Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica Associação Ampla entre UFSJ e CEFET-MG

Wagner Eustáquio Gomes Bachur

SÍNTESE DE CONTROLADORES ROBUSTOS POR REALIMENTAÇÃO DINÂMICA DE SAÍDA CONSIDERANDO MODELO DE REFERÊNCIA





Belo Horizonte Junho de 2011

Wagner Eustáquio Gomes Bachur

SÍNTESE DE CONTROLADORES ROBUSTOS POR REALIMENTAÇÃO DINÂMICA DE SAÍDA CONSIDERANDO MODELO DE REFERÊNCIA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, associação ampla entre UFSJ e CEFET-MG, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Modelagem e Controle de Sistemas.

Linha de Pesquisa: Sistema de Controle

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Nunes Gonçalves



Belo Horizonte Junho de 2011 Bachur, Wagner Eustáquio Gomes

B124s Síntese de controladores robustos por realimentação dinâmica de saída considerando modelo de referência / Wagner Eustáquio Gomes Bachur. – 2011.

xii, 88 f.: il., gráfs, tabs.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica em associação ampla entre a UFSJ e o CEFET-MG.

Orientador: Eduardo Nunes Gonçalves.

Banca examinadora: Reinaldo Martinez Palhares, Valceres Vieira Rocha e Silva, Euler Cunha Martins.

Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

 Controle robusto – Modelos matemáticos – Teses. 2. Desigualdades matriciais – Teses. 3. Sistemas de controle por realimentação – Teses.
 Gonçalves, Eduardo Nunes. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. III. Universidade Federal de São João del-Rei. IV. Título.

CDD 629.83

Elaboração da ficha catalográfica pela Biblioteca-Campus II / CEFET-MG

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica Associação Ampla entre UFSJ e CEFET-MG

Wagner Eustáquio Gomes Bachur

SÍNTESE DE CONTROLADORES ROBUSTOS POR REALIMENTAÇÃO DINÂMICA DE SAÍDA CONSIDERANDO MODELO DE REFERÊNCIA



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI PRO-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

GENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Wagner Eustáquio Gomes Bachur

"Sintese de controladores robustos por realimentação dinâmica de saida considerando modelo de referência"

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica — Associação Ampla entre a Universidade Federal de São João del-Rei e o Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais em 28 de junho de 2011 como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, aprovada pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Eduardo Nunes Gonçalves - Orientador Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

> Prof. Dr. Reinaldo Martinez Palhares Universidade Federal de Minas Gerais

Peter-

Rule Kz

Prof^a. Dr^a. Valceres Vieira Rocha e Silva Universidade Federal de São João del-Rei

Prof. Dr. Euler Cunha Martins Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Agradecimentos

Agradeço ao Departamento de Engenharia Elétrica do CEFET/MG pela confiança, oportunidade, motivação e condições necessárias para o pleno desenvolvimento e finalização desta dissertação.

Sou muitíssimo grato ao meu orientador e colega, Prof. Dr. Eduardo Nunes Gonçalves, pela confiança, dedicação e paciência ao orientar, ensinar e compartilhar seu imenso conhecimento na área de Controle e Otimização de Sistemas, sem o qual certamente este trabalho não poderia ter sido concretizado.

Agradeço à todos os membros docentes, técnicos-administrativos e discentes do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do CEFET-MG, em especial aos professores com os quais tive a honra de ter sido aluno no curso de mestrado, entre eles os Prof. Dr. Sidelmo Magalhães Silva, Prof. Dr. Fábio Gonçalves Jota, Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite e Prof. Dr. Eduardo Nunes Gonçalves onde sempre que solicitados, prontamente prestaram o apoio necessário com toda dedicação e profissionalismo.

Agradeço também aos demais professores membros da Banca Examinadora da Dissertação de Mestrado, pelas suas valiosas contribuições para o aprimoramento do trabalho realizado e do texto final desta dissertação.

Resumo

Diversos problemas de análise e síntese da teoria de controle robusto podem ser formulados como problemas de otimização linear com restrições na forma de desigualdades matriciais lineares (LMI, do inglês "Linear Matrix Inequality"). A vantagem das formulações LMI é que elas podem ser resolvidas de forma eficiente por programas gratuitos ou comerciais disponíveis. Exemplos de problemas que podem ser tratados por formulações LMI incluem: análise robusta de desempenho \mathcal{H}_{∞} , desempenho \mathcal{H}_2 e \mathcal{D} -estabilidade, síntese de controladores robusto por realimentação de estado com diferentes especificações de desempenho e síntese de controladores por realimentação dinâmica de saída para sistemas precisamente conhecidos. Alguns problemas de controle resultam em formulações baseadas em desigualdades matriciais bilineares (BMI, do inglês "Bilinear Matrix Inequality"), problemas de otimização não-convexos, o que é o caso da síntese de controladores robustos por realimentação dinâmica de saída. Este trabalho irá tratar de projetos de controladores robustos por realimentação dinâmica de saída para sistemas dinâmicos incertos lineares invariantes no tempo, contínuos ou discretos no tempo, representados por modelos de incerteza politópico. Os objetivos de projeto serão atender às especificações da resposta de rastreamento do sinal de referência, a rejeição de distúrbios e a atenuação do efeito de ruídos de medição. As especificações de projeto serão quantificadas em termos das normas \mathcal{H}_{∞} e \mathcal{H}_2 das funções de transferências em malha fechada. A principal contribuição desta dissertação de mestrado é validar o uso do modelo de referência como critério de projeto de controladores para garantir as especificações da resposta de rastreamento em conjunto com os demais objetivos de projeto. Para isso, dois procedimentos já existentes de síntese de controladores robustos por realimentação dinâmica de saída, baseados em formulação BMI e otimização direta no espaço de parâmetros do controlador, foram adaptados, implementados e aplicados em exemplos disponíveis na literatura para comprovação da eficácia do procedimento de síntese proposto considerando modelo de referência.

Palavras-chave: Controle Robusto, desigualdade matricial linear, modelo de referência, realimentação dinâmica de saída, incerteza politópica.

Abstract

Several problems of analysis and synthesis of the robust control theory can be formulated as linear optimization problems with linear matrix inequality (LMI) constraints. The advantage of LMI formulations is that they can be efficiently solved by means of commercial or free softwares. Examples of problems that can be treated as LMI formulations are: robust \mathcal{H}_{∞} performance analysis, robust \mathcal{H}_2 performance analysis, robust \mathcal{D} -stability analysis, robust state-feedback control synthesis with different performance specifications, and dynamic output-feedback control synthesis for precisely known systems. Some robust control problems result in bilinear matrix inequality (BMI) formulations, non-convex optimization problems, which is the case of robust dynamic output-feedback control synthesis. This work deals with robust dynamic output-feedback control synthesis applied to uncertain, linear time-invariant dynamic systems, continuous or discrete-time, represented by polytopic uncertain models. The design objectives are to attain the reference signal tracking response specifications, disturbance rejection, and measurement noise attenuation. The design specifications are quantified in terms of \mathcal{H}_∞ and \mathcal{H}_2 norms of the closed-loop transfer functions. The main contribution of this master dissertation is to validate the use of reference model as a design criteria to guarantee the tracking response specifications together with the other design objectives. To achieve this, two existing procedures for robust dynamic output-feedback control synthesis, based on BMI formulation and direct optimization in the controller parameter space, were adapted, implemented, and applied to examples available in the literature to prove the efficacy of the proposed synthesis procedure considering reference model.

Keywords: Robust Control, linear matrix inequality, reference model, dynamic output feedback, polytopic uncertainty.

Sumário

Lista de Figuras		X	
Li	sta de	e Tabelas	xiii
A	crônir	nos	xiv
Li	sta de	e Símbolos	XV
1	Intr	odução	1
	1.1	A Contextualização da Dissertação	1
	1.2	Estrutura da Dissertação	5
2	For	mulação do Problema de Controle	6
	2.1	Introdução	6
	2.2	Normas de Sinais e Sistemas	6
	2.3	Cálculos de Normas e Custos	8
	2.4	Formulação do Problema de Controle Robusto	10
3	Solu	ıção do Problema de Controle na Forma de BMI	15
	3.1	Introdução	15
	3.2	Procedimento de Síntese de Controladores para Sistemas em Tempo Contínuo	16
	3.3	Procedimento de Síntese de Controladores para Sistemas em Tempo Discreto	19
	3.4	Considerações a Respeito da Formulação BMI	22
4	Solu	ıção do Problema de Controle no Espaço de Parâmetros do Controlador	23
	4.1	Introdução	23
	4.2	Procedimento de Síntese Diretamente no Espaço de Parâmetros do Controlador	24
		4.2.1 Etapa de Síntese	25
		4.2.2 Etapa de Análise	27
	4.3	O Algoritmo BnB Aplicado ao Cálculo dos Custos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ com a Precisão Requerida	a 27
		4.3.1 Escolha das Funções Limitantes	27
		4.3.2 Técnica de Partição do Politopo	29
	4.4	Comentários	30

SUMÁRIO

5	Exe	mplos Ilustrativos	33
	5.1	Sistemas em Tempo Contínuo	33
		5.1.1 Exemplo 1: Sistema de Tanques Interligados	33
		5.1.2 Exemplo 2: Sistema Massa-Mola	51
	5.2	Sistemas em Tempo Discreto	62
		5.2.1 Exemplo 3: Sistemas de Tanques Interligados	62
	5.3	Análise Comparativa dos Resultados e Conclusões	79
6	Con	clusões Finais	81
	6.1	Sumário das Contribuições da Dissertação de Mestrado	81
	6.2	Comentários Finais e Perspectivas Futuras	82
	6.3	Trabalhos com Co-Autoria Aceitos em Eventos	83
Re	ferên	cias bibliográficas	84

Lista de Figuras

2.1	Diagrama de blocos geral do sistema de controle	10
4.1	Simulação do algoritmo Elipsoidal - iteração 0	26
4.2	Simulação do algoritmo Elipsoidal - iteração 1	26
4.3	Simulação do algoritmo Elipsoidal - iteração 2	26
4.4	Simulação do algoritmo BnB - iteração 0	31
4.5	Simulação do algoritmo BnB - iteração 1	31
4.6	Simulação do algoritmo BnB - iteração 2	31
4.7	Simulação do algoritmo BnB - iteração 3	32
4.8	Simulação do algoritmo BnB - iteração 4	32
4.9	Simulação do algoritmo BnB - iteração 5	32
5.1	Sistema de controle de nível de dois tanques interligados.	34
5.2	Resp. frequência do modelo (tracejado) e dos 4 vértices (sólido) com o controlador K .	37
5.3	Resp.transitória h_2 do modelo(tracejado) e dos 4 vértices(sólido) com o controlador K .	38
5.4	Resp. transitória do sinal de controle $q_u(t)$ e dos 4 vértices com o controlador K	38
5.5	Resp. em frequência do modelo(tracejado) e dos 4 vértices(sólido) para K_3	41
5.6	Resp. transitórias $h_2(t)$ do modelo(tracejado) e dos 4 vértices(sólido) para K_3	41
5.7	Resp. transitórias do sinal de controle $q_u(t)$ e dos 4 vértices para K_3	42
5.8	Curva de Pareto considerando as funções objetivos $\max E _{\infty}$ e $\max T_{un} _{2}$	44
5.9	Resp. frequência do modelo(tracejado) e dos 4 vértices(sólido) para K_4	46
5.10	Resp. transitória h_2 , modelo de referência(tracejado) e dos 4 vértices(sólido)para K_4 .	46
5.11	Resp. transitória do sinal de controle $q_u(t)$ e dos 4 vértices para K_4	47
5.12	Resp. frequência do modelo(tracejado) e dos 4 vértices(sólido) para K_{∞}	48
5.13	Resp. transitória h_2 , modelo de referência(tracejado) e dos 4 vértices(sólido) para K_{∞} .	48
5.14	Resp. transitória do sinal de controle $q_u(t)$ e dos 4 vértices para K_{∞}	49
5.15	Resp. transitória h_2 , modelo de referência(tracejado) e dos 4 vértices(sólido) para K_5 .	50
5.16	Resp. transitória do sinal de controle $q_u(t)$ e dos 4 vértices para K_5	50
5.17	Sistema: dupla massa/mola	52
5.18	Curva de Pareto para $ E _{\infty} \le 0.06$	53
5.19	Resp. frequência $T_m(s)$ (tracejado) e $T_{cr}(s)$ (sólido)e dos 2 vértices para $K_9(s)$	54
5.20	Lugar das Raízes para $k \in [0,5;2,0]$ na primeira iteração para K_9	55
5.21	Lugar das Raízes para $k \in [0,5;2,0]$ na segunda iteração para K_9	55
5.22	Resp. transitória de $x_2(t)$ e dos 2 vértices para $K_9(s)$	56

xii LISTA DE FIGURAS

5.23	Resp. transitória de $u(t)$ e dos 2 vértices para $K_9(s)$	56
5.24	Resp. transitória de $x_2(t)$ e dos 2 vértices para $K_{15}(s)$	58
5.25	Resp. transitória de $u(t)$ e dos 2 vértices para $K_{15}(s)$	58
5.26	Lugar das Raízes para $k \in [0,5;2,0]$ na segunda iteração para $K_{prp}(s)$	60
5.27	Resp. transitória de $x_2(t)$ e dos 2 vértices para $K_{prp}(s)$	60
5.28	Resp. transitória de $u(t)$ e dos 2 vértices para $K_{prp}(s)$	61
5.29	Resp. transitória de $x_2(t)$ para $K_{prp}(s)$ de pequenas variações na alocação de pólos .	61
5.30	Resp. frequência do modelo de referência(tracejado) e dos 4 vértices (sólido) para K_1 .	64
5.31	Resp. transitória h_2 , modelo de referência (tracejado) e dos 4 vértices (sólido) para K_1 .	66
5.32	Resp. transitória da saída de controle $q_u(t)$ e dos 4 vértices para K_1	66
5.33	Resp. transitória h_2 , modelo de referência (tracejado) e dos 4 vértices (sólido) para K_2 .	68
5.34	Resp. transitória do sinal de controle $q_u(t)$ e dos 4 vértices para K_2	68
5.35	Convergência da função objetivo $\max E _{\infty}$ para o controlador K_2	69
5.36	Resp. transitória h_2 , modelo de referência (tracejado) e dos 4 vértices (sólido) para K_{2a} .	70
5.37	Resp. transitória do sinal de controle $q_u(t)$ e dos 4 vértices para K_{2a}	70
5.38	Resp. transitória h_2 , modelo de referência (tracejado) e dos 4 vértices (sólido) para K_{2b} .	71
5.39	Resp. transitória do sinal de controle $q_u(t)$ e dos 4 vértices para K_{2b}	71
5.40	Curva de Pareto para $ E _{\infty} \le 0.06$	74
5.41	Resp. frequência de $T_m(s)$ (tracejado) e $T_{cr}(s)$ (sólido) e dos 4 vértices para $K_3(z)$	75
5.42	Resp. transitória de $h_2(t)$ e dos 4 vértices para $K_3(z)$	77
5.43	Resp. transitória do sinal de controle $q_u(t)$ e dos 4 vértices para $K_3(z)$	77
5.44	Resp. transitória de $h_2(t)$ e dos 4 vértices para $K_4(z)$	78
5.45	Resp. transitória do sinal de controle $q_u(t)$ e dos 4 vértices para $K_4(z)$	78

Lista de Tabelas

5.1	Custo Garantido com $\epsilon_m \in [0,02; 0,1]$	44
5.2	Custo Garantido com $\epsilon_m = 0.06$ e $\epsilon_\infty \in [7; 16]$	52
5.3	Custo Garantido com $\epsilon_m = 0.06$ e $\epsilon_\infty \in [1; 2.75]$	74
5.4	Comparação de Resultados para o Sistema de Tanques Interligados	80
5.5	Comparação de Resultados para o Sistema de Tanques Interligados	80
5.6	Comparação de Resultados para o Sistema de Tanques Interligados	80

Acrônimos

BMI - "Bilinear Matrix Inequality": Designaldade Matricial Bilinear

BnB - "Algoritmo Branch-And-Bound"

CEA - "Cone Ellipsoidal Algorithm": Algoritmo Cone-Elipsoidal

CLP - "Controlador Lógico Programável"

ISE - "Integral of the Square of the Error": Integral do Quadrado do Erro

IAE - "Integral of the Absolute Magnitude of the Error": Integral do Valor Absoluto do Erro

ITAE - "Integral of Time Multiplied by Absolute of the Error": Integral do Tempo Multipli-

cado pelo Valor Absoluto do Erro

ITSE - "Integral of Time Multiplied by the Squared Error": Integral do Tempo Multiplicado

Pelo Quadrado do Erro

LQG - "Linear-Quadratic-Gaussian": Linear-Quadrático-Gaussiano LMI - "Linear Matrix Inequality": Desigualdade Matricial Linear

LMIs - "Linear Matrix Inequalities": Designaldades Matriciais Lineares

LTI - "Linear Time Invariante System": Sistema Linear Invariante no Tempo
 MIMO - "Multiple Input, Multiple Output": Múltiplas Entradas, Múltiplas Saídas

PID - "Controlador Proporcional-Integral-Derivativo"

RMS - "Root Mean Squared": Raiz Quadrada do Valor Médio ao Quadrado

SDP - "Semidefinite Programming": Programação Semidefinida

SeDuMi - "Self-Dual-Minimization"

SISO - "Single Input, Single Output": Uma Entrada, Uma Saída

Lista de Símbolos

```
\triangleq
                  igual por definição
\exists
                  existe
\in
                  pertence a
\overline{\phantom{a}}
                  está contido em
\bigcup
\mathbb{N}
                  conjunto dos números naturais, \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, \infty\}
\mathbb{R}
                  corpo dos números reais
\nabla f
                  gradiente (ou subgradiente) da função f
|\lambda|
                  valor absoluto do escalar \lambda
                  precisão relativa usada como critério de parada no algoritmo BnB
I, I_d
                  matriz identidade, matriz identidade de ordem d \times d
det(A)
                  determinante da matriz A
\rho(A)
                  posto da matriz A
                  espectro da matriz A, ou seja, conjunto dos autovalores da matriz A
\lambda(A)
\lambda_i(A)
                  i-ésimo autovalor da matriz A
                  restrição de projeto para norma \mathcal{H}_2
δ
\delta_c
                  custo \varepsilon-garantido \mathcal{H}_2
\delta_{c.g.}
                  custo garantido \mathcal{H}_2
                  pior caso da norma \mathcal{H}_2 no conjunto \Omega
\delta_{p.c.}
\delta_{p.c.}
                  pior caso da norma \mathcal{H}_2 no conjunto \Omega
                  restrição de projeto para norma \mathcal{H}_{\infty}
\gamma
                  custo \varepsilon- garantido \mathcal{H}_{\infty}
\gamma_c
                  custo garantido \mathcal{H}_{\infty}
\gamma_{c.q.}
                  pior caso da norma \mathcal{H}_{\infty} no conjunto \Omega
\gamma_{p.c.}
                  pior caso da norma \mathcal{H}_{\infty} no conjunto \Omega
\widetilde{\gamma}_{p.c.}
                  valor singular máximo da matriz A
\overline{\sigma}(A)
```

xviii LISTA DE TABELAS

vetor de coeficientes da combinação convexa ou de parâmetros incertos α Ω conjunto infinito de pontos do domínio politópico de incerteza $\widetilde{\Omega}$ conjunto finito de pontos do domínio politópico de incerteza A^* transposta complexa conjugada da matriz Aem matrizes simétricas, corresponde a termos simétricos em relação à diagonal $diag(\cdot)$ matriz bloco-diagonal, sendo a sequência de blocos dada pelo argumento $E \cdot$ esperança matemática do argumento espaço dos sinais contínuos de energia limitada, i.e., $\int_0^\infty f^T(t)f(t)dt < \infty$ espaço dos sinais discretos de energia limitada, i.e., $\sum_0^\infty f^T(k)f(k) < \infty$ $\mathcal{L}_2[0,\infty)$ $l_2[0,\infty)$ politopo de matrizes realização da matriz de transferência $T = C(sI-A)^{-1}B + D$ \overline{T}_2 matriz de transferência relacionada com o desempenho \mathcal{H}_2 do sistema T_{∞} matriz de transferência relacionada com o desempenho \mathcal{H}_{∞} do sistema $||T||_2$ norma \mathcal{H}_2 da matriz de transferência Tnorma \mathcal{H}_{∞} da matriz de transferência T $||T||_{\infty}$ Tr(A)traço da matriz A

norma \mathcal{L}_2 do sinal contínuo w ou norma l_2 do sinal discreto w

 $||w||_2$

Capítulo 1

Introdução

1.1 A Contextualização da Dissertação

O funcionamento adequado das malhas de controle é fundamental para garantir a qualidade do produto, minimizar gastos de produção, reduzir paradas para manutenção e aumentar o lucro e competitividade da empresa. O desempenho de sistemas de controle em geral já é estudado há muitos anos. Existem muitos critérios e índices devidamente estabelecidos dentro da teoria de controle convencional. O algoritmo PID é o mais utilizado na maioria dos controladores existentes no mercado, cerca de oitenta e cinco por cento das aplicações, devido ao fato de ser de fácil implementação, parametrização e de possuir flexibilidade para atendimento às necessidades da indústria. A teoria de controle já estuda controladores com algoritmo PID desde o início do século passado, sendo que diversos trabalhos já comprovaram a eficiência do PID para controle clássico e avançado (controle antecipatório, controle de razão, multi-malha, cascata, etc.)

