UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ANÁLISE DAS CONDIÇÕES ABSORVENTES DE ENGQUIST-MAJDA E BAYLISS-TURKEL APLICADAS AO ESPALHAMENTO ELETROMAGNÉTICO

Alfred Gimpel Moreira Pinto

Belo Horizonte

2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Alfred Gimpel Moreira Pinto

ANÁLISE DAS CONDIÇÕES ABSORVENTES DE ENGQUIST-MAJDA E BAYLISS-TURKEL APLICADAS AO ESPALHAMENTO ELETROMAGNÉTICO

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Associação Ampla entre a UFSJ e o CEFET-MG, como parte dos requisitos exigidos à obtenção de título de mestre em Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Sistemas Elétricos. Linha de Pesquisa: Eletromagnetismo Aplicado.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Matias Afonso
Co-Orientadora: Profa. Dra. Úrsula do Carmo Resende

Belo Horizonte

2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Alfred Gimpel Moreira Pinto

ANÁLISE DAS CONDIÇÕES ABSORVENTES DE ENGQUIST-MAJDA E BAYLISS-TURKEL APLICADAS AO ESPALHAMENTO ELETROMAGNÉTICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica – Associação Ampla entre a Universidade Federal de São João del-Rei e o Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais em 24 de agosto de 2012 como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em engenharia Elétrica, aprovada pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

_____

Prof. Dr. Márcio Matias Afonso – Orientador

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

_____

Profª. Drª. Úrsula do Carmo Resende – Co-orientadora

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

_____

Prof. Dr. Élson José da Silva

Universidade Federal de Minas Gerais

_____

Prof. Dr. Eduardo Henrique da Rocha Coppoli

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Agradecimentos

À Deus pela oportunidade de desenvolvimento deste trabalho de relevante valor para minha formação.

Ao meu orientador, Professor Márcio Matias Afonso, que me encorajou e me assistiu durante todo o desenvolvimento desta pesquisa com muito apoio, paciência, competência e disponibilidade, tornando este trabalho muito enriquecedor com seus conselhos e sugestões.

À minha co-orientadora, Professora Úrsula do Carmo Resende, pelos ensinamentos, conselhos, indicações e apontamentos que contribuíram para a execução deste trabalho. Não posso deixar de mencionar a sua incrível e total disponibilidade e os importantes conselhos nos momentos de grandes dificuldades que muito me estimularam.

Ao professor Grey Ercole pelo apoio no momento de minha decisão em ingressar no mestrado.

Aos professores e colegas do curso de Engenharia Elétrica.

Aos colegas e funcionários do CCC – Centro de Computação Científica – pelo apoio prestado.

À todos os funcionários do CEFET-MG por tornarem o ambiente acadêmico propício à pesquisa.

Ao meu pai (IN MEMORIAN) que não pode compartilhar deste percurso ao meu lado, mas sempre esteve presente.

À minha mãe, irmãos e amigos pelo apoio e compreensão por minhas ausências.

Em especial à minha irmã, Tânia Gimpel, pelo apoio, carinho, incentivo e conselhos que impulsionaram esta caminha.

À minha amiga Juliana, que com muitos conselhos e apoio tornou possível superar todos os obstáculos.

Às amigas Flávia, Bruna, Maria Clara e Carla.

Resumo

O Espalhamento Eletromagnético é um processo físico que ocorre por meio da incidência de ondas eletromagnéticas sobre corpos presentes em sua trajetória de propagação. Esse fenômeno fomenta inúmeras pesquisas na área do Eletromagnetismo e possui diversas aplicações, como por exemplo, na detecção de fissuras em estruturas, no sensoriamento remoto, no diagnóstico precoce de enfermidades, no estudo de estruturas geológicas e na identificação de depósitos minerais. A solução analítica é formulada a partir das equações de Maxwell e é possível somente quando o objeto possui geometria simples. Porém, na maioria das situações práticas, o espalhador apresenta geometria complexa. Sendo assim necessário o emprego de técnicas numéricas eficientes que garantam precisão aos resultados. Dentre essas técnicas, destaca-se o Método dos Elementos Finitos (FEM) devido a sua capacidade de tratar objetos com características físicas heterogêneas e geometrias complexas. Nesta pesquisa é desenvolvido o estudo do Espalhamento Eletromagnético com aplicação do Método dos Elementos Finitos. Porém, o FEM apresenta elevado custo computacional para a solução de problemas de espalhamento eletromagnético, pois sua formulação requer que a condição de radiação de Sommerfeld seja satisfeita. Assim, é necessária a discretização de todo o espaço livre que envolve o espalhador. Para contornar esse problema são utilizados contornos absorventes para truncar o domínio do problema tornando-o limitado. Nesta pesquisa são inseridos contornos absorventes de Engquist-Majda e Bayliss-Turkel de primeira e segunda ordem para estabelecer um domínio limitado. A validação da formulação apresentada é realizada por meio da comparação entres os resultados numéricos e analíticos para um cilindro dielétrico infinito.

Palavras-chaves: Espalhamento Eletromagnético, Método dos Elementos Finitos, Campo Elétrico Espalhado, Discretização, FEM-ABC.

Abstract

The Electromagnetic Scattering is a physical process that occurs when an incidence of electromagnetic wave on bodies in its propagation trajectory. This phenomenon is subject a lot of research computational Electromagnetics since it has many applications, for example, crack detection in structures, remote sensing, early diagnosis of diseases, studying of geological structures and identifying of minerals deposits. The analytical solution is only possible when the object has simple geometry. However, in the most practical situations the scatterer has complex geometry. Therefore, it is necessary to use efficient numerical techniques to ensure accurate results. Among these techniques, the Finite Element Method (FEM) stands out due to its capability in dealing with objects of heterogeneous physical characteristics and complex geometries. In this research the study of electromagnetic scattering is developed by applying the Finite Element Method (FEM). However, the FEM demands computational cost for the solution of the electromagnetic scattering, because its formulation requires that the Sommerfeld radiation condition must be satisfied. Thus, it is necessary to discretize surrounding in the nearby of scatterer. To circumvent this problem, the absorbing contours are utilized to truncate the problem domain becoming it bounded. In this research the absorbing contours of Engquist-Majda and Bayliss-Turkel of first and second order are inserted to establish a bounded domain. The validation of the presented formulation is performed through the comparison between the analytical and numerical results for an infinite dielectric cylinder.

Keywords: Electromagnetic Scattering, Finite Element Method, Scattered Electric Field, Discretization, FEM-ABC

Sumário

Lista de figuras

Lista de tabelas

Lista de símbolos

$\boldsymbol{B}$	Densidade de fluxo magnético (Wb/m^2)
$\boldsymbol{D}$	Densidade de fluxo elétrico (C/m^2)
$\boldsymbol{E}$	Intensidade de campo elétrico (V/m)
$\boldsymbol{H}$	Intensidade de campo magnético (A/m)
$\boldsymbol{J}$	Densidade de corrente elétrica (A/m^2)
$\boldsymbol{J}_s$	Densidade superficial de corrente elétrica (A/m^2)
$\boldsymbol{K}_s$	Densidade superficial de corrente magnética (A/m^2)
k_0	Número de onda no espaço livre
ε_0	Permissividade elétrica do espaço livre (F/m)
ε_r	Permissividade elétrica relativa do meio
μ_0	Permeabilidade magnética do espaço livre (H/m)
μ_r	Permeabilidade magnética relativa do meio
λ_0	Comprimento de onda no espaço livre (m)
λ_1	Comprimento de onda no interior do espalhador (m)
σ	Condutividade elétrica (Ω^{-1}/m)
ρ_e	Densidade de carga elétrica (C/m^2)
ρ_{e_s}	Densidade superficial de carga elétrica (C/m^2)
ρ_{m_s}	Densidade superficial de carga magnética (Wb/m^2)

Lista de abreviações

ABC	Absorbing Boundary Conditions
BT	Bayliss-Turkel
EM	Engquist-Majda
EMC	Compatibilidade Eletromagnética
FDM	Finite Diffence Method
FEM	Finite Element Method
MoM	Moment Method
PML	Perfectly Matched Layer

Lista de publicações originadas dessa dissertação

Durante o desenvolvimento desta pesquisa foram feitas publicações em congressos e simpósios que são relacionados a seguir.

1. PINTO, A. G. M.; AFONSO, M. M.; RESENDE, U. C.; BARBOSA, L. S.; SCHROEDER, M. A. O.. "Espalhamento Eletromagnético Solucionado via FEM-ABC" - XIV Encontro de modelagem Computacional - II Encontro de Ciência e Tecnologia de Materiais - Instituto Politécnico (IPRJ), Campus Regional da UERJ, Nova Friburgo/RJ, Brasil. 22-24 nov. 2011. - Associação Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas – ABCM.

2. PINTO, A. G. M.; AFONSO, M. M.; BARBOSA, L. S.; RESENDE, U. C. e COPPOLI, E. H. R.. "Electromagnetic Scattering computed by FEM-ABC", CILAMCE XXXII - Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, November 13th to 16th, 2011 - Ouro Preto – MG, page 238.

3. PINTO, A. G. M.; AFONSO, M. M.; RESENDE, U. C.; BARBOSA, L. S.; OLIVEIRA, T. A. S.; BORGES, E. N. M.. "Espalhamento Eletromagnético Solucionado via FEM-ABC" - SIMMEC X - Simpósio de Mecânica Computacional. ABMEC - Associação Brasileira de Mecânica Computacional. ISBN - 978-85-64123. Página 41. 23 a 25 de maio de 2012.

4. PINTO, A. G. M.; AFONSO, M. M.; RESENDE, U. C.; BARBOSA, L. S.; OLIVEIRA, T. A. S.; BORGES, E. N. M.. "Espalhamento Eletromagnético solucionado pelo Método dos Elementos Finitos com o uso da Condição de Contorno de Bayliss-Turkel". CONEM VII – VII Congresso Nacional de Engenharia Mecânica. São Luiz – Maranhão – Brasil. 31 julho a 03 de agosto de 2012.

Capítulo 1

Introdução

1.1. Motivação

O espalhamento eletromagnético é um fenômeno decorrente da propagação de ondas eletromagnéticas que tem sido objeto de inúmeros estudos. Esse processo físico é resultante da obstrução da trajetória de radiação dessas ondas por objetos (espalhadores) existentes em sua direção de propagação [1]. A ocorrência do espalhamento está associada às propriedades físicas do meio de propagação, às características da onda eletromagnética incidente e às propriedades físicas do objeto [2]. O fenômeno é observado quando o espalhador, após ser iluminado por uma onda eletromagnética, passa a irradiar ondas em todas as direções, essas são conhecidas como ondas espalhadas.

Em consequência dessa particularidade, o espalhamento eletromagnético possui muitas aplicações na engenharia, como por exemplo, no processo de reconstrução da geometria de objetos [3], na detecção de fissuras e imperfeições em estruturas [3], em problemas de compatibilidade eletromagnética [4] e [5], na detecção de corpos metálicos [6] e na identificação de aeronaves e submarinos [3]. Em outras áreas de conhecimento é utilizado no diagnóstico precoce de enfermidades [7], no estudo de estruturas geológicas estratificadas [8] e [9], na identificação de depósitos minerais [10] e no sensoriamento remoto [10].

As inúmeras possibilidades de aplicações do espalhamento eletromagnético fomentam muitas pesquisas e, consequentemente, o desenvolvimento científico e tecnológico associado à radiação de ondas eletromagnéticas [11]. A solução analítica para esse problema é feita a partir das equações de Maxwell, sendo possível somente quando o objeto tem geometria simples. Entretanto, a maior parte dos problemas práticos envolvem espalhadores com geometria complexa, característica essa que

impossibilita a formulação analítica ou a torna extensivamente laboriosa. Nesse caso, devem-se empregar métodos numéricos que sejam capazes de conduzir a uma precisão.

Os métodos numéricos são conhecidos há bastante tempo, mas sua utilização efetiva ocorre a partir do advento dos computadores na década de 60 do século XX, transformando-se, até hoje, em objeto de muitas pesquisas na solução de problemas de espalhamento eletromagnético.

Os métodos numéricos clássicos, utilizados no estudo do espalhamento eletromagnético para regiões abertas, são caracterizados pela capacidade de solucionar o problema sem a necessidade de aproximação física para o objeto. Esses métodos podem ser divididos em duas classes: métodos integrais e métodos diferenciais.

Nos integrais, destaca-se o Método dos Momentos (MoM), publicado pela primeira vez em 1965 e 1967 nos trabalhos de Richmon e Harrigton, respectivamente [12] [13]. Esse método é utilizado no estudo do espalhamento eletromagnético para regiões ilimitadas apresentando elevada precisão [14]. Ademais, é uma técnica simples e versátil empregada na solução de equações integrais por meio da transformação dessas em um sistema de equações lineares [14].

Os métodos diferenciais são representados pincipalmente pelo Método das Diferenças Finitas (FDM) e pelo Método dos Elementos Finitos (FEM). O FDM foi o primeiro método numérico utilizado para resolver equações diferenciais parciais aplicadas ao eletromagnetismo, proposto em 1966 por Kane Yee [15]. A sua formulação é baseada em aproximações para as derivadas da equação que rege o problema, sendo o domínio dividido em uma malha retangular uniforme composta por nós. O método apresenta baixo consumo de memória para armazenamento de dados, pois não há necessidade de solução de sistema linear [16]. E, a aproximação é, conceitualmente, de fácil implementação [17].

O FEM divide o domínio do problema em elementos simples, podendo ser esses irregulares e a solução é determinada em cada um deles. O método fornece boa aproximação para objetos com forma irregular e composição física heterogênea. Ele foi proposto inicialmente por Curant em 1942, mas sua aplicação no eletromagnetismo, em guia de ondas de estruturas fechada, foi incialmente realizada por Peter Silvester em 1969 [18] e [19].

Entretanto, para a aplicação dos Métodos Diferenciais, na solução de problemas de espalhamento eletromagnético, necessita-se que o domínio seja limitado, para que não seja necessário discretizar todo o espaço livre que envolve o espalhador. Portanto, é necessária a inserção de uma fronteira artificial que torne o domínio limitado.

Essas fronteiras, conhecidas como condições de fronteiras absorventes (Absorbing Boundary Conditions - ABCs), tornaram-se temas de várias pesquisas para que o FEM pudesse ser aplicado em problemas ilimitados de espalhamento eletromagnético [20]. A primeira ABC publicada foi a de Engquist-Majda (EM), em 1977, desenvolvida para uma superfície plana por meio da incidência dos campos [21]. E, em 1980, a de Bayliss-Turkel (BT) que é obtida por meio de aproximação assintótica do campo espalhado distante ao objeto [22].

