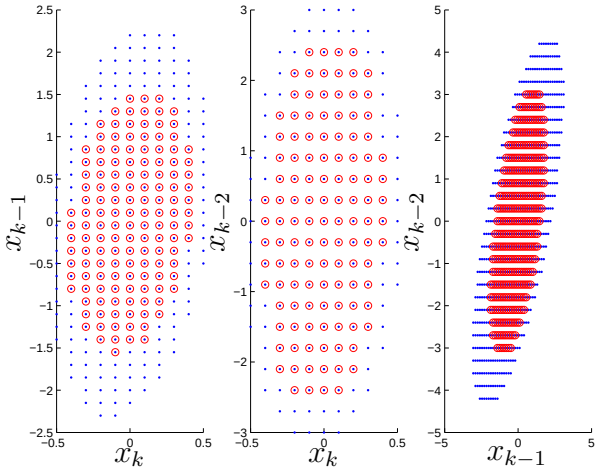
ou seja, a taxa de decaimento da função de energia deve ser limitada a um fator λ, de forma que

$$\mathcal{F}(V(\cdot)) = \frac{V(\varphi_{\bar{\tau},k+1},\alpha,\tau_{k+1})}{V(\varphi_{\bar{\tau},k},\alpha,\tau_k)} < \lambda. \tag{4.8}$$

A Figura (4.13(a)) ilustra os valores de $\mathcal{F}(V(\cdot))$ para $\lambda = 0.5$ e $\lambda = 1$, na qual pode-se constatar que, para $\lambda = 0.5$, a inequação (4.8) é verificada em todas as amostras, o que não ocorre para $\lambda = 1$. Já na Figura (4.13(b)) são apresentadas a estimativa da região de atração $(\cdot)$, obtida com $\lambda = 1$, e região de desempenho $(\circ)$, obtida com $\lambda = 0.5$. Novamente pode-se constatar que uma redução no fator λ acarretou uma redução no volume da região encontrada, evidenciando, mais uma vez, a relação entre desempenho e volume da região de estabilidade.



(a) Taxa de decaimento da função de energia $V(\varphi_{\bar{\tau},k},\tau_k)$ para $\lambda = 1$ $(\square)$ e $\lambda = 0.5$ $(\circ)$.



(b) Estimativa da região de atração $(\cdot)$, $\lambda = 1$, e região de desempenho $(\circ)$, $\lambda = 0.5$.

Figura 4.13: Síntese com λ-contratividade.

4.3 Exemplo 2×2

Considere o sistema (4.1) com

$$A = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.15 \\ 0.03 & 0.8 \end{bmatrix}, \; A_d = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

com um atraso máximo $\bar{\tau} = 1$ e uma saturação do sinal de controle dada por $|u_k| \leq u_0 = 15$. Essas matrizes correspondem à discretização, com tempo de amostragem $T_s = 0.1s$, do exemplo

retirado de (Tarbouriech & Gomes da Silva Jr. 2000). A fim de se analisar a resposta temporal do sistema, considere

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o problema de otimização (3.67) foi obtido o ganho estático, bem como as demais matrizes, apresentadas a seguir.

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} -0.6516 & -0.1342 & 0.0001 & 0.0666 \end{bmatrix},$$

$$W(1) = 10^5 \begin{bmatrix} 0.1835 & -0.0492 & 0.1577 & 0.0651 \\ -0.0492 & 0.4406 & -0.0129 & 0.2202 \\ 0.1577 & -0.0129 & 1.1070 & 0.0091 \\ 0.0651 & 0.2202 & 0.0091 & 1.0341 \end{bmatrix}, \quad Y = 10^4 \begin{bmatrix} -1.0837 \\ -0.1602 \\ -0.0001 \\ 0.1528 \end{bmatrix}^T,$$

$$U = 10^4 \begin{bmatrix} 1.8305 & -0.3972 & 0.0001 & 0.4636 \\ -0.6375 & 4.2060 & -0.0001 & 0.0762 \\ 1.5772 & -0.1288 & 7.3479 & 0.0914 \\ 0.3528 & 2.1801 & 0.0001 & 6.9808 \end{bmatrix}, \quad Z = 10^3 \begin{bmatrix} -9.0015 \\ -1.3644 \\ -0.0001 \\ 1.3648 \end{bmatrix}^T,$$

$$H = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.7140 & 0.1059 & -0.0814 & -0.0636 \\ 0.1059 & 0.2877 & -0.0086 & -0.0586 \\ -0.0814 & -0.0086 & 0.1435 & 0.0056 \\ -0.0636 & -0.0586 & 0.0056 & 0.1437 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} -0.5421 \\ -0.1131 \\ 0.0001 \\ 0.0568 \end{bmatrix}^T.$$

A Figura 4.14 ilustra a região de atração obtida para o exemplo acima.

Note que cada um desses conjuntos representa a interseção da região de atração com o seu respectivo plano (x_k ou x_{k-1}). Assim, podem ser interpretados com sendo as condições iniciais admissíveis quando os estados nos demais planos permanecem na origem. Por exemplo, o conjunto no plano $x_{2,k} \times x_{1,k}$ da Figura 4.14 representa as condições iniciais adimissíveis quando $x_{1,-1} = x_{2,-1} = 0$.

Suponha agora uma condição inicial fixa e fora da origem no plano de estado atrasado x_{k-1} dessa região de atração dada por $x_{-1} = \begin{bmatrix} x_{1,-1} & x_{2,-1} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -100 & 150 \end{bmatrix}^T$ e indicada por $(*)$ na Figura 4.14. Assim, podemos encontrar uma região de atração no plano de estado atual x_k para as quais a estabilidade do sistema é garantida. A Figura 4.15(a) indica essa região $(-)$ juntamente com a região obtida para $x_{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ $(\cdot-)$. Já a Figura 4.15(b) apresenta as trajetórias dos estados para diversas condições iniciais localizadas no limite dessa região.