Existem diversos critérios e índices de desempenho (IAE, ITAE, ISE, ITSE, decaimento de um quarto, variabilidade, tempo de acomodação, sobresinal máximo, etc.) que permitem definir a eficiência de uma malha de controle. Além dos critérios e índices definidos pela teoria de controle, outros índices também são utilizados pelo mercado para avaliação de desempenho de malhas de controle. Estes índices normalmente permitem monitorar não só o desempenho do controlador em si, mas também o comportamento da malha como um todo (esforço da válvula, variações da dinâmica do processo, etc).

Apesar do controlador PID ser utilizado e estudado há muito tempo é impressionante como o desempenho das malhas de controle na indústria não é satisfatório na maioria dos casos. Isto se deve ao fato de que a grande maioria das implementações apresenta os seguintes problemas:

1. Problemas de processo e variações na dinâmica do mesmo (tempo morto, constante de tempo, etc.)

2 Introdução

- 2. Dificuldades de controle (não-linearidades, interações, perturbações, ruídos, etc.)
- 3. Estratégias de controle incompatíveis com as necessidades do processo e objetivos de controle.
- 4. Dimensionamento inadequado dos elementos da malha de controle.
- 5. Erros na implementação dos controladores em geral, principalmente quando se utilizam Controladores Lógicos Programáveis-CLP's.
- 6. Problemas na instalação de sensores, transmissores, conversores e atuadores, em geral.
- 7. Configurações inadequadas e problemas de calibração de instrumentos em geral.
- 8. Problemas de desgaste de atuadores (histerese, folga, agarramento, etc.).
- 9. Sintonia inadequada das malhas de controle.
- 10. Problemas de manutenção dos elementos da malha de controle.
- 11. Restrições, deficiências operacionais e falta de capacitação em geral.

Como o número de malhas de controle presente em uma planta industrial geralmente é elevado, aliado ao fato da influência do retardo no tempo sobre o desempenho dos sistemas de controle e da presença de incertezas e distúrbios em geral, faz-se necessário o uso de um controlador robusto em termos de aplicações gerais.

Outra forma de caracterizar o desempenho de sistemas de controle é por meio de normas de matrizes de transferência a malha fechada do sistema. Normas matriciais, como as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , proporcionam uma medida da influência das entradas exógenas (distúrbios de carga, ruídos, sinais de referência, etc.) sobre as saídas controladas do sistema (erros de rastreamento, sinais de controle, etc.). Controladores LQG (do inglês, "Linear-Quadratic-Gaussian"), bastante difundidos na década de 60, podem ser vistos como um caso especial do controle ótimo \mathcal{H}_2 . Devido à característica do projeto LQG de não assegurar margens de estabilidade satisfatórias (Doyle, 1978), além da dificuldade de se conhecer as propriedades estatísticas das perturbações, cresceu o interesse pelo controle ótimo \mathcal{H}_∞ , a partir do trabalho de Zames (1981). Em Doyle et al. (1989), soluções para os problemas de controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ foram formuladas para sistemas no espaço de estados através de equações de Riccati. Entretanto, formulações em termos de equações de Riccati podem se tornar difíceis de serem aplicadas aos problemas de controle robusto. A teoria de controle robusto foi bastante impulsionada a partir do final dos anos 80 quando os problemas de controle robusto passaram a ser caracterizados por problemas de otimização convexa. Os problemas de otimização convexa possuem a propriedade de que um ótimo local corresponde ao ótimo global. Na teoria de controle robusto, os problemas

são formulados como problemas de programação semi-definida (SDP, do inglês "Semidefinite Programming"), uma classe dos problemas de otimização convexa, na qual a função objetivo é linear e as restrições são na forma de desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês "Linear Matrix Inequalities") (Vandenberghe e Boyd, 1996). Uma propriedade importante das LMIs é que elas definem uma restrição convexa, ou seja, o conjunto de soluções que atende à restrição é convexo (Palhares e Gonçalves, 2007).

Uma das vantagens imediatas da abordagem por LMIs é a disponibilidade de programas, comerciais ou gratuitos, para a solução em tempo polinomial de tal classe de problemas de otimização como, por exemplo, o LMI Control Toolbox (Gahinet et al., 1995) e SeDuMi Interface (Sturm, 1999; Peaucelle, 2002), ambos para uso com o MATLAB (Vandenberghe e Balakrishnan, 1997). A princípio, caracterizar um problema de controle na forma de um problema baseado em LMIs significa na prática a sua solução, mesmo que não existam soluções analíticas disponíveis (Boyd et al., 1994). Pode-se dizer que as formulações por LMIs possuem a mesma importância na teoria de controle robusto que as equações de Lyapunov e Riccati na teoria de controle moderna e as ferramentas gráficas, como os diagramas de Bode, Nyquist e Nichols, na teoria de controle clássica (Doyle et al., 1991). Representar todas as especificações do sistema sendo projetado através de um único objetivo de controle é bastante restritivo. Deste modo, outra vantagem importante da abordagem por LMIs é que, como elas aparecem na forma de restrições no problema de projeto, elas oferecem maior flexibilidade para combinar várias especificações sobre o sistema a ser projetado (Boyd et al., 1994). A terceira característica de destaque dos problemas formulados em termos de LMIs, fundamental quando os sistemas considerados possuem domínio politópico de incerteza, é que é suficiente verificar o conjunto de vértices para garantir as especificações de estabilidade e desempenho para todos os sistemas pertencentes ao politopo.

O controle LQG, desenvolvido nos anos 60, não consegue lidar de forma adequada com sistemas com modelos incertos. Pequenas variações do modelo baseado no espaço de estados podem levar a respostas transitórias totalmente diferentes (Skelton et al., 1998). Por outro lado, as técnicas de projeto \mathcal{H}_{∞} são bastante adequadas para tratar de aspectos no domínio da freqüência e de questões de robustez, porém, proporcionam pouco controle sobre o comportamento transitório e sobre a localização dos pólos em malha-fechada (Chilali e Gahinet, 1996). Fica claro, a necessidade de técnicas de controle multiobjetivo que combinem os aspectos vantajosos de cada critério.

4 Introdução

O termo multiobjetivo é empregado aqui para referir-se aos projetos que devem atender às especificações de desempenho \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ e às restrições de posicionamento regional de pólos. A motivação para o projeto multiobjetivo pode ser colocada da seguinte forma, (Scherer et al., 1997):

- 1. O projeto, considerando desempenho \mathcal{H}_{∞} , é conveniente para garantir estabilidade robusta de sistemas incertos, para rejeição de distúrbios na forma de sinais com energia limitada e para expressar especificações no domínio da freqüência tais como faixa de passagem e ganho em baixas freqüências.
- 2. O projeto, considerando desempenho \mathcal{H}_2 , é equivalente ao controle ótimo LQG sendo útil para tratar de rejeição a distúrbios com características estocásticas, como ruídos de medição ou perturbações aleatórias.
- 3. O posicionamento regional de pólos é útil para garantir determinadas características da resposta transitória, como o tempo de decaimento ou o amortecimento.

Neste trabalho será analisada a utilização de modelos de referência para garantir as especificações de resposta de rastreamento do sinal de referência. Nesse caso, o objetivo será reduzir a diferença entre a função de transferência do processo em malha-fechada e o modelo de referência. Tal diferença será caracterizada em termos da norma \mathcal{H}_{∞} , tornando possível que esta especificação seja considerada como uma função objetivo adicional ao problema.

O uso de modelos de referência para a função de transferência em malha fechada de modo a garantir o desempenho da resposta de rastreamento já foi considerado em outros trabalhos anteriores. Metodologias de projeto de controladores com dois graus de liberdade considerando aproximação em malha fechada de um modelo de referência aplicados a sistemas incertos representados por fatoração co-prima normalizada perturbada ("normalized perturbed coprime factorization") são apresentados em Hoyle et al. (1991) e em Limebeer et al. (1993). O uso de modelos de referência para sistemas com modelos de incertezas politópicos merece estudo mais aprofundado.

As principais contribuições deste trabalho são:

- Análise do uso de modelo de referência como critério de projeto de controladores considerandose também a rejeição ao distúrbio e a atenuação de ruído em uma formulação multiobjetivo, para sistemas incertos com modelo de incerteza politópico.
- 2. A modificação e implementação de dois procedimentos de projeto para solução do problema de síntese multiobjetivo através da utilização de desigualdades matriciais bilineares (BMI, do inglês "Bilinear Matrix Inequality") e otimização direta no espaço de parâmetros do controlador.

3. A comprovação da eficácia do uso de modelo de referência, por meio de testes em exemplos disponíveis na literatura.

Serão considerados sistemas lineares invariantes no tempo contínuos e discretos.

No caso de sistemas contínuos no tempo será considerada a otimização direta no espaço de parâmetros do controlador. No caso de sistemas discretos no tempo serão consideradas tanto a solução do problema multiobjetivo formulado em termos de BMIs quanto a solução de otimização diretamente no espaço de parâmetros do controlador.

1.2 Estrutura da Dissertação

O restante desta dissertação é organizado como descrito a seguir.

O Capítulo 2 apresenta os conceitos de normas de sinais e sistemas além de fornecer a formulação do problema de controle considerando-se um sistema linear, invariante no tempo, em tempo contínuo ou discreto, com modelo de incerteza politópico, cuja síntese de um controlador robusto por realimentação dinâmica de saída será objeto do estudo.

Os **Capítulos 3 e 4** mostram, respectivamente, as formulações dos problemas de controle em termos de BMI's e otimização direta no espaço de parâmetros do controlador, apresentando os procedimentos de projeto para as duas formas de tratamento do problema de síntese.

O **Capítulo 5** apresenta alguns exemplos ilustrativos de sistemas em tempo contínuo e discreto para se demonstrar as vantagens da formulação de projeto proposta, bem como uma tabela comparativa e conclusiva dos resultados.

Finalmente, o **Capítulo 6** apresenta as conclusões gerais do trabalho até o atual estágio de pesquisa, propostas de desenvolvimento futuro e a relação de artigos aprovados em congresso com co-autoria do mestrando, que auxiliaram na integralização desta dissertação.

6 Introdução

Capítulo 2

Formulação do Problema de Controle

2.1 Introdução

Uma das formas de se caracterizar o desempenho de sistemas de controle é por meio de normas matriciais de certas matrizes de transferência a malha fechada do sistema. Como o procedimento de projeto considera o uso de normas como critério de desempenho, neste capítulo será apresentado inicialmente o conceito de normas de sinais e sistemas.

2.2 Normas de Sinais e Sistemas

Uma das formas de calcular a norma de um sinal contínuo (discreto) no domínio do tempo é pela norma \mathcal{L}_2 (l_2) definida como

$$||w(t)||_2 \triangleq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} w(t)^2 dt}$$
 (sistema a tempo contínuo) (2.1)

$$||w(k)||_2 \triangleq \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} w(k)^2}$$
 (sistema a tempo discreto) (2.2)

Se esta integral (ou somatória) é finita, o sinal é dito ser de quadrado integrável (ou passível de soma), representado por $w(t) \in \mathcal{L}_2$ ($w(k) \in l_2$), o que pode ser interpretado fisicamente como um sinal com energia limitada.

Seja $T_{zw}(p) = D + C(pI - A)^{-1}B$, p representando s ou z, a matriz de transferência relacionando o vetor de entradas exógenas w e o vetor de saídas controladas z (o significado duplo da letra z fica claro de acordo com o contexto). Duas normas de matrizes de transferência T_{zw} de interesse são as

normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_{∞} . A norma \mathcal{H}_2 de uma matriz de transferência, estritamente própria, de um sistema linear invariante no tempo estável no tempo contínuo, é definida como

$$||T_{zw}||_2 \triangleq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}\left[T_{zw}^*(j\omega)T_{zw}(j\omega)\right] d\omega}$$
 (2.3)

sendo $(\cdot)^*$ a transposta conjugada e $Tr(\cdot)$ o traço do argumento.

No caso de sistemas lineares invariantes no tempo estáveis a tempo discreto, a norma é definida como

$$||T_{zw}||_2 \triangleq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Tr}\left[T_{zw}^*(e^{j\omega})T_{zw}(e^{j\omega})\right] d\omega}$$
 (2.4)

A norma \mathcal{H}_{∞} de uma matriz de transferência de um sistema estável, corresponde ao pico do ganho da resposta em freqüência, no caso de sistemas com uma entrada e uma saída (SISO, do inglês "Single Input, Single Output"), ou o valor singular máximo no caso de sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO, do inglês "Multiple Input, Multiple Output"), sendo definida como

$$||T_{zw}||_{\infty} \triangleq \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \overline{\sigma}[T_{zw}(j\omega)]$$
 (sistema a tempo contínuo) (2.5)

$$||T_{zw}||_{\infty} \triangleq \sup_{\omega \in [0,2\pi]} \overline{\sigma}[T_{zw}(e^{j\omega})]$$
 (sistema a tempo discreto) (2.6)

sendo $\overline{\sigma}(\cdot)$ o valor singular máximo do argumento.

Estas duas normas de matrizes de transferência possuem interpretações relacionando os sinais de entrada e saída no domínio do tempo:

• Para uma entrada w(t) na forma de um processo ruído branco com variância e intensidade unitárias, a variância do sinal de saída z(t) em regime estacionário é dada por $||T_{zw}||_2$:

$$||T_{zw}||_2 = \lim_{T \to \infty} E\left\{\frac{1}{T} \int_0^T z(t)^T z(t) dt\right\}$$
 (2.7)

sendo $E\{\cdot\}$ é a esperança matemática do argumento.

• O ganho \mathcal{L}_2 ou ganho RMS de um sistema estável linear invariante no tempo, correspondendo ao maior ganho entre a entrada e saída sobre todos os sinais de entrada limitados $w(t) \in \mathcal{L}_2$, é dado por

$$||T_{zw}||_{\infty} = \max_{w \in \mathcal{L}_2, w \neq 0} \frac{||z||_2}{||w||_2}$$
 (2.8)

2.3 Cálculos de Normas e Custos

Existem vários métodos disponíveis para o cálculo das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ no caso de sistemas precisamente conhecidos. A norma \mathcal{H}_2 pode ser calculada exatamente através de um número finito de operações em termo dos Grammianos de controlabilidade ou observabilidade: $\|T_{wz}\|_2^2 = \text{Tr}(CX_cC^T) = \text{Tr}(B^TX_oB)$, sendo X_c e X_o os Grammianos de controlabilidade e observabilidade, respectivamente, que podem ser calculados resolvendo as seguintes equações de Lyapunov:

$$AX_c + X_c A^T + BB^T = 0 (2.9)$$

$$X_o A + A^T X_o + C^T C = 0 (2.10)$$

A norma \mathcal{H}_{∞} pode ser calculada com precisão adequada por meio de procedimentos iterativos (ver por exemplo Boyd et al. (1989)). A norma \mathcal{H}_{∞} pode ser calculada pela busca linear do valor mínimo de γ tal que a matriz Hamiltoneana não possui autovalores sobre o eixo imaginário (Zhou e Doyle, 1998):

$$H = \begin{bmatrix} A + BR^{-1}D^{T}C & BR^{-1}B^{T} \\ -C^{T}(I + DR^{-1}D^{T})C & -(A + BR^{-1}D^{T}C)^{T} \end{bmatrix}$$

sendo $R \triangleq \gamma^2 - D^T D$.

Para sistemas incertos, existem estratégias de cálculo de limitantes superiores da norma no domínio de incerteza denominados custos garantidos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_{∞} , baseadas em formulações por desigualdades matriciais lineares (LMIs). As primeiras formulações por LMIs foram baseadas no conceito de estabilidade quadrática (Palhares et al., 1997), mas o uso de uma única função de Lyapunov para todo o domínio de incerteza resulta geralmente em resultados conservadores. Para reduzir o conservadorismo, nos últimos anos foram publicados vários trabalhos que adotaram o uso de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros, variáveis matriciais extras e/ou parâmetros de sintonia, como por exemplo em Apkarian et al. (2001), de Oliveira et al. (2002), de Oliveira et al. (2004a), de Oliveira et al. (2004b), Ebihara e Hagiwara (2004a), Xie et al. (2004), Trofino et al. (2005) e He et al. (2005) e as referências por eles citadas, além de funções de Lyapunov quadráticas com dependência polinomial homogênea de grau arbitrário nos parâmetros como em Chesi et al. (2005) e Oliveira e Peres (2005). A vantagem desta última abordagem é que a precisão do custo garantido pode ser melhorada com o aumento do grau da dependência polinomial de parâmetros. Entretanto, a complexidade destas formulações aumenta rapidamente com o número de vértices do domínio politópico de incerteza e com o grau do polinômio. Contudo, os valores obtidos por estas estratégias são apenas limites superiores dos custos exatos e a precisão dos resultados obtidos pode variar consideravelmente de um caso para outro. Além disso, para reduzir o conservadorismo, as novas formulações estão cada vez mais

complexas, requerendo maior esforço computacional, tanto em termos de tempo de processamento quanto em requisito de memória do computador.

Para a análise de sistemas representados por modelos politópicos, existe uma estratégia para o cálculo dos valores máximos das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ (ou custos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞) com uma precisão desejada, baseada no algoritmo Branch-And-Bound (BnB) (Gonçalves et al., 2007).

Esta estratégia será apresentada no capítulo 4 uma vez que ela será utilizada em um dos passos do procedimento de síntese baseado na otimização direta no espaço de parâmetros do controlador.

2.4 Formulação do Problema de Controle Robusto

Considere o sistema de controle mostrado na figura 2.1.

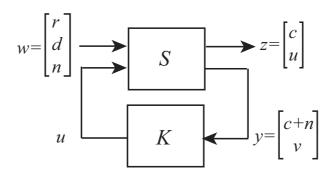


Figura 2.1: Diagrama de blocos geral do sistema de controle.

Será utilizada na formulação do problema de controle a notação compacta

$$G(p) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

aplicada para indicar a função de transferência $G(p) = C(pI - A)^{-1}B + D$, sendo $p \triangleq s$ para sistemas contínuos no tempo ou $p \triangleq z$ para sistemas discretos no tempo.

Na Fig. 2.1, seja S um sistema linear, invariante no tempo, descrito por

$$\delta[x(\tau)] = Ax(\tau) + B_u u(\tau) + B_w w(\tau)$$

$$z(\tau) = C_z x(\tau) + D_{zu} u(\tau) + D_{zw} w(\tau)$$

$$y(\tau) = C_y x(\tau) + D_{yw} w(\tau)$$
(2.11)

sendo $\delta[x(\tau)] \triangleq dx(t)/dt$ e $\tau \triangleq t \in \mathbb{R}$ para sistemas contínuos no tempo, ou $\delta[x(\tau)] \triangleq x(k+1)$ e $\tau \triangleq k \in \mathbb{N}$ para sistemas discretos no tempo. Na Eq. $(2.11), x(\tau) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados (incluindo a integral do erro de rastreamento, $\nu(t) \triangleq \int [r(t) - c(t) - n(t)] dt$, ou seu equivalente discreto), $u(\tau) \in \mathbb{R}$ é o vetor do sinal de controle (variável manipulada), $w(\tau) \in \mathbb{R}^{n_w}$ é o vetor de entradas exógenas (sinal de referência, $r(\tau)$, distúrbio, $d(\tau)$, e o ruído de medição, $n(\tau)$), $z(\tau) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de saídas controladas (saída da planta, $c(\tau)$, e sinal de controle, $u(\tau)$), e $y(\tau) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de sinais medidos (saída da planta com ruído de medição, $c(\tau) + n(\tau)$, e integral do erro de rastreamento, $\nu(\tau)$), que são as entradas do controlador dinâmico por realimentação de saída, conforme mostrado na Fig. 2.1.

O procedimento de síntese proposto requer a inclusão de uma variável adicional $\nu(\tau)$ associada com a ação integral, que garante erro de rastreamento nulo em regime estacionário mesmo na presença

de distúrbios.

Para simplificar a notação, as matrizes do sistema na Eq. (2.11) podem ser reunidas na matriz:

$$S \triangleq \begin{bmatrix} A & B_u & B_w \\ C_z & D_{zu} & D_{zw} \\ C_y & 0 & D_{yw} \end{bmatrix}$$
 (2.12)

que podem incluir parâmetros incertos pertencendo a um conjunto convexo compacto, ou politopo, definido pelos seus vértices:

$$\mathcal{P}(\alpha) \triangleq \left\{ \mathcal{S} : \mathcal{S} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathcal{S}_i; \ \alpha \in \Omega \right\}$$
 (2.13)

$$\Omega \triangleq \left\{ \alpha : \alpha_i \ge 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\}$$
 (2.14)

sendo S_i , i = 1, ..., N, os vértices do politopo e $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & ... & \alpha_N \end{bmatrix}'$ o vetor que parametriza o politopo. A dependência das matrizes do sistema de α será omitida para simplificar a notação.