Essas ABCs fomentaram grande interesse à comunidade científica nas aplicações em problemas abertos de espalhamento eletromagnético, pois, a partir delas, foi possível o estudo de estruturas complexas em ambiente ilimitado utilizando o FEM. Como apresentam o inconveniente de reflexões espúrias para determinados ângulos de incidência, diversas formulações para as condições absorventes foram propostas. Em 1981 foi publicada a condição de Mur, que diminui as reflexões de campo para diversos ângulos de incidência [23]. E, em 1986, o trabalho de Trefethen e Halpern (TH) propôs uma aproximação adequada a partir da série de Taylor para ser incorporada nas equações de EM [24]. Nesse mesmo ano, Higdon apresentou uma formulação similar a de BT que é capaz de absorver ondas planas para determinados ângulos [25].

As reflexões provenientes da inserção da fronteira artificial acarretam erros nas simulações para o espalhamento eletromagnético no espaço livre. A fim de minimizá-las ou até mesmo eliminá-las, em 1992, foi publicada uma aproximação alternativa conhecida como absorvedores fictícios (Fictitious Absorbers) [26]. Essa região é formada internamente por camadas regulares dielétricas e a última por um condutor perfeito. Por meio da escolha conveniente dos seus parâmetros constitutivos e da sua espessura, ela é capaz de absorver ondas em uma ampla faixa de ângulos de incidência [20].

A região formada por absorvedores fictícios é projetada para trabalhar em uma única frequência de propagação, característica que torna impossível a sua aplicação em uma larga banda de frequência sem que seja remodelada. Essa particularidade foi tratada por Berenger, em 1994, quando publicou o seu trabalho sobre camadas

perfeitamente casadas (Perfectly Matched Layers - PML) [27]. A PML é projetada para ser uma região com perdas onde não ocorrem reflexões de ondas planas para todas as frequências e para qualquer ângulo de incidência do campo, pois em cada ponto em seu interior, os parâmetros são redefinidos de forma que ocorra o perfeito casamento de impedância entre as camadas [20]. A formulação apresenta como inconveniente um alto custo computacional, pois a cada interação os parâmetros devem ser recalculados.

O estudo do espalhamento eletromagnético no espaço livre pode ser determinado por meio de técnicas baseadas na composição de diferentes métodos [28] e [29]. Eles são conhecidos como métodos híbridos, pois utilizam uma técnica eficiente para o tratamento da região fechada e outra técnica para o tratamento da região limite do espalhador [30] e [31].

Nessa pesquisa o problema proposto é ilimitado e a solução é obtida por meio do truncamento do espaço livre pelas condições absorventes de Engquist-Majda e de Bayliss-Turkel. A eficiência das ABCs de primeira e segunda ordem são comparadas com a solução analítica para cada simulação.

1.2. Objetivo

O objetivo principal deste trabalho é o estudo do Espalhamento Eletromagnético com a aplicação do método dos Elementos Finitos, através da inserção de uma fronteira absorvente (FEM-ABC), para sistemas abertos. E, como objetivos específicos, a seguintes atividades:

- Estudo do fenômeno de Espalhamento Eletromagnético;
- Estudo do Método dos Elementos Finitos;
- Modelagem Matemática do problema de espalhamento eletromagnético;
- Estudo das Condições de Contorno Absorventes de Engquist-Majda e Bayliss-Turkel para sistemas abertos;
- Desenvolvimento computacional do FEM-ABC no MatLab[1];
- Comparação entre os resultados analítico e numérico;

[1] Matrix Laboratory

1.3. Metodologia

A orientação da pesquisa está relacionada no desenvolvimento de atividades baseadas na obtenção dos objetivos propostos. Como propósito inicial é feita a revisão bibliográfica sobre o fenômeno de espalhamento eletromagnético e de métodos numéricos empregados na solução, em especial, as aplicações do Método dos Elementos Finitos. Em seguida, o estudo e desenvolvimento da modelagem matemática e física do fenômeno por meio da aplicação do FEM. Como o problema é aberto, ou seja, ilimitado, é necessário o estudo das condições de contorno absorventes de Engquist-Majda e Bayliss-Turkel. Essas fronteiras são inseridas na formulação do FEM e, para que a modelagem numérica seja validada, é necessária a busca pela solução analítica a fim de realizar a comparação entre os resultados numéricos e analíticos.

1.4. Organização do texto

A pesquisa está organizada em cinco capítulos. O primeiro apresenta uma breve revisão bibliográfica sobre o tema, a sua relevância, o objetivo principal, a metodologia e a organização do texto para o desenvolvimento do trabalho.

No segundo capítulo apresenta a relação entre o fenômeno de espalhamento e a propagação de ondas eletromagnéticas e a justificativa para a utilização de um método numérico na solução de equações diferenciais. Por fim, é feita uma análise dos métodos numéricos mais utilizados em eletromagnetismo e apresenta-se a justificativa pela escolha do FEM.

No terceiro capítulo é desenvolvida a formulação do FEM para o fenômeno de Espalhamento Eletromagnético. Onde é feita a inserção da fronteira absorvente para o truncamento do domínio computacional. E, apresenta o modelo matemático para a solução.

O quarto capítulo é dedicado à apresentação dos resultados obtidos com o uso do FEM-ABC e a comparação entre os resultados analítico e numérico.

No quinto capítulo é feita a conclusão do trabalho e apresentados os trabalhos futuros.

Capítulo 2

O espalhamento eletromagnético

O objetivo deste capítulo é apresentar o fenômeno físico de Espalhamento Eletromagnético e as equações que o modelam. Ademais, faz-se uma breve discussão sobre a solução analítica e numérica da equação diferencial para o problema de espalhamento eletromagnético bidimensional. Do ponto de vista numérico, são apresentados os métodos mais comumente empregados em problemas de eletromagnetismo e as condições de contorno absorvente. Por fim, justifica-se a escolha do Método dos Elementos Finitos baseando-se nas vantagens inerentes à técnica.

2.1. O espalhamento eletromagnético

A propagação de ondas eletromagnéticas no espaço livre (ε, μ e $\sigma = 0$) é continua e sem perdas quando o ambiente de radiação é ideal, ou seja, meio sem perdas ($\sigma = 0$), isento de obstruções e quaisquer outros campos e partículas. Na Figura 2.1, o espaço de propagação é considerado ideal e a onda irradiada pela antena em (a) viaja pelo espaço sem sofrer qualquer tipo de interferência.

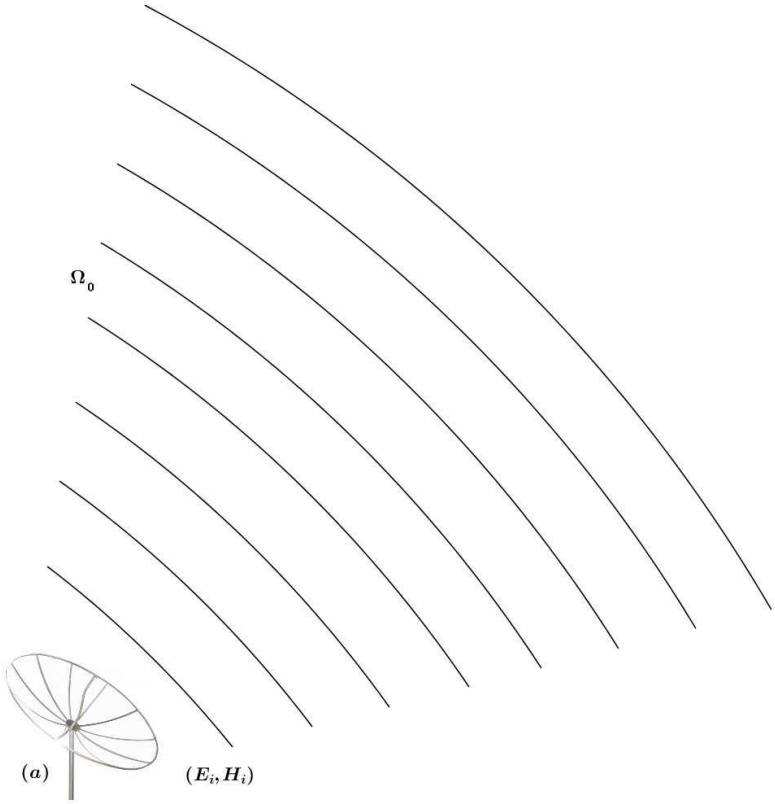


Figura 2-1 – Radiação de ondas eletromagnéticas no espaço livre

Na Figura 2-1, Ω_0 representa o espaço livre com as características físicas ε, μ e $\sigma = 0$ e $\boldsymbol{E^i}$ e $\boldsymbol{H^i}$ são os campos elétrico e magnético irradiados.

No entanto, quando uma onda eletromagnética irradiada por uma fonte incide sobre um objeto, esse passa a se comportar como uma antena e a irradiar um novo campo. A Figura 2.2 ilustra esse fenômeno, a antena localizada em (a) emite uma onda eletromagnética, representada pelas linhas cheias, que propaga pelo espaço livre e ilumina a aeronave em (b). Com a incidência sobre o objeto em (b), ele passa a irradiar um novo campo, representado pelas circunferências concêntricas de linhas pontilhas, em todas as direções.

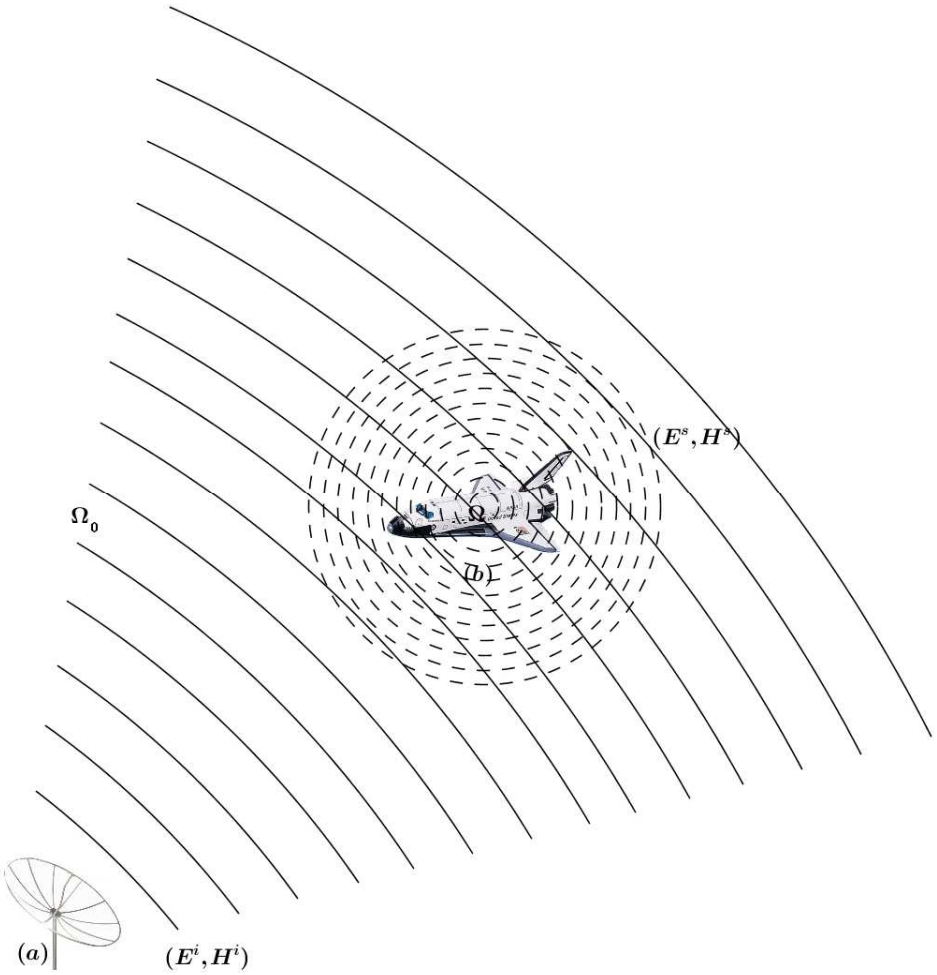


Figura 2-2 – Espalhamento eletromagnético

Na Figura 2-2, $\boldsymbol{E^s}$ e $\boldsymbol{H^s}$ são os campos elétrico e magnético irradiados pela aeronave Ω. Esse novo campo representa o processo físico de espalhamento eletromagnético e é conhecido como campo espalhado. A sobreposição entre as ondas incidente e espalhada geram o campo total, pois as equações de Maxwell e o meio são lineares, assim:

$$\boldsymbol{E^t} = \boldsymbol{E^i} + \boldsymbol{E^s}, \tag{2-1}$$

$$\boldsymbol{H^t} = \boldsymbol{H^i} + \boldsymbol{H^s}, \tag{2-2}$$

onde $\boldsymbol{E^t}$ e $\boldsymbol{H^t}$ são os campos elétrico e magnético total, respectivamente.

Os dois problemas da teoria clássica do espalhamento eletromagnético são o espalhamento direto e o espalhamento inverso [32]. O primeiro possui solução singular

e é utilizado quando se deseja obter informações sobre o campo espalhado quando o espalhador é conhecido. Já no segundo, o objetivo é obter informações sobre o objeto quando o campo espalhado é conhecido.

A propagação de ondas eletromagnéticas através de um meio deve satisfazer dois conjuntos de condições: as equações de Maxwell, as quais relacionam os campos elétrico e magnético; e as relações constitutivas, que é a resposta do meio aos campos.

Então, para o desenvolvimento da teoria do Espalhamento Eletromagnético torna-se necessário o estabelecimento da equação de onda eletromagnética que pode ser associada ao problema e é deduzida a partir das equações de Maxwell.

2.2. Equações de Maxwell

Toda a teoria eletromagnética é condensada nas quatro equações de Maxwell. Elas podem ser representadas na forma diferencial e descrevem a inter-relação existente entre os vetores campo elétrico e magnético, as densidades de carga elétrica e corrente elétrica em um ponto no espaço num instante de tempo [1]. Elas são escritas como,

Lei de Gauss
$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_s, \tag{2-3}$$

Lei de Gauss para campos magnéticos
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{2-4}$$

Lei de Faraday
$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{2-5}$$

Ampère-Mawell
$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \tag{2-6}$$

onde $\frac{\partial}{\partial t}$ é a derivada parcial temporal, $\boldsymbol{D}$ é a densidade de fluxo elétrico, $\boldsymbol{E}$ é a intensidade de campo elétrico, $\boldsymbol{B}$ é a densidade de fluxo magnético, $\boldsymbol{H}$ é a intensidade de campo magnético, $\boldsymbol{J}$ é a densidade de corrente e ρ é a densidade de carga livres.