Da Figura 4.15(a) podemos perceber que a região formada no plano de estado atual x_k a partir de uma condição inicial fixa no plano de estado atrasado x_{k-1} diminui à medida que x_{-1} se afasta da origem. Já da Figura 4.15(b), podemos constatar que, para algumas codições

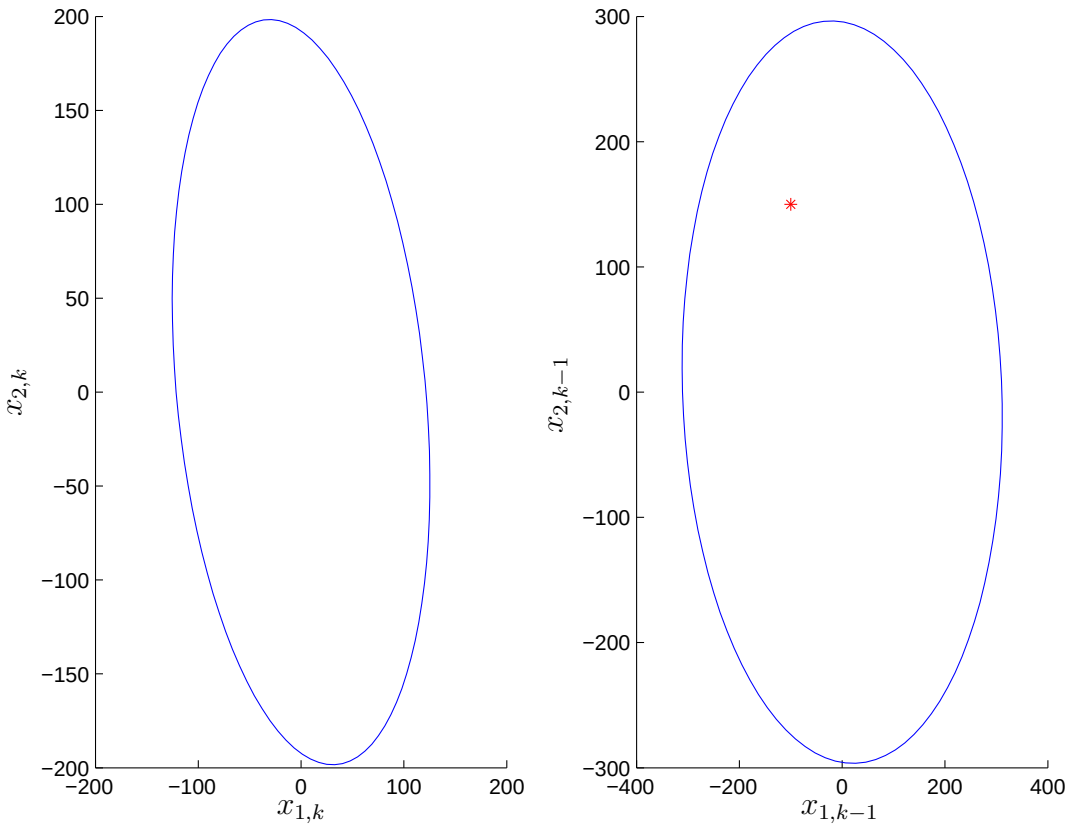
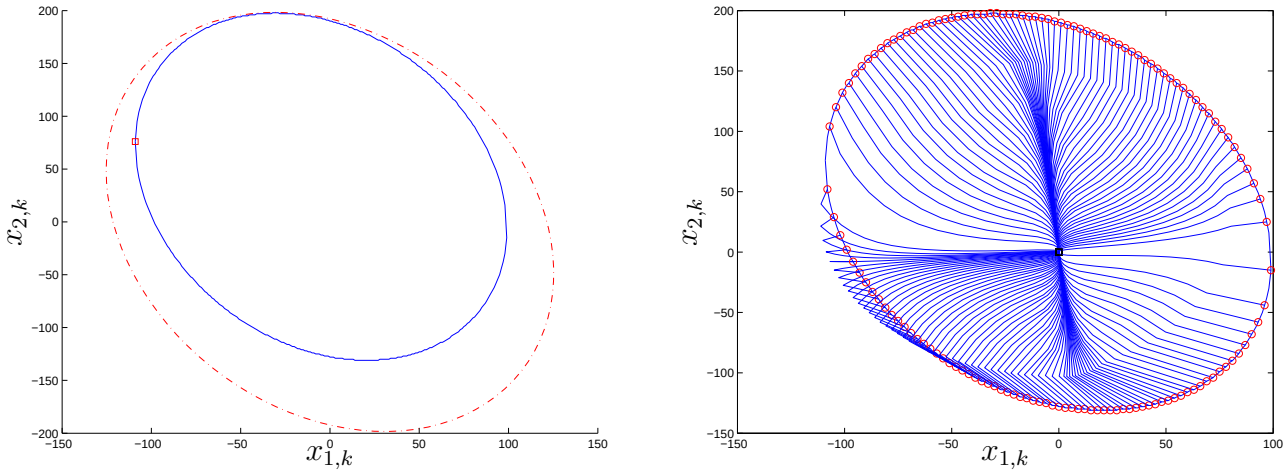


Figura 4.14: Região de Atração. Condição Inicial $x_{1,-1} = -100$ e $x_{2,-1} = 150$ $(*)$.



(a) Região de atração no plano de estado atual x_k para $x_{1,-1} = -100$ e $x_{2,-1} = 150$ $(-)$ e para $x_{1,-1} = x_{2,-1} = 0$ $(\cdot-)$. Condição inicial $x_{1,0} = -109$ e $x_{2,0} = 76$ $(\square)$.

(b) Trajetória dos estados no plano de estado atual x_k da região de atração: condições iniciais $(\circ)$ e pontos de convergência $(\square)$.

Figura 4.15: Região de atração para determinada condição inicial em x_{k-1}: $x_{1,-1} = -100$ e $x_{2,-1} = 150$ $(-)$ e $x_{1,-1} = x_{2,-1} = 0$ $(\cdot-)$.

iniciais, a trajetória dos estados sai do corte da região de atração em questão e em seguida converge para a origem. Note que nesse caso as trajetórias deixa o corte $x_{-1} = \begin{bmatrix} x_{1,-1} & x_{2,-1} \end{bmatrix}^T =$

$\begin{bmatrix}-100 & 150\end{bmatrix}^T$, mas não deixa a região de atração.

Visando avaliar a saturação do sinal de controle, o controlador $\mathbb{K}$ foi implementado considerando a sequência de condições iniciais $x_{-1} = \begin{bmatrix}x_{1,-1} & x_{2,-1}\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}-100 & 150\end{bmatrix}^T$ e $x_0 = \begin{bmatrix}x_{1,0} & x_{2,0}\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}-109 & 76\end{bmatrix}^T$, sendo esta última indicada na Figura 4.15(a) ($\square$). A correspondente resposta temporal é apresentada na Figura 4.16.