Neste trabalho será considerado o controlador dinâmico por realimentação de saída descrito por:

$$\delta[x_c(\tau)] = A_c x_c(\tau) + B_c y(\tau)
 u(t) = C_c x_c(\tau) + D_c y(\tau)$$
(2.15)

ou na sua notação compacta

$$K = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{bmatrix}$$
 (2.16)

Muitos dos trabalhos prévios na área de controle robusto utilizam a estratégia de garantir as especificações da resposta transitória através de restrições de posicionamento regional de pólos no problema de otimização. A principal contribuição deste trabalho é combinar a técnica de controle \mathcal{H}_{∞} para rejeição de distúrbios e \mathcal{H}_2 para atenuação de ruídos com um objetivo adicional de otimização baseado no erro entre a função de transferência do processo em malha-fechada e um modelo de referência, para garantir as especificações de resposta de rastreamento, estendendo resultados prévios apresentados em Rodrigues et al. (2009). O problema de síntese de controladores que produzem uma função de transferência a malha-fechada que aproxime um modelo de referência desejado pode ser visto como um problema similar ao problema de aproximação por modelos de ordem reduzida. Desse modo, o procedimento de síntese proposto pode usufruir dos desenvolvimentos prévios na área de redução de modelos como em Helmersson (1994), Grigoriadis (1995), Geromel et al. (2005), Ebihara

e Hagiwara (2004b), Yousefi e Lohmann (2008) e Gonçalves et al. (2009).

Considere $T_{cr}(p) = C(p)/R(p)$ a função de transferência em malha fechada relacionada com a resposta de rastreamento, $T_{cd}(p) = C(p)/D(p)$ a função de transferência em malha fechada relacionada com a rejeição ao distúrbio e $T_{un}(p) = U(p)/N(p)$ a função de transferência em malha fechada relacionada com a atenuação do ruído. As matrizes a malha fechada, com f correspondendo aos subscritos cr, cd, ou un, na notação compacta:

$$T_f(p) = \left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] \tag{2.17}$$

são dadas por

$$A_{f} = \begin{bmatrix} A + B_{u}D_{c}C_{y} & B_{u}C_{c} \\ B_{c}C_{y} & A_{c} \end{bmatrix}$$

$$B_{f} = \begin{bmatrix} \overline{B}_{w} + B_{u}D_{c}\overline{D}_{yw} \\ B_{c}\overline{D}_{yw} \end{bmatrix}$$

$$C_{f} = \begin{bmatrix} \overline{C}_{z} + \overline{D}_{zu}D_{c}C_{y} & \overline{D}_{zu}C_{c} \end{bmatrix}$$

$$D_{f} = \begin{bmatrix} \overline{D}_{zw} + \overline{D}_{zu}D_{c}\overline{D}_{yw} \end{bmatrix}$$

$$(2.18)$$

com \bar{B}_w , \bar{C}_z , \bar{D}_{zu} , \bar{D}_{zw} , e \bar{D}_{yw} sendo sub-matrizes de B_w , C_z , D_{zu} , D_{zw} , e D_{yw} , relacionadas com os canais específicos dos componentes de w e de z.

Considere o modelo de referência que atenda às especificações da resposta transitória de rastreamento (sobresinal máximo, tempo de acomodação, etc.):

$$T_m(p) = \begin{bmatrix} A_m & B_m \\ \hline C_m & D_m \end{bmatrix}$$
 (2.19)

O erro entre o modelo de referência e a função de transferência em malha fechada, $E(p) \triangleq T_m(p) - T_{cr}(p)$, pode ser representado pelo seguinte modelo em espaço de estados:

$$E(p) = \begin{bmatrix} A_m & 0 & B_m \\ 0 & A_{cr} & B_{cr} \\ \hline C_m & -C_{cr} & D_m - D_{cr} \end{bmatrix}$$
 (2.20)

O problema de síntese de controlador robusto multiobjetivo sendo tratado neste trabalho pode ser estabelecido como sendo: dado um sistema incerto linear invariante no tempo, em tempo discreto ou contínuo, representado por um modelo politópico, $\mathcal{P}(\alpha)$, $\alpha \in \Omega$, e um modelo de referência, $T_m(p)$, com as características desejadas de resposta transitória, encontrar um controlador por realimentação

dinâmica de saída, K(p), que minimize a norma \mathcal{H}_{∞} máxima do erro entre o modelo de referência e a função de transferência em malha fechada, E(p), a norma \mathcal{H}_{∞} máxima da função de transferência $T_{cd}(p)$ relacionada com a rejeição ao distúrbio, e a norma \mathcal{H}_2 máxima da função de transferência $T_{un}(p)$ relacionada com a atenuação do ruído, no domínio politópico de incerteza:

$$K^{*}(p) = \arg\min_{K(p)} \begin{bmatrix} \max_{\alpha \in \Omega} \|E(p, \alpha, K)\|_{\infty} \\ \max_{\alpha \in \Omega} \|T_{cd}(p, \alpha, K)\|_{\infty} \\ \max_{\alpha \in \Omega} \|T_{un}(p, \alpha, K)\|_{2} \end{bmatrix}$$
sujeito a: $K(p) \in \mathcal{F}$ (2.21)

sendo \mathcal{F} o conjunto de controladores tal que o sistema em malha fechada seja robustamente estável. No caso de sistemas contínuos no tempo, pode ser necessário que $D_c = 0$ para encontrar um valor finito de $\max_{\alpha \in \Omega} \|T_{un}\|_2$.

A norma \mathcal{H}_{∞} representa a relação entre a energia do sinal de saída e a energia do sinal de entrada, correspondente ao pico de ganho da resposta em frequência da função de transferência. Quanto menor a norma \mathcal{H}_{∞} , maior a rejeição de distúrbios na forma de energia limitada. Já a norma \mathcal{H}_2 é útil para tratar de rejeição de distúrbios com características estocásticas, como ruídos de medição ou perturbações aleatórias. Minimizar a norma \mathcal{H}_2 significa minimizar a variância do sinal de saída relacionada com a variância do sinal de entrada.

As técnicas de otimização que serão empregadas neste trabalho, que serão apresentadas no capítulo 4, são adequadas para tratar problemas de otimização escalares.

O problema de otimização multiobjetivo (2.21) pode ser transformado em um problema de otimização escalar através de diferentes técnicas de escalarização, como, por exemplo, as formulações a seguir:

• Formulação 1: soma ponderada das funções objetivo

$$K^* = \arg\min_{K} \left(\lambda_1 \max_{\alpha \in \Omega} ||E||_{\infty} + \lambda_2 \max_{\alpha \in \Omega} ||T_{cd}||_{\infty} + \lambda_3 \max_{\alpha \in \Omega} ||T_{un}||_2 \right)$$
sujeito a: $K \in \mathcal{F}$

$$(2.22)$$

Os pesos $\lambda = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3]$ podem ser selecionados para gerarem diferentes resultados para o problema multiobjetivo.

• Formulação 2: restrições nas funções objetivo

$$K^* = \arg\min_{K} \max_{\alpha \in \Omega} \|T_{un}\|_2$$
sujeito a:
$$\max_{\alpha \in \Omega} \|T_{cd}\|_{\infty} \le \epsilon_{\infty}$$

$$\max_{\alpha \in \Omega} \|E\|_{\infty} \le \epsilon_{m}$$

$$K \in \mathcal{F}$$

$$(2.23)$$

As restrições ϵ_{∞} e ϵ_m podem ser selecionadas para gerarem diferentes soluções para o problema multiobjetivo.

• Formulação 3: combinação na técnica de ponderação com a restrição

$$K^* = \arg\min_{K} \left(\lambda_1 \max_{\alpha \in \Omega} \|T_{cd}\|_{\infty} + \lambda_2 \max_{\alpha \in \Omega} \|T_{un}\|_2 \right)$$
sujeito a:
$$\max_{\alpha \in \Omega} \|E\|_{\infty} \le \epsilon_m$$

$$K \in \mathcal{F}$$

$$(2.24)$$

Os pesos λ_1 , λ_2 , e a restrição ϵ_m podem ser selecionados para gerarem diferentes resultados para o problema multiobjetivo.

No capítulo 3, o problema de controle robusto apresentado será solucionado através de uma formulação BMI. No capítulo 4, será descrito um procedimento de otimização diretamente no espaço de parâmetros do controlador, que apesar de maior complexidade de implementação, gera resultados menos conservadores com melhor atendimento às especificações de projeto e também melhor desempenho.

Capítulo 3

Solução do Problema de Controle na Forma de BMI

3.1 Introdução

Uma possibilidade de tratar o problema (2.21) descrito no capítulo anterior é substituir as matrizes em malha fechada (2.18) e (2.20) nas formulações LMI de análise para cálculo de custos garantidos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . Quando as formulações LMI de análise são utilizadas na síntese, os resultados são formulações BMI com o produto das variáveis de Lyapunov e variáveis extras, de acordo com a formulação com as matrizes do controlador. No caso de síntese de controlador com realimentação dinâmica de saída, somente existem mudanças de variáveis linearizantes para sistemas precisamente conhecidos. Uma forma simples de se resolver o problema BMI é utilizar um algoritmo iterativo com dois passos onde a idéia básica é fixar uma das variáveis dos termos bilineares para transformá-la em um termo linear. Tal procedimento já foi aplicado em diversos trabalhos, como, por exemplo, em Helmersson (1994).

Vários trabalhos foram apresentados para transformar um problema BMI (não-convexo) em um problema LMI (convexo) no caso de sistemas precisamente conhecidos. Alguns trabalhos são baseados em mudança de variáveis linearizantes como em Gahinet et al. (1995), Scherer (1995), Scherer et al. (1997), Masubuchi et al. (1998), Apkarian et al. (2001), de Oliveira et al. (2002) e Ebihara e Hagiwara (2004a), e outros são baseados em eliminação de variáveis para transformar uma formulação BMI em duas formulações LMI acopladas por uma relação não-convexa como em Grigoriadis e Skelton (1996), Iwasaki (1999), Shimomura e Fujii (2000) e de Oliveira et al. (2000). Nessas formulações, as matrizes do controlador são funções das matrizes do sistema o que limita a aplicação a sistemas precisamente conhecidos.

3.2 Procedimento de Síntese de Controladores para Sistemas em Tempo Contínuo

O uso de formulação BMI para síntese de controladores robustos por realimentação dinâmica de saída com objetivo de aproximar a função de transferência em malha fechada, entre a saída da planta e o sinal de referência, de um modelo de referência, foi tratado pela primeira vez em Rodrigues et al. (2009). Neste trabalho os resultados iniciais foram estendidos para o problema multiobjetivo considerando-se como objetivos a aproximação do modelo de referência e a atenuação de distúrbios apenas, sem levar em conta o ruído de medição.

O custo garantido \mathcal{H}_{∞} de uma matriz de transferência com incerteza politópica

$$T(s,\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \begin{bmatrix} \bar{A}_i & \bar{B}_i \\ \bar{C}_i & \bar{D}_i \end{bmatrix}, \ \alpha \in \Omega$$

Sendo

$$\Omega \triangleq \left\{ \alpha : \alpha_i \ge 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\}$$
 (3.1)

e $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_N \end{bmatrix}'$ o vetor que parametriza o politopo, pode ser calculado através da conhecida formulação LMI:

$$||T(s,\alpha)||_{\infty} \leq \min_{\bar{P},\gamma} \gamma$$
sujeito a $\bar{P} = \bar{P}^T > 0$,
$$\begin{bmatrix} \bar{P}\bar{A}_i^T + \bar{A}_i\bar{P} & \bar{B}_i & \bar{P}\bar{C}_i^T \\ \bar{B}_i^T & -\gamma I & \bar{D}_i^T \\ \bar{C}_i\bar{P} & \bar{D}_i & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

$$(3.2)$$

A função de transferência do erro entre o modelo de referência e a função de transferência a malha-fechada $T_{cr}(s)$ pode ser representada por:

$$E(s) = \begin{bmatrix} A_m & 0 & B_m \\ 0 & A_{cr} & B_{cr} \\ \hline C_m & -C_{cr} & D_m - D_{cr} \end{bmatrix}$$
(3.3)

Neste caso,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_m & 0 & 0 \\ 0 & A & B_u C_c \\ 0 & B_c C_y & A_c \end{bmatrix}$$
 (3.4)

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B_m \\ \bar{B_w} \\ B_c D_{yw} \end{bmatrix}$$
(3.5)

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C_m & -\bar{C}_z & -\bar{D}_{zu}C_c \end{bmatrix}$$
 (3.6)

$$\bar{D} = \left[D_m - \bar{D}_{zw} \right] \tag{3.7}$$

Sendo $\bar{B_w}$, \bar{D}_{zu} e \bar{D}_{zw} as submatrizes associadas com c e r.

Considerando a matriz \bar{P} particionada como:

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ P_2^T & P_4 & P_5 \\ P_3^T & P_5^T & P_6 \end{bmatrix}$$
(3.8)

resulta nos seguintes elementos da restrição LMI em (3.2) com produtos de \bar{P} :

$$\bar{A}\bar{P} = \begin{bmatrix}
A_{m}P_{1} & \cdots \\
AP_{2}^{T} + B_{u}C_{c}P_{3}^{T} & \cdots \\
B_{c}C_{y}P_{2}^{T} + A_{c}P_{3}^{T} & \cdots \\
A_{m}P_{2} & \cdots \\
AP_{4} + B_{u}C_{c}P_{5}^{T} & \cdots \\
B_{c}C_{y}P_{4} + A_{c}P_{5}^{T} & \cdots \\
A_{m}P_{3} & AP_{5} + B_{u}C_{c}P_{6} \\
B_{c}C_{y}P_{5} + A_{c}P_{6}
\end{bmatrix}$$
(3.9)

$$\bar{P}\bar{C}^{T} = \begin{bmatrix} P_{1}C_{m}^{T} - P_{2}\bar{C}_{z}^{T} - P_{3}(\bar{D}_{zu}C_{c})^{T} \\ P_{2}^{T}C_{m}^{T} - P_{4}\bar{C}_{z}^{T} - P_{5}(\bar{D}_{zu}C_{c})^{T} \\ P_{3}^{T}C_{m}^{T} - P_{5}^{T}\bar{C}_{z}^{T} - P_{6}(\bar{D}_{zu}C_{c})^{T} \end{bmatrix}$$
(3.10)

O custo garantido \mathcal{H}_{∞} da matriz de transferência $T_{zd}(s)$ associada a rejeição de distúrbios pode

ser calculado de forma similar à do erro E(s). Neste caso a matriz \bar{P} é particionada como:

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2^T & W_3 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

Tanto em (3.9) como em (3.10) aparecem produtos entre a matrizes do controlador, A_c , B_c e C_c , e as matrizes de Lyapunov, $P = \{P_1, P_2, \dots, P_6\}$, variáveis do problema de otimização e o problema de controle por modelo de referência resulta em uma formulação BMI, não convexa, para o qual não é conhecida uma mudança de variáveis linearizantes para o caso de sistemas incertos. A estratégia proposta para tratar este problema é similar a utilizada em Helmersson (1994) em que é utilizado um algoritmo iterativo com dois passos. A idéia básica é fixar uma das variáveis dos termos bilineares para transformá-lo em um termo linear. O procedimento proposto para o caso de síntese de controladores robustos por realimentação dinâmica de saída considerando modelo de referência é apresentado a seguir:

- **Passo 1.** Obter um controlador, A_c , B_c e C_c , tal que o sistema a malha-fechada seja robustamente estável.
- **Passo 2.** Resolver (3.2) para obter $P_1, P_2, \ldots, P_6, W_1, W_2$ e W_3 fixando A_c, B_c e C_c igual as matrizes obtidas, na primeira iteração, no passo 1, e, nas iterações seguintes, no passo 3.
- **Passo 3.** Resolver (3.2) para obter A_c , B_c e C_c fixando P_1 , P_2 , ..., P_6 , W_1 , W_2 e W_3 igual as matrizes obtidas no passo 2.
- Passo 4. Repetir os passos 2 e 3 até que a solução convirja com base em algum critério de parada.

Para obter um controlador inicial (passo 1) é considerado o problema LMI de factibilidade apresentado em Scherer et al. (1997):

Encontre
$$X, Y, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$$

Sujeito a:
$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0,$$

$$\begin{bmatrix} (AX + B\hat{C}) + ()^T & \hat{A}^T + A \\ \hat{A} + A^T & (A^TY + \hat{B}C) + ()^T \end{bmatrix} < 0$$
(3.12)

sendo $()^T$ a transposta do termo anterior do mesmo elemento. O controlador é determinado pelo seguinte procedimento: encontrar matrizes não singulares M, N, que satisfazem $MN^T=I-XY$

(poder ser usado, por exemplo, a decomposição por valores singulares) e calcular as matrizes do controlador por

$$C_c = \hat{C}M^{-T}$$

$$B_c = N^{-1}\hat{B}$$

$$A_c = N^{-1}(\hat{A} - NB_cCX - YBC_cM^T)$$

$$-YAX)M^{-T}$$
(3.13)

Esta formulação LMI de síntese só pode ser aplicada a sistemas precisamente conhecidos. No procedimento proposto é considerado o sistema "nominal" (média dos vértices do politopo). Em caso do controlador obtido não resultar em um sistema robustamente estável, deve ser escolhido outro procedimento de projeto para o passo 1.

3.3 Procedimento de Síntese de Controladores para Sistemas em Tempo Discreto

Transformando o problema (2.21) para o seguinte problema escalar:

$$K^* = \arg\min_{K} \left(\lambda_1 \max_{\alpha \in \Omega} ||E||_{\infty} + \lambda_2 \max_{\alpha \in \Omega} ||T_{cd}||_{\infty} + \lambda_3 \max_{\alpha \in \Omega} ||T_{un}||_2 \right)$$
sujeito a: $K \in \mathcal{F}$

$$(3.14)$$

baseado no Teorema 3 (Custo Garantido Extendido \mathcal{H}_2) e no Teorema 4 (Custo Garantido Extendido \mathcal{H}_{∞}) apresentados em de Oliveira et al. (2002), o problema (3.14) pode ser formulado como:

Encontre
$$A_c$$
, B_c , C_c , D_c , $P_{e,i} = P_{e,i}^T$, G_e , $P_{\infty,i} = P_{\infty,i}^T$, G_{∞} , $P_{2,i} = P_{2,i}^T$, G_2 , μ_e , μ_{∞} , μ_2 para achar
$$\min(\lambda_1 \mu_e + \lambda_2 \mu_{\infty} + \lambda_3 \mu_2)$$
sujeito a
$$\begin{bmatrix} P_{e,i} & A_{e,i} G_e & B_{e,i} & 0 \\ * & G_e + G_e^T - P_{e,i} & 0 & G_e^T C_{e,i}^T \\ * & * & I & D_{e,i}^T \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} P_{\infty,i} & A_{cd,i}G_{\infty} & B_{cd,i} & 0 \\ * & G_{\infty} + G_{\infty}^T - P_{\infty,i} & 0 & G_{\infty}^T C_{cd,i}^T \\ * & * & I & D_{cd,i}^T \\ * & * & * & \mu_{\infty}I \end{bmatrix} > 0$$

$$\operatorname{traço}(W_i) < \mu_2$$

$$\begin{bmatrix} W_i & C_{un,i}G_2 & D_{un,i} \\ * & G_2 + G_2^T - P_{2,i} & 0 \\ * & * & I \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} P_{2,i} & A_{un,i}G_2 & B_{un,i} \\ * & G_2 + G_2^T - P_{2,i} & 0 \\ * & * & I \end{bmatrix} > 0$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

onde * representa as entradas simétricas. Os custos garantidos são $\max_{\alpha \in \Omega} \|E(z)\|_{\infty} < \sqrt{\mu_e}$, $\max_{\alpha \in \Omega} \|T_{cd}(z)\|_{\infty} < \sqrt{\mu_{\infty}}$, e $\max_{\alpha \in \Omega} \|T_{un}(z)\|_{2} < \sqrt{\mu_{2}}$.

Na formulação da síntese do problema de controle (3.15) existem produtos das matrizes de variáveis instrumentais adicionais G_e , G_∞ , e G_2 e as matrizes das realizações de E(z), $T_{cd}(z)$, e $T_{un}(z)$ que dependem das matrizes de variáveis do controlador, A_c , B_c , C_c , e D_c . Devido à esses produtos o problema de controle é um problema de otimização com formulação tipo BMI. A estratégia proposta para solucionar este problema é a mesma utilizada para sistemas contínuos no tempo, baseada no algoritmo iterativo de dois passos. A idéia básica é fixar uma das variáveis dos termos bilineares para transformá-lo em um termo linear. O procedimento proposto para resolver o problema (3.15) é apresentado a seguir:

- **Passo 1.** Obtenha um controlador inicial robustamente estável e suas matrizes A_c, B_c, C_c, D_c .
- **Passo 2.** Resolva (3.15) para obter $P_{e,i}$, G_e , $P_{\infty,i}$, G_∞ , $P_{2,i}$, e G_2 fixando A_c , B_c , C_c , D_c como as matrizes encontradas, na primeira iteração, no passo 1, e, nas demais iterações, no passo 2.
- **Passo 3.** Resolva (3.15) para obter A_c , B_c , C_c , D_c , $P_{e,i}$, $P_{\infty,i}$, e $P_{2,i}$ fixando G_e , G_{∞} , e G_2 como as matrizes encontradas no passo 2.
- Passo 4. Repita os passos 2 e 3 até que o a solução convirja com base em algum critério de parada.