A equação (2-3) representa a lei de Gauss, ela relaciona a divergência da densidade de fluxo elétrico através de uma superfície gaussiana em torno de um ponto,

como sendo igual à carga total nesse ponto. Na equação (2-4), que é conhecida como a lei de Gauss para o magnetismo, as linhas de campo magnético são sempre fechadas, ou seja, expressa a inexistência de cargas magnéticas, pois as linhas de campo magnético que chegam num ponto devem sair desse. Já a equação (2-5) é a lei de Faraday, ela descreve que o campo magnético variável no tempo produz um campo elétrico rotacional. Por fim, a equação (2-6) apresenta a Lei de Ampère com a correção feita por Maxwell com a introdução da densidade de corrente de deslocamento. Ela afirma que o campo magnético pode ser produzido de duas formas: a primeira, através de correntes elétricas, que é a lei de Ampère original, conhecida como sendo a densidade de corrente de condução e a segunda, pela variação temporal da densidade de fluxo magnético, que é a correção proposta por Maxwell, conhecida como densidade de corrente de deslocamento [1]. Por meio das equações (2-5) e (2-6) verifica-se a existência de ondas eletromagnéticas autossustentadas, pois o rotacional do campo elétrico gera o campo magnético e vice-versa.

Além das equações (2-3) a (2-6), existem relações que suplementam as equações de Maxwell, que são conhecidas como relações constitutivas,

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \cdot \boldsymbol{E}, \tag{2-7}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \cdot \boldsymbol{H}, \tag{2-8}$$

$$\boldsymbol{J} = \sigma \cdot \boldsymbol{E}, \tag{2-9}$$

onde ε é a permissividade elétrica, μ é a permeabilidade magnética e σ é a condutividade elétrica.

As equações (2-7) a (2-9) relacionam, por meios dos parâmetros constitutivos, a densidade com a intensidade de campo elétrico, a densidade com a intensidade de campo magnético e a intensidade de corrente elétrica com a intensidade de campo elétrico, respectivamente. Esses parâmetros são escalares, pois o meio é linear, homogêneo e isotrópico, ou seja, suas características físicas são independentes da intensidade, da posição e da orientação dos campos [33].

As características físicas dos materiais podem ser representadas por meio dos seus parâmetros relativos,

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, \tag{2-10}$$

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}, \tag{2-11}$$

onde ε_r e ε_0 são, respectivamente, as permissividades relativa e do espaço livre e μ_r e μ_0 são as permeabilidades relativa e do espaço livre, respectivamente [33].

As equações de Maxwell modelam o comportamento dos campos elétrico e magnético no interior e no exterior de um determinado meio. Entretanto, na interface de separação entre meios distintos, pode ocorrer a variação abrupta dos parâmetros constitutivos, ocasionando na descontinuidade dos campos [1]. Nessas condições, as equações de Maxwell não podem caracterizar adequadamente o comportamento dos campos. Assim, deve-se conduzir uma análise cuidadosa por meio do comportamento dos campos nessa fronteira [34]. A Figura 2-3 ilustra a interface entre dois meios materiais distintos.

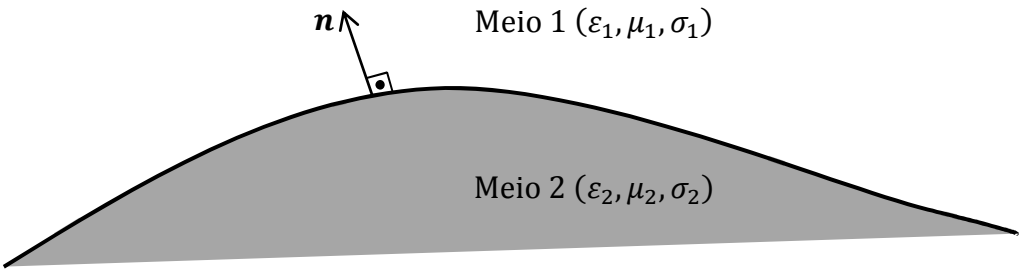


Figura 2-3 – Interface de separação entre dois meios distintos

Na fronteira de separação entre os meios representados na Figura 2-3, os campos elétrico e magnético atendem as condições de fronteira:

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = -\boldsymbol{K}_s, \tag{2-12}$$

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{J}_s, \tag{2-13}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) = \rho_{e_S}, \tag{2-14}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) = \rho_{m_s}, \tag{2-15}$$

onde $\boldsymbol{n}$ é o vetor normal à fronteira de separação com direção do meio 1 para o meio 2, $\boldsymbol{K}_s$ é a densidade superficial de corrente magnética, $\boldsymbol{J}_s$ é a densidade superficial de corrente elétrica, ρ_{e_S} é a densidade superficial de carga elétrica e ρ_{m_s} é a densidade superficial de carga magnética.

No caso do meio 2, Figura 2-3, ser um condutor elétrico perfeito, ou seja, com $\sigma_2 = \infty$, o campo é nulo em seu interior tornando $\boldsymbol{K}_s = 0$ e $\rho_{m_s} = 0$ [35]. Assim, as equações são reduzidas a:

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_1 = 0, \tag{2-16}$$

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{J}_s, \tag{2-17}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{D}_1 = \rho_{e_S}, \tag{2-18}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{B}_1 = 0. \tag{2-19}$$

Quando os meios 1 e 2, Figura 2-3, são dielétricos e considerando que não haja correntes ou cargas superficiais, as equações (2-12) a (2-15) tornam-se:

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_2, \tag{2-20}$$

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}_2, \tag{2-21}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{D}_2, \tag{2-22}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{B}_2. \tag{2-23}$$

Por meio da análise das equações (2-20) a (2-23) verifica-se que os campos elétrico e magnético tangenciais são contínuos na fronteira e as componentes normais são descontínuos devido à variação de ε e μ.

2.3. Equação de onda

As equações (2-5) e (2-6) estão acopladas, pois os campos $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ estão inter-relacionados. Para desacoplá-las deve-se aplicar o rotacional em ambos os lados das equações e as identidades vetoriais presentes no Apêndice A. A formulação completa para a equação de onda elétrica e magnética está desenvolvida no Apêndice B. Assim, após as manipulações vetoriais apropriadas obtêm-se as equações de onda:

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + k_0^2 \boldsymbol{E} = 0, \tag{2-24}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} + k_0^2 \boldsymbol{H} = 0, \tag{2-25}$$

onde $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ é o número de onda, sendo ε_0 a permissividade elétrica no ar, μ_0 a permeabilidade magnética no ar e ω a frequência angular.

A equação (2-24) é a equação de onda vetorial do campo elétrico e a (2-25) do campo magnético propagando-se no espaço livre. Essas equações podem ser feitas por meio da análise bidimensional quando o problema de radiação da onda ocorre em um meio infinito sem alterações constitutivas em determinada direção. Como não há variações espaciais na propagação nesse sentido, as derivadas das componentes eletromagnéticas nessa direção são nulas. Considerando que isso ocorra na direção z, então, têm-se caracterizados os modos Transverso Magnético (TM_Z, ou seja, $\boldsymbol{H}\hat{z} = 0$) e Transverso Elétrico (TE_Z, ou seja, $\boldsymbol{E}\hat{z} = 0$). Assim, as equações (2-24) e (2-25), podem ser expressas de forma única, pois a diferença entre elas é somente o campo,

$$\nabla.(\alpha_1 \nabla u) + k_0^2 \alpha_2 u = 0, \tag{2-26}$$

onde $\alpha_1 = \frac{1}{\mu_r}$, $\alpha_2 = \varepsilon_r$ e $u = \boldsymbol{E}\hat{z}$ para uma onda TM_Z e $\alpha_1 = \frac{1}{\varepsilon_r}$, $\alpha_2 = \mu_r$ e $u = \boldsymbol{H}\hat{z}$ para uma onda TE_Z.

A equação diferencial (2-26) representa de forma matemática geral a equação de onda para a propagação de um campo elétrico ou magnético e, possui solução única se estiver relacionada a um conjunto de condições de contorno. Nessa equação, a variável u deve ser determinada observando tais condições para o problema tratado, pois sem essas se obtém um conjunto infinito de soluções [36].

No eletromagnetismo as condições de contorno mais comuns são: a de Dirichlet, que especifica o valor da função no contorno do domínio; a de Neumann, que especifica o valor da derivada da função no contorno do domínio e a de terceiro tipo, que é uma combinação das condições de Dirichlet e Neumann. A condição de contorno absorvente é utilizada no estudo do espalhamento eletromagnético em alta frequência. Ela divide o domínio original em um domínio computacional finito e um domínio complementar infinito [37]. Assim, nesta pesquisa, para a solução da equação diferencial torna-se necessário utilizar a condição de contorno absorvente para que o domínio do problema seja limitado.

2.4. Solução da equação diferencial para o espalhamento eletromagnético

A solução do espalhamento eletromagnético pode ser dividida em duas categorias: métodos analíticos e métodos numéricos. Os analíticos são mais precisos, pois não apresentam aproximações, mas nem sempre são possíveis de serem determinados. Portanto, nos casos onde a solução analítica é inviável, deve-se utilizar um método numérico para encontrar o resultado aproximado. No eletromagnetismo há dois grupos principais de métodos numéricos para a resolução de equações diferenciais parciais: os métodos integrais e os métodos diferenciais.

No grupo dos métodos integrais, destaca-se o Método dos Momentos (MoM) que é baseado na resolução de equações integrais por redução a um sistema matricial de equações algébricas lineares [38] e [39]. Os inconvenientes do método são a ampla necessidade de armazenamento de dados e o tempo de simulação, características que limitam a sua aplicação para objetos com geometria complexa [40]. O alto custo

computacional nesse caso é devido ao completo preenchimento das matrizes e ao crescimento delas com o quadro do número de incógnitas [41].

Já nos métodos diferenciais, há a geração de matrizes esparsas que crescem quase de forma linear com o tamanho do problema. Assim, esses métodos são normalmente mais eficientes que o integral para problemas relativamente grandes, pois apresentam menor custo computacional. Na modelagem eletromagnética existem dois métodos de grande interesse nesse grupo: o Método das Diferenças Finitas (FDM) e o Método dos Elementos Finitos (FEM).

O FDM consiste na substituição das derivadas parciais da equação contínua por meio de fórmulas discretas de diferenças e na aplicação da equação resultante em um número finito de pontos da região [42]. Isto dá origem a um sistema de equações algébricas lineares cuja solução fornece os valores desejados. A discretização é, usualmente, feita com auxilio de uma malha com espaçamento constante, ou seja, estruturada. Essa característica pode introduzir aproximações de geometria. E, embora malhas irregulares possam ser empregadas e contornos curvos possam ser mapeados, esses procedimentos envolvem complicações adicionais que ofuscam a simplicidade matemática e computacional do método [43]. No entanto, embora a aproximação seja, conceitualmente, de fácil implementação, ele também apresenta limitações quanto à condições de contorno não usuais ou composição física heterogênea do objeto [17].

Ao contrário do FDM, no FEM a malha não necessita ser estruturada, o que faz com que muitas geometrias complexas possam ser tratadas com facilidade [44]. Assim, sua primeira característica é o domínio subdividido em elementos de forma triangular ou quadrangular, podendo ser retilíneos ou curvos [45] e [33].

O FEM é consideravelmente mais versátil, pois os elementos da malha não precisam ser necessariamente iguais. Isto faz com que domínios com geometrias complexas possam ser analisados com maior precisão. Ademais, podem-se estabelecer maior densidade de elementos em regiões onde os campos variam rapidamente ou o raio de curvatura é pequeno e diminuir a quantidade de elementos em regiões distantes [43].

2.5. Sumário

O processo físico de espalhamento eletromagnético, exposto inicialmente neste capítulo, envolve a propagação de onda eletromagnética no espaço livre na presença de um objeto em sua trajetória. A incidência dessa onda sobre o espalhador origina um novo campo que é conhecido como campo espalhado. A fim de descrever o comportamento dos campos elétrico e magnético é obtida a modelagem matemática a partir das equações de Maxwell. Esse modelo é capaz de prever o comportamento dos campos para objetos de qualquer geometria no espaço livre. Porém, tratando-se de um problema ilimitado e de geometria complexa, justifica-se a escolha pela aplicação do Método dos Elementos Finitos e a imposição de uma condição de contorno absorvente. Assim, no capitulo seguinte, é desenvolvida a formulação do FEM-ABC na solução do problema de espalhamento eletromagnético com utilização de fronteira absorvente para limitar o domínio computacional.

Capítulo 3

Formulação FEM para o espalhamento eletromagnético

Neste capítulo é desenvolvida a formulação do Método dos Elementos Finitos para o problema de espalhamento eletromagnético devido a um objeto dielétrico infinito de secção transversal arbitrária. Por fim, é feita a incorporação das condições de contorno absorvente de Bayliss-Turkel e Engquist-Majda de primeira e segunda ordem.

3.1. O problema de espalhamento eletromagnético

A Figura 3.1 apresenta a secção transversal de um corpo cilíndrico imerso no espaço livre com comprimento axial infinito na direção z. Uma onda eletromagnética TM_Z que se propaga na direção $+x$, ortogonal ao eixo do cilindro, incide sobre o mesmo.

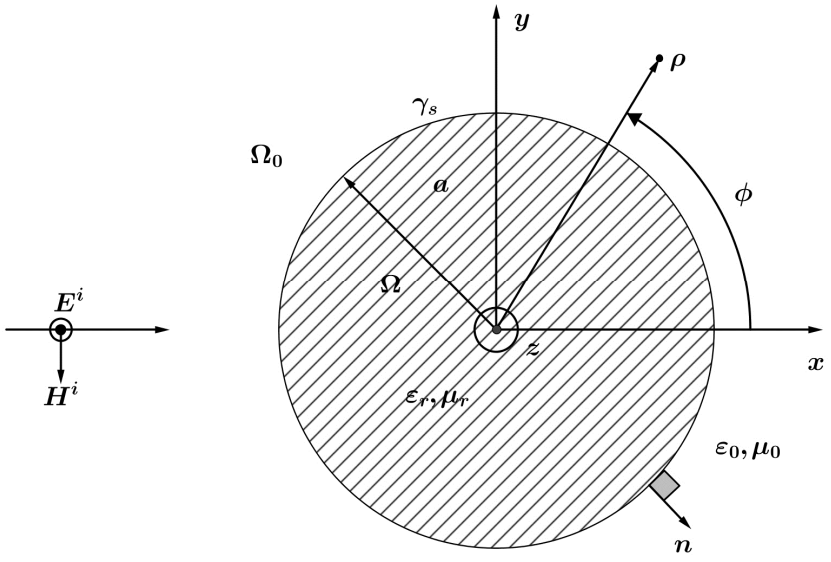


Figura 3-1 – Secção transversal de um cilindro dielétrico infinito

Na Figura 3-1, Ω_0 representa o espaço livre, Ω o domínio do objeto, Υ_S a superfície do espalhador, $\boldsymbol{n}$ o vetor normal à superfície do objeto, a o raio do espalhador, ρ a distância de observação a partir do centro da secção transversal e $\boldsymbol{E^i}$ e $\boldsymbol{H^i}$ representam os campos elétrico e magnético, respectivamente.