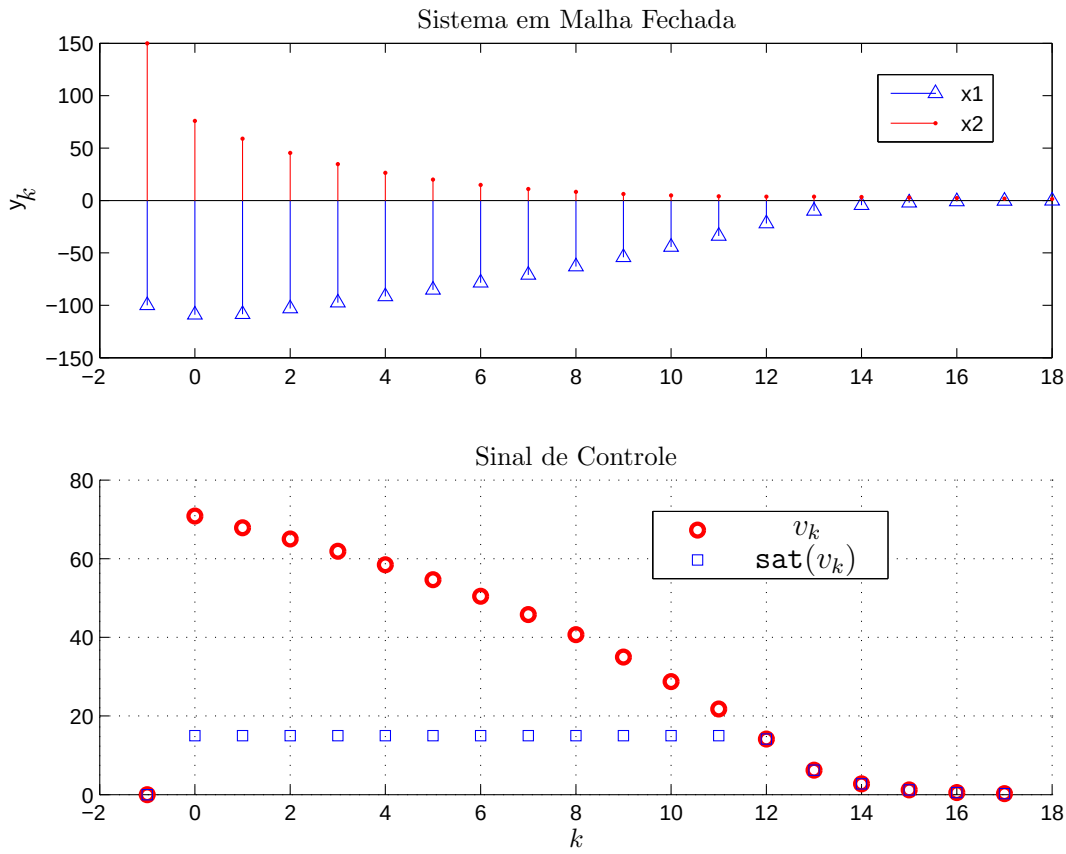


Figura 4.16: Resposta do sistema para a sequência de condições iniciais $x_{1,k-1} = -100$, $x_{2,k-1} = 150$, $x_{1,k-1} = -109$ e $x_{2,k-1} = 0$, sinal de controle sem saturação ($\circ$) e sinal do atuador ($\square$).

Percebe-se que, embora o sinal do atuador sature nas amostras de $k = 2$ a $k = 13$, os estados convergem para a origem, permanecendo o sistema estável.

Por fim, considere nesse sistema um novo valor para o atraso máximo dado por $\bar{\tau} = 5$. Aplicando novamente o problema de otimização (3.67) para esse novo valor de $\bar{\tau}$, foi obtido o seguinte ganho estático

$$\mathbb{K} = [-0.8655 \quad -0.2276 \quad 0.0481 \quad 0.0739 \quad 0.0297 \quad 0.0623$$
$$0.0187 \quad 0.0506 \quad 0.0101 \quad 0.0361 \quad 0.0004 \quad 0.0185].$$

Devido à dimensão do sistema aumentado ($n(\bar{\tau}+1) = 12$), as demais matrizes foram aqui

suprimidas.

A Figura 4.17 apresenta os cortes dos elipóides obtidos (cinco no total, pois $\bar{\tau} = 5$) no seis planos x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, x_{k-3}, x_{k-4} e x_{k-5}. Mais uma vez, a região de atração é estimada por meio da interseção desses elipsóides.

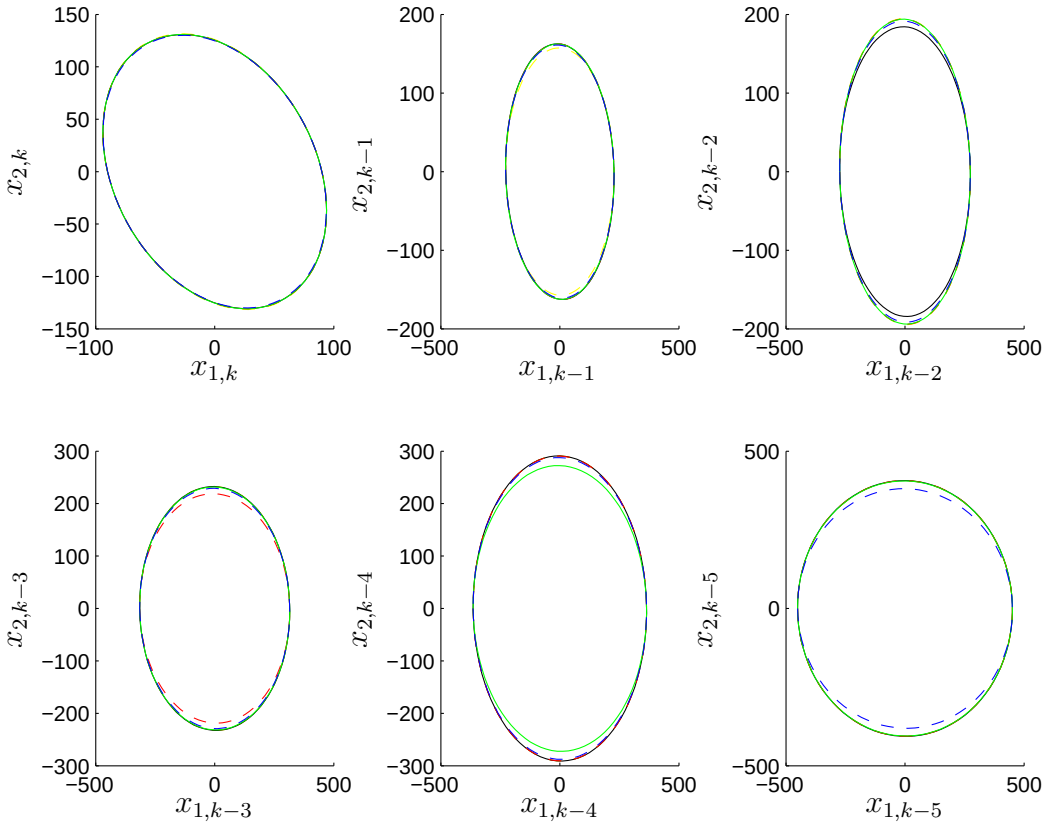


Figura 4.17: Cortes dos elipsóides obtidos para $\tau_k = 1, \ldots, 5$.