Para encontrar um controlador inicial estável é considerado o problema de factibilidade, conforme

em de Oliveira et al. (2002), aplicado a um sistema "nominal" (média do sistema no politopo):

Encontre
$$X, L, Y, F, Q, R, S, J, P = P^T, H = H^T$$

sujeito a:
$$\begin{bmatrix} P & J & AX + B_u L & A + B_u R C_y \\ * & H & Q & YA + FC_y \\ * & * & X + X^T - P & I + S^T - J \\ * & * & * & Y + Y^T - H \end{bmatrix} > 0$$
(3.16)

As matrizes do controlador são calculadas por:

$$K = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^{-1} & -V^{-1}YB_u \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q - YAX & F \\ L & R \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} U^{-1} & 0 \\ -C_yXU^{-1} & I \end{bmatrix}$$
(3.17)

Sendo V e U, matrizes não singulares, que satisfaçam VU=S-YX (de Oliveira et al., 2002). Esse tipo de procedimento iterativo seria difícil de ser aplicado a um problema de controle com restrições de alocação de pólos regionais, porque seria necessário um controlador inicial robusto que atendesse à estas restrições. Esta é uma das vantagens da estratégia de síntese do controlador proposta, uma vez que a especificação da resposta de rastreamento é caracterizada por uma função objetivo com base no modelo de referência a malha fechada, ao invés de um conjunto de restrições, como no caso de alocação de pólos regionais.

3.4 Considerações a Respeito da Formulação BMI

As formulações BMI são fáceis de serem tratadas a partir do procedimento descrito neste capítulo, uma vez que exige a solução de um problema LMI em cada um dos dois passos. É possível com tais formulações obter resultados satisfatórios para o problema de controle, entretanto, existe uma série de limitações com este procedimento. Geralmente as formulações LMI são conservadoras e em muitos casos pode não ser obtida uma solução factível para o problema ou a solução não ser satisfatória. Um aspecto importante é a necessidade de uma solução inicial factível, no caso, um controlador que estabilize robustamente o sistema. Existem também dificuldades numéricas relacionadas com o espaço de busca das soluções. Devido aos problemas observados com as formulações BMI, no próximo capítulo será apresentado um outro procedimento de solução do problema (2.21) que é mais complexo de ser implementado porém resulta em melhores soluções para o problema de controle.

Capítulo 4

Solução do Problema de Controle no Espaço de Parâmetros do Controlador

4.1 Introdução

No capítulo 3, baseado em uma formulação BMI, foi apresentada uma técnica simples de se utilizar um algoritmo iterativo com dois passos onde a idéia básica foi fixar uma das variáveis dos termos bilineares para transformá-la em um termo linear.

Neste capítulo é apresentada uma outra metodologia de síntese, para tratar o mesmo problema, baseada em um procedimento iterativo de dois passos: 1) síntese baseada em um algoritmo de otimização não-linear diretamente no espaço de parâmetros do controlador considerando um conjunto finito de pontos do domínio de incerteza e 2) análise baseada em um algoritmo Branch-And-Bound (BnB) combinado com formulações LMI de análise. A motivação para adotar esta metodologia de solução é o fato de que este procedimento já foi aplicado com sucesso em outros problemas de controle robusto tais como síntese de controladores robustos por realimentação de estado (Gonçalves et al., 2005), síntese de controladores robustos PID (Gonçalves et al., 2008), síntese de filtros robustos (Gonçalves, Palhares e Takahashi, 2006) e redução de modelos (Gonçalves et al., 2009). Este procedimento apresenta a desvantagem de uma maior complexidade, porém, uma vez implementado, ele apresenta várias vantagens com relação às formulações LMI de síntese, como obter soluções menos conservadoras, obter soluções onde as formulações LMI não conseguem solução, possibilidade de escolher a ordem e a estrutura do controlador e de acrescentar quaisquer tipos de restrições sobre o mesmo.

Alguns exemplos ilustrativos são apresentados no capítulo 5 para demonstrar a eficácia do procedimento proposto para garantir tanto as especificações da resposta de rastreamento, por meio do modelo de referência, como a rejeição aos distúrbios e a atenuação de ruídos. Os resultados serão

comparados com os obtidos anteriormente utilizando-se formulações BMI ((Rodrigues et al., 2009) e (Araújo et al., 2010)), no caso de sistemas contínuos, e com os resultados obtidos pela formulação apresentada na seção 3.3.

Nas próximas seções é descrito o procedimento de projeto (Gonçalves et al., 2006) onde o mesmo é mostrado de forma mais detalhada.

4.2 Procedimento de Síntese Diretamente no Espaço de Parâmetros do Controlador

O procedimento de síntese apresentado neste capítulo para resolver o problema de otimização multiobjetivo (2.21) é baseado em um problema de otimização não-convexo, considerando os parâmetros do controlador como variáveis de otimização. Para executar esta tarefa, é necessário utilizar um procedimento de otimização baseado em duas etapas: síntese e análise. Na etapa de síntese é aplicada um algoritmo de otimização para resolver o problema de otimização escalar com o conjunto infinito Ω , definido em (2.14), e substituído por um conjunto finito de pontos de $\tilde{\Omega} \subset \Omega$. Este conjunto finito é inicialmente o conjunto de vértices do politopo, tal como considerado na formulação convexa. Considerar apenas os vértices do politopo não é suficiente para garantir a estabilidade robusta do sistema em malha fechada e à minimização das normas $\|E\|_{\infty}$, $\|T_{cd}\|_{\infty}$, e $\|T_{un}\|_2$ para todo $\alpha \in \Omega$. Para verificar o controlador encontrado na primeira etapa é aplicado um procedimento de análise com base em uma combinação do algoritmo Branch-And-Bound (BnB) e formulações LMI, na segunda etapa (Gonçalves et al., 2007).

Se o procedimento de análise encontra um sistema instável no domínio de incertezas ou se é verificado que os valores máximos de $\|E\|_{\infty}$, $\|T_{cd}\|_{\infty}$, ou $\|T_{un}\|_2$ não ocorrem em pontos pertencentes a $\tilde{\Omega}$, então os pontos correspondentes são incluídos em $\tilde{\Omega}$ e é necessário executar outra iteração do procedimento novamente. O processo termina quando se verifica que o sistema em malha fechada é robustamente estável e os valores máximos das funções objetivo obtidos nas duas etapas do procedimento são próximos de acordo com uma precisão especificada.

4.2.1 Etapa de Síntese

Na etapa de síntese, o problema de otimização escalar pode ser resolvido por meio do algoritmo Cone-Elipsoidal (Takahashi et al., 2003). Seja $x \in \mathbb{R}^d$ o vetor de parâmetros de otimização¹(neste caso os parâmetros do controlador), $f(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ a função objetivo a ser minimizada e $g_i(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, s$, o conjunto de funções de restrição.

Considere o elipsóide na iteração k descrito como $\mathcal{E}_k = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid (x-x_k)^T Q_k^{-1} (x-x_k) \leq 1\right\}$ onde x_k é o centro do elipsóide e $Q_k = Q_k^T \succ 0$ é a matriz que determina as direções e as dimensões dos eixos do elipsóide. Dados os valores iniciais de x_0 e Q_0 , o algoritmo Cone-Elipsoidal é descrito pelas seguintes equações recursivas:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{d+1} Q_k \tilde{m}$$

$$Q_{k+1} = \frac{d^2}{d^2 - 1} \left(Q_k - \frac{2}{d+1} Q_k \tilde{m} \tilde{m}^T Q_k \right)$$
(4.1)

sendo

$$\tilde{m} = m_k / \sqrt{m_k^T Q_k m_k}.$$

O vetor m_k que define o hiperplano de corte é a soma dos gradientes (ou sub-gradientes) normalizados das funções de restrição violadas, $g_i(x) > 0$, quando x_k não é uma solução factível, ou o gradiente (ou sub-gradiente) da função objetivo f(x), quando x_k é uma solução factível.

Observe que estas fórmulas recursivas são válidas apenas para d>1. No caso em que d=1, a idéia básica do algoritmo elipsoidal equivale a um algoritmo de bisseção para busca unidimensional, cujo próximo elipsóide corresponde à metade do segmento de reta onde se encontra a solução ótima. As Figuras 4.1 a 4.3 (Gonçalves, 2006) demonstram a evolução do algoritmo Elipsoidal tradicional partindo de uma elipse inicial que contém a solução ótima restrita. Como o primeiro ponto não é factível, a nova elipse é definida com base no gradiente da restrição violada. Uma vez que o novo ponto é factível, a segunda elipse é definida com base no gradiente da função objetivo.

1- O vetor x poderá ter significados diferentes de acordo com o contexto (vetor de variáveis de estado ou vetor de variáveis de otimização)

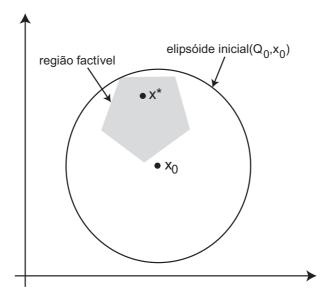


Figura 4.1: Simulação do algoritmo Elipsoidal - iteração 0.

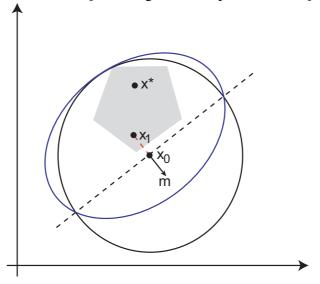


Figura 4.2: Simulação do algoritmo Elipsoidal - iteração 1.

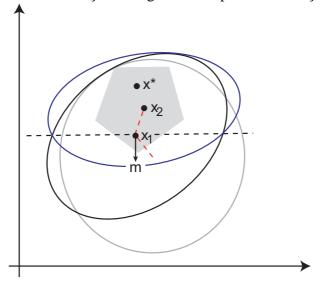


Figura 4.3: Simulação do algoritmo Elipsoidal - iteração 2.

4.2.2 Etapa de Análise

Na etapa de análise, é necessário calcular o $\alpha_i \in \Omega$, $i=1,\ldots,3$, correspondente ao máximo de cada função objetivo (2.21) ou encontrar um $\alpha \in \Omega$ que corresponde a um sistema instável. A estratégia básica do algoritmo Branch-And-Bound (BnB) é fazer com que as duas funções limitantes, superior e inferior, convirjam para o valor máximo da norma a medida que o domínio da incerteza, Ω , é particionado. Este algoritmo termina quando a diferença relativa entre as funções limitantes é inferior à precisão requerida. O algoritmo é implementado considerando como função limitante inferior a norma \mathcal{H}_{∞} (ou \mathcal{H}_2) calculada nos vértices e como função limitante superior o custo garantido \mathcal{H}_{∞} (ou \mathcal{H}_2) calculado por meio de formulações LMI, ambas as funções calculadas para o politopo original e suas subdivisões (Gonçalves et al., 2007). Neste trabalho, para sistemas em tempo contínuo, os cálculos do custo garantido são baseados em: Lema 1, apresentado em de Oliveira et al. (2004b) para custo garantido \mathcal{H}_{∞} e uma combinação dos Lemas 1 e 2, apresentados em de Oliveira et al. (2004a), para o custo garantido \mathcal{H}_2 . No caso de sistemas discretos no tempo, os cálculos dos custos garantidos são baseados no Teorema 4 para o custo garantido \mathcal{H}_{∞} e no Teorema 3 para o custo garantido \mathcal{H}_2 , ambos apresentados em de Oliveira et al. (2002).

Na próxima seção, o algoritmo BnB e sua aplicação na etapa de análise serão descritos em mais detalhes, como apresentados em Gonçalves (2006).

4.3 O Algoritmo BnB Aplicado ao Cálculo dos Custos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_{∞} com a Precisão Requerida

4.3.1 Escolha das Funções Limitantes

Seja $T_{zw}(p,\alpha) = C(\alpha)(pI - A(\alpha))^{-1}B(\alpha) + D(\alpha)$ a matriz de transferência de w para z, com p representando s ou z e $\alpha \in \Omega$. Por conveniência, a dependência de T_{zw} de p e α poderá ser omitida a partir deste ponto. O problema considerado é o cálculo do valor máximo da norma \mathcal{H}_q , $q \in \{2, \infty\}$, da matriz de transferência $T_{zw}(p,\alpha)$, para todo $\alpha \in \Omega$. Seja $\delta_{p.c.}$ e $\gamma_{p.c.}$ os valores máximos das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ no domínio de incerteza:

$$\delta_{p.c.} \triangleq \max_{\alpha \in \Omega} \|T_{zw}(p, \alpha)\|_2 \tag{4.2}$$

$$\gamma_{p.c.} \triangleq \max_{\alpha \in \Omega} \|T_{zw}(p, \alpha)\|_{\infty}$$
(4.3)

Os custos garantidos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_{∞} , $\delta_{c.g.}$ e $\gamma_{c.g.}$, calculados por meio de formulações baseadas em LMIs, são apenas um limite superior para o valor máximo das normas no domínio de incerteza, sem

nenhuma informação a respeito da diferença entre estes valores:

$$\delta_{p.c.} = \max_{\alpha \in \Omega} ||T_{zw}(p, \alpha)||_2 \le \delta_{c.g.}$$

$$(4.4)$$

$$\gamma_{p.c.} = \max_{\alpha \in \Omega} ||T_{zw}(p, \alpha)||_{\infty} \le \gamma_{c.g.}$$
(4.5)

Uma vez que o cálculo exato do valor máximo da norma é um problema de difícil solução, em Gonçalves (2006) é apresentado um método para o cálculo dos custos ϵ -garantidos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_{∞} , δ_c e γ_c , que são definidos como os valores que atendem as seguintes desigualdades:

$$\delta_{p.c.} \le \delta_c \le (1 + \epsilon)\delta_{p.c.} \tag{4.6}$$

$$\gamma_{p.c.} \le \gamma_c \le (1 + \epsilon)\gamma_{p.c.} \tag{4.7}$$

A função limitante superior é inicialmente o valor do custo garantido calculado para o politopo inicial correspondente ao domínio da incerteza. A partir da divisão do politopo inicial, a função limitante superior é o pior caso de custo garantido calculado em cada uma das subdivisões. A função limitante inferior é inicialmente o valor máximo da norma calculada nos vértices. Como será descrito na próxima seção, a técnica de divisão do politopo requer a inclusão de novos vértices e a função limitante inferior passa ser o máximo valor da norma calculada para os vértices iniciais e os novos vértices acrescentados. Como a cada iteração a subdivisão com o maior valor de custo garantido é escolhida para ser particionada, o pior caso de custo garantido é reduzido e mais pontos são considerados para o cálculo da função limitante inferior. A medida que se aumenta o número de partições reduzindo-se a dimensão das mesmas e aumentando-se o número de pontos, as funções limitantes convergem para o valor procurado dentro da precisão especificada.

Com esta escolha de funções limitantes, o algoritmo BnB irá combinar a redução do conservadorismo das formulações LMI pela partição do domínio de incerteza (função limitante superior) com uma técnica "inteligente" de grade (função limitante inferior) em que o refinamento da grade ocorre apenas no subpolitopo com maior valor de custo garantido. O custo computacional relacionado com o cálculo do custo \mathcal{H}_q pelas duas técnicas simultaneamente é justificado pela disponibilidade da informação da precisão do cálculo.

A eficiência do algoritmo BnB dependerá da escolha da formulação LMI com melhor compromisso entre complexidade e conservadorismo.

4.3.2 Técnica de Partição do Politopo

Na implementação do algoritmo Branch-And-Bound, é aplicada uma técnica de partição de politopos que combina triangularização de Delaunay (decomposição do politopo em um conjunto de simplexos) e subdivisão de simplexo orientada pelas arestas (Gonçalves, Palhares, Takahashi e Mesquita, 2006).

As Figuras 4.4 a 4.9 (Gonçalves, Palhares, Takahashi e Mesquita, 2006) apresentam uma simulação do algoritmo BnB para o cálculo do custo \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ , considerando um politopo no espaço bidimensional igual a um retângulo (4 vértices), reproduzida aqui para uma melhor compreensão do método (Gonçalves, 2006). No passo inicial, Figura 4.4, são calculadas as normas nos vértices do politopo e o custo garantido para o politopo. Neste caso o limite inferior é o maior valor de norma nos vértices, ou seja 10, e o limite superior é o custo garantido igual a 100. Na primeira partição, Figura 4.5, como o retângulo não é um simplexo, a divisão é realizada pela triangularização de Delaunay que divide o retângulo em dois triângulos sem acrescentar novos vértices. Deste modo o valor do limite inferior se mantém mas o valor do limite superior passa a ser o maior valor de custo garantido obtido como sendo 80. A partir deste ponto, as divisões ocorrem nos triângulos com maior custo garantido. A divisão do triângulo pela técnica de subdivisão de simplexos orientada pelas arestas gera quatro novos triângulos e três novos vértices, Figura 4.6. Os valores dos limites são atualizados para o novo valor máximo da norma igual a 16 e o novo valor máximo de custo garantido igual a 60. Observe que o triângulo com custo garantido 12 pode ser descartado do espaço de busca já que o maior valor de norma é superior a este valor. As divisões prosseguem até que a diferença relativa entre os limites superior e inferior atinja a precisão desejada, Figuras 4.7 a 4.9.

No procedimento de cálculo do custo com precisão especificada, quando o politopo inicial não é um simplexo, na primeira partição do politopo, realizada pela triangularização de Delaunay, não é acrescentado nenhum novo vértice e o número de simplexos gerados dependerá, não somente da dimensão do espaço e do número de vértices, como também da distribuição espacial destes vértices. A decomposição do politopo em simplexos, que correspondem ao politopo com menor número de vértices para uma dada dimensão, facilita o cálculo das funções limitantes inferior e superior tornando o algoritmo muito mais eficiente. No caso da função limitante superior, baseada no cálculo do custo garantido, este fato é mais evidente no caso de formulações LMI baseadas em funções de Lyapunov dependentes de parâmetros, para as quais, não só o número de restrições LMI, mas também o número de variáveis escalares de otimização, dependem do número de vértices do politopo. Após a triangularização de Delaunay, com a subdivisão de simplexo orientada pelas arestas, a cada iteração é necessário calcular $\frac{1}{2}d(d+1)$ normas dos sistemas correspondentes aos novos vértices sobre cada aresta e 2^d custos garantidos. Este procedimento pode acarretar em alto custo computacional à medida que a dimensão d do espaço de incerteza aumenta.

4.4 Comentários

O procedimento de síntese diretamente no espaço de parâmetros do controlador é muito mais complexo de ser implementado do que resolver a formulação BMI através de dois passos que envolvem um problema LMI, como descrito no capítulo anterior. Entretanto, uma vez implementado, o mesmo é fácil de ser adaptado para diferentes problemas de controle robusto, como foi feito neste trabalho. O único requerimento necessário para sua implementação é que existe uma técnica para o cálculo da função objetivo em um ponto, para a etapa de síntese e em um conjunto politópico, para a etapa de análise. Como será visto no próximo capítulo, o uso do procedimento descrito neste capítulo, permite obter soluções bastante satisfatórias para o problema de controle nos diferentes exemplos considerados.

4.4 Comentários 33

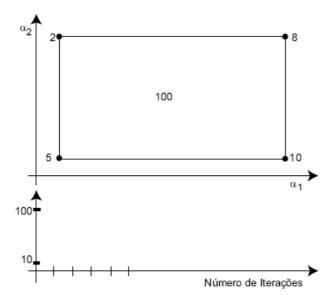


Figura 4.4: Simulação do algoritmo BnB - iteração 0.

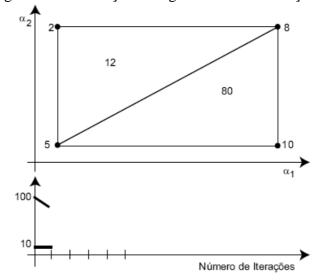


Figura 4.5: Simulação do algoritmo BnB - iteração 1.

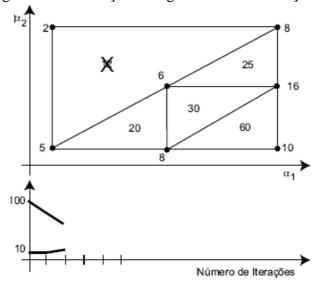


Figura 4.6: Simulação do algoritmo BnB - iteração 2.

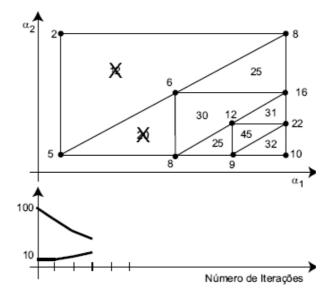


Figura 4.7: Simulação do algoritmo BnB - iteração 3.

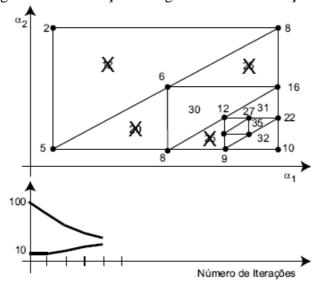


Figura 4.8: Simulação do algoritmo BnB - iteração 4.

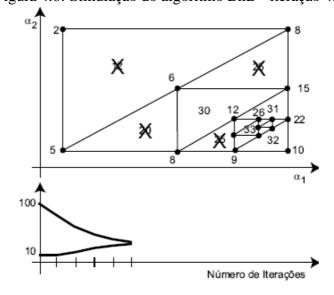


Figura 4.9: Simulação do algoritmo BnB - iteração 5.