É considerado que o campo incidente e as propriedades do material do objeto não variam ao longo de seu eixo. Assim, o problema tridimensional pode ser reduzido a um problema bidimensional.

3.2. Formulação forte

Os campos em todo o domínio (Ω) são determinados pela equação (2-9), que é repetida aqui por conveniência. Solucionar o problema de Espalhamento Eletromagnético consiste em determinar o valor de u em todo o domínio de forma a satisfazer as equações que modelam o problema:

$$\nabla.(\alpha_1 \nabla u) + k_0^2 \alpha_2 u = 0 \quad \forall\, \rho \in \Omega, \tag{3-1}$$

$$\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial n} = -\Psi \quad \forall\, \rho \in \Upsilon_S, \tag{3-2}$$

onde u representa o campo total, $\alpha_1 = \frac{1}{\mu_r}$, $k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ é o número de onda, $\alpha_2 = \varepsilon_r$, ρ é o ponto de observação do campo, Ω é o domínio do espalhador, $\frac{\partial u}{\partial n}$ é a derivada normal do campo sobre a superfície do espalhador e Υ_S é a fronteira do espalhador.

A equação diferencial (3-1) acompanhada da condição de contorno (3-2), sobre a superfície do espalhador, rege a solução do problema de espalhamento eletromagnético. Esse conjunto de equações é denominado como formulação forte do problema. A partir dessa formulação é necessário sugerir uma aproximação para o campo u e determinar a formulação fraca [3].

3.3. Formulação fraca

A obtenção da forma fraca da equação diferencial que governa o problema de espalhamento eletromagnético consiste no estabelecimento de uma equação integral sobre o domínio e a fronteira Υ_S do objeto [46]. Essa formulação deve ser satisfeita em sentido médio ao invés do sentido restrito pontual da forma forte [47]. A fim de desenvolver a forma fraca, deve-se fazer uma aproximação de u por meio de u^* na equação (3-1). Essa substituição proposta na equação diferencial origina o resíduo da aproximação:

$$R = \boldsymbol{\nabla}.(\alpha_1 \boldsymbol{\nabla} u^*) + k_0^2 \alpha_2 u^* \neq 0, \tag{3-3}$$

onde R representa o resíduo.

A substituição de u por u^* em (3-1) acarreta na equação (3-3) que possui valor não nulo. Como essa representa o valor pontual, a aplicação do Método dos Resíduos Ponderados anula a média ponderada desse resíduo no domínio do problema [48]. Nesse sentido, o método consiste em efetuar o produto interno dos resíduos com uma função peso ou ponderação e integrar o resultado em todo o domínio do espalhador forçando-o a ser nulo [49]:

$$\int_{\Omega} \{\boldsymbol{\nabla}.(\alpha_1 \boldsymbol{\nabla} u^*) + k_0^2 \alpha_2 u^*\} w \, d\Omega = 0 \quad \forall \, w \in V, \tag{3-4}$$

onde Ω representa o domínio do espalhador, u^* é a aproximação para o campo u, w é a função de ponderação e V é o espaço de funções escalares que possuem a integral de seus quadrados definida [48].

A equação integral (3-4) é desenvolvida por meio de manipulações algébricas, apresentadas no Apêndice C, de tal forma que apresente um termo integral sobre a superfície do objeto:

$$\int_{\Omega} [\boldsymbol{\nabla} w.(\alpha_1 \boldsymbol{\nabla} u^*) - k_0^2 \alpha_2 w u^*]\, d\Omega - \int_{\gamma_s} \alpha_1 w \frac{\partial u^*}{\partial n}\, d\gamma_s = 0, \tag{3-5}$$

onde Ω representa o domínio do espalhador, Υ_S é a fronteira do espalhador e $\frac{\partial u^*}{\partial n}$ é derivada normal sobre a superfície do espalhador.

A solução da equação (3-5) por meio do FEM é possível para o primeiro termo integral definido no interior do objeto, mas inviável para o segundo sobre a superfície do objeto, pois não são conhecidas as condições de contorno do problema. Nesse caso, para que a solução seja única, o teorema de Lax-Milgram deve ser satisfeito, ou seja, para um problema de valor inicial bem-posto e um método de discretização consistente, a estabilidade é condição necessária e suficiente para a convergência [50]. Ademais, a derivada normal do campo espalhado sobre a superfície do objeto deve ser truncada de forma a satisfazer a condição de radiação de Sommerfeld no infinito [48] e [51]:

$$\lim_{\rho \to \infty} \sqrt{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + j k_0 u \right) = 0, \tag{3-6}$$

onde ρ é a distância entre o ponto de observação e a origem do sistema de coordenadas, sendo representado por $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, u é o campo irradiado, $\frac{\partial u}{\partial \rho}$ é a derivada parcial na direção radial e j é a unidade imaginária.

Como o problema de espalhamento eletromagnético encontra-se no espaço livre, deve-se limitar o domínio computacional, pois se nenhum critério for estabelecido haverá o armazenamento infinito de dados, tornando a solução impraticável por meio do FEM [20]. Assim, a introdução de uma condição de contorno artificial próxima ao objeto converte o problema aberto em fechado e, consequentemente, diminui o custo computacional permitindo a aplicação do FEM.

3.4. Incorporação das condições de contorno absorventes

As condições de contorno de Engquist-Majda e de Bayliss-Turkel não possuem significado físico, mas são somente metodologias para restringir o domínio

computacional [52]. Nessas fronteiras são impostas condições de contorno particulares com o objetivo de atenuar ou eliminar as reflexões espúrias causadas por sua imposição [53]. A incorporação da condição de contorno artificial é feita mediante a inserção de uma nova fronteira como representado na Figura 3-2.

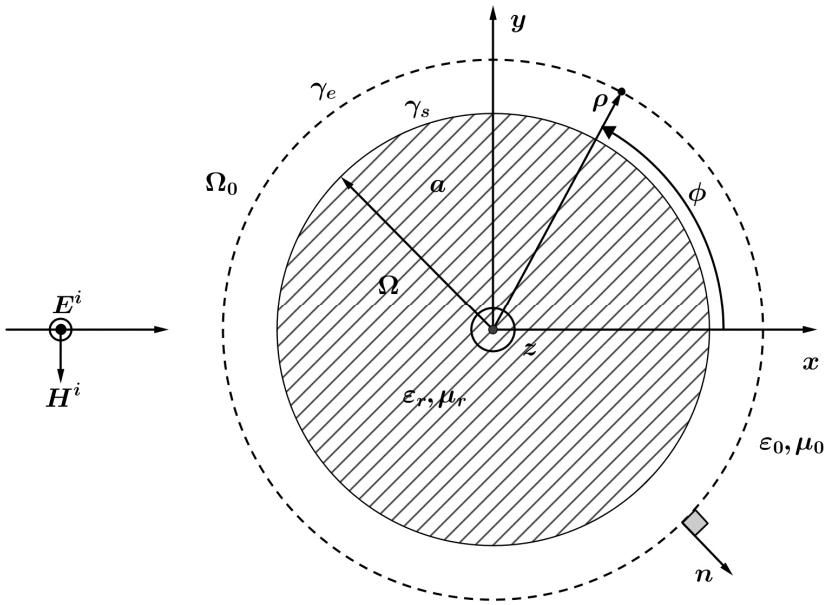


Figura 3-2 – Secção transversal do cilindro dielétrico com fronteira ABC

Na Figura 3-2 a fronteira absorvente γ_e é representada pela circunferência de linha pontilhada concêntrica à secção transversal do cilindro. Observa-se que o contorno encontra-se próximo ao objeto e que o domínio computacional é limitado.

A incorporação das condições de contorno à forma fraca do FEM é feita de maneira similar para as ABCs de EM e BT. O ponto de partida é a equação (3-5) que aqui é repetida por conveniência e o campo aproximado u^* é substituído por u:

$$\int_{\Omega} [\boldsymbol{\nabla} w.(\alpha_1 \boldsymbol{\nabla} u) - k_0^2 \alpha_2 w u]\, d\Omega - \int_{\gamma_s} w \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial n}\, d\gamma_s = 0. \tag{3-7}$$

Na equação (3-7) o segundo termo integral deve ter a derivada normal sobre a superfície do espalhador substituída pelas condições de contorno absorventes de BT e EM. Para que seja possível a inserção de uma fronteira curva arbitrária devem-se fazer as seguintes substituições [20]:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \rightarrow \frac{\partial}{\partial n}, \tag{3-8}$$

$$\frac{1}{\rho} \rightarrow \kappa(s), \tag{3-9}$$

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial s^2}, \tag{3-10}$$

onde ρ é o raio da fronteira absorvente, $\frac{\partial}{\partial \rho}$ é a derivada parcial radial, $\frac{\partial}{\partial n}$ é a derivada parcial normal na fronteira absorvente, s é o comprimento do arco medido ao longo da fronteira, $\kappa(s)$ é a curvatura da fronteira em s e $\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$ é a derivada parcial de segunda ordem na direção angular.

Ademais, as condições de contorno podem ser incorporadas de duas formas distintas, sendo a primeira em função do campo espalhado e a segunda em função do campo total [20]. Assim, como as formulações de EM e BT são expressas em função do campo espalhado, a seguinte relação deve ser utilizada para que a formulação do FEM forneça o campo total:

$$u^s = u - u^i \tag{3-11}$$

onde u^s é o campo espalhado, u é o campo total e u^i é o campo incidente.

A equação (3-11) apresenta o campo espalhado, u^s, como sendo a diferença entre o campo total, u, e o campo incidente, u^i. Por fim, na Figura 3-2, a fronteira ABC está localizada no espaço livre, sendo $\mu_r = \varepsilon_r = 1$ o que torna $k = k_0$.

O objetivo da incorporação das condições de contorno na equação (3-5) é que a derivada normal sobre a superfície do objeto seja substituída pela superfície absorvente. A fim de obter uma formulação única para a incorporação das fronteiras artificiais, admite-se que a derivada normal tenha expressão singular:

$$\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial n} = q - \left[\gamma_1 + \gamma_2 \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right] u \tag{3-12}$$

onde $\frac{\partial}{\partial n}$ é a derivada parcial normal na fronteira absorvente, u é o campo total, q, γ_1 e γ_2 são os termos a serem determinados e $\frac{\partial^2}{\partial s^2}$ é a derivada parcial de segunda ordem no arco s sobre a fronteira absorvente.

A equação (3-12) representa a condição de contorno de terceiro tipo utilizada na incorporação das condições de contorno, sendo que os termos q, γ_1 e γ_2 assumem valores particulares de acordo com o tipo e ordem da fronteira [20].

3.4.1. Condição de Engquist-Majda

A obtenção das condições de contorno de Engquist-Majda, também conhecidas como condições unidirecionais, é feita a partir de uma onda plana, escalar e em duas dimensões, propagando-se no espaço livre e incidindo no plano yz [20] e [21].

$$u^s = Ae^{-j(k_x x + k_y y)}, \tag{3-13}$$

onde A é uma constante, $k_x = k\ cos\phi$ e $k_y = k\ sen\phi$, sendo ϕ o ângulo de incidência em relação ao eixo x. Em seguida, a equação (3-13) deve ser derivada em relação à coordenada x:

$$\frac{\partial u^s}{\partial x} = -jk_x Ae^{-j(k_x x + k_y y)}, \tag{3-14}$$

$$\frac{\partial u^s}{\partial x} = -jk_x u, \tag{3-15}$$

$$\frac{\partial u^s}{\partial x} = -jkcos\phi u, \tag{3-16}$$

onde $\frac{\partial}{\partial x}$ é a derivada parcial axial, k_x é o número de onda sobre o eixo x e k_y é o número de onda sobre o eixo y.

A equação (3-16) é uma condição de contorno capaz de proporcionar a perfeita absorção de uma onda plana quando conhecido o ângulo de incidência [54]. Entretanto,

em muitos problemas, nem sempre é possível obter o ângulo de incidência ou a onda incidente pode não ser plana. Nesse caso, a condição de contorno a ser imposta deve ser independente do ângulo de incidência. Fazendo $\phi = 0$ na equação (3-16), obtém-se a condição de contorno de EM de primeira ordem referente ao campo espalhado:

$$\frac{\partial u^s}{\partial x} \approx -jku^s, \tag{3-17}$$

onde k é o número de onda e u^s é o campo espalhado.

As condições de contorno de EM de ordens superiores são obtidas a partir da equação (3-15) com a substituição do fator k_x por $\sqrt{k^2 - k_y^2}$. Com essa permuta aparece como fator um radical que pode ser expandido em série de Taylor desde que seja garantida a convergência da série:

$$\frac{\partial u^s}{\partial x} = -j\left(\sqrt{k^2 - k_y^2}\right)u^s = -jk\left(\sqrt{1 - \left(\frac{k_y}{k}\right)^2}\right)u^s, \tag{3-18}$$

onde $\frac{\partial}{\partial x}$ é a derivada parcial axial, k é o número de onda, k_y é o número de onda sobre o eixo x e u^s é o campo espalhado.

Na equação (3-18), o termo binomial pode ser expandido em série de Taylor, pois o termo $\left(\frac{k_x}{k}\right) < 1$ garante a convergência da série. Para a condição de contorno absorvente de EM de segunda ordem somente os dois primeiros termos da série são considerados:

$$\frac{\partial u^s}{\partial x} = -jku^s - \frac{j}{2k}\frac{\partial^2 u^s}{\partial y^2}, \tag{3-19}$$

onde $\frac{\partial}{\partial x}$ é a derivada parcial em x e $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ é a derivada parcial de segunda ordem em y.

A equação (3-19) representa a condição de contorno absorvente de EM de segunda ordem para o campo espalhado. Nessa equação além da derivada parcial

primeira em relação à coordenada x, também há a derivada parcial segunda em relação à coordenada y.