4.4 Sistema livre de atraso

Considere agora o sistema discreto no tempo e livre de atrasos dado por

$$\Omega : \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + B\mathtt{sat}(v_k) \\ y_k = Cx_k \end{cases}, \tag{4.9}$$

cujas matrizes são dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.15 \\ 0.03 & 0.8 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e saturação do atuador dada por $|u_k| \leq u_0 = 15$.

Serão consideradas duas condições de síntese por realimentação de estados: uma realimentado apenas o estado atual, utilizando um controlador $\mathbb{K}_1$, e outra realimentando o estado atual e o estado passado (x_{k-1}), por meio de um controlador $\mathbb{K}_2$. A fim de facilitar a compreensão, tal controlador é reescrito como $\mathbb{K}_2 = \begin{bmatrix} K_{2a} & K_{2b} \end{bmatrix}$, em que K_{2a} realimenta os componentes do estado atual e K_{2b} os componentes do estado passado.

Para encontrar $\mathbb{K}_1$, foi aplicado o problema de otimização (3.67) com $W(\tau^+) = W(\tau) = W$ e $\Lambda(\tau) = A$ $\forall \tau, \tau^+$, $\mathbb{B} = B$ e demais matrizes com as dimensões apropriadas. Assim, foram obtidas as seguintes matrizes

$$\mathbb{K}_1 = \begin{bmatrix} -0.5135 & -0.2214 \end{bmatrix},$$

$$W_1 = 10^4 \begin{bmatrix} 2.2327 & -1.6641 \\ -1.6641 & 4.5110 \end{bmatrix}, \quad Y_1 = 10^3 \begin{bmatrix} -7.4415 & -2.3561 \end{bmatrix},$$

$$U_1 = 10^4 \begin{bmatrix} 1.9481 & -1.0048 \\ -1.1570 & 3.3949 \end{bmatrix}, \quad Z_1 = 10^3 \begin{bmatrix} -5.8261 & -1.7457 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.6437 & 0.2340 \\ 0.2340 & 0.3147 \end{bmatrix}, \qquad G_1 = \begin{bmatrix} -0.3999 & -0.1698 \end{bmatrix}.$$

Já o controlador $\mathbb{K}_2$, o qual realimenta o estado atual e o estado passado, foi obtido aplicando o problema de otimização (3.67) com $\bar{\tau} = 1$ e $A_d = \mathbf{0}$. Da mesma forma feita para $\mathbb{K}_2$, reescrevemos as matrizes como $Y_2 = \begin{bmatrix} Y_{2a} & Y_{2b} \end{bmatrix}$, $Z_2 = \begin{bmatrix} Z_{2a} & Z_{2b} \end{bmatrix}$ e $G_2 = \begin{bmatrix} G_{2a} & G_{2b} \end{bmatrix}$. Assim, foram obtidas as seguintes matrizes

$$\mathbb{K}_2 = \begin{bmatrix} K_{2a} & K_{2b} \end{bmatrix}, \text{ com } K_{2a} = \begin{bmatrix} -0.6699 & -0.3015 \end{bmatrix} \text{ e } K_{2b} = 10^{-6} \begin{bmatrix} -0.0205 & -0.1447 \end{bmatrix},$$

$$W_2 = 10^5 \begin{bmatrix} 0.2131 & -0.1477 & 0.1710 & -0.0542 \\ -0.1477 & 0.3889 & -0.0826 & 0.1824 \\ 0.1710 & -0.0826 & 1.1185 & -0.0420 \\ -0.0542 & 0.1824 & -0.0420 & 1.0125 \end{bmatrix},$$

$$U_2 = 10^4 \begin{bmatrix} 2.0682 & -1.2847 & -0.0001 & -0.0001 \\ -1.3884 & 3.7057 & 0.0001 & 0.0001 \\ 1.7100 & -0.8261 & 7.3692 & -0.0001 \\ -0.5416 & 1.8236 & -0.4199 & 6.8395 \end{bmatrix},$$

$$H_2 = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.7542 & 0.2642 & -0.0781 & -0.0105 \\ 0.2642 & 0.3958 & -0.0111 & -0.0494 \\ -0.0781 & -0.0111 & 0.1381 & 0.0023 \\ -0.0105 & -0.0494 & 0.0023 & 0.1345 \end{bmatrix},$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} Y_{2a} & Y_{2b} \end{bmatrix}, \text{ com } Y_{2a} = 10^3 \begin{bmatrix} -9.6688 & -2.5664 \end{bmatrix} \text{ e } Y_{2b} = 10^{-2} \begin{bmatrix} -0.3887 & -0.8328 \end{bmatrix},$$

$$Z_2 = \begin{bmatrix} Z_{2a} & Z_{2b} \end{bmatrix}, \text{ com } Z_{2a} = 10^3 \begin{bmatrix} -8.0305 & -2.0932 \end{bmatrix} \text{ e } Z_{2b} = 10^{-2} \begin{bmatrix} -0.3351 & -0.8618 \end{bmatrix},$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} G_{2a} & G_{2b} \end{bmatrix}, \text{ com } G_{2a} = \begin{bmatrix} -0.5554 & -0.2490 \end{bmatrix} \text{ e } G_{2b} = 10^{-6} \begin{bmatrix} -0.0207 & -0.1450 \end{bmatrix}.$$

Note que, em geral, os termos que realimentam o estado passado são menores, em módulo, do que aqueles que realimentam o estado atual. A Figura 4.18 apresenta os cortes das regiões de atração obtida. Nessa figura, pode-se constatar que a região de atração para o caso em que a lei de controle realimenta apenas o estado atual $(\cdot-)$ é constituída apenas por um conjunto no plano x_k, enquanto que para o caso em que a lei de controle realimenta o estado atual e o estado passado $(-)$ possui cortes tanto no plano x_k quanto no plano x_{k-1}.