Capítulo 5

Exemplos Ilustrativos

5.1 Sistemas em Tempo Contínuo

5.1.1 Exemplo 1: Sistema de Tanques Interligados

Considere o sistema de controle de nível de dois tanques interligados apresentado na Fig. 5.1 (Bachur et al., 2010b). Será considerado um modelo linearizado em torno de um ponto de operação. As variáveis em letras maiúsculas correspondes aos valores do ponto de operação: $\bar{Q}_u = \bar{Q}_1 = 0.4m^3/s, \, \bar{Q}_d = 0.1m^3/s, \, \bar{Q}_2 = 0.5m^3/s, \, \bar{H}_1 = 2m$ e $\bar{H}_2 = 1m$. As variáveis em letras minúsculas correspondem à variações em torno do ponto de operação. O vetor de variáveis de estado estendido, considerando a integral do erro, é definido como $x(t) \triangleq [h_1(t) \ h_2(t) \ v(t)]^T$, sendo $v(t) \triangleq \int [r(t) - h_2(t) - n(t)] dt$. A saída controlada é o nível do tanque $2, h_2(t)$, a variável manipulada é a vazão de entrada no tanque $1, u(t) = q_u(t)$, e o distúrbio é a vazão de entrada no tanque $2, d(t) = q_d(t)$. As variáveis medidas, utilizadas como entradas do controlador dinâmico por realimentação de saída, são o nível do tanque 2 corrompido pelo ruído e a integral do erro.

As equações dinâmicas deste sistema são apresentadas a seguir:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_1}{A_1} & \frac{k_1}{A_1} & 0 \\ \frac{k_1}{A_2} & -\frac{k_1 + k_2}{A_2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ v \end{bmatrix} \\
+ \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} q_u + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ q_d \\ n \end{bmatrix} \\
z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\
y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ q_d \\ n \end{bmatrix}$$
(5.1)

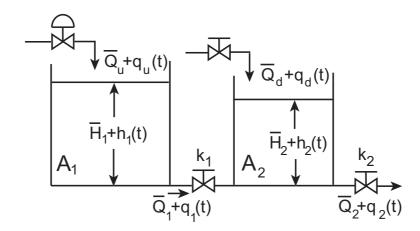


Figura 5.1: Sistema de controle de nível de dois tanques interligados.

As áreas transversais dos tanques são $A_1=10m^2$ e $A_2=5m^2$. Considere que k_1 e k_2 , resistências hidráulicas das válvulas manuais, sejam parâmetros incertos que podem variar na faixa: $0.15 \le k_1 \le 0.25$ e $0.2 \le k_2 \le 0.3$. O sistema incerto é representado por um modelo politópico com quatro vértices correspondendo aos valores extremos dos dois parâmetros incertos. Os objetivos de projeto são: garantir que o nível do tanque 2 se iguale ao sinal de referência com uma resposta transitória de rastreamento próxima à de um modelo de referência, minimizar a influência do distúrbio $q_d(t)$ sobre $h_2(t)$ e atenuar o efeito do ruído de medição, n(t), sobre a variável manipulada, $q_u(t)$. É desejado que $q_u(t)$ varie dentro de uma faixa aceitável para o seguintes sinais de teste:

$$r(t) = 0.1(t), q_d(t) = -0.01(t - 200) e -0.001 \le n(t) \le 0.001.$$

Como modelo de referência é utilizado uma realização no espaço de estados balanceada de:

$$T_m(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \ \zeta = 0.9, \ \omega_n = 0.05$$
 (5.2)

Exemplo 1 - Caso 1: Solução baseada em BMI

O ruído de medição n(t) não está sendo considerado neste caso.

O problema de síntese de controlador robusto multiobjetivo sendo tratado neste caso 1 pode ser estabelecido como sendo: dado um sistema linear invariante no tempo com modelo de incerteza politópico, $\mathcal{P}(\alpha)$, $\alpha \in \Omega$, e um modelo de referência, $T_m(s)$, encontre o controlador dinâmico por realimentação de saída, K(s), que minimiza o pior caso da norma \mathcal{H}_{∞} do erro em relação ao modelo de referência e a função de transferência a malha-fechada, $T_{cr}(s)$, $E(s) \triangleq T_m(s) - T_{cr}(s)$ e o pior caso da norma \mathcal{H}_{∞} da função de transferência entre o distúrbio e a saída, no domínio politópico de incerteza:

$$K^* = \arg\min_{K} \begin{bmatrix} \max_{\alpha \in \Omega} || E(s, \alpha, K) ||_{\infty} \\ \max_{\alpha \in \Omega} || T_{zd}(s, \alpha, K) ||_{\infty} \end{bmatrix}$$
suieito a: $K \in \mathcal{F}$ (5.3)

sendo \mathcal{F} o conjunto de controladores que resultam em sistemas a malha-fechada robustamente estáveis, com estruturas e restrições especificadas.

A função de transferência relacionada com a resposta de rastreamento é representada por:

$$T_{cr}(s) \triangleq \begin{bmatrix} A_{cr} & B_{cr} \\ \hline C_{cr} & D_{cr} \end{bmatrix}$$
 (5.4)

e a matriz de transferência relacionada com rejeição de distúrbios é representada por:

$$T_{zd}(s) \triangleq \begin{bmatrix} A_{zd} & B_{zd} \\ \hline C_{zd} & D_{zd} \end{bmatrix}$$
 (5.5)

O cálculo tanto da função de transferência T_{cr} como da matriz de transferência T_{zd} requer que sejam selecionadas as colunas apropriadas das matrizes B_w , D_{zw} e D_{yw} associadas com o sinal de referência, r(t), e o sinal de distúrbio, d(t), respectivamente. O problema de otimização multiobjetivo pode ser transformado em um problema de otimização escalar por meio da soma

ponderada das duas funções objetivos:

$$K^* = \arg\min_{K} \left[\lambda_1 \max_{\alpha \in \Omega} \|E\|_{\infty} + \lambda_2 \max_{\alpha \in \Omega} \|T_{zd}\|_{\infty} \right]$$
sujeito a: $K \in \mathcal{F}$ (5.6)

sendo λ_1 e λ_2 pesos que podem ser variados para gerar diferentes soluções do problema multiobjetivo.

A solução do problema (5.3) na forma (5.6) baseado em BMI não faz parte dos trabalhos desenvolvidos nesta dissertação porém é apresentado como base teórica e didática, bem como servirá nos resultados comparativos mostrados no desenvolvimento deste trabalho. Utilizando o procedimento de projeto descrito no capítulo 3, em que cada passo é solucionado um problema LMI, foram obtidos vários controladores robustos de acordo com os pesos λ_1 e λ_2 . Para a convergência do procedimento proposto, nos passos 1 e 3 do procedimento, é necessário testar diferentes valores para o raio de viabilidade (*feasibility radius*). O critério de parada implementado foi baseado na variação relativa da função objetivo no problema (5.6) nas últimas cinco iterações:

$$\frac{f_{5,max} - f_{5,min}}{f_{max} - f_{min}} \le 10^{-3}$$

onde $f_{5,max}$ e $f_{5,min}$ são os máximos e mínimos valores da função objetivo escalar nas últimas cinco iterações e f_{max} e f_{min} são os máximos e mínimos valores da função objetivo escalar em todas as iterações. Para o sistema em estudo foram obtidos controladores instáveis, controladores de fase não mínima e verificado a presença de modos de vibração em alta-frequência. O controlador apresentado a seguir, considerado o de melhor desempenho, foi obtido com raio de viabilidade igual a 1000 e $\lambda_1=0.95$ e $\lambda_2=0.05$ (Rodrigues et al., 2009).

O controlador que garante $\max_{\alpha \in \Omega} \|E\|_{\infty} \le 0.0426$ e $\max_{\alpha \in \Omega} \|T_{zd}\|_{\infty} \le 0.1950$ é calculado como:

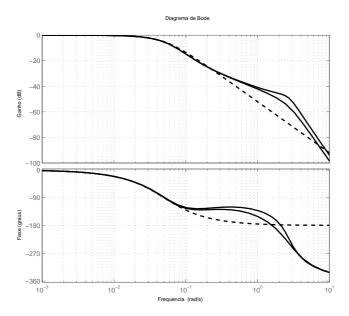


Figura 5.2: Resp. frequência do modelo (tracejado) e dos 4 vértices (sólido) com o controlador K.

$$K(s) = \begin{bmatrix} 6,56 & -11,51 & -3,12 & -280,02 & 2,26 \\ 3,52 & -5,18 & 0,36 & -163,68 & 1,27 \\ 3,94 & -9,04 & -6,34 & -138,28 & 1,29 \\ \hline -3,62 & 15,93 & 21,27 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-4.534,4508(s^2+0,1185s+0,004769)}{(s+0,06079)(s^2+4,893s+13,12)} \\ \frac{39,5574(s+0,1387)(s+0,1093)}{(s+0,06079)(s^2+4,893s+13,12)} \end{bmatrix}^T$$

As respostas em freqüência de $T_m(s)$ e de $T_{cr}(s)$, para K(s), nos quatro vértices, são apresentadas na Fig. 5.2. Observa-se, que dentro da faixa de passagem, as respostas obtidas estão bastante próximas da desejada. Considerando uma variação do sinal de referência de 10% em relação ao ponto de operação, r(t)=0.1(t), e uma variação de 10% no distúrbio, $q_d(t)=0.01(200-t)$, foram obtidas as respostas transitórias de rastreamento e da variável manipulada apresentadas nas Figs. 5.3 e 5.4 respectivamente. Nos transitórios de $q_u(t)$ são observadas vibrações de alta-frequência de curta-duração.

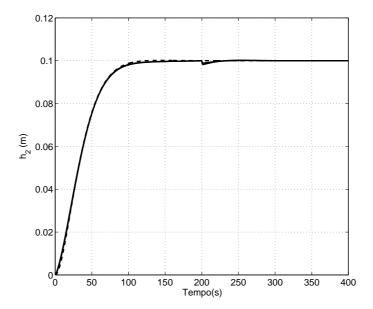


Figura 5.3: Resp. transitória h_2 do modelo(tracejado) e dos 4 vértices (sólido) com o controlador K.

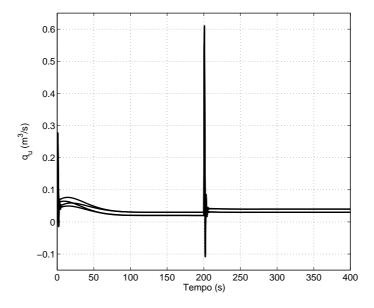


Figura 5.4: Resp. transitória do sinal de controle $q_u(t)$ e dos 4 vértices com o controlador K.

• Exemplo 1 - Caso 1: Solução Baseada em Otimização no Espaço de Parâmetros do Controlador

Por questões de comparação, o procedimento descrito no capítulo 4, baseado em otimização no espaço de parâmetros do controlador, foi utilizado inicialmente para projetar um controlador com a mesma dimensão e estrutura de K(s) (18 parâmetros de otimização). Para $\lambda_1=0.95$ e $\lambda_2=0.05$ foi obtido um controlador que resulta em valores bem menores para ambas as funções objetivos do que aqueles obtidos com a formulação BMI. O controlador que garante $\max_{\alpha\in\Omega}\|E\|_{\infty}\leq 0.0025$ e $\max_{\alpha\in\Omega}\|T_{zd}\|_{\infty}\leq 0.0332$ é calculado como:

$$K_1(s) = \begin{bmatrix} -31,60 & 19,62 & 44,23 & 282,40 & -11,30 \\ 33,74 & -23,25 & -35,80 & -277,60 & 10,40 \\ -45,69 & 16,49 & 36,93 & -1.317,30 & -10,80 \\ \hline 46,69 & -56,93 & -87,66 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-86.570,68(s+0.09)(s+165,30)}{(s+10.77)(s^2+7.15s+581,3)} \\ \frac{-2.068,91(s^2+2.98)(s-5.79)}{(s+10.77)(s^2+7.15s+581,3)} \end{bmatrix}^T$$

Além de obter bons resultados, outra vantagem do procedimento adotado é a possibilidade de projetar controladores com qualquer estrutura e dimensão. Considerando um controlador com a mesma dimensão de $K_1(s)$ mas modificando a sua estrutura, com base em uma forma canônica, tal que o mesmo possua funções de transferência independentes para cada entrada, sendo uma de segunda ordem e outra de primeira ordem (6 parâmetros de otimização), foi escolhido um controlador, obtido com $\lambda_1=0.8$ e $\lambda_2=0.2$, que novamente resulta em melhores resultados comparado com K(s). O controlador que garante $\max_{\alpha\in\Omega}\|E\|_{\infty}\leq 0.0056$ e $\max_{\alpha\in\Omega}\|T_{zd}\|_{\infty}\leq 0.1175$ é calculado como:

$$K_2(s) = \begin{bmatrix} -6,0917 & -24,510 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -333,25 & 0 & 1 \\ \hline -13.841 & -1.281,9 & 483,7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cc} -13.840,7828(s+0.09261) \\ \hline s^2 + 6.092s + 24.51 \end{array} \right] \frac{483,7423}{s+333,3}$$

Com objetivo adicional de obter o controlador mais simples possível que atende as especificações desejadas, foi considerado um controlador com funções de transferência independentes para cada entrada, sendo uma de primeira ordem e outra apenas um ganho (4 parâmetros de otimização). Para $\lambda_1=0.4$ e $\lambda_2=0.6$, o controlador que garante $\max_{\alpha\in\Omega}\|E\|_{\infty}\leq 0.0042$ e $\max_{\alpha\in\Omega}\|T_{zd}\|_{\infty}\leq 0.1316$ é calculado como:

$$K_3(s) = \begin{bmatrix} -2,7863 & 1 & 0\\ \hline 4.199,5 & -1.558,5 & 1,4245 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c} -1.558,4892(s+0.09166) \\ \hline s+2.786 \end{array} \right] 1,4245$$

As respostas em freqüência de $T_m(s)$ e de $T_{cr}(s)$, para $K_3(s)$ são apresentadas na Fig. 5.5. Observa-se que dentro da faixa de passagem, as respostas obtidas estão bastante próximas da desejada. Este controlador apresenta uma excelente rejeição ao distúrbio, por meio de uma variação de $q_u(t)$ na faixa de $-0.07 \le q_u(t) \le 0.72$, reproduzindo a resposta de rastreamento perfeitamente, como pode ser visto nas Figs. 5.6 e 5.7.

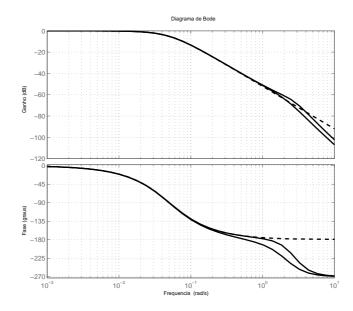


Figura 5.5: Resp. em frequência do modelo(tracejado) e dos 4 vértices(sólido) para K_3 .

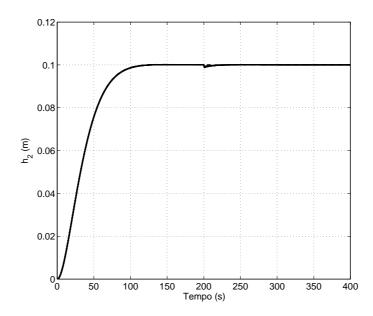


Figura 5.6: Resp. transitórias $h_2(t)$ do modelo(tracejado) e dos 4 vértices(sólido) para K_3 .

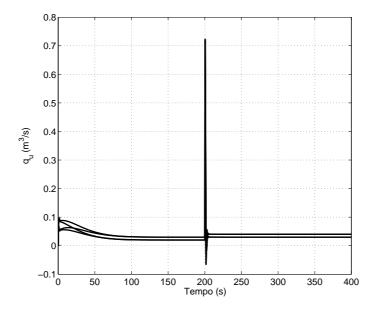


Figura 5.7: Resp. transitórias do sinal de controle $q_u(t)$ e dos 4 vértices para K_3 .

Pode parecer, a princípio, que o algoritmo baseado em otimização direta no espaço de parâmetros do controlador requer maior tempo computacional do que o procedimento com dois passos baseados em LMI. Porém, o tempo computacional deste algoritmo, dependente do número de variáveis de otimização e da necessidade ou não de mais de uma iteração, o que não foi o caso para este exemplo. Os controladores K_2 e K_3 foram obtidos com um tempo computacional inferior ao do controlador K, calculado pela formulação em termos de BMI.

• Exemplo 1 - Caso 2: Solução Baseada em Otimização no Espaço de Parâmetros do Controlador

O problema de síntese do controle robusto multiobjetivo considerado neste caso é definido como (Bachur et al., 2010a):

$$K^* = \arg\min_{K} \begin{bmatrix} \max_{\alpha \in \Omega} \|E(s, \alpha, K)\|_{\infty} \\ \max_{\alpha \in \Omega} \|T_{cd}(s, \alpha, K)\|_{\infty} \\ \max_{\alpha \in \Omega} \|T_{un}(s, \alpha, K)\|_{2} \end{bmatrix}$$
sujeito a: $K \in \mathcal{F}$ (5.7)

Sendo \mathcal{F} o conjunto de controladores que resultam em sistemas a malha fechada robustamente estáveis.

Neste caso, o problema de otimização multiobjetivo é transformado em um problema de otimização escalar por meio da soma ponderada das duas últimas funções objetivos, transformando a primeira em restrição:

$$K^* = \arg\min_{K} \left(\lambda_1 \max_{\alpha \in \Omega} \|T_{cd}\|_{\infty} + \lambda_2 \max_{\alpha \in \Omega} \|T_{un}\|_2 \right)$$
sujeito a:
$$\max_{\alpha \in \Omega} \|E\|_{\infty} \le \epsilon_m$$

$$K \in \mathcal{F}$$

$$(5.8)$$

Os pesos λ_1 , λ_2 , e a restrição ϵ_m podem ser selecionados para gerarem diferentes resultados para o problema multiobjetivo.

Esta escolha, para a escalarização do problema multiobjetivo, é interessante uma vez que existe um ϵ_m que garante que a resposta de rastreamento estará satisfatoriamente próxima a da resposta desejada, especificada pelo modelo de referência, fazendo com que a otimização ocorra para a rejeição do distúrbio e a atenuação do ruído. Se $\lambda_2 \neq 0$, é necessário que $D_c = 0$.

Como já mencionado, uma das vantagens do procedimento baseado em otimização no espaço de parâmetros do controlador é a capacidade de escolher qualquer estrutura desejada para as matrizes do controlador. É considerado um controlador em uma forma canônica com duas funções de transferência desacopladas, sendo a primeira de segunda ordem e uma segunda de primeira ordem (6 parâmetros de otimização). Inicialmente, são considerados $\lambda_1=0$ e $\lambda_2=1$, para minimizar apenas $\max \|T_{un}\|_2$ com ϵ_m variando na faixa de $0.02 \le \epsilon_m \le 0.1$. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 5.1. A curva de Pareto é apresentada na Fig. 5.8.

Tabela 5.1:	Custo	Garantido	com €m	\subset	[0.02:	0.11
Tabbia J.T.	Cusio	Oarannao	COIII Cm	_	10.04.	O. I

$\max_{\alpha \in \Omega} \ T_{un}\ _2$	$\max_{\alpha \in \Omega} T_{cd} _{\infty}$	$\max_{\alpha \in \Omega} \ E\ _{\infty}$
48,01	1,74	0,02
27,33	1,74	0,03
17,81	1,74	0,04
12,52	1,74	0,05
8,42	1,74	0,07
6,77	1,74	0,08
5,82	1,74	0,09
5,13	1,74	0,10

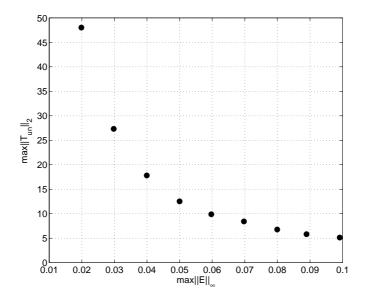


Figura 5.8: Curva de Pareto considerando as funções objetivos $\max \|E\|_{\infty}$ e $\max \|T_{un}\|_{2}$.

O controlador com esta estrutura que garante $\max_{\alpha \in \Omega} \|E\|_{\infty} \le 0.06$ e $\max_{\alpha \in \Omega} \|T_{cd}\|_{\infty} \le 1.74$, resultando em $\max_{\alpha \in \Omega} \|T_{un}\|_{2} = 9.88$, para $\epsilon_{m} = 0.06$ é calculado como:

$$K_4(s) = \begin{bmatrix} -0.5254 & -0.1300 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -27.9688 & 0 & 1 \\ \hline -6.9202 & -0.6645 & 3.9357 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cc} -6,9202(s+0,09602) \\ \hline s^2 + 0,5254s + 0,13 \end{array} \right]$$

As respostas em frequência de $T_m(s)$ e $T_{cr}(s)$, considerando-se $K_4(s)$, são apresentadas na Fig. 5.9. Pode-se verificar que, na faixa de passagem, a resposta em frequência em malha fechada está próxima da especificada pelo modelo de referência.

Este controlador apresenta uma razoável rejeição ao distúrbio e atenuação de ruído, com um esforço de controle aceitável, reproduzindo perfeitamente a resposta de rastreamento especificada, como mostrado nas Figs. 5.10 and 5.11.

Observa-se que, ao se incluir o objetivo de minimizar o efeito do ruído sobre o sistema de controle, o controlador obtido apresenta ganhos menores, o que resulta em um menor esforço de controle em detrimento de uma menor rejeição do distúrbio, como pode ser observado comparando-se as Figs. 5.6 e 5.7 em relação às Figs. 5.10 e 5.11.

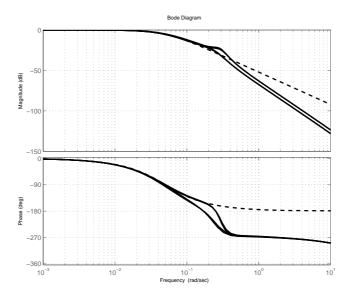


Figura 5.9: Resp. frequência do modelo(tracejado) e dos 4 vértices(sólido) para K_4 .