As condições de contorno de EM, também conhecidas como condições de contorno de Padé, são desenvolvidas para fronteiras planas [20]. Nelas, as reflexões espúrias intensificam com o aumento do ângulo de incidência do campo espalhado. Consequentemente, a distância entre os limites absorvente e do objeto devem estar distantes o suficiente para garantir que o ângulo de incidência seja menor possível. A análise desse fato pode feita por meio dos coeficientes de reflexão para a polarização TM:

$$R_1 = \frac{\cos\phi - 1}{\cos\phi + 1}, \tag{3-20}$$

$$R_2 = \left(\frac{\cos\phi - 1}{\cos\phi + 1}\right)^2 = \frac{\cos\phi + \frac{1}{2}sen^2\,\phi - 1}{\cos\phi - \frac{1}{2}sen^2\,\phi + 1}, \tag{3-21}$$

onde R_1 é o coeficiente de reflexão de EM de primeira ordem, ϕ é o ângulo de incidência sobre a fronteira absorvente e R_2 é o coeficiente de reflexão de EM de segunda ordem.

Por meio da análise dessas equações pode-se verificar que quando $\phi = 0$ a absorção é total e quando $\phi = 90°$ obtém-se reflexão total, sendo o coeficiente de reflexão da condição de segunda ordem menor nesse intervalo que o de primeira ordem.

A incorporação da condição de contorno de Engquist-Majda à formulação fraca do problema de espalhamento eletromagnético é feita mediante a mudança de coordenadas das equações (3-17) e (3-19) de retangulares em curvilíneas, sendo que essas alterações permitem a utilização de uma fronteira circular ao invés de planar:

$$\frac{\partial u^s}{\partial \rho} = -jk_0 u^s, \tag{3-22}$$

onde $\frac{\partial}{\partial \rho}$ é a derivada parcial radial, k_0 é o número de onda e u^s é o campo espalhado.

A equação (3-22) representa a condição de contorno de EM de primeira ordem em coordenadas curvilíneas. A simplicidade dessa equação é compensada pela má

absorção para ângulos de incidência elevados, sendo necessário que fique distante do objeto para assegurar que a incidência do campo espalhado seja normal [55] [56].

A fim de obter o campo total espalhado, a partir da equação (3-22) deve-se aplicar a relação (3-11) e multiplicar o resultado obtido por α_1:

$$\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial n} = \alpha_1 \frac{\partial u^i}{\partial n} + \alpha_1 j k_0 u^i - \alpha_1 j k_0 u, \tag{3-23}$$

onde $\alpha_1 = \frac{1}{\mu_0}$, $\frac{\partial}{\partial n}$ é a derivada parcial normal sobre a fronteira absorvente, u é o campo total, u^i é o campo incidente e k_0 é número de onda.

A equação (3-23) é a condição de contorno absorvente de EM de primeira ordem que deve ser substituída na formulação fraca (3-5) e, assim, garantir que o campo determinado pela solução da equação integral seja o campo total. A formulação geral dessa condição é feita a partir da equação (3-12):

$$q = \alpha_1 \frac{\partial u^i}{\partial n} + \left[\gamma_1 + \gamma_2 \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right] u^i, \tag{3-24}$$

onde

$$\gamma_1 = \alpha_1 j k_0, \tag{3-25}$$

$$\gamma_2 = 0. \tag{3-26}$$

As equações (3-24) a (3-26) mostram a substituição dos termos q, γ_1 e γ_2 na equação (3-12). A condição de segunda ordem de EM segue o mesmo procedimento adotado para a primeira ordem. Assim, na equação (3-19) deve-se previamente fazer a mudança de coordenadas [52]:

$$\frac{\partial u^s}{\partial \rho} = \left(-j k_0 - \frac{1}{2\rho}\right) u^s + \left(-\frac{j}{2 k_0 \rho^2} + \frac{1}{2 {k_0}^2 \rho^3}\right) \frac{\partial^2 u^s}{\partial \phi^2}, \tag{3-27}$$

onde $\frac{\partial}{\partial \rho}$ é a derivada parcial radial, k_0 é o número de onda, u^s é o campo espalhado, ρ é o raio da fronteira absorvente e $\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$ é a derivada parcial de segunda ordem na direção angular ϕ e ϕ é o ângulo medido a partir do eixo $+x$ no sentido anti-horário.

Substituindo as relações (3-8) a (3-11) obtém-se a equação para a derivada normal do campo total:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial n} = \alpha_1 \frac{\partial u^i}{\partial n} + \left[\alpha_1 \left(jk_0 + \frac{\kappa}{2}\right) + \alpha_1 \left(\frac{j}{2k_0} - \frac{\kappa}{2{k_0}^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right] u^i \\ - \left[\alpha_1 \left(jk_0 + \frac{\kappa}{2}\right) + \alpha_1 \left(\frac{j}{2k_0} - \frac{\kappa}{2{k_0}^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right] u, \end{aligned} \tag{3-28}$$

onde $\frac{\partial}{\partial n}$ é a derivada parcial normal à superfície absorvente, $\alpha_1 = \frac{1}{\mu_0}$, k_0 é o número de onda, κ é a curvatura da fronteira em s e $\frac{\partial^2}{\partial s^2}$ é a derivada parcial de segunda ordem sobre a fronteira absorvente em s.

A equação (3-28), que representa a condição de contorno de segunda ordem de EM, pode ser escrita de forma resumida por meio da equação (3-12):

$$q = \alpha_1 \frac{\partial u^i}{\partial n} + \left[\gamma_1 + \gamma_2 \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right] u^i, \tag{3-29}$$

onde

$$\gamma_1 = \alpha_1 \left(jk_0 + \frac{\kappa}{2}\right), \tag{3-30}$$

$$\gamma_2 = \alpha_1 \left(\frac{j}{2k_0} - \frac{\kappa}{2{k_0}^2}\right). \tag{3-31}$$

As equações (3-29) a (3-31) representam as expressões utilizadas na incorporação da condição de contorno de EM de segunda ordem por meio da equação (3-12).

3.4.2. Condição de Bayliss-Turkel

A condição de contorno absorvente de Bayliss-Turkel foi desenvolvida para fronteiras absorventes curvas e, em sua formulação, utiliza-se a aproximação assintótica do campo espalhado ou irradiado representada pela expansão de Wilcox para a função de onda [22] e [20].

$$u^s = \frac{e^{-jk\rho}}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(\phi)}{\rho^n}, \tag{3-32}$$

onde, $A_n(\phi)$ é uma função independente de ρ e, ϕ e ρ representam, respectivamente, o ângulo e o módulo do u^s em coordenadas polares. Quando a fronteira artificial encontra-se distante do espalhador, essa expansão satisfaz a condição de radiação de Sommerfeld [56] e [57]. A partir da equação (3-32) obtêm-se as condições de contorno absorvente de BT por meio da derivada parcial da expressão em função de ρ:

$$\frac{\partial u^s}{\partial \rho} = \left(-jk - \frac{1}{2\rho}\right) u^s - \frac{e^{-jk\rho}}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nA_n(\phi)}{\rho^{n+1}}, \tag{3-33}$$

onde $\frac{\partial}{\partial \rho}$ é a derivada parcial na direção normal à superfície absorvente.

Por meio da equação (3-33) determinam-se as condições de absorventes de BT com a expansão em série. Para a condição de primeira ordem se deve desconsiderar os termos de ordem $O\left(\rho^{-\frac{5}{2}}\right)$ e superior no encadeamento:

$$\frac{\partial u^s}{\partial \rho} = \left(-jk - \frac{1}{2\rho}\right) u^s, \tag{3-34}$$

onde $\frac{\partial}{\partial \rho}$ é a derivada parcial na direção normal à superfície absorvente, k é o número de onda, ρ o raio sobre a fronteira absorvente e u^s é o campo espalhado.

A equação (3-34) representa a condição de BT de primeira ordem, onde a derivada parcial do campo espalhado está na direção normal à superfície artificial. A

formulação geral da condição de contorno de terceiro tipo (3-12) é obtida por meio das relações (3-8) a (3-11) aplicadas à equação (3-34):

$$\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial n} = \alpha_1 \frac{\partial u^i}{\partial n} + \alpha_1 \left(jk_0 + \frac{\kappa}{2}\right) u^i - \alpha_1 \left(jk_0 + \frac{\kappa}{2}\right) u \tag{3-35}$$

onde $\frac{\partial}{\partial n}$ é a derivada parcial normal à superfície absorvente, $\alpha_1 = \frac{1}{\mu_0}$, u^i é o campo incidente, k_0 é o número de onda, κ é a curvatura da fronteira em s e u é o campo total.

A equação (3-35) representa a condição absorvente de BT de primeira ordem para o campo total, onde os termos q, γ_1 e γ_2 são identificados de tal forma que seja possível o uso da expressão (3-12):

$$q = \alpha_1 \frac{\partial u^i}{\partial n} + \left[\gamma_1 + \gamma_2 \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right] u^i, \tag{3-36}$$

onde

$$\gamma_1 = \alpha_1 \left(jk_0 + \frac{\kappa}{2}\right), \tag{3-37}$$

$$\gamma_2 = 0. \tag{3-38}$$

As expressões (3-36) a (3-38) são os termos referentes à condição de contorno de terceiro tipo (3-12) para a fronteira absorvente de BT de primeira ordem. O contorno absorvente de BT de segunda ordem é obtido de maneira similar a partir da equação (3-33), mas negligenciando os termos de ordem $O\left(\rho^{-\frac{9}{2}}\right)$ e superior:

$$\frac{\partial u^s}{\partial \rho} = \left(-jk - \frac{1}{2\rho} + \frac{1}{8jk\rho^2} - \frac{1}{8k^2\rho^3}\right) u^s + \left(\frac{1}{2jk\rho^2} + \frac{1}{2k^2\rho^3}\right) \frac{\partial^2 u^s}{\partial \phi^2} \tag{3-39}$$

onde $\frac{\partial}{\partial n}$ é a derivada parcial normal à superfície absorvente, k é o número de onda, ρ é o raio da fronteira absorvente, u^s é o campo espalhado e $\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$ é a derivada parcial de segunda ordem na direção angular ϕ.

A equação (3-39) representa a condição de contorno absorvente de BT de segunda ordem, a partir dessa expressão às relações (3-8) a (3-11) devem ser aplicadas e os termos rearranjados de forma a obter a expressão para campo total similar a (3-12):

$$\begin{aligned}\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial n} = \alpha_1 \frac{\partial u^i}{\partial n} + \left[\alpha_1 \left(jk_0 + \frac{\kappa}{2} - \frac{j\kappa^2}{8(j\kappa - k_0)}\right) u^i - \alpha_1 \left(\frac{j}{2(j\kappa - k_0)}\right) \frac{\partial^2 u^i}{\partial s^2}\right] \\ - \left[\alpha_1 \left(jk_0 + \frac{\kappa}{2} - \frac{j\kappa^2}{8(j\kappa - k_0)}\right) u - \alpha_1 \left(\frac{j}{2(j\kappa - k_0)}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right]\end{aligned} \tag{3-40}$$

onde $\frac{\partial}{\partial n}$ é a derivada parcial normal à superfície absorvente, $\alpha_1 = \frac{1}{\mu_0}$, u^i é o campo incidente, k_0 é o número de onda, κ é a curvatura da fronteira em s e u é o campo total.

A equação (3-40) é a expressão da fronteira absorvente de BT de segunda ordem para o campo total [52]. Por meio da análise dessa equação é possível determinar os termos q, γ_1 e γ_2:

$$q = \alpha_1 \frac{\partial u^i}{\partial n} + \left[\gamma_1 + \gamma_2 \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right] u^i, \tag{3-41}$$

onde

$$\gamma_1 = \alpha_1 \left(jk_0 + \frac{\kappa}{2} - \frac{j\kappa^2}{8(j\kappa - k_0)}\right), \tag{3-42}$$

$$\gamma_2 = -\alpha_1 \left(\frac{j}{2(j\kappa - k_0)}\right). \tag{3-43}$$

As equações (3-41) a (3-43) são as expressões para os termos da condição de contorno de terceiro tipo (3-12) na incorporação da fronteira absorvente de BT de segunda ordem [58].

As condições de contorno de EM e de BT são incorporadas à forma fraca do espalhamento eletromagnético com a substituição da derivada normal no segundo termo da equação integral (3-7) pela expressão (3-12). Esse procedimento produz a permuta entre a fronteira γ_s e γ_e e, consequentemente, o domínio de integração do primeiro termo de (3-7) passar a ser representado por $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Omega_0$, onde Ω_0 representa a região do espaço livre compreendida entre as fronteiras do espalhador e absorvente. Assim,

$$\int_{\overline{\Omega}} [\boldsymbol{\nabla} w.(\alpha_1 \boldsymbol{\nabla} u) - k_0^2 \alpha_2 w u]\, d\overline{\Omega} - \int_s w\left[q - \left(\gamma_1 + \gamma_2 \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) u\right] ds = 0, \tag{3-44}$$

onde $\overline{\Omega}$ representa a união dos domínios do espalhador e do espaço livre e $\frac{\partial^2}{\partial s^2}$ é a derivada parcial de segunda ordem sobre a fronteira absorvente em s.

Nessa substituição, a equação (3-44) apresenta os termos q, γ_1 e γ_2 que são substituídos de forma conveniente na incorporação das condições de contorno, de acordo com o tipo e ordem requeridos. As fronteiras absorventes de EM e BT, desenvolvidas ao longo desse capítulo, são sintetizadas na Tabela 3-1 que figura as expressões assumidas por cada um desses termos.

Engquist-Majda		
Primeira Ordem		
$q = \alpha_1 \frac{\partial u^i}{\partial n} + [\gamma_1 + \gamma_2] u^i$	$\gamma_1 = \alpha_1 j k_0$	$\gamma_2 = 0$
Segunda Ordem		
$q = \alpha_1 \frac{\partial u^i}{\partial n} + [\gamma_1 + \gamma_2] u^i$	$\gamma_1 = \alpha_1 \left(j k_0 + \frac{\kappa}{2}\right)$	$\gamma_2 = -\alpha_1 \left(\frac{\kappa}{2k_0^2} - \frac{j}{2k_0}\right) \frac{\partial^2}{\partial s^2}$
Bayliss-Turkel		
Primeira Ordem		
$q = \alpha_1 \frac{\partial u^i}{\partial n} + [\gamma_1 + \gamma_2] u^i$	$\gamma_1 = \alpha_1 \left(j k_0 + \frac{\kappa}{2}\right)$	$\gamma_2 = 0$
Segunda Ordem		
$q = \alpha_1 \frac{\partial u^i}{\partial n} + [\gamma_1 + \gamma_2] u^i$	$\gamma_1 = \alpha_1 \left(j k_0 + \frac{\kappa}{2} - \frac{j\kappa^2}{8(j\kappa - k_0)}\right)$	$\gamma_2 = -\alpha_1 \left(\frac{\kappa}{2k_0^2} - \frac{j}{2k_0}\right) \frac{\partial^2}{\partial s^2}$

Tabela 3-1 – Resumo das condições de contorno de EM e BT.