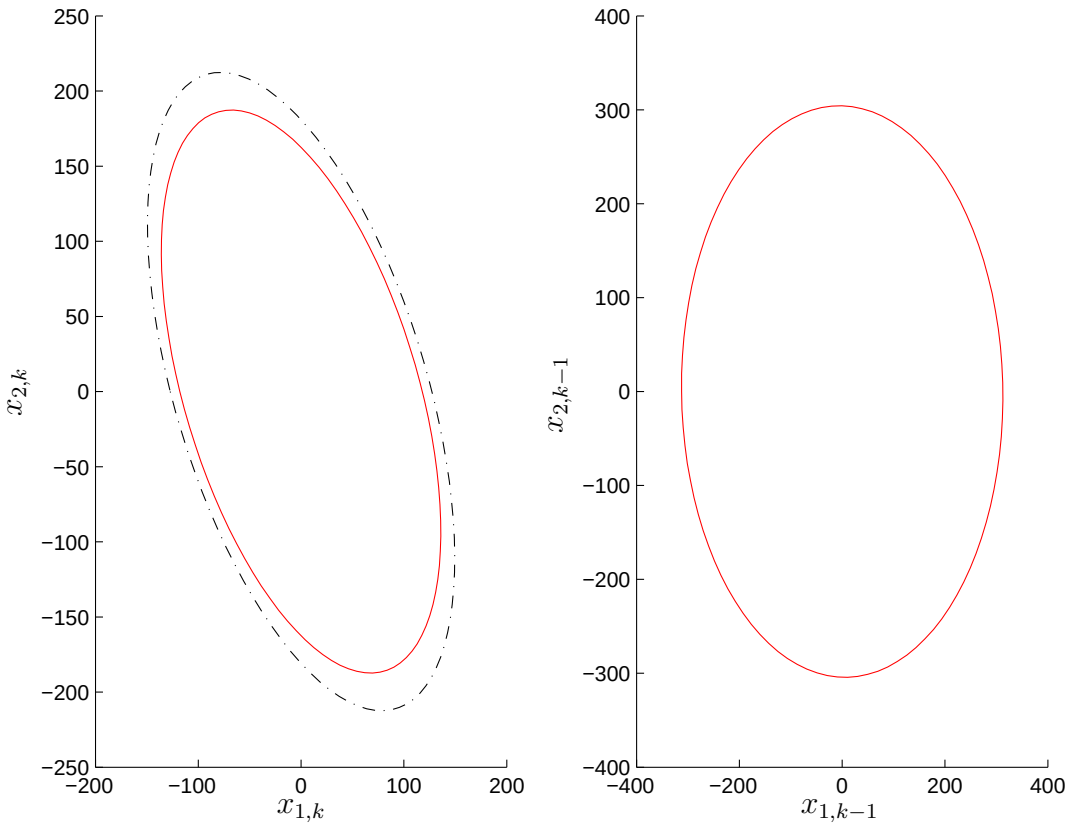


Figura 4.18: Cortes das regiões de atração: $\mathbb{K}_1$ realimenta apenas o estado atual $(\cdot-)$ e $\mathbb{K}_2$ realimenta o estado atual e o estado passado $(-)$.

Pode-se constatar da Figura 4.18 que a região de atração para o caso em que a lei de controle realimenta apenas o estado atual $(\cdot-)$ é ligeiramente maior do que o corte da região de atração para o caso em que a lei de controle realimenta o estado atual e o estado passado $(-)$ no plano x_k.

No intuito de otimizar o decaimento da função de energia, foi avaliado o menor valor possível para λ de acordo com o índice de desempenho λ-contratividade. Assim, para encontrar $\mathbb{K}_1$, foi aplicado o problema de otimização (3.68), com $W(\tau^+) = W(\tau) = W$ e $\Lambda(\tau) = A$ $\forall \tau, \tau^+$, $\mathbb{B} = B$ e demais matrizes com as dimensões apropriadas. Nesse caso, além do traço de H, foi utilizado com função objetivo de otimização o fator λ. Assim, ficou constatado que o menor valor de λ que torna a condição factível é $\lambda = 0.59$. Foram obtidas as seguintes matrizes

$$\mathbb{K}_1 = \begin{bmatrix} -1.0150 & 3.5412 \end{bmatrix},$$

$$W_1 = 10^3 \begin{bmatrix} 1.5440 & 0.2222 \\ 0.2222 & 0.0350 \end{bmatrix}, \quad Y_1 = 10^3 \begin{bmatrix} -1.1921 & -0.1592 \end{bmatrix},$$

$$U_1 = 10^3 \begin{bmatrix} 2.3604 & 0.3505 \\ 0.3399 & 0.0555 \end{bmatrix}, \quad Z_1 = \begin{bmatrix} -346.8194 & -35.3448 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0.0076 & -0.0483 \\ -0.0483 & 0.3357 \end{bmatrix}, \qquad G_1 = \begin{bmatrix} -0.6084 & 3.2049 \end{bmatrix}.$$

Já para o caso em que realimentam-se o estado atual e o estado passado, aplicou-se o problema de otimização (3.68) com $\bar{\tau} = 1$ e $A_d = \mathbf{0}$, novamente sendo utilizado como função objetivo de otimização o traço de H e o fator λ. Observou-se que o menor valor de λ para o qual a condição é factível é dado por $\lambda = 0.51$. Foram obtidas as seguintes matrizes

$$\mathbb{K}_2 = \begin{bmatrix} K_{2a} & K_{2b} \end{bmatrix}, \text{ com } K_{2a} = \begin{bmatrix} -4.9952 & 38.1410 \end{bmatrix} \text{ e } K_{2b} = 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.1823 & -11.6455 \end{bmatrix},$$

$$W_2 = 10^5 \begin{bmatrix} 0.0107 & 0.0012 & 0.0147 & 0.0017 \\ 0.0012 & 0.0001 & 0.0016 & 0.0002 \\ 0.0147 & 0.0016 & 5.2427 & 0.0715 \\ 0.0017 & 0.0002 & 0.0715 & 1.0544 \end{bmatrix},$$

$$U_2 = 10^5 \begin{bmatrix} 0.0183 & 0.0021 & 0.0028 & 0.0001 \\ 0.0020 & 0.0002 & 0.0003 & 0.0000 \\ 0.0250 & 0.0028 & 5.4024 & 0.0000 \\ 0.0029 & 0.0003 & 0.1375 & 1.3682 \end{bmatrix},$$

$$H_2 = 10^{-3} \begin{bmatrix} 114.8015 & -1021.7639 & -0.0040 & -0.0012 \\ -1021.7639 & 9169.9990 & 0.0143 & 0.0001 \\ -0.0040 & 0.0143 & 0.0184 & -0.0001 \\ -0.0012 & -0.0001 & -0.0001 & 0.0257, \end{bmatrix}$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} -1.3502 & -0.1444 & -0.3484 & -0.0330 \end{bmatrix},$$

$$Z_2 = \begin{bmatrix} -596.0282 & -60.7419 & 43.9533 & 5.2892 \end{bmatrix},$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} -3.7980 & 31.1001 & 0.0005 & 0.0001 \end{bmatrix}.$$

Note que, ao realimentar o estado passado, foi possível reduzir o valor de λ de 0.59 para 0.51.