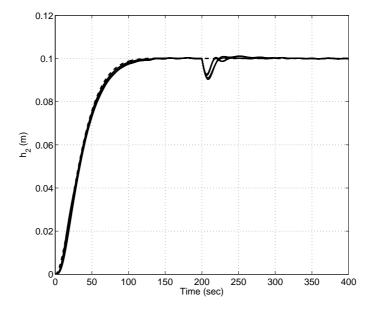


Figura 5.10: Resp. transitória h_2 , modelo de referência(tracejado) e dos 4 vértices(sólido)para K_4 .

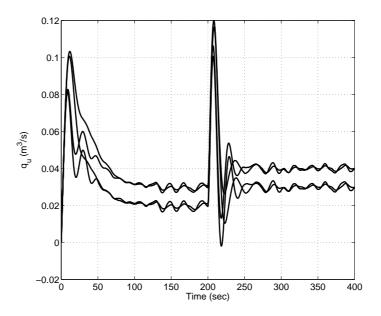


Figura 5.11: Resp. transitória do sinal de controle $q_u(t)$ e dos 4 vértices para K_4 .

Considerando somente a minimização de $\max \|T_{cd}\|_{\infty}$ com $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0$, e $\epsilon_m=0.06$, o controlador que garante $\max_{\alpha\in\Omega}\|E\|_{\infty}\leq 0.045$ e $\max_{\alpha\in\Omega}\|T_{cd}\|_{\infty}\leq 0.13$, resultando em $\max_{\alpha\in\Omega}\|T_{un}\|_{2}=4.343.7$ é calculado como:

$$K_{\infty}(s) = \begin{bmatrix} -5,5510 & -20,6911 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -155,0447 & 0 & 1 \\ \hline -10.641 & -881,4932 & 182,0585 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c} -1.0640,8078(s+0,08284) \\ \hline s^2 + 5.551s + 20.69 \end{array} \right] \frac{182,0585}{s+155}$$

As respostas em frequência de $T_m(s)$ e $T_{cr}(s)$, considerando $K_{\infty}(s)$, são mostradas na Fig. 5.12. Este controlador reproduz perfeitamente a resposta de rastreamento especificada e apresenta uma excelente rejeição à distúrbios, mas o esforço de controle é muito alto com baixa atenuação do ruído, como mostrado nas Figs. 5.13 e 5.14. Naturalmente, escolhendo-se valores de λ_1 e λ_2 adequados, é possível encontrar controladores com um melhor compromisso entre rejeição à distúrbios e atenuação de ruídos, em relação aos controladores K_4 e K_{∞} apresentados. Considerando as minimizações de $\max \|T_{cd}\|_{\infty}$ e $\max \|T_{un}\|_2$ com $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$ e $\epsilon_m = 0.06$, o controlador K_5 que garante $\max_{\alpha \in \Omega} \|E\|_{\infty} \le 0.06$ e $\max_{\alpha \in \Omega} \|T_{cd}\|_{\infty} \le 2.18$, resultando em

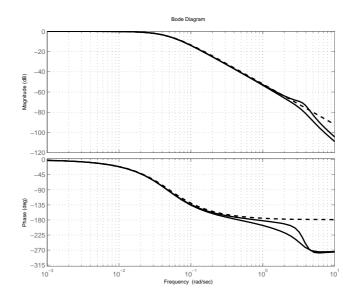


Figura 5.12: Resp. frequência do modelo(tracejado) e dos 4 vértices(sólido) para K_{∞} .

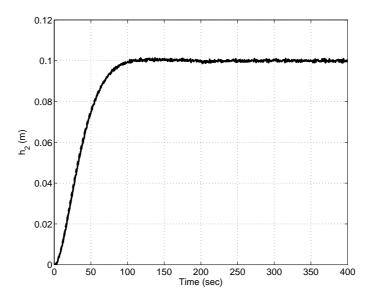


Figura 5.13: Resp. transitória h_2 , modelo de referência(tracejado) e dos 4 vértices(sólido) para K_{∞} .

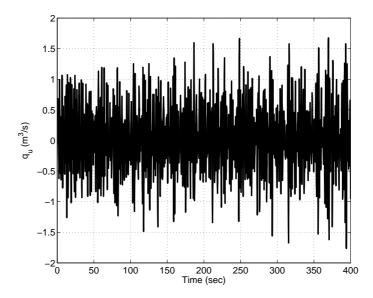


Figura 5.14: Resp. transitória do sinal de controle $q_u(t)$ e dos 4 vértices para K_{∞} .

 $\max_{\alpha \in \Omega} ||T_{un}||_2 \le 3.45$ é calculado como:

$$K_5(s) = \begin{bmatrix} -25,03 & -14,61 & 17,44 & 2,25 & -0,48 \\ 7,58 & 4,09 & -5,34 & 1,63 & 0,26 \\ 9,61 & 3,88 & -7,39 & 5,29 & 0,85 \\ \hline -14,06 & -8,68 & 9,63 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5,18(s+0,11)(s-17,78)}{(s+27,74)(s^2+0,59s+0,12)} \\ \frac{12,68(s^2+0,15s+0,02)}{(s+27,74)(s^2+0,59s+0,12)} \end{bmatrix}^{T}$$

Nas Figs 5.15 e 5.16 são mostradas as respostas para o controlador K_5 , com excelente ganho, sendo $\lambda_1=\lambda_2=0.5$ e $\epsilon_m=0.06$.

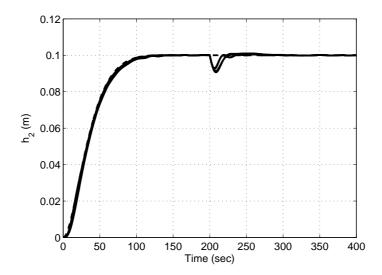


Figura 5.15: Resp. transitória h_2 , modelo de referência(tracejado) e dos 4 vértices(sólido) para K_5 .

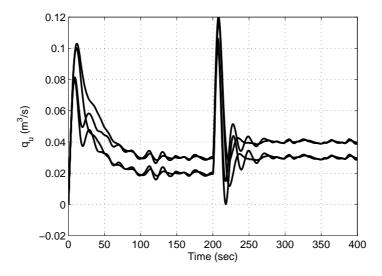


Figura 5.16: Resp. transitória do sinal de controle $q_u(t)$ e dos 4 vértices para K_5 .

5.1.2 Exemplo 2: Sistema Massa-Mola

Seja o problema de controle mostrado na Fig. 5.17. Este exemplo trata-se de uma extensão do problema tipo "Benchmark", apresentado em Wie(1990). Este sistema pode ser representado na forma de espaço de estados incluindo-se a variável $\nu(t)$ relacionada à ação integral, como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \\ \nu \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ w \\ n \end{bmatrix}$$

$$(5.9)$$

$$z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ w \\ n \end{bmatrix}$$

Considere $m_1 = m_2 = 1$ e k, um parâmetro incerto, que pode variar na faixa $k \in [0.5; 2.0]$ (Wie,1990). O objetivo é controlar a posição do segundo carro, $x_2(t)$, por meio da força aplicada no primeiro carro, u(t), fazendo-a igual ao sinal de referência, r(t), minimizando a influência da perturbação, w(t) e atenuando o efeito do ruído de medição, n(t).

As variáveis controladas são a posição do segundo carro, $x_2(t)$, e o sinal de controle u(t). As variáveis medidas são a posição do segundo carro, $x_2(t)$, afetada pelo ruído de medição, n(t), e a integral do erro de rastreamento, $\nu(t)$. O modelo de referência escolhido para este problema é a realização balanceada de:

$$T_m(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \ \zeta = 0.707, \ \omega_n = 0.1$$
 (5.10)

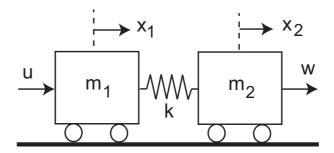


Figura 5.17: Sistema: dupla massa/mola

O problema de otimização multiobjetivo (2.21) é transformado em um problema de otimização escalar considerando-se como função objetivo a atenuação do ruído e os demais objetivos como restrições:

$$K^* = \arg\min_{K} \max_{\alpha \in \Omega} ||T_{un}||_2$$
sujeito a:
$$\max_{\alpha \in \Omega} ||T_{cd}||_{\infty} \le \epsilon_{\infty}$$

$$\max_{\alpha \in \Omega} ||E||_{\infty} \le \epsilon_{m}$$

$$K \in \mathcal{F}$$
(5.11)

onde ϵ_{∞} e ϵ_m podem ser variados em intervalos para obter diferentes soluções do problema multiobjetivo.

Aplicando o procedimento de síntese descrito no capítulo 4, baseado em otimização no espaço de parâmetros do controlador, para calcular o controlador dinâmico robusto com realimentação de saída que garanta $\max_{\alpha \in \Omega} \|E\|_{\infty} \leq 0.06$ e $\max_{\alpha \in \Omega} \|T_{cd}\|_{\infty} \leq \epsilon_{\infty}$, $\epsilon_{\infty} \in [7; 16]$, é encontrada a curva de Pareto mostrada na Fig. 5.18, representada na Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Custo Garantido com $\epsilon_m=0.06$ e $\epsilon_\infty\in[7;16]$

$\max_{\alpha \in \Omega} \ T_{un}\ _2$	$\max_{\alpha \in \Omega} \ T_{cd}\ _{\infty}$	$\max_{\alpha \in \Omega} E _{\infty}$
2,27	6,97	0,06
1,26	7,88	0,06
0,90	8,98	0,06
0,76	9,88	0,06
0,58	11,02	0,06
0,44	12,91	0,06
0,36	14,97	0,06
0,31	16,00	0,06

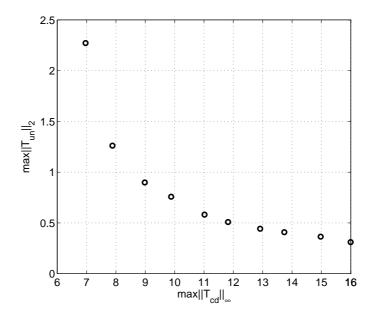


Figura 5.18: Curva de Pareto para $||E||_{\infty} \le 0.06$

O controlador que garante $\max_{\alpha \in \Omega} \|E\|_{\infty} \le 0.06$ e $\max_{\alpha \in \Omega} \|T_{cd}\|_{\infty} \le 9$ é calculado como

$$K_9(s) = \begin{bmatrix} -0.5712 & -0.9195 & -0.3279 & -0.8797 & 0.1917 & 0.3760 & 0.0462 \\ 1.5788 & -1.3037 & -0.4676 & 0.0382 & -0.9914 & 0.3597 & -0.0218 \\ 0.5753 & 1.2746 & 0.1759 & 0.8726 & 0.0777 & 0.0654 & -0.0151 \\ 2.1593 & 0.5713 & 0.1557 & -0.2900 & 0.4855 & 0.4157 & -0.0156 \\ 0.7148 & 1.4539 & 0.5937 & 0.6341 & -0.2792 & 0.7387 & -0.0707 \\ \hline 0.4587 & -0.4216 & -0.1064 & -0.0834 & -0.2738 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-0.22(s+0.53)(s+0.14)(s^2+4.14s+5.56)}{(s+0.29)(s^2+0.96s+0.55)(s^2+1.02s+4.29)} \\ \frac{0.053(s^2+0.47s+0.2)(s^2+0.31s+0.56)}{(s+0.29)(s^2+0.96s+0.55)(s^2+1.02s+4.29)} \end{bmatrix}^T$$

que resulta em $\max_{\alpha \in \Omega} \|T_{un}\|_2 = 0.8982$. A Fig. 5.19 mostra a resposta em frequência do modelo de referência e a função de transferência em malha fechada $T_{cr}(s)$ para k=0.5 e k=2.0, os dois vértices do politopo. Todos os controladores encontrados produzem uma resposta em frequência próxima do modelo de referência, na faixa de passagem.

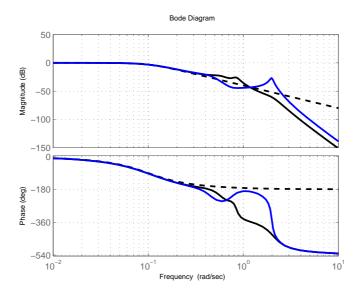


Figura 5.19: Resp. frequência $T_m(s)$ (tracejado) e $T_{cr}(s)$ (sólido)e dos 2 vértices para $K_9(s)$

O controlador $K_9(s)$ é encontrado com duas iterações no procedimento proposto. O controlador encontrado na primeira iteração garante a estabilidade para $k \in \{0,5;2,0\}$, os dois vértices do politopo, porém, existe uma faixa de k para qual o sistema em malha fechada não é estável. Isto é mostrado na Fig. 5.20, onde existem pólos do sistema a malha fechada no semiplano direito do plano S. Na segunda iteração, com a inclusão do ponto adicional, K=1,25, na etapa de otimização do procedimento de síntese, de modo que o conjunto finito de pontos passa a ser $\tilde{\Omega}=[0,5;1,25;2,0]$, o controlador obtido garante a estabilidade robusta do sistema para $k \in \{0,5;2,0\}$, conforme mostrado na Fig. 5.21.

Considere o sinal de teste r(t)=1(t), um degrau unitário, $d(s)=-0.02\times 1(t-100)+0.02\times 1(t-101)$, um pulso iniciando em t=100 s com uma duração de 1 s, e n(t) um sinal aleatório distribuído uniformemente na faixa de [-0.025;0.025]. A resposta transitória de $x_2(t)$ e u(t), para o sistema em malha fechada com o controlador $K_9(s)$, é mostrada nas Figs. 5.22 e 5.23 respectivamente. A combinação do modelo de referência, ação integral e do controle $\mathcal{H}_{\infty}/\mathcal{H}_2$ fornece bons resultados para a resposta ao rastreamento, erro de estado estacionário, rejeição ao disturbio, atenuação do ruído e baixo esforço no sinal de controle.

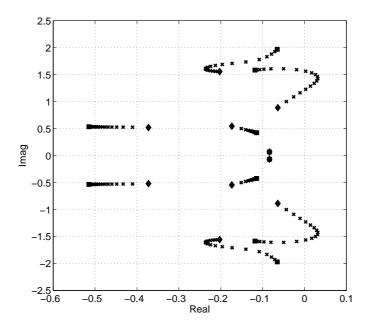


Figura 5.20: Lugar das Raízes para $k \in [0.5; 2.0]$ na primeira iteração para K_9

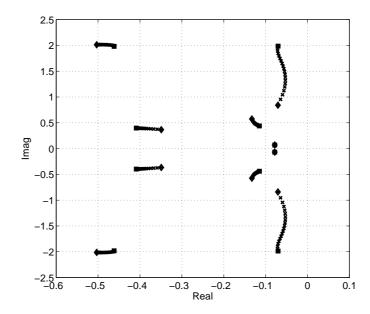


Figura 5.21: Lugar das Raízes para $k \in [0.5; 2.0]$ na segunda iteração para K_9

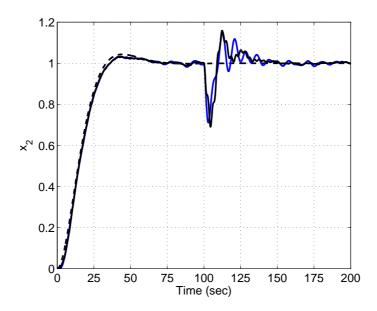


Figura 5.22: Resp. transitória de $x_2(t)$ e dos 2 vértices para $K_9(s)$

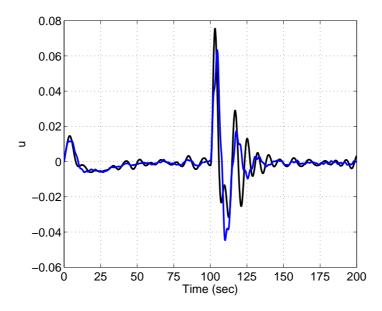


Figura 5.23: Resp. transitória de u(t) e dos 2 vértices para $K_9(s)$

A estrutura mais simples que estabiliza o sistema e se aproxima do modelo de referência desejado é um controlador desacoplado, com T_{uy_1} , $y_1(t)=x_2(t)+n(t)$, sendo uma função de transferência estritamente própria e de segunda ordem e $T_{u\nu}$, sendo apenas um ganho:

$$K(s) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline x_3 & x_4 & 0 & x_5 \end{bmatrix}$$
 (5.12)

Sendo x_1, \ldots, x_5 os parâmetros de otimização.

O controlador que garante $\max_{\alpha \in \Omega} \|E\|_{\infty} \le 0.07$ e $\max_{\alpha \in \Omega} \|T_{cd}\|_{\infty} \le 15$, resultando em $\max_{\alpha \in \Omega} \|T_{un}\|_{2} = 0.5325$ é calculado como

$$K_{15}(s) = \begin{bmatrix} -1,1660 & -0,5914 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -0,4195 & -0,0443 & 0 & 0,0048 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0,41954(s+0,1055) \\ \overline{s^2+1,166s+0,5914} & 0,00482 \end{bmatrix}$$
(5.13)

Os valores de norma obtidos com esta estrutura de controle são maiores do que os do controlador de quinta ordem $K_9(s)$, porém, as respostas transitórias são compatíveis, como se pode ver nas Figs.5.24 e 5.25.

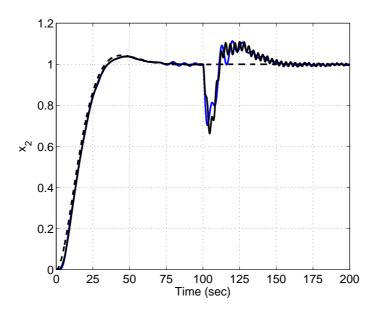


Figura 5.24: Resp. transitória de $x_2(t)$ e dos 2 vértices para $K_{15}(s)$

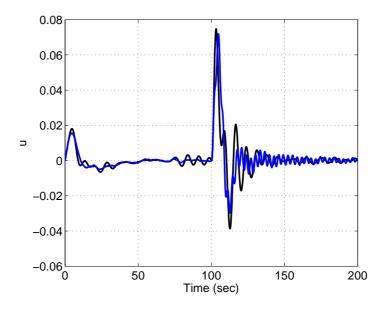


Figura 5.25: Resp. transitória de u(t) e dos 2 vértices para $K_{15}(s)$

Para efeito de comparação com técnicas baseadas em posicionamento regional de pólos ao invés de modelo de referência, foi projetado um controlador de quinta ordem para minimizar o $\max_{\alpha \in \Omega} \|T_{un}\|_2$ e para garantir $\max_{\alpha \in \Omega} \|T_{cd}\|_{\infty} \leq 9$, além de colocar os pólos de malha fechada, λ_i , na interseção das regiões: $Re(\lambda_i) < -0.1$ e $|\lambda_i| < 2$, $\forall i$. Aplicando-se o mesmo procedimento de otimização direta no espaço de parâmetros do controlador, depois de seis iterações, foi alcançado o seguinte controlador:

$$K_{prp}(s) = \begin{bmatrix} -0,6609 & -0,5952 & 1,0781 & -1,2250 & 0,0544 & 0,2299 & 0,4039 \\ 1,3548 & -0,6266 & 0,1189 & 0,4038 & -1,7111 & 0,3913 & 0,4719 \\ 0,7180 & 0,3495 & -2,3656 & 1,4660 & 1,9914 & -1,4018 & -0,9080 \\ 1,0901 & 1,0364 & 1,2963 & -1,7513 & -0,0978 & 1,1993 & 0,1287 \\ -0,2707 & 0,4929 & -1,7573 & 1,7596 & -1,1491 & 0,6833 & -0,2928 \\ \hline -0,1567 & -0,1577 & -0,8363 & 1,4157 & -1,1126 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2,0121(s-1,942)(s+0,09544)(s^2+1,412s+1,733)}{(s+2,185)(s^2+1,862s+1,238)(s^2+2,506s+4,154)} \\ \frac{1,1296(s^2+0,3752s+0,0357)(s^2+1,877s+2,032)}{(s+2,185)(s^2+1,862s+1,238)(s^2+2,506s+4,154)} \end{bmatrix}^T$$

que resulta em $\max_{\alpha \in \Omega} \|T_{un}\|_2 = 1,43695$ e $\max_{\alpha \in \Omega} \|T_{cd}\|_{\infty} = 8,93471$. O lugar das raízes do sistema em malha fechada para $k \in [0,5;2,0]$ é apresentado em Fig. 5.26. As respostas transitórias de $x_2(t)$ e u(t), para o sistema em malha fechada com o controlador $K_{prp}(s)$, são mostrados nas Figs. 5.27 e 5.28, respectivamente, onde podemos observar nas mesmas uma grande variação nas respostas transitórias quando o valor de $K_{prp}(s)$ varia para os dois vértices, o que não ocorre quando considerado o modelo de referência. Para efeitos de comparação, a resposta do modelo de referência é apresentada (linha tracejada) na Fig. 5.27.

As desvantagens da estratégia de posicionamento regional de pólos são a dificuldade de escolher uma região adequada para garantir uma boa resposta transitória de rastreamento bem como estabelecer o melhor compromisso entre a mesma e os demais objetivos. É necessário um método de tentativa e erro para encontrar a região mais apropriada para alcançar o desempenho exigido. A maioria dos testes para escolher uma região apropriada resultou em respostas transitórias indesejáveis, incluindose respostas típicas de sistemas com zeros no semi-plano direito.