Como q apresenta termos semelhantes à γ_1e γ_2 diferenciando somente pelo tipo de campo envolvido, ele pode ser escrito em função desses últimos para as condições de BT e EM. A partir das formulações para as fronteiras absorventes deve-se estabelecer a

escolha das funções de aproximação para o campo u e das funções de ponderação w, de tal forma que seja possível obter a solução da equação integral (3-44).

3.5. Método de Galerkin

No método de Galerkin, a solução aproximada u^* deve tornar o erro entre a solução analítica e aproximada o menor possível e pode ser escrito como:

$$u^* = u = \sum_{i=1}^{n} N_i d_i = \{d_i\}^T \{N\}, \tag{3-45}$$

onde $u^* = u$ representa a função de aproximação, n é a quantidade de funções de expansão N_i escolhidas, d_i são os coeficientes a serem determinados, $\{\cdot\}$ é um vetor coluna e T representa a operação de transposição.

A função de aproximação representada pela equação (3-45) deve satisfazer a equação (3-44) mediante a sua substituição:

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\Omega}^e} \left[\boldsymbol{\nabla} w_i . \left(\alpha_1 \boldsymbol{\nabla} \sum_{i=1}^{n} N_i d_i \right) - k_0^2 \alpha_2 w \sum_{i=1}^{n} N_i d_i \right] d\overline{\Omega}^e \\ - \int_{(\gamma_e)^e} w_i \left[q - \left(\gamma_1 + \gamma_2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) \sum_{i=1}^{n} N_i d_i \right] d(\gamma_e)^e = 0, \end{aligned} \tag{3-46}$$

onde $\overline{\Omega}^e$ representa o domínio de cada elemento e $(\gamma_e)^e$ representa cada elemento linear unidimensional sobre a fronteira absorvente.

Na equação (3-46) o resíduo, devido à aproximação, é obtido por meio da integração em todo o domínio. Como o erro pode assumir valores positivos e negativos e, consequentemente, serem cancelados na integração torna-se necessário as funções de ponderação (w_i) com $i = 1, 2, 3, 4, \cdots, n$:

$$w = \sum_{j=1}^{n} N_j c_j \,, \tag{3-47}$$

onde c_j é uma constante arbitrária não nula.

A equação (3-47) representa a função de ponderação que no caso do método de Galerkin é a mesma que a função base. Ela deve ser substituída na equação (3-46):

$$\begin{aligned}\int_{\overline{\Omega}^e} \left[\boldsymbol{\nabla} \sum_{j=1}^{n} N_j c_j \,.\left(\alpha_1 \boldsymbol{\nabla} \sum_{i=1}^{n} N_i d_i \right) - k_0^2 \alpha_2 \sum_{j=1}^{n} N_j c_j \,.\sum_{i=1}^{n} N_i d_i \right] d\overline{\Omega}^e \\ - \int_{(\gamma_e)^e} \sum_{j=1}^{n} N_j c_j \left[q - \left(\gamma_1 + \gamma_2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) \sum_{i=1}^{n} N_i d_i \right] d(\gamma_e)^e = 0.\end{aligned} \tag{3-48}$$

Na equação (3-48) o termo c_j pode ser colocado em evidência:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} c_j \left[\int_{\overline{\Omega}^e} \left[\boldsymbol{\nabla} N_j . \left(\alpha_1 \boldsymbol{\nabla} \sum_{i=1}^{n} N_i d_i \right) - k_0^2 \alpha_2 N_j \sum_{i=1}^{n} N_i d_i \right] d\overline{\Omega}^e \right. \\ \left. - \int_{(\gamma_e)^e} N_j \left[q - \left(\gamma_1 + \gamma_2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) \sum_{i=1}^{n} N_i d_i \right] d(\gamma_e)^e \right] = 0.\end{aligned} \tag{3-49}$$

Na equação (3-49) c_j pode assumir qualquer valor, então, o argumento deve ser nulo. Assim,

$$\begin{aligned}\sum_{e=1}^{n_e} \left[\sum_{j=1}^{n} c_j \left[\int_{\overline{\Omega}^e} \left[\boldsymbol{\nabla} N_j . \left(\alpha_1 \boldsymbol{\nabla} \sum_{i=1}^{n} N_i d_i \right) - k_0^2 \alpha_2 N_j \sum_{i=1}^{n} N_i d_i \right] d\overline{\Omega}^e \right. \right. \\ \left. \left. - \int_{(\gamma_e)^e} N_j \left[q - \left(\gamma_1 + \gamma_2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) \sum_{i=1}^{n} N_i d_i \right] d(\gamma_e)^e \right] \right] = 0,\end{aligned} \tag{3-50}$$

onde n_e é a quantidade de elementos lineares de primeira ordem gerados pela discretização do domínio $\overline{\Omega}$.

Na equação (3-50) o termo integral com a derivada parcial de segunda ordem deve ser expandido por meio da técnica de integração por partes conforme demosntrado no Apêndice E. Essa representa a substituição das funções de aproximação e de ponderação por somatórios de funções escolhidas e com coeficientes a serem determinados em cada nó do domínio discretizado. Nessa técnica a discretização das variáveis físicas e geométricas deve satisfazer as condições de contorno em cada elemento separadamente [59]. Por meio da escolha dessas funções, elas são substituídas na forma fraca para o espalhamento eletromagnético modelado pela equação (3-44). Com esse procedimento, domínio é subdividido em subdomínios, que são conhecidos como elementos, denominados $\overline{\Omega}^e$ e $(\gamma_e)^e$ com $(e = 1, 2, 3, 4, 5, \cdots, n_e)$, sendo n_e a quantidade total subdomínios [20].

A substituição das funções de interpolação e da função peso resulta em um conjunto de equações algébricas que devem ser resolvidas para os n coeficientes desconhecidos na função base [60]. Por meio da manipulação algébrica da equação (3-50) pode-se representá-la na forma matricial:

$$[\mathrm{K}]\{\mathrm{d}\} = \{F\}. \tag{3-51}$$

A equação (3-51) representa o sistema de equações lineares resultante da aplicação do Método de Galerkin, onde matriz [K] é quadrada de ordem igual ao total de nós no domínio, o vetor {d} representa as incógnitas (campo) em cada nó do domínio discretizado e o vetor $\{F\}$ os valores conhecidos. Como [K] é esparsa, o custo computacional pode ser minimizado com o uso de técnicas numéricas para a solução de sistema matricial esparso [59]. A aplicação completa do método encontra-se no Apêndice D.

3.6. Sumário

A formulação matemática para a solução do espalhamento eletromagnético via Método dos Elementos Finitos, foi desenvolvida ao longo desse capítulo. De acordo com o exposto, esse procedimento numérico é inviável devido ao problema proposto ser aberto, pois torna necessário discretizar todo o espaço livre para que a condição de

radiação de Sommerfeld seja satisfeita. Essa característica implica em elevado custo computacional e, assim, ocorre à necessidade da incorporação de uma fronteira artificial para limitar o domínio computacional. As condições de contorno absorventes desenvolvidas foram as de Engquist-Majda e de Bayliss-Turkel de primeira e segunda ordem, que foram aplicadas à forma fraca (3-7) modificando-a na equação integral (3-44). A partir dessa equação, por meio do Método de Galerkin, chega-se a um sistema de equações lineares onde os coeficientes a serem determinados representam o campo em cada nó do domínio. O modelo matemático apresentado pode ser aplicado para qualquer secção transversal, mas, neste trabalho, a validação da formulação é feita por meio de sua aplicação a um cilindro dielétrico infinito. A escolha dessa geometria permite a comparação entre os resultados analítico e numérico, pois sua solução analítica é possível e encontra-se disponível na literatura.

Capítulo 4

Resultados

Neste capítulo a formulação do problema de espalhamento eletromagnético desenvolvido ao longo da pesquisa para os campos $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ é validada para o campo elétrico com a análise por meio de um cilindro dielétrico infinito de secção transversal circular. Nas simulações são analisadas as condições de EM e BT de primeira e segunda ordem, feita a comparação com a solução analítica e os erros percentuais médios e absolutos são determinados em cada caso. Uma análise adicional é feita para o comportamento do campo devido à posição da fronteira artificial e da densidade da malha.

4.1. Aspectos para análise

A avaliação da formulação numérica para a solução do problema de Espalhamento Eletromagnético Bidimensional é realizada por meio da comparação entre as soluções numérica e analítica sobre a superfície do espalhador. A comparação entre os resultados é realizada empregando as seguintes definições de erro:

$$\epsilon_{\mathrm{a}} = |E_e - E_a|, \tag{4-1}$$

$$\epsilon_{\mathrm{ma}} = \frac{\sum_{p=1}^{n} |E_e - E_a|}{n}, \tag{4-2}$$

$$\epsilon_{\mathrm{p}} = \left|\frac{E_e - E_a}{E_e}\right| * 100\%, \tag{4-3}$$

$$\epsilon_{\mathrm{mp}} = \sum_{p=1}^{n} \left|\frac{E_e - E_a}{E_e}\right| * 100\%, \tag{4-4}$$

onde ϵ_{a} é o erro absoluto, ϵ_{ma} é o erro médio absoluto, ϵ_{p} é o erro relativo, ϵ_{mp} é o erro relativo médio, E_e é o campo elétrico analítico, E_a é o campo elétrico aproximado numericamente e n é o total de nós analisados.

A validação da formulação é feita por meio da solução numérica de um espalhador dielétrico cilíndrico de seção transversal circular. A escolha dessa classe geométrica se deve a sua solução analítica estar disponível na literatura [1]. Ademais, na aplicação do FEM-ABC deve-se discretizar o domínio do problema, sendo neste trabalho esse processo feito por meio do programa GMSH [61] e [62]. A precisão do método está relacionada com a quantidade de nós e ao tamanho e tipo dos elementos utilizados no processo de discretização. Assim, torna-se necessário estabelecer um parâmetro para verificar a resolução da malha, neste trabalho é adotada a seguinte relação:

$$r = \frac{\lambda}{h}, \tag{4-5}$$

onde r é a resolução da malha, λ é o comprimento de onda no meio e h é o tamanho máximo dos elementos no meio.

A discretização do domínio para a aplicação do FEM-ABC é feita por meio de elementos lineares unidimensionais sobre a fronteira absorvente e elementos triangulares lineares bidimensionais sobre o domínio, no Apêndice E encontram-se os aspectos de integração utilizados e as funções de forma para cada tipo de elemento. A Figura 4-1a) representa o objeto bidimensional com os eixos coordenados x e y, onde o ângulo do ponto de observação ρ é medido a partir do eixo x no sentido anti-horário. E, na Figura 4-1b) apresenta a discretização do domínio, onde o cilindro dielétrico é representado pela circunferência interna, fronteira γ_s, e a fronteira ABC é representada pela circunferência externa γ_e.

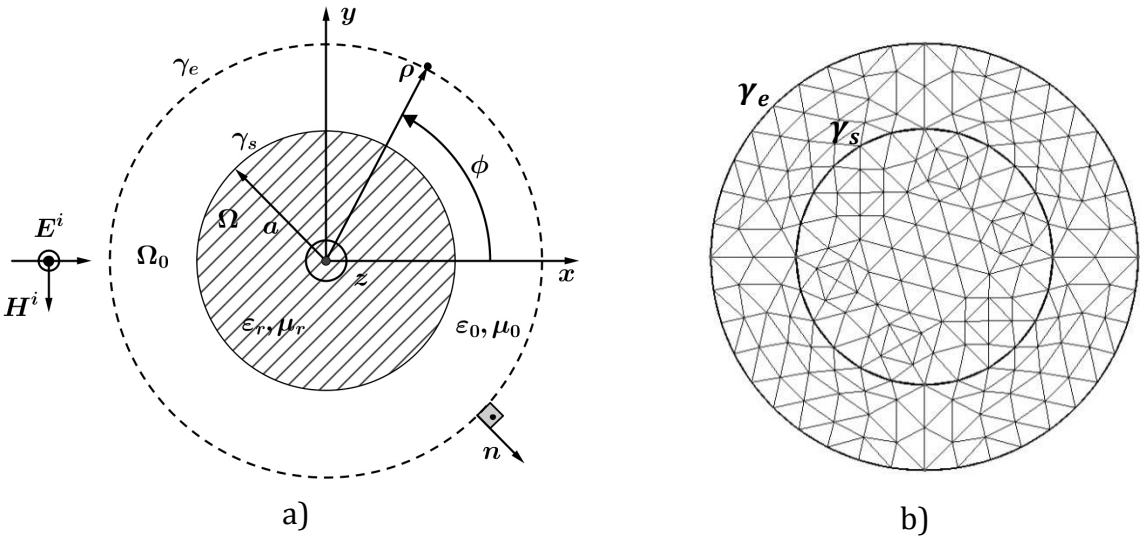


Figura 4-1 – Malha gerada com o uso do GMSH

Por fim, as informações da malha gerada pelo GMSH são processadas e os resultados obtidos são armazenados em um arquivo de dados padrão e o desenvolvimento computacional é feito com o uso do MatLab.

4.2. Análise do espalhamento bidimensional

Nessa seção são apresentados os resultados para uma onda incidente normal ao eixo z e $\phi = 180°$ a partir do eixo $+x$, o espalhador possui raio de $0{,}3\lambda_0$, para uma fronteira absorvente com raio de $1{,}5\lambda_0$, $\varepsilon_r = 3$ e $\mu_r = 1$, sendo no espaço livre $\lambda_0 = 1m$ e no interior do espalhador $\lambda_1 = 0{,}1838m$. Assim, a malha gerada é constituída por 3827 nós e 7752 elementos para $r = 10$.

O resultado inicial apresentado na Figura 4-2 é referente à condição absorvente de Engquist-Majda de primeira e segunda ordem, onde os resultados analítico e numérico são comparados com a solução analítica.