Dessa forma, constatou-se que, para um sistema livre de atraso, realimentar não só o estado atual mas também o estado passado pode melhorar o desempenho do sistema, apesar de, a princípio, reduzir a região de atração. Novas investigações são propostas no Capítulo 5 para sistemas livres de atraso utilizando essa abordagem.

4.5 Comentários Finais

Neste capítulo foram empregados vários exemplos de sistemas utilizando os resultados apresentados no Capítulo 3. A título de praticidade de compreensão da região de atração, foi investigado um sistema escalar primeiramente para o caso precisamente conhecido e depois para o caso com incertezas politópicas. Um exemplo de sistema de ordem 2×2 também foi estudado para demonstrar algumas peculiaridades das condições propostas. Por fim, a um sistema livre de atrasos foi aplicada uma lei de controle que realimenta não só o estado atual, mas também o estado passado. Esse último exemplo é utlizado como motivação para trabalhos futuros.

Capítulo 5

Conclusão

5.1 Resultados

Neste trabalho foram investigadas condições de síntese para sistemas discretos no tempo dependente de parâmetros, com atraso no estado e saturação de atuadores. No Capítulo 3 são apresentados os resultados alcançados.

As leis de controle são obtidas por meio da realimentação estática do estado, sendo consideradas três estruturas distintas, as quais são apresentadas em (3.4a)-(3.4c). A escolha dessas estruturas se dá por meio das restrições impostas às estruturas das variáveis U e Y, descritas em (5.3)-(3.50).

A princípio, é proposta uma condição de síntese para sistemas discretos no tempo dependente de parâmetros, com atraso no estado e saturação de atuadores, a qual é apresentada no Corolário 1. Em seguida, é considerada, para essa mesma classe de sistemas, uma limitação na taxa de variação do atraso dada por

$$|\tau_{k+1} - \tau_k| \leq \Delta\tau_{\max}, \tag{5.1}$$

em que $\Delta\tau_{\max} < \bar{\tau}$. Uma condição de síntese que considera tal limitação é apresentada no Corolário 2. Por fim, é proposta uma condição de síntese para essa classe de sistemas considerando o índice de desempenho λ-contratividade. Tal condição está descrita no Teorema 6.

Uma simplificação da condição de síntese para o caso de sistemas discretos no tempo precisamente conhecido é apresentada no Corolário 4. Da mesma forma, uma condição para essa classe de sisemas que trata o índice de desempenho λ-contratividade é dada no Corolário 5.

Vale ressaltar que os resultados aqui obtidos são menos conservadores do que os métodos usualmente adotados na literatura. Isso pode ser constatado no Capítulo 4, no qual exemplos numéricos são utilizados para comparar as regiões de atração aqui obtidas com outras encontradas por meio de uma técnica comumente utilizada: a caracterização da bola (Vide Seção 4.2).

Entretanto, as condições aqui propostas possuem como desvantagem um alto custo computacional envolvido, conforme discutido na Seção 3.7. Assim, para sistemas de ordem mais elevada, sua aplicabilidade estará restrita ao desempenho computacional disponível.

5.1.1 Trabalhos produzidos

- J. V. Valle Silva, V. J. S. Leite e L. F. P. Silva, Controle de Sistemas Discretos no Tempo com Saturação de Atuadores e Atraso nos Estados, in: Anais do XXI Congresso Brasileiro de Automática, Vitória, ES, Brasil.

- Robust local stabilization of discrete time systems under actuator sasturation. - Em preparação.

5.2 Perspectivas

Como perspectivas de trabalhos futuros cita-se o caso de sistemas livres de atraso realimentados não só pelo estado atual, mas também pelo estado passado. Esse caso foi estudado na Seção 4.4, em que ficou constatado que essa abordagem pode trazer melhorias para o desempenho do sistema.

Outra abordagem a ser investigada é a programação das condições aqui apresentadas em linguagem *Python*. Tal linguagem, por ser mais simples, apresenta um tempo de processamente mais reduzido com relação ao MatLab. Assim, espera-se tornar viável a aplicação das condições aqui propostas em sistemas de ordem elevada.

Uma outra investigação a ser feita teria como objetivo reduzir o conservadorismo da condição proposta para as estruturas do controlador $\mathbb{K}$ dadas em (3.6a) e (3.6b). Note que as restrições impostas a U em (5.3) são muito conservadoras e poderiam ser relaxadas assumindo-se as estruturas

$$U_{(3.6a)} = \begin{bmatrix} U_1 & \mathbf{0} \\ \star & U_2 \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

e

$$U_{(3.6b)} = \begin{bmatrix} U_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & U_3 & \mathbf{0} \\ \star & \star & U_4 \end{bmatrix}, \tag{5.3}$$

em que U_1 e $U_4 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $U_2 \in \mathbb{R}^{n\bar{\tau}\times n\bar{\tau}}$, $U_3 \in \mathbb{R}^{n(\bar{\tau}-1)\times n(\bar{\tau}-1)}$ e $\mathbf{0}$ é uma matriz nula de dimensões adequadas. Dessa forma, e mantendo as restrições impostas a Y em (3.49) e (3.50), espera-se reduzir o conservadorismo da condição de síntese para as estruturas de $\mathbb{K}$ dadas.

Além disso, espera-se também aplicar as condições de síntese aqui tratadas a outros índices de desempenho, além da λ-contratividade. Outros índices possíveis seriam $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$, IAE, dentre outros.

Por fim, outros métodos de otimização podem ser aplicados em conjunto com as condições de síntese propostas neste trabalho. Dentre eles, destaca-se o utilizado por (Deaecton & Geromel 2015).

Apêndice A

Ferramentas

A.1 Complemento de Schur

Seja a matriz S dada por

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & S_2^T \\ S_2 & S_3 \end{bmatrix}.$$

Assim, temos que

- $S > \mathbf{0} \Leftrightarrow S_1 > \mathbf{0}$ e $S_3 - S_2 S_1^{-1} S_2^T > \mathbf{0}$;
- $S > \mathbf{0} \Leftrightarrow S_3 > \mathbf{0}$ e $S_1 - S_2^T S_3^{-1} S_2 > \mathbf{0}$;
- se $S_1 > \mathbf{0}$, $S \geq \mathbf{0} \Leftrightarrow S_3 - S_2 S_1^{-1} S_2^T \geq \mathbf{0}$;
- se $S_3 > \mathbf{0}$, $S \geq \mathbf{0} \Leftrightarrow S_1 - S_2^T S_3^{-1} S_2 \geq \mathbf{0}$.