Para demonstrar a dificuldade de se aplicar o posicionamento regional de pólos foram projetados dois controladores mudando-se ligeiramente a região de alocação especificada com o objetivo de se mostrar o efeito sobre a resposta transitória. No primeiro projeto, a região de posicionamento regional de pólos foi alterada de $|\lambda_i| < 2$ para $|\lambda_i| < 2,2$ e no segundo projeto, a região semiplano esquerdo foi alterada de $Re(\lambda_i) < -0.1$ para $Re(\lambda_i) < -0.09$.

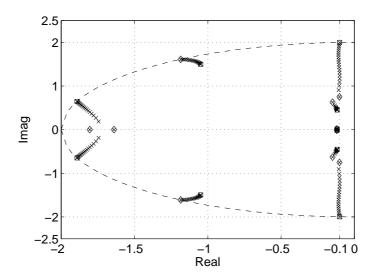


Figura 5.26: Lugar das Raízes para $k \in [0,5;2,0]$ na segunda iteração para $K_{prp}(s)$

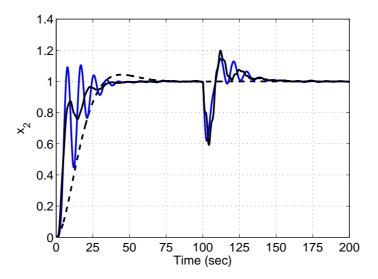


Figura 5.27: Resp. transitória de $x_2(t)$ e dos 2 vértices para $K_{prp}(s)$

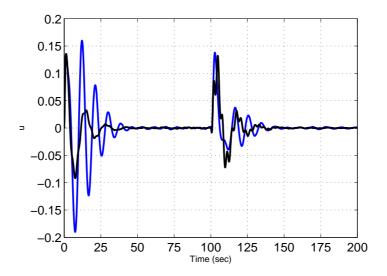


Figura 5.28: Resp. transitória de u(t) e dos 2 vértices para $K_{prp}(s)$

Como mostrado na Fig. 5.29, os resultados da primeira mudança indicam uma resposta transitória mais lenta (linha tracejada), com uma característica de resposta inversa e a segunda mudança (linha sólida) resulta em uma resposta transitória menos amortecida. Fica claro a partir deste teste que a escolha da região de alocação dos pólos pode influenciar o desempenho do sistema como um todo. Para este exemplo específico, é mais fácil projetar um controlador de ordem inferior para atingir o desempenho específicado com base na estratégia de alocação regional de pólos.

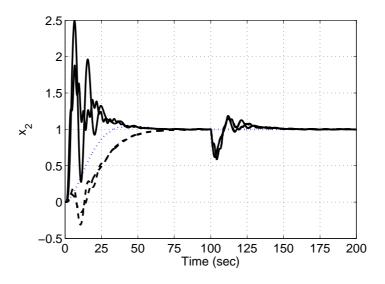


Figura 5.29: Resp. transitória de $x_2(t)$ para $K_{prp}(s)$ de pequenas variações na alocação de pólos

5.2 Sistemas em Tempo Discreto

5.2.1 Exemplo 3: Sistemas de Tanques Interligados

Seja o mesmo sistema do exemplo 1, descrito por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_1}{A_1} & \frac{k_1}{A_1} & 0 \\ \frac{k_1}{A_2} & -\frac{k_1 + k_2}{A_2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ v \end{bmatrix} \\
+ \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} q_u + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ q_d \\ n \end{bmatrix} \\
z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\
y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ q_d \\ n \end{bmatrix}$$
(5.14)

Este sistema foi convertido em tempo discreto com um tempo de amostragem $T_s=2.5~{\rm s}$ por meio do método de discretização de sistemas tipo "segurador de ordem zero" nas entradas.

Os objetivos deste exemplo e sua formulação são semelhantes aos do sistema do exemplo 1, caso 2, cujo modelo de referência em malha fechada a tempo contínuo é:

$$T_m(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \ \zeta = 0.9; \ \omega_n = 0.05$$
 (5.15)

Após a discretização, com $T_s=2.5s$, o modelo de referência discreto é dado por:

$$T_m(z) = \frac{0,007249z + 0,006725}{z^2 - 1,785z + 0,7985}$$
(5.16)

É considerada uma realização em espaço de estados balanceada desta função de transferência.

• Exemplo 3 - caso 1: solução baseada em BMI

É considerada a seguinte formulação escalar para o problema multiobjetivo (Equação 2.21):

$$K^* = \arg\min_{K} \left(\lambda_1 \max_{\alpha \in \Omega} ||E||_{\infty} + \lambda_2 \max_{\alpha \in \Omega} ||T_{cd}||_{\infty} + \lambda_3 \max_{\alpha \in \Omega} ||T_{un}||_2 \right)$$
sujeito a: $K \in \mathcal{F}$ (5.17)

Os valores máximos das normas, relativos aos controladores apresentados na sequência, foram calculados com o procedimento de análise baseado no algoritmo Branch-And-Bound para o cálculo do custo epsilon-garantido com precisão 0,001.

Considerando o procedimento de projeto descrito na seção 3.3, um controlador satisfatório pode ser obtido para $\lambda = [0.9998; 0.0001; 0.0001]^T$ resultando em $\max \|E\|_{\infty} < 0.10$, $\max \|T_{cd}\|_{\infty} < 1.75$ e $\max \|T_{un}\|_2 < 8.98$:

$$K_1(z) = \begin{bmatrix} 8,4120 & -1,4881 & -0,6386 & -23,403 & -4,722 \\ 17,7645 & -1,0058 & -1,9537 & -48,590 & -11,564 \\ 62,5476 & -6,0572 & -6,1636 & -174,35 & -40,467 \\ \hline -0,1163 & 3,9356 & -1,0867 & -6,9162 & 0,7237 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-6,9162(z-0,9052)(z-0,5037)(z+0,02663)}{(z-0,7517)(z^2-0,491z+0,06807)} \\ \frac{0,72372(z-0,9087)(z^2-1,695z+0,8526)}{(z-0,7517)(z^2-0,491z+0,06807)} \end{bmatrix}^T$$

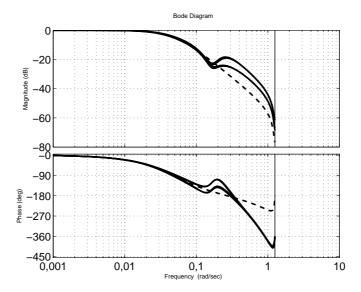


Figura 5.30: Resp. frequência do modelo de referência (tracejado) e dos 4 vértices (sólido) para K_1 .

A resposta em frequência de $T_m(z)$ e $T_{cr}(z)$, considerando $K_1(z)$, é mostrada na figura 5.30. Pode-se verificar que, na faixa de passagem, os resultados em malha fechada foram bastante próximos aos do modelo de referência, para todos os vértices do politopo. Este controlador apresentou uma razoável rejeição ao distúbio e atenuação ao ruído, com um aceitável esforço de controle, reproduzindo perfeitamente a resposta ao rastreamento especificada para todos os vértices do politopo, conforme mostrado nas figuras 5.31 e 5.32.

Para demonstrar a necessidade de se considerar múltiplos objetivos, foi considerado um controlador com $\lambda = [1\ 0\ 0]$ resultando $\max \|E\|_{\infty} < 0.05$, $\max \|T_{cd}\|_{\infty} < 0.90$ e $\max \|T_{un}\|_{2} < 1.264.30$:

$$K_2(z) = \begin{bmatrix} 1,5615 & 4,8267 & -1,4865 & -27,3917 & 1,3360 \\ 0,8981 & 3,6269 & -0,8925 & -14,2934 & 0,1476 \\ 4,9435 & 17,9905 & -4,9373 & -93,1233 & 2,0925 \\ \hline 7,2926 & 21,1263 & -7,1666 & -104,8115 & 1,1290 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-104,8115(z-0,1048)(z-0,7357)(z-0,9911)}{(z+0,9054)(z-0,9911)(z-0,1654)} \\ \frac{1,129(z-0,9911)(z^2-1,151z+0,7609)}{(z+0,9054)(z-0,9911)(z-0,1654)} \end{bmatrix}^{T}$$

Como mostrado nas figuras 5.33 e 5.34, este controlador reproduz perfeitamente a resposta transitória do modelo de referência, porém, a atenuação do ruído é consideravelmente pior do que a do controlador K_1 . Comparando-se as figuras 5.32 e 5.34 é notório que o esforço do controlador K_2 é maior que o do controlador K_1 resultando em uma saturação do elemento final de controle-EFC (válvula) não considerada na simulação.

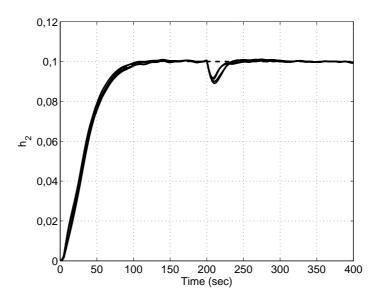


Figura 5.31: Resp. transitória h_2 , modelo de referência (tracejado) e dos 4 vértices (sólido) para K_1 .

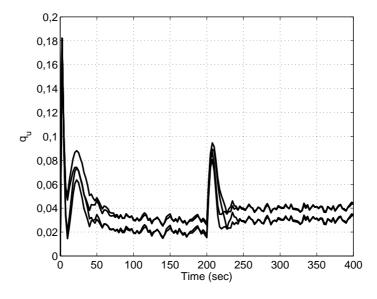


Figura 5.32: Resp. transitória da saída de controle $q_u(t)$ e dos 4 vértices para K_1 .

Na figura 5.35 é mostrada a convergência da função objetivo $\max \|E\|_{\infty}$ em função do algoritmo iterativo aplicado para resolver a formulação BMI.

Naturalmente, pela escolha dos valores apropriados de λ , é possível encontrar controladores com diferentes compromissos entre o erro em relação ao modelo de referência, atenuação do ruído e rejeição à perturbação.

Para efeitos de comparação, também foram projetados controladores com $\lambda = [0\ 1\ 0]$ e $\lambda = [0\ 0\ 1]$, K_{2a} e K_{2b} , respectivamente, resultando para K_{2a} em $\max \|E\|_{\infty} < 4,13$; $\max \|T_{cd}\|_{\infty} < 0,59$; $\max \|T_{un}\|_{2} < 347,63$ e para K_{2b} em $\max \|E\|_{\infty} < 3,45$; $\max \|T_{cd}\|_{\infty} < 3,26$ e $\max \|T_{un}\|_{2} < 0,10$.

Os controladores K_{2a} e K_{2b} foram obtidos como sendo:

$$K_{2a}(z) = \begin{bmatrix} -12,8431 & -9,8176 & 4,6669 & 93,5241 & 6,5213 \\ -23,6110 & -20,4122 & 9,2687 & 218,3502 & 8,7509 \\ -86,8020 & -71,7371 & 33,1084 & 714,9680 & 35,7379 \\ \hline -13,1706 & 2,9389 & 1,0000 & -53,2558 & 12,4514 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c} \frac{-53,2558(z-0,1092)(z-0,6537)(z-1,436)}{(z-0,662)(z+0,9514)(z-0,1425)} \\ \frac{12,4514(z-0,1515)(z-0,666)(z-0,9979)}{(z-0,662)(z+0,9514)(z-0,1425)} \end{array} \right]^{T}$$

$$K_{2b}(z) = \begin{bmatrix} 0.7658 & 0.2038 & -0.1927 & -2.2504 & 0.2728 \\ 0.0435 & 0.8636 & -0.0985 & 0.2722 & -0.0426 \\ -0.0121 & 0.0342 & 0.8469 & -0.3394 & 0.0372 \\ \hline -1.4440 & -3.9441 & 5.3619 & -0.0453 & 0.1590 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-0,0453(z-8,703)(z-0,9433)(z-0,7034)}{(z-0,7021)(z^2-1,774z+0,7877)} \\ \frac{0,1590(z-0,7034)(z-0,9415)(z-0,9957)}{(z-0,7021)(z^2-1,774z+0,7877)} \end{bmatrix}^T$$

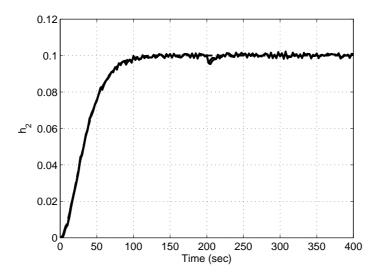


Figura 5.33: Resp. transitória h_2 , modelo de referência(tracejado) e dos 4 vértices(sólido) para K_2 .

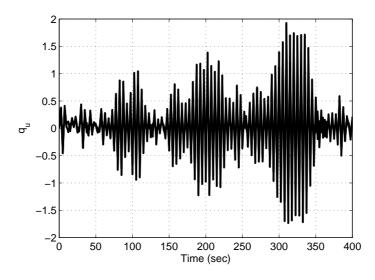


Figura 5.34: Resp. transitória do sinal de controle $q_u(t)$ e dos 4 vértices para K_2 .

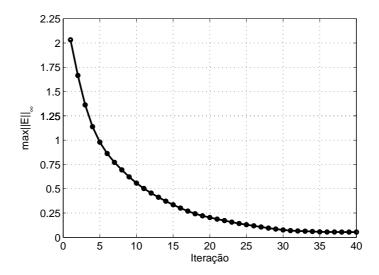


Figura 5.35: Convergência da função objetivo $\max ||E||_{\infty}$ para o controlador K_2 .

As figuras 5.36 e 5.37 bem como as figuras 5.38 e 5.39 mostram respectivamente as curvas de respostas dos controladores K_{2a} e K_{2b} .

Observa-se que, quando não é considerado o erro de aproximação do modelo de referência, as respostas transitórias obtidas são bem piores do que aquelas projetadas para reproduzir o modelo de referência. Como observado na figura 5.39, em relação às figuras 5.32, 5.34 e 5.37, considerar a atenuação do ruído de medição como função objetivo auxilia na obtenção de um controlador que requer menor esforço no sinal de controle.

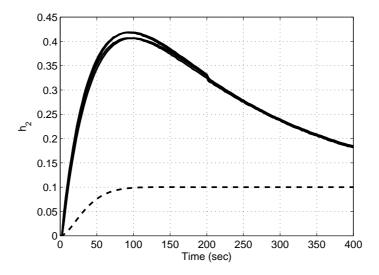


Figura 5.36: Resp. transitória h_2 , modelo de referência(tracejado) e dos 4 vértices(sólido) para K_{2a} .

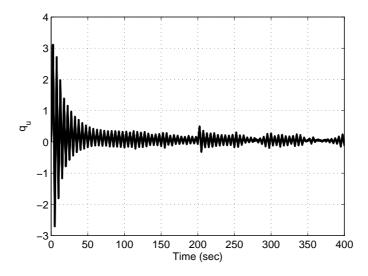


Figura 5.37: Resp. transitória do sinal de controle $q_u(t)$ e dos 4 vértices para K_{2a} .

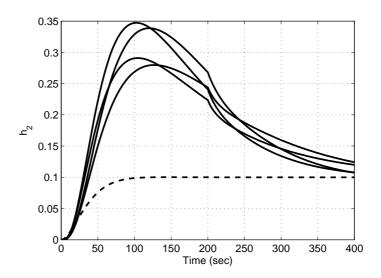


Figura 5.38: Resp. transitória h_2 , modelo de referência(tracejado) e dos 4 vértices(sólido) para K_{2b} .

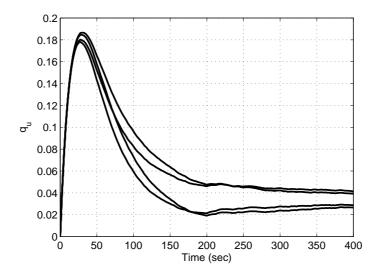


Figura 5.39: Resp. transitória do sinal de controle $q_u(t)$ e dos 4 vértices para K_{2b} .

Os resultados apresentados neste exemplo foram obtidos usando o MATLAB[®] LMI Control Toolbox. Foi adotado o raio de factibilidade de $R=10^3$, no passo 1, e $R=10^7$ no passo 2 e 3, para resolver o problema baseado em LMI. Foram necessárias 39 iterações para obter o controlador K_1 e 44 iterações para obter o controlador K_2 . O critério de parada implementado foi baseado na variação relativa da função objetivo no problema (5.17) nas últimas cinco iterações:

$$\frac{f_{5,max} - f_{5,min}}{f_{max} - f_{min}} \le 10^{-3}$$

onde $f_{5,max}$ e $f_{5,min}$ são os máximos e mínimos valores da função objetivo escalar nas últimas cinco iterações e f_{max} e f_{min} são os máximos e mínimos valores da função objetivo escalar em todas as iterações.

• Exemplo 3 - caso 2: solução baseada em otimização direta no espaço de parâmetros do controlador

Para aplicar o procedimento de síntese apresentado no capítulo 4, baseado em otimização direta no espaço de parâmetros do controlador, o problema de otimização multiobjetivo é transformado em um problema de otimização escalar como:

$$K^* = \arg\min_{K} \max_{\alpha \in \Omega} ||T_{un}||_2$$
sujeito a:
$$\max_{\alpha \in \Omega} ||T_{cd}||_{\infty} \le \epsilon_{\infty}$$

$$\max_{\alpha \in \Omega} ||E||_{\infty} \le \epsilon_{m}$$

$$K \in \mathcal{F}$$
(5.18)

onde ϵ_{∞} e ϵ_m podem ser selecionados para obter diferentes soluções para o problema multiobjetivo.

Os objetivos deste exemplo são os mesmos do sistema em tempo contínuo sendo considerado os mesmos sinais de teste $r(t)=0.1(t), q_d(t)=-0.01(t-200)$ e n(t) um sinal de distribuição uniforme aleatória no intervalo: $-0.001 \le n(t) \le 0.001$. O modelo de referência em malha fechada é o mesmo da formulação BMI.

Aplicando o procedimento de síntese descrito no capítulo 4, baseado em otimização no espaço de parâmetros do controlador, para calcular o controlador dinâmico robusto com realimentação de saída que garanta $\max_{\alpha \in \Omega} \|E\|_{\infty} \leq 0.06$ e $\max_{\alpha \in \Omega} \|T_{cd}\|_{\infty} \leq \epsilon_{\infty}$, $\epsilon_{\infty} \in [1; 2.75]$, são obtidos os resultados na Tabela 5.3 e a correspondente curva de Pareto é apresentada na Fig. 5.40.

O controlador de terceira ordem que garante $\max_{\alpha \in \Omega} ||E||_{\infty} \le 0.06$ e $\max_{\alpha \in \Omega} ||T_{cd}||_{\infty} \le 1.75$, resultando em $\max_{\alpha \in \Omega} ||T_{un}||_2 = 7.64$ é calculado como

$$K_3(z) = \begin{bmatrix} -0.9325 & 0.3793 & -0.5017 & 4.9785 & 0.4462 \\ -0.3253 & 0.6398 & -0.7052 & 17.3188 & -0.1996 \\ 1.5787 & -0.3017 & 1.0240 & 0.0306 & -0.4137 \\ \hline -1.0874 & 0.3235 & 0.0402 & -5.9525 & 0.4221 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-5,9525(z-0,787)(z-0,5658)(z+0,5895)}{(z+0,5295)(z^2-1,261z+0,474)} \\ \frac{0,42209(z-0,7695)(z^2-1,304z+0,5636)}{(z+0,5295)(z^2-1,261z+0,474)} \end{bmatrix}^T$$

$\max_{\alpha \in \Omega} \ T_{un}\ _2$	$\max_{\alpha \in \Omega} \ T_{cd}\ _{\infty}$	$\max_{\alpha \in \Omega} \ E\ _{\infty}$
41,02	1,01	0,06
23,09	1,22	0,06
13,28	1,49	0,06
7,64	1,75	0,06
6,36	1,98	0,06
5,63	2,25	0,06
5,26	2,49	0,06
5,13	2,73	0,06

Tabela 5.3: Custo Garantido com $\epsilon_m=0.06$ e $\epsilon_\infty\in[1;\;2.75]$

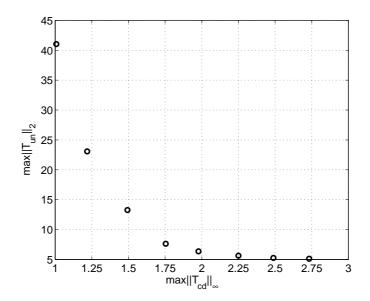


Figura 5.40: Curva de Pareto para $\|E\|_{\infty} \leq 0.06$

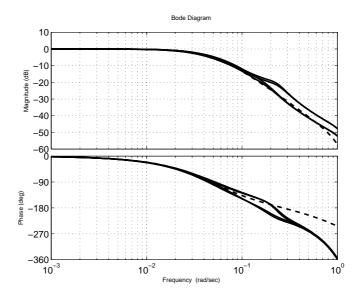


Figura 5.41: Resp. frequência de $T_m(s)$ (tracejado) e $T_{cr}(s)$ (sólido) e dos 4 vértices para $K_3(z)$

A resposta em frequência de $T_m(z)$ e $T_{cr}(z)$, considerando $K_3(z)$, é mostrada na figura 5.41. Pode-se verificar que, na faixa de passagem, os resultados em malha fechada foram bastante próximos aos do modelo de referência, para todos os vértices do politopo. Este controlador apresentou uma razoável rejeição ao distúrbio e atenuação ao ruído, com um aceitável esforço de controle, reproduzindo adequadamente a resposta ao rastreamento especificada para todos os vértices do politopo, conforme mostrado nas figuras 5.42 e 5.43.

Uma estrutura simples de controle é um controlador desacoplado sendo T_{uc} uma função de transferência de primeira ordem e $T_{u\nu}$ apenas um ganho:

$$K(z) = \begin{bmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ \hline x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$
 (5.19)

Sendo x_1, \ldots, x_4 são os parâmetros de otimização.

O controlador que garante $\max_{\alpha \in \Omega} ||E||_{\infty} \le 0.10$ e $\max_{\alpha \in \Omega} ||T_{cd}||_{\infty} \le 1.87$, resultando em $\max_{\alpha \in \Omega} ||T_{un}||_2 = 13.8$, é encontrado como

$$K_4(z) = \begin{bmatrix} 0.5822 & 1 & 0 \\ 2.5733 & -11.0688 & 0.1316 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -11.0688(z - 0.8147) \\ (z - 0.5822) & 0.1316 \end{bmatrix}$$

cujas respostas de controle são mostrados nas figuras 5.44 e 5.45. Como mostrado nas figuras 5.44 e 5.45, este controlador reproduz razoavelmente a resposta transitória do modelo de referência apresentando boa rejeição a perturbações, porém, a atenuação do ruído é ligeiramente pior do que a do controlador K_3 . Comparando-se as figuras 5.43 e 5.45 observa-se que o esforço do controlador K_4 é um pouco superior que o do controlador K_3 .

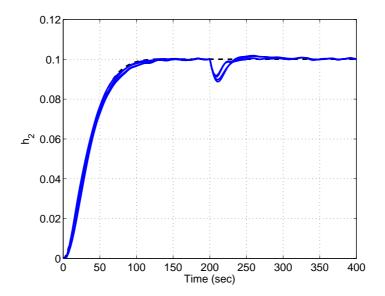


Figura 5.42: Resp. transitória de $h_2(t)$ e dos 4 vértices para $K_3(z)$

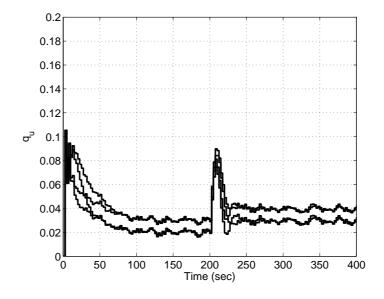


Figura 5.43: Resp. transitória do sinal de controle $q_u(t)$ e dos 4 vértices para $K_3(z)$

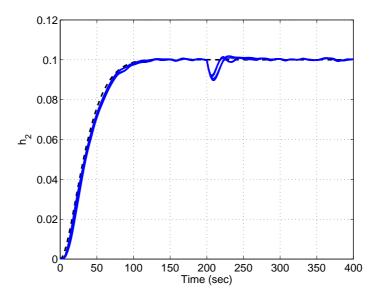


Figura 5.44: Resp. transitória de $h_2(t)$ e dos 4 vértices para $K_4(z)$

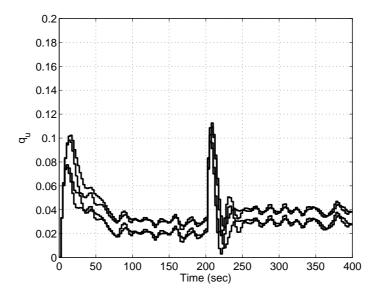


Figura 5.45: Resp. transitória do sinal de controle $q_u(t)$ e dos 4 vértices para $K_4(z)$

5.3 Análise Comparativa dos Resultados e Conclusões

Baseado nas tabelas comparativas (5.4) a (5.6) foram observados para o exemplo 1, caso 1, melhores resultados utilizando-se a técnica de otimização direta no espaço de parâmetros do controlador em relação a solução BMI uma vez que, para as mesmas ponderações e controladores de mesma ordem, foram obtidos melhores resultados com relação à especificação do projeto. Controladores mais simples com funções de transferência independentes para cada entrada, sendo uma de segunda ordem e outra de primeira ordem (6 parâmetros de otimização) e com ponderações diferentes, representados na tabela (5.4) como "Ordem K = 2+1", também obtiveram melhores resultados em relação a solução BMI. A mesma situação ocorre para controladores com uma função de transferência de primeira ordem mais um ganho apenas (4 parâmetros de otimização), também representados na tabela (5.4) como "Ordem K = 1 +ganho".

Para o exemplo 3, caso 1, representado na tabela (5.5), foi observado que para ligeiras modificações nas ponderações λ , mantendo-se a ordem do controlador, foram obtidos resultados que proporcionam ao projetista flexibilidade nas especificações do projeto, valorizando-se de forma variável as características de resposta de rastreamento, rejeição aos distúrbios e atenuação do ruído.

Devido ao tratamento do problema como multiobjetivo, pela escolha dos valores apropriados de λ , é possível encontrar controladores com diferentes compromissos entre o erro em relação ao modelo de referência, atenuação do ruído e rejeição à perturbação, destacando-se com isto a importância deste método.

Finalmente, para o exemplo 3, caso 2, observou-se que para um controlador com estrutura mais simples, com apenas um ganho e de primeira ordem, representado na tabela (5.6) como "Ordem K = 1 + ganho", os resultados foram muito próximos aos de um controlador de terceira ordem, podendo-se com isso aumentar o desempenho do procedimento e diminuição do esforço computacional, com desempenho satisfatório do sistema de controle.

Legenda: OEPC = otimização no espaço de parâmetros do controlador.

Ordem K =ordem do controlador calculado pelo algoritmo.

Solução OEPC

Exemplo 1 - caso 1: Sistemas em Tempo Contínuo				
Função objetivo	$ E _{\infty} \le$	$ T_{zd} _{\infty} \le$	Ordem K	Pesos λ_1 e λ_2
Solução BMI	0,0426	0,1950	3	0,95 e 0,05
Solução OEPC	0,0025	0,0332	3	0,95 e 0,05
Solução OEPC	0,0056	0,1175	2 + 1	0,80 e 0,20

0,1316

1 + ganho

0,40 e 0,60

0,0042

Tabela 5.4: Comparação de Resultados para o Sistema de Tanques Interligados

Tabela 5.5: Comparação de Resultados para o Sistema de Tanques Interligados

Exemplo 3 - caso 1: Sistemas em Tempo Discreto					
Função objetivo	$ E _{\infty} \le$	$ T_{cd} _{\infty} \le$	$ T_{un} _2 \le$	Ordem K	Pesos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$
Solução BMI	0,10	1,75	8,98	3	0,9998;0,0001;0,00001
Solução BMI	0,05	0,90	1.264,30	3	1;0;0
Solução BMI	4,13	0,59	347,63	3	0;1;0
Solução BMI	3,45	3,26	0,10	3	0;0;1

Tabela 5.6: Comparação de Resultados para o Sistema de Tanques Interligados

Exemplo 3 - caso 2: Sistemas em Tempo Discreto					
Função objetivo	$ E _{\infty} \le \epsilon_m$	$ T_{cd} _{\infty} \le \epsilon_{\infty}$	$ T_{un} _2 \le$	Ordem K	Restrições
Solução OEPC	0,06	1,75	7,64	3	$\epsilon_m = 0.06 \text{ e } \epsilon_\infty = 1.75$
Solução OEPC	0,10	1,87	13,8	1 + ganho	$\epsilon_m \le 0.10 \text{ e } \epsilon_\infty \le 1.87$

Capítulo 6

Conclusões Finais

6.1 Sumário das Contribuições da Dissertação de Mestrado

Foram apresentadas estratégias de síntese de controladores robustos por realimentação dinâmica de saída para garantir o desempenho da resposta de rastreamento, a rejeição de distúrbios e a atenuação de ruídos, baseadas em otimização multiobjetivo. Para garantir o desempenho da resposta de rastreamento foi considerada a utilização de uma função objetivo igual a norma \mathcal{H}_{∞} do erro entre um modelo de referência e a função de transferência a malha-fechada entre o sinal de referência e a variável controlada. Existem diferentes possibilidades para resolver o problema de otimização no caso de sistemas com incerteza politópica. Neste trabalho foram utilizados dois procedimentos iterativos de projeto, sendo o primeiro procedimento, baseado na formulação BMI, que divide o problema em dois passos, onde em cada passo é resolvido um um problema LMI. O segundo procedimento, diretamente no espaço de parâmetros do controlador, que consiste em um passo de síntese, considerando um conjunto finito de pontos do espaço de incerteza, e um passo de análise robusta, considerando todo o politopo, que define a necessidade de se acrescentar ou não novos pontos no conjunto considerado no passo de síntese. Este procedimento já foi utilizado em outros problemas de controle robusto sempre com resultados bastante satisfatórios.

Em síntese, esta dissertação apresenta as seguintes contribuições na área de Controle Robusto:

1. Implementar procedimentos de projeto de controladores robustos por realimentação dinâmica de saída em substituição à estratégia de posicionamento regional de pólos pelo uso de modelo de referência, considerando tanto a solução do problema 84 Conclusões Finais

na forma de BMI, como aplicando a otimização direta no espaço de parâmetros do controlador.

- 2. No caso de sistemas discretos no tempo, foi proposta uma formulação BMI de síntese a partir das condições de análise disponíveis na literatura considerando o modelo de referência.
- 3. Aplicar os procedimentos de projeto implementados em sistemas de controle contínuos ou discretos no tempo, que já foram tratados na literatura anteriormente, com o objetivo de se validar a aplicabilidade do uso de modelo de referência nos problemas multiobjetivos.
- 4. Comparar as vantagens do uso de modelo de referência em relação ao posicionamento regional de pólos.

6.2 Comentários Finais e Perspectivas Futuras

A proposta de se utilizar modelo de referência para garantir o desempenho da resposta de rastreamento poderá ser aplicada em pesquisas futuras para síntese de controladores robustos de sistemas em tempo contínuo ou discreto, com retardo no tempo, em sistemas não-lineares e em sistemas multivariáveis com aplicação direta dos algoritmos utilizados neste trabalho.

As técnicas de otimização multiobjetivo flexibilizam o projeto e suas aplicações industriais uma vez que tanto o projetista como o engenheiro de controle e/ou processo podem ponderar seus objetivos em função da necessidade do "chão de fábrica".

6.3 Trabalhos com Co-Autoria Aceitos em Eventos

- Bachur, W. E. G.; Gonçalves, E. N.; Palhares, R. M.; Takahashi, R. H. C.(2010). Síntese de Controladores Robustos por Realimentação Dinâmica de Saída Considerando Modelo de Referência Baseada em Otimização no Espaço de Parâmetros do Controlador. In: XVIII Congresso Brasileiro de Automática, 2010, Bonito, MS. Anais do XVIII Congresso Brasileiro de Automática: 4062-4067.
- Bachur, W. E. G.; Gonçalves, E. N.; Palhares, R. M.; Takahashi, R. H. C. (2010). Multiobjective Robust Dynamic Output-feeback Control Synthesis based on Reference Model, CDC 49th IEEE Conference on Decision and Control, Atlanta, GA, USA: 2330-2335.
- 3. Bachur, W. E. G.; Gonçalves, E. N.; Palhares, R. M.; Leite, V. J. S. (2011). Multiobjective Robust Discrete Dynamic Output-feeback Control Synthesis based on Closed-loop Reference Model, MSC IEEE Multi-conference on Systems and Control, Denver, CO, USA.(submissão número 153, aceita para publicação)

86 Conclusões Finais

Referências Bibliográficas

- Apkarian, P., Tuan, H. D. e Bernussou, J. (2001). Continuous-time analysis, eigenstructure assignment and \mathcal{H}_2 synthesis with enhanced LMI characterizations, *IEEE Transactions on Automatic Control* **46**(12): 1941–1946.
- Araújo, M. R., Gonçalves, E. N., Leite, V. J. S. e Palhares, R. M. (2010). Síntese de controladores robustos por realimentação dinâmica de saída considerando modelo de referência baseada em formulações LMI, *XVIII Congresso Brasileiro de Automática*, SBA, Bonito, MS, Brasil.
- Bachur, W. E. G., Gonçalves, E. N., Palhares, R. M., Takahashi, R. H. C. e Mesquita, R. C. (2010a). Multiobjective robust dynamic output-feeback control synthesis based on reference model, *CDC 49th IEEE Conference on Decision and Control, Atlanta, GA, USA*
- Bachur, W. E. G., Gonçalves, E. N., Palhares, R. M., Takahashi, R. H. C. e Mesquita, R. C. (2010b). Síntese de controladores robustos por realimentação dinâmica de saída considerando modelo de referência baseada em otimização no espaço de parâmetros do controlador, CBA Congresso Brasileiro de Automática pp. 4062–4067.
- Boyd, S., Balakrishnan, K. e Kabamba, P. (1989). A bisection method for computing the \mathcal{H}_{∞} norm of a transfer matrix and related problems, *Mathematics of Control, Signals, and Systems* **2**(3): 207–219.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. e Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM, Philadelphia, PA.
- Chesi, G., Garulli, A., Tesi, A. e Vicino, A. (2005). Polynomially parameter-dependent Lyapunov functions for robust \mathcal{H}_{∞} performance analysis, *in* P. Horacek, M. Simandl e P. Zitek (eds), *Preprints of the 16th IFAC World Congress*, IFAC, Prague, Czech Republic.
- Chilali, M. e Gahinet, P. (1996). \mathcal{H}_{∞} design with pole placement constraints: An LMI approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* **41**(3): 358–367.

- de Oliveira, M. C., Geromel, J. C. e Bernussou, J. (2000). Design of dynamic output feedback decentralized controllers via a separation procedure, *International Journal of Control* **73**(5): 371–381.
- de Oliveira, M. C., Geromel, J. C. e Bernussou, J. (2002). Extended \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_{∞} norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems, *International Journal of Control* **75**(9): 666–679.
- de Oliveira, P. J., Oliveira, R. C. L. F., Leite, V. J. S., Montagner, V. F. e Peres, P. L. D. (2004a). \mathcal{H}_2 guaranteed cost computation by means of parameter-dependent Lyapunov functions, *International Journal of Systems Science* **35**(5): 1053–1061.
- de Oliveira, P. J., Oliveira, R. C. L. F., Leite, V. J. S., Montagner, V. F. e Peres, P. L. D. (2004b). \mathcal{H}_{∞} guaranteed cost computation by means of parameter-dependent Lyapunov functions, *Automatica* **40**: 305–315.
- Doyle, J. C. (1978). Guaranteed margins for LQG regulators, *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC-23**(4): 756–757.
- Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, P. P. e Francis, B. A. (1989). State-space solutions to standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control problems, *IEEE Transactions in Automatic Control* **34**(8): 831–847.
- Doyle, J., Packard, A. e Zhou, K. (1991). Review of LFTs, LMIs, and μ , *Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control*, IEEE, Brighton, England, pp. 1227–1232.
- Ebihara, Y. e Hagiwara, T. (2004a). New dilated LMI characterizations for continuous-time multiobjective controller synthesis, *Automatica* **40**: 2003–2009.
- Ebihara, Y. e Hagiwara, T. (2004b). On \mathcal{H}_{∞} model reduction using LMIs, *IEEE Transactions on Automatic Control* **49**(7): 1187–1191.
- Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J. e Chilali, M. (1995). *LMI Control Toolbox: For Use with MATLAB*[®], The MATH WORKS Inc., Natick.
- Geromel, J. C., Egas, R. G. e Kawaoka, F. R. R. (2005). \mathcal{H}_{∞} model reduction with application to flexible systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **50**(3): 402–406.
- Gonçalves, E. N., Palhares, R. M., Takahashi, R. H. C. e Chasin, A. N. V. (2009). Robust model reduction of uncertain systems maintaining uncertainty structure, *International Journal of Control* **82**(11): 2158–2168.
- Gonçalves, E. N. (2006). *Análise e Síntese de Controladores e Filtros Robustos para Sistemas com Domínios Politópicos de Incerteza*, Tese de doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

- Gonçalves, E. N., Palhares, R. M. e Takahashi, R. H. C. (2005). Improved optimisation approach to robust $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_{\infty}$ control problem for linear systems, *IEE Proceedings Control Theory & Applications* **152**(2): 171–176.
- Gonçalves, E. N., Palhares, R. M. e Takahashi, R. H. C. (2006). $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_{\infty}$ filter design for systems with polytope-bounded uncertainty, *IEEE Transactions on Signal Processing* **54**(9): 3620–3626.
- Gonçalves, E. N., Palhares, R. M. e Takahashi, R. H. C. (2008). A novel approach for $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_{\infty}$ robust PID synthesis for uncertain systems, *Journal of Process Control* **18**(1): 19–26.
- Gonçalves, E. N., Palhares, R. M., Takahashi, R. H. C. e Mesquita, R. C. (2006). Algorithm 860: SimpleS an extension of Freudenthal's simplex subdivision, *ACM Transactions on Mathematical Software* **32**(4): 609–621.
- Gonçalves, E. N., Palhares, R. M., Takahashi, R. H. C. e Mesquita, R. C. (2007). \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_2 ε -guaranteed cost computation of uncertain linear systems, *IET Control Theory and Applications* **1**(1): 201–209.
- Grigoriadis, K. M. (1995). Optimal \mathcal{H}_{∞} model reduction via linear matrix inequalities: Continuous and discrete-time cases, *Systems & Control Letters* **26**(5): 321–333.
- Grigoriadis, K. M. e Skelton, R. S. (1996). Low-order control design for LMI problems using alternating projection methods, *Automatica* **32**(8): 1117–1125.
- He, Y., Wu, M. e She, J.-H. (2005). Improved bounded-real-lemma representation and \mathcal{H}_{∞} control of systems with polytopic uncertainties, *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs* **52**(7): 380–383.
- Helmersson, A. (1994). Model reduction using LMIs, *Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control*, IEEE, Lake Buena Vista, FL, pp. 3217–3222.
- Hoyle, D. J., Hyde, R. A. e Limebeer, D. J. N. (1991). An \mathcal{H}_{∞} approach to two degree of freedom design, *Proceedingsof the 30th Conference on Decision and Control*, IEEE, Brighton, England, pp. 1581–1585.
- Iwasaki, T. (1999). The dual iteration for fixed-order control, *IEEE Transactions on Automatic Control* **44**(4): 783–788.
- Limebeer, D. J. N., Kasenally, E. M. e Perkins, J. D. (1993). On the design of robust two degree of freedom controllers, *Automatica* **29**(1): 157–168.
- Masubuchi, I., Ohara, A. e Suda, N. (1998). LMI-based controller synthesis: an unified formulation and solution, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **8**: 669–686.

- Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2005). \mathcal{H}_{∞} guaranteed cost computation via polynomially parameter-dependent Lyapunov functions, in P. Horacek, M. Simandl e P. Zitek (eds), Preprints of the 16th IFAC World Congress, IFAC, Prague, Czech Republic.
- Palhares, R. M. e Gonçalves, E. N. (2007). Desigualdades matriciais lineares em controle, *in* L. A. Aguirre (ed.), *Enciclopédia de Automática*, 1 edn, Vol. 1, Blucher, São Paulo, Brasil, pp. 155–195.
- Palhares, R. M., Takahashi, R. H. C. e Peres, P. L. D. (1997). \mathcal{H}_{∞} and \mathcal{H}_2 guaranteed costs computation for uncertain linear systems, *International Journal of Systems Science* **28**(2): 183–188.
- Rodrigues, L. A., Gonçalves, E. N., Leite, V. J. S. e Palhares, R. M. (2009). Robust reference model control with LMI formulation, *Proceedings of the IASTED International Conference Control and Applications*, IASTED, Cambridge, UK, pp. 127–132.
- Scherer, C., Gahinet, P. e Chilali, M. (1997). Multiobjective output-feedback control via LMI optimization, *IEEE Transactions on Automatic Control* **42**(7): 896–911.
- Scherer, C. W. (1995). From single-channel LMI analysis to multi-channel mixed LMI synthesis: a general procedure, *Selected Topics on Identification, Modelling and Control* **8**: 1–8.
- Shimomura, T. e Fujii, T. (2000). Multiobjective control design via sucessive over-bounding of quadratic terms, *Proceedings of the 39th Conference on Decision and Control* pp. 2763–2768.
- Skelton, R. E., Iwasaki, T. e Grigoriadis, K. (1998). *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design*, System and Control Book Series, Taylor & Francis, London.
- Takahashi, R. H. C., Saldanha, R. R., Dias-Filho, W. e Ramírez, J. A. (2003). A new constrained ellipsoidal algorithm for nonlinear optimization with equality constraints, *IEEE Transactions on Magnetics* **39**(3): 1289–1292.
- Trofino, A., Coutinho, D. F. e Barbosa, K. A. (2005). Improved \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_{∞} conditions for robust analysis and control synthesis of linear systems, *Revista Controle & Automação* **16**(4): 427–434.
- Vandenberghe, L. e Balakrishnan, V. (1997). Algorithms and software for LMI problems in control, *IEEE Control System Magazine* **17**(5): 89–95.
- Vandenberghe, L. e Boyd, S. (1996). Semidefinite programming, SIAM Review 38(1): 49–95.
- Xie, L., Lu, L., Zhang, D. e Zhang, H. (2004). Improved robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_{∞} filtering for uncertain discrete-time systems, *Automatica* **40**: 873–880.

- Yousefi, A. e Lohmann, B. (2008). A parameterization of reduced stable models and controllers, *International Journal of Control* **81**(1): 146–155.
- Zames, G. (1981). Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses, *IEEE Transaction on Automatic Control* **AC-26**(2): 301–320.
- Zhou, K. e Doyle, J. C. (1998). Essentials of Robust Control, Prentice-Hall. Inc., New Jersey.