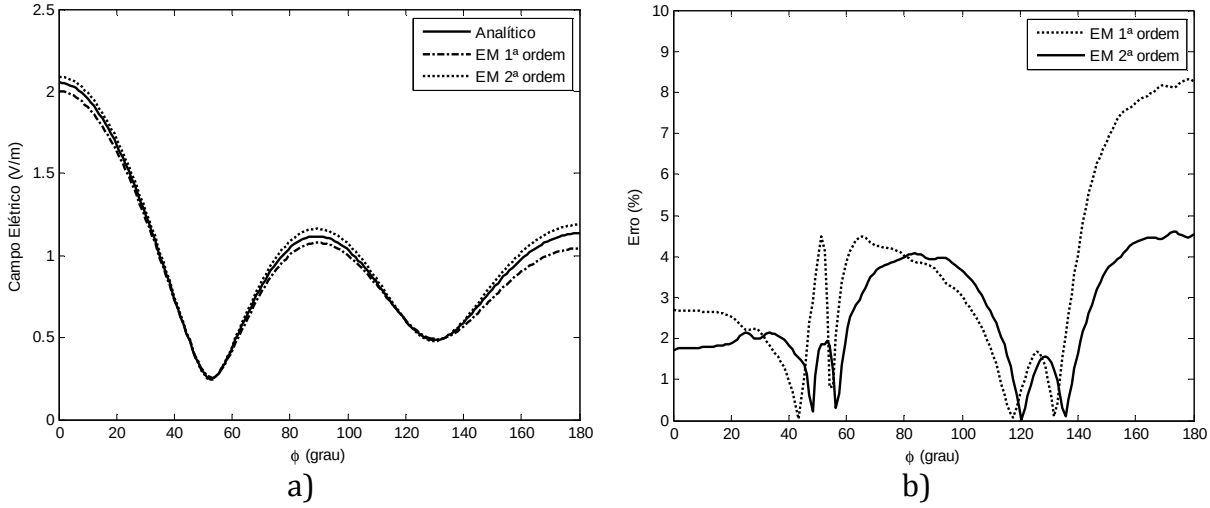


Figura 4-2 - FEM-ABC de Engquist-Majda de primeira e segunda ordem a) Campo Elétrico total espalhado e b) erro relativo.

Na Figura 4-2a) as duas formulações acompanham a solução analítica e o erro médio percentual é de 3,62% e de 2,65% para EM de primeira e segunda ordem, respectivamente. Por meio da análise da Figura 4-2b) verifica-se que o erro percentual máximo para a formulação de primeira ordem é de 8,32% ocorrido no ângulo de 177,99° e o para a de segunda ordem o valor máximo é de 4,60% no ângulo de 172,96°.

Na Figura 4-3 é representado o resultado referente à condição absorvente de Bayliss-Turkel de primeira e segunda ordem e os erros percentuais absolutos para as formulações.

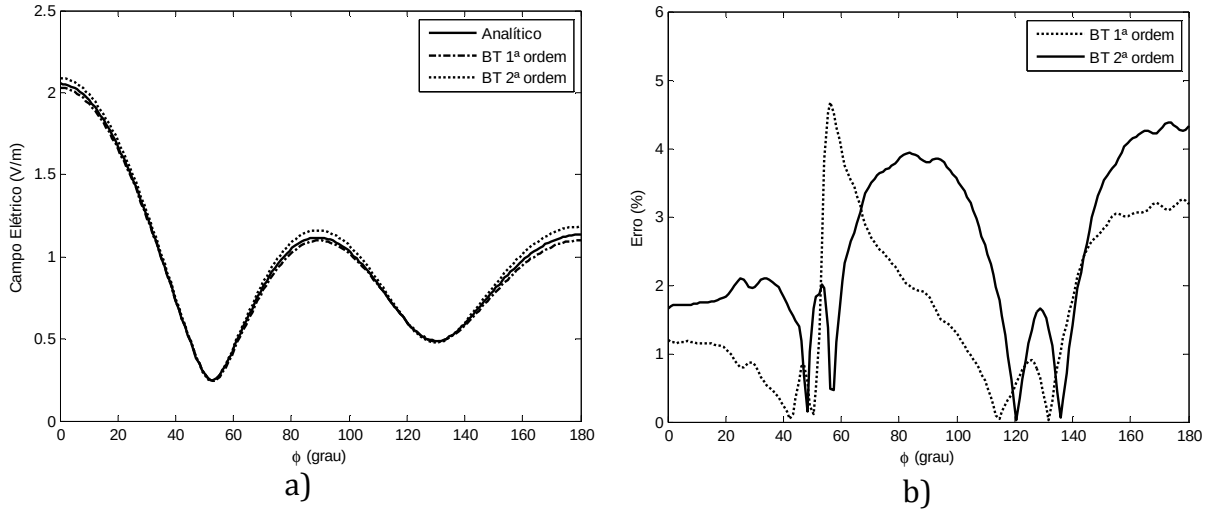


Figura 4-3 - FEM-ABC de Bayliss-Turkel de primeira e segunda ordem a) Campo Elétrico total espalhado e b) erro relativo.

A Figura 4-3a) representa o campo total espalhado analítico e numérico com boa aproximação à solução analítica. O erro médio absoluto é de 1,73% e 2,55% para BT de primeira e segunda ordem, respectivamente. De acordo com a Figura 4-3b) o erro absoluto máximo observado para a condição de primeira ordem é de 4,67% para o ângulo de 56,31° e no caso da formulação de segunda ordem de 4,38% no ângulo de 172,96°.

A eficiência das formulações de EM de BT de primeira ordem são comparadas a seguir na Figura 4-4 que apresenta o erro relativo das mesmas.

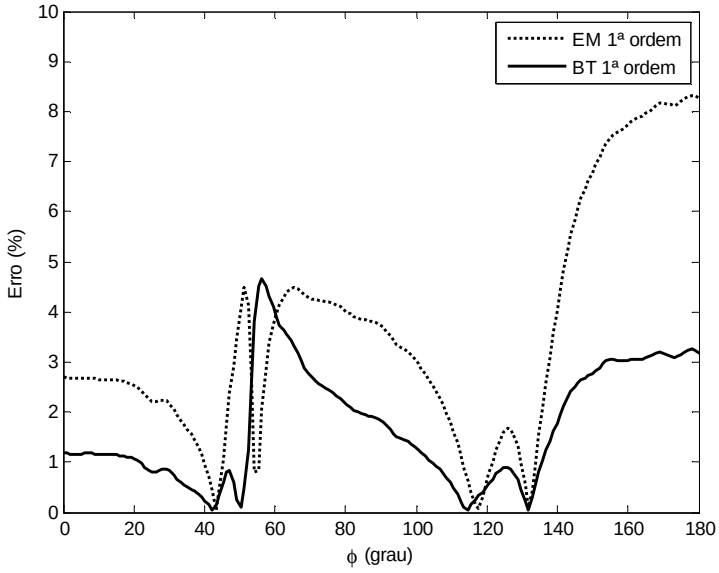


Figura 4-4 – Erros percentuais absolutos para as formulações de EM e BT de primeira ordem.

Por meio da análise da Figura 4-4 verifica-se que os erros percentuais absolutos apresentam comportamento similar para as formulações de EM e BT de primeira ordem, com valor máximo absoluto de 8,32% para o ângulo de 177,99° e 4,67% no ângulo 56,31° e erro mínimo absoluto de 0,053% para o ângulo de 43,24° e de 0,032% no ângulo de 131,73°, respectivamente. Nessa figura, o erro da condição absorvente de BT apresenta-se inferior que a de EM para a maioria dos pontos do intervalo. Observa-se que o comportamento das duas formulações é similar e apresentam pequenas variações angulares para os valores máximos e mínimos.

A análise final das formulações de EM e BT é feita por meio da comparação dos erros percentuais absolutos para as condições de segunda ordem na Figura 4-5.

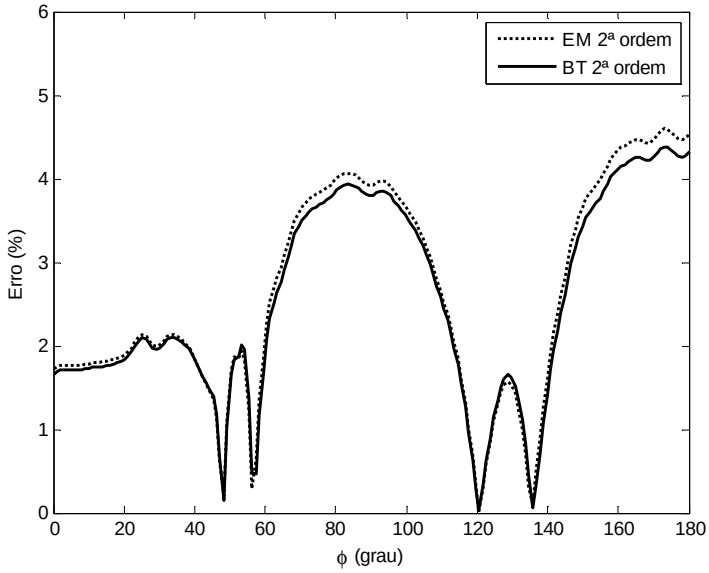


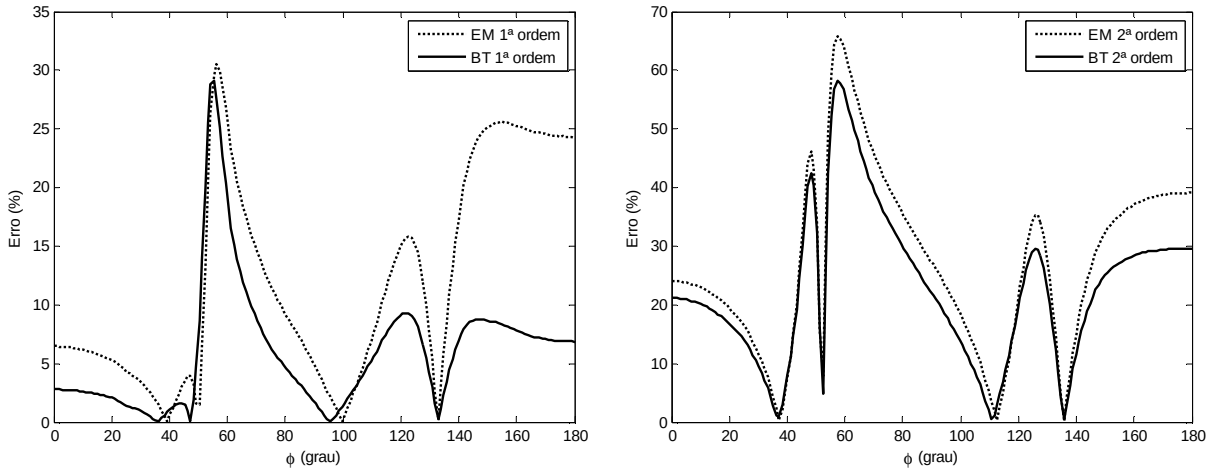
Figura 4-5 – Erros percentuais absolutos para as formulações de EM e BT de segunda ordem.

Na Figura 4-5 os erros percentuais absolutos para as condições de EM e BT apresentam comportamento similar, com valores máximos de 4,60% e 4,38% para o ângulo de 172,96°, e mínimos de 0,013% e 0,026% para o ângulo de 120,67°, respectivamente. Nessa análise o erro médio percentual é de 2,65% para a condição de EM e de 2,55% para a de BT. As duas condições absorventes apresentam valores pontuais muito próximos, sendo a de BT ligeiramente inferior que a de EM.

4.3. Análise devido à variação da distância da fronteira artificial.

A distância entre a fronteira absorvente e o objeto é fator determinante na precisão do FEM-ABC. Nessa secção é feita a análise do erro quando a fronteira artificial é afastada, a densidade da malha do espalhador é mantida constante com $r = 10$ para o espaço livre e o interior do espalhador. Ademais, o objeto possui raio de $0{,}3\lambda_0$, $\varepsilon_r = 3$ e $\mu_r = 1$.

A Figura 4-6 apresenta os erros devido à fronteira artificial localizada a $0{,}5\lambda_0$ do centro do espalhador, e a malha com 1352 nós e 2802 elementos.

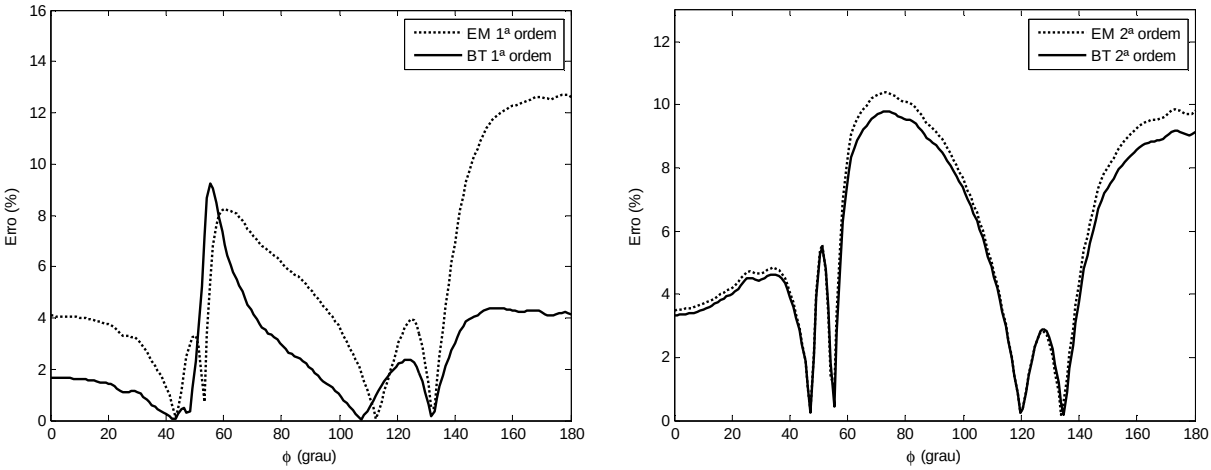


a) b)

Figura 4-6 – Erros percentuais absolutos de EM e BT devido à fronteira absorvente com raio de $0{,}5\lambda_0$ a) primeira ordem e b) segunda ordem.

Por meio da análise da Figura 4-6 verifica-se que os dois tipos de fronteiras absorventes, de mesma ordem, apresentam comportamento similar, sendo o erro absoluto percentual de EM superior ao de BT na maioria dos pontos dentro da faixa de variação angular. Observa-se ainda, que o erro máximo percentual de primeira ordem é de 30,50% e o de segunda ordem de 65,82%, sendo esses valores muito elevados para serem aceitos em aplicações na engenharia.

Os resultados na Figura 4-7 são devidos à fronteira artificial com raio de $1{,}0\lambda_0$ e malha com 2371 nós e 4840 elementos.

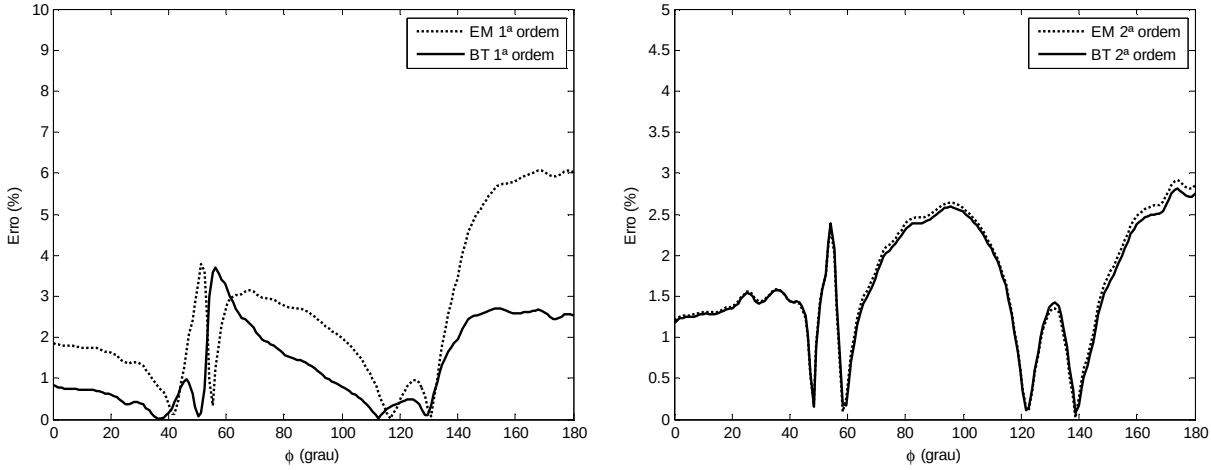


a) b)

Figura 4-7 - Erros percentuais absolutos de EM e BT devido à fronteira absorvente com raio de $1{,}0\lambda_0$ a) primeira ordem e b) segunda ordem.

Na Figura 4-7 a inserção do contorno absorvente com raio de $1{,}0\lambda_0$ torna os erros percentuais absolutos máximos de 12,71% e 10,39% para as fronteiras artificiais de primeira e segunda ordem, respectivamente. O distanciamento da fronteira acarreta em diminuição dos erros.

Como análise final, a Figura 4-8 apresenta os erros percentuais absolutos para o contorno absorvente com raio de $2{,}0\lambda_0$ e malha com 5799 nós e 11696 elementos.



a) b)

Figura 4-8 - Erros percentuais absolutos de EM e BT devido à fronteira absorvente com raio de $2{,}0\lambda_0$ a) primeira ordem e b) segunda ordem.

Os resultados da Figura 4-8a) apresentam erros percentuais absolutos máximos, para as fronteira de primeira e segunda ordem, de 6,07% e 2,81%, respectivamente. Na Figura 4-8b), as condições de EM e BT de segunda ordem, apresentam comportamento coincidente com alguns intervalos onde a de EM torna-se superior a e BT.

Pela análise das Figuras 4-6 a 4-8, verifica-se que a expansão do raio da fronteira absorvente aumenta a precisão dos resultados, mas esse procedimento compromete o custo computacional tornando-o mais elevado. Essa característica é devida à maior quantidade de elementos na região do espaço livre considerando sempre a mesma resolução da malha. A Tabela 4-1 apresenta os erros percentuais médios para cada tipo e ordem da condição de contorno absorvente para as diferentes posições de fronteira investigadas.

Fronteira	Erro médio de Engquist-Majda		Erro médio de Bayliss-Turkel	
	1ª ordem	2ª ordem	1ª ordem	2ª ordem
0,5 λ_0	12,08%	27,32%	5,97%	22,75%
1,0 λ_0	5,65%	6,10%	2,63%	5,75%
1,5 λ_0	3,62%	2,65%	1,73%	2,55%
2,0 λ_0	2,63%	1,70%	1,37%	1,66%

Tabela 4-1 – Erros percentuais médios das condições de contorno de EM e BT de primeira e segunda ordem.

Na Tabela 4-1 o erro médio percentual apresenta variações distintas para as fronteiras do tipo EM e BT de primeira e segunda ordem. A condição de contorno absorvente de Engquist-Majda apresenta erro médio percentual menor para a primeira ordem quando o raio é de $0{,}5\lambda_0$ e $1{,}0\lambda_0$. Essa característica é invertida, ou seja, o de segunda ordem torna-se menor, para os raios de $1{,}5\lambda_0$ e $2{,}0\lambda_0$. Para as fronteiras do tipo Bayliss-Turkel o erro médio relativo de primeira ordem é sempre menor que o de segunda ordem, mas a diferença torna-se menor com o aumento do raio da fronteira absorvente. Apesar dos erros médio relativos, considerando a fronteira absorvente de Bayliss-Turkel, terem sido menor para a condição de primeira ordem, os erro máximos observados para a fronteira com raios de $1{,}5\lambda_0$ e $2{,}0\lambda_0$, quando condição de segunda ordem é empregada, são menores do que aqueles observados para a condição de primeira ordem.

Pela análise dos erros devidos ao distanciamento do contorno absorvente é possível verificar que o aumento da distância entre a fronteira artificial e o espalhador melhora a aproximação ao resultado analítico. Essa análise também pode ser verificada com os resultados para o campo elétrico relacionados no Apêndice F. Em todos os casos a densidade da malha gerada é mantida constante e proporcional ao raio da fronteira artificial. Assim, quanto maior a distância da fronteira artificial do objeto melhor é a aproximação, mas o ganho na aproximação implica na elevação do custo computacional devido ao aumento da quantidade de elementos na malha. Os campos gerados nessas simulações encontram-se disponíveis no Apêndice F.

4.4. Análise devido à variação da resolução da malha

A fim de verificar a influência da densidade da malha no resultado dos campos é feita a análise para a condição de contorno absorvente de Bayliss-Turkel de segunda ordem. O objeto espalhador é um cilindro circular dielétrico de raio $0{,}3\lambda_0$, infinito ao longo do eixo z, $\varepsilon_r = 3$ e $\mu_r = 1$ e a fronteira artificial com raio de $1{,}5\lambda_0$. A resolução da malha é variada e as informações encontram-se sintetizadas na Tabela 4-2.

Resolução da malha (r)	Total de nós	Total de elementos	Elementos no objeto	Elementos no espaço livre
1	37	64	16	48
2	156	294	92	202
3	343	656	170	486
4	605	1172	318	854
5	910	1774	482	1292
6	1411	2764	776	1988

Tabela 4-2 – Informações sobre a densidade das malhas para objeto de raio de $0{,}3\lambda_0$.

A Figura 4-9 apresenta os resultados da aplicação do FEM-ABC de segunda ordem de Bayliss-Turkel para as malhas da Tabela 4-2 e, também, a resultado analítico.

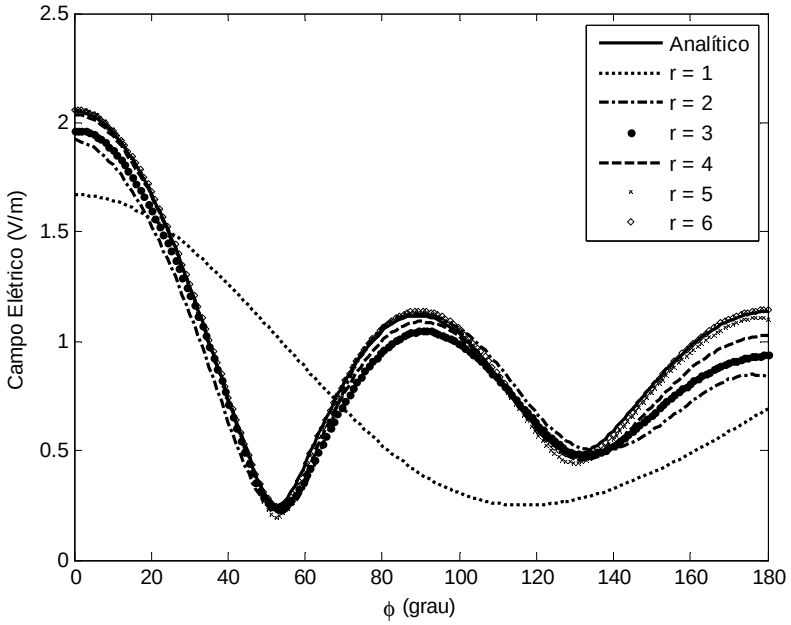


Figura 4-9 – Resultado para variação da resolução da malha

A Figura 4-9 mostra que o campo total espalhado, por meio do FEM-ABC de BT, aproxima-se do resultado analítico com o aumento da resolução da malha. Ademais, segundo a teoria de amostragem de Nyquist, o número de amostras deve ser superior ao dobro da frequência do sinal amostrado, assim, verifica-se que para $r \geq 2$ o resultado numérico acompanha a solução analítica para o problema [63].

A Tabela 4-3 relaciona os erros absolutos máximos e os erros médios absolutos para a variação da resolução da malha.

Resolução da malha (r)	**Erro absoluto máximo**	**Erro médio absoluto**
1	0,7911	0,4241
2	0,3001	0,1074
3	0,1998	0,0745
4	0,1098	0,0395
5	0,0506	0,0192
6	0,0239	0,0192

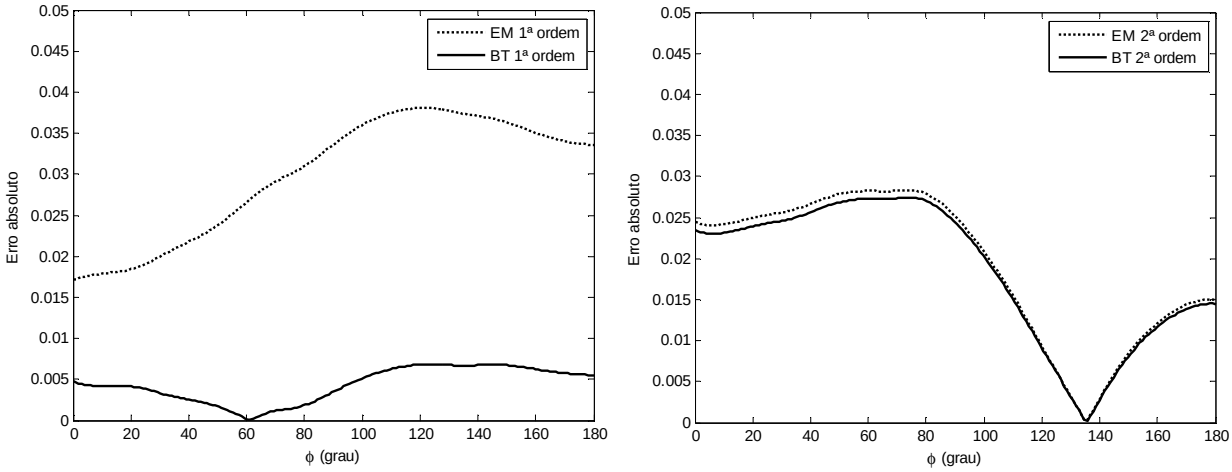
Tabela 4-3 – Informações sobre a densidade das malhas para objeto de raio de $0{,}3\lambda_0$.

Por meio dos resultados relacionados na Tabela 4-3, verifica-se que com o aumento da resolução da malha ocorre diminuição dos erros. O aumento da densidade da malha acarreta na elevação do custo computacional, e para $r = 5$ e $r = 6$ o erro absoluto máximo encontra-se na segunda casa decimal e o erro médio possui o mesmo valor para as duas resoluções. O ganho na precisão dos resultados devido ao aumento da densidade da malha não é significativo nesse, assim, a resolução da malha deve ser controlada para que seja equalizada à precisão requerida para o problema de espalhamento eletromagnético.

4.5. Análise devido à variação do raio do espalhador

Nesta análise, os resultados são apresentados devido à variação do raio do cilindro por meio do cálculo do erro absoluto e médio, a fronteira absorvente é mantida constante a distancia de $1{,}2\lambda_0$ de acordo com os resultados obtidos na seção 4.1. A onda incidente é normal ao eixo z e $\phi = 180°$ a partir do eixo $+x$, $\varepsilon_r = 3$, $\mu_r = 1$ e $r = 10$.

A Figura 4-10 mostra os erros absolutos para as condições de EM e BT de primeira e segunda ordem. Nela, o cilindro possui raio de $0{,}1\lambda_0$ e a fronteira absorvente com raio de $1{,}3\lambda_0$. Malha gerada possui 1825 nós e 3680 elementos.

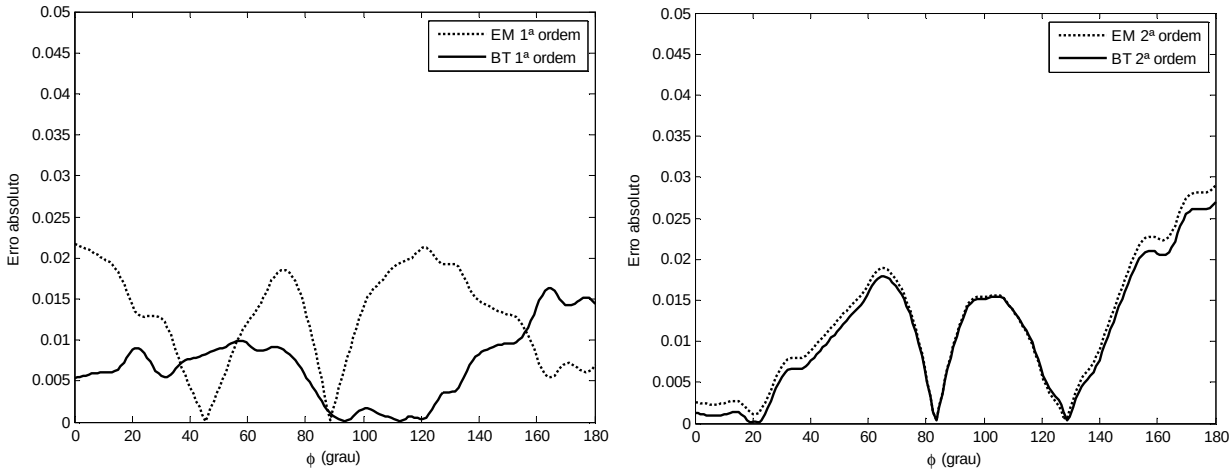


a) b)

Figura 4-10 - Erros absolutos de EM e BT devido ao cilindro com