Prova: A prova aqui demonstrada foi adaptada de (de Oliveira 2015).

Considere que exista S_1^{-1}. Seja a transformação de congruência dada por

$$X = \begin{bmatrix} S_1 & S_2^T \\ S_2 & S_3 \end{bmatrix} = \mathcal{T}_1^T \begin{bmatrix} S_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S_3 - S_2 S_1^{-1} S_2^T \end{bmatrix} \mathcal{T}_1, \tag{A.1}$$

com

$$\mathcal{T}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & S_1^{-1} S_2^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

Como $\mathcal{T}_1$ é uma matriz não singular, temos que

$$\begin{bmatrix} S_1 & S_2^T \\ S_2 & S_3 \end{bmatrix} > \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} S_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S_3 - S_2 S_1^{-1} S_2^T \end{bmatrix} > \mathbf{0}. \tag{A.2}$$

Considere agora que exista S_3^{-1}. Seja a transformação de congruência dada por

$$X = \begin{bmatrix} S_1 & S_2^T \\ S_2 & S_3 \end{bmatrix} = \mathcal{T}_2^T \begin{bmatrix} S_1 - S_2^T S_3^{-1} S_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S_3 \end{bmatrix} \mathcal{T}_2, \tag{A.3}$$

com

$$\mathcal{T}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ S_3^{-1} S_2 & \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

Mais uma vez, como $\mathcal{T}_2$ é uma matriz não singular, temos que

$$\begin{bmatrix} S_1 & S_2^T \\ S_2 & S_3 \end{bmatrix} > \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} S_1 - S_2^T S_3^{-1} S_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S_3 \end{bmatrix} > \mathbf{0}. \tag{A.4}$$

■

A.2 Lema de Finsler

Sejam as matrizes $\omega_k \in \mathbb{R}^n$, $Q(\alpha) = Q(\alpha)^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\mathcal{B}(\alpha) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, tal que $\mathcal{B}(\alpha)$ tenha posto menor do que n. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:

i) $\omega_k^T Q(\alpha)\omega_k < 0, \forall \omega_k \neq 0 : \mathcal{B}(\alpha)\omega_k = \mathbf{0}$;

ii) $\mathcal{B}^\perp(\alpha)^T Q(\alpha)\mathcal{B}^\perp(\alpha) < \mathbf{0}$;

iii) $\exists \mu(\alpha) \in \mathbb{R}^+ : Q(\alpha) - \mu(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)^T\mathcal{B}(\alpha) < \mathbf{0}$;

iv) $\exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n\times m} : Q(\alpha) + \mathcal{X}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha)^T\mathcal{X}(\alpha)^T < \mathbf{0}$;

em que $\mathcal{B}^\perp(\alpha)$ denota uma base para o espaço nulo de $\mathcal{B}(\alpha)$.

Prova: A prova aqui demonstrada foi adaptada de (Leite 2005).

A princípio, podemos verificar que $i) \Leftrightarrow ii)$, pois todo ω_k tal que $\mathcal{B}(\alpha)\omega_k = \mathbf{0}$ pode ser escrito como $\omega_k = \mathcal{B}^\perp(\alpha)y$, ocasião em que $i) \Rightarrow y^T\mathcal{B}^\perp(\alpha)^T Q(\alpha)\mathcal{B}^\perp(\alpha)y < \mathbf{0}$, que, para todo $y \neq \mathbf{0}$, implica $\mathcal{B}^\perp(\alpha)^T Q(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)^\perp < \mathbf{0}$. Assumindo agora que $ii)$ é verificada, pré e pós-multiplique o lado esquerdo dessa condição por $y \neq \mathbf{0}$ e y^T, respectivamente, para obter $i)$.

Pré e pós-multiplicando as condições $iii)$ ou $vi)$ por $\mathcal{B}^\perp(\alpha)^T$ e $\mathcal{B}^\perp(\alpha)$, respectivamente, obtemos a condição $ii)$. Por outro lado, considerando que $ii)$ é verificada, a condição $iii)$ é recuperada fatorando $\mathcal{B}(\alpha)$ em um produto de matrizes de posto completo $\mathcal{B}(\alpha) = \mathcal{B}_\ell(\alpha)\mathcal{B}_r(\alpha)$ e aplicando a transformação de congruência

$$\begin{bmatrix} \mathcal{W}(\alpha)^T \\ \mathcal{B}^\perp(\alpha)^T \end{bmatrix} \left(Q(\alpha) - \mu(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)^T\mathcal{B}(\alpha)\right) \begin{bmatrix} \mathcal{W}(\alpha) & \mathcal{B}^\perp(\alpha) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \mathcal{W}(\alpha)^T Q(\beta)\mathcal{W}(\alpha) - \mu(\alpha)\mathbf{I} & \mathcal{W}(\alpha)^T Q(\alpha)\mathcal{B}^\perp(\alpha) \\ \star & \mathcal{B}^\perp(\alpha)^T Q(\alpha)\mathcal{B}^\perp(\alpha) \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{A.5}$$

em que $\mathcal{W}(\alpha) = \mathcal{B}_r(\alpha)^T \left(\mathcal{B}_r(\alpha)\mathcal{B}_r(\alpha)^T\right)^{-1} \left(\mathcal{B}_\ell(\alpha)^T\mathcal{B}_\ell(\alpha)\right)^{0.5}$. Como o bloco (2,2) de (A.5) é, por hipótese, definido negativo, conclui-se que existe $\mu(\alpha) \in \mathbb{R}_+$ suficientemente grande tal que a condição $iii)$ seja verificada. Para mostrar que $iii) \Leftrightarrow iv)$, basta ecolher $\mathcal{X}(\alpha) = -\mu(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)^T/2$.

■

Bibliografia

Bo, L., Jing, W. & Hao, S. (2014). State feedback stabilization for linear systems with time-varying delays and input saturation: A markov jump model approach, *Chinese Control Conference* **33**: 5369–5374.

Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E. & Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Society for Industrial and Applied Mathematics.

Cao, Y. Y., Lin, Z. & Hu, T. (2002). Stability analysis of linear time-delay systems subject to input saturation, *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **49**: 233–240.

Corso, J. (2009). *Sobre o Controle para uma classe de sistemas não-lineares com atuadores saturantes*, Tese de doutorado, UFSC, Florianópolis (SC), Brasil.

Corso, J., Castelan, E. B., Moreno, U. F. & De Pieri, E. R. (2009). Controle dependente de parâmetros para uma classe de sistemas não-lineares incertos com atuadores saturantes., *Controle & Automação, Sociedade Brasileira de Automatica* **20**: 119–132.

de Oliveira, A. C. (2015). *Realimentação estática de saída aplicada a sistemas lineares incertos discretos no tempo com atraso nos estados*, Master's thesis, Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

Deaecton, G. S. & Geromel, J. C. (2015). Stability analysis and control design of discrete-time switched affine systems, *Aceito para publicação no IEEE Transactions on Automatic Control* **14**: 1–8.

Fridman, E., Seuret, A. & Richard, J. P. (2004). Robust sampled-data stabilization of linear systems - an input delay approach, *Automatica* **40**: 1441–1446.

Fridman, E. & Shaked, U. (2005). Stability and guaranteed cost control of uncertain discrete delay systems, *International Journal of Control* **78**(4): 235–246.

Geromel, J. C., Korogui, R. H. & Bernussou, J. (2007). $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ robust output feedback control for continuous time polytopic systems, *IET Control Theory and Applications* pp. 1541–1549.

Ghiggi, I., Gomes da Silva Jr., J. M., Leite, V. J. S. & Miranda, M. F. (2008). Estabilização de sistemas discretos com atrasos variantes no tempo e saturação nos atuadores, *Anais do XVII Congresso Brasileiro de Automática*.

Gomes da Silva Jr., J. M. & Leite, V. J. S. (2007). *Enciclopédia de Automática - Controle & Automação*, Editora Blücher, São Paulo, SP, chapter Sistemas Lineares com Atrasos de Tempo, pp. 108–123.

Gomes da Silva Jr., J. M. & Tarbouriech, S. (2005). Antiwindup design with guaranteed regions of stability: An LMI-based approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* **50**(1): 106–111.

Gu, K., Kharitonov, V. L. & Chen, J. (2003). *Stability of Time-Delay Systems*, Birkhäuser Boston.

Haoussi, F. E. & Tissir, E. H. (2007). An LMI-based approach for robust stabilization of time delay systems containing saturating actuators, *IMA Journal of Mathematical Control and Information* **24**: 347–356.

Hetel, L., Daafouz, J. & Iung, C. (2008). Equivalence between the Lyapunov-Krasovskii functionals approach for discrete delay systems and that of the stability conditions for switched systems, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems* **2**(3): 697–705.

Jungers, M. & Castelan, E. B. (2011). Gain-scheduled output control design for a class of discrete-time nonlinear systems with saturating actuators, *Systems & Control Letters* **60**(3): 315–325.

Khalil, H. K. & Grizzle, J. W. (1996). *Nonlinear Systems*, Prentice Hall.

Leite, V. J. S. (2005). *Estudos sobre estabilidade robusta de sistemas lineares por meio de funções dependentes de parâmetros*, Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas (SP), Brasil.

Leite, V. J. S., Castro, M. F. F., Caldeira, A. F., Miranda, M. F. & Gonçalves, E. N. (2011). *Discrete Time Systems*, InTech, chapter Uncertain Discrete-Time Systems with Delayed State: Robust Stabilization with Performance Specification via LMI Formulations, pp. 295–326. `http://goo.gl/P4cAyc`.

Leite, V. J. S. & Miranda, M. F. (2008). Robust stabilization of discrete-time systems with time-varying delay: An lmi approach, *Mathematical Problems in Engineering* **2008**: 1–15.

Lin, Z. & Saberi, A. (1993). Semi-global exponential stabilization of linear systems subject to input saturation via linear feedback, *Systems & Control Letters* **21**(3): 225–239.

Mahmoud, M. S. (2000). *Robust Control and Filtering for Time-Delay Systems*, Control Engineering Series, Marcel Dekker, Inc., New York.

Michiels, W. & Niculescu, S. I. (2007). *Stability and Stabilization of Time-Delay Systems*, SIAM.

Miranda, M. F. & Leite, V. S. J. (2011). Robust $\mathcal{H}_\infty$ state feedback control of discrete-time systems with state delay: an LMI approach, *Journal of the Franklin Institute.* **348**(4): 568–588.

Montagner, V. F., Leite, V. J. S., Tarbouriech, S. & Peres, P. L. D. (2005). Stability and stabilizability of discrete-time switched linear systems with state delay, *Proceedings of the 2005, American Control Conference*, Vol. 6, pp. 3806–3811.

Niculescu, S.-I., Dion, J.-M. & Dugard, L. (1996). Robust stabilization for uncertain time-delay systems containing saturating actuators, *IEEE Transactions on Automatic Control* **41**(5): 742–747.

Paim, C. (2003). *Análise e Controle de Sistemas Lineares sujeitos a Saturação*, Tese de doutorado, UFSC, Florianópolis (SC), Brasil.

Silva, L. F. P. (2016). *Controle de Sistemas não lineares discretos no tempo com atraso variante nos estados utilizando modelos do tipo Fuzzy T-S*, Tese de doutorado, UFSC, Florianópolis (SC), Brasil.

Silva, L. F. P., Leite, V. J. S., Castelan, E. B. & Klug, M. (2012). Síntese convexa de controladores fuzzy para sistemas takagi-sugeno discretos no tempo com atraso e limitação nos estados, *Congresso Brasileiro de Automática* **XIX**: 3282–3287.

Silva, L. F. P., Leite, V. J. S., Castelan, E. B. & Klug, M. (2014). Local stabilization of time-delay nonlinear discrete-time systems using takagi-sugeno models and convex optimization, *Mathematical Problems in Engineering* **2014**: 1–10.

Stojanovic, S. B., Debeljkovic, D. J. & Mladenovic, I. (2007). A Lyapunov-Krasovskii methodology for asymptotic stability of discrete time delay systems., *Serbian Journal of Electrical Engineering* **4**(2): 109–117.

Tarbouriech, S., Garcia, G., Gomes da Silva Jr., J. M. & Queinnec, I. (2011). *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators*, Springer-Verlag London.

Tarbouriech, S. & Gomes da Silva Jr., J. M. (2000). Synthesis of controllers for continuous-time delay systems with saturating controls via LMI's, *IEEE Transactions on Automatic Control* **45**: 105–111.

Xu, S., Feng, G., Zou, Y. & Huang, J. (2012). Robust controller design of uncertain discrete time-delay system with input saturation and disturbances, *IEEE Transactions on Automatic Control* **57**(10): 2604–2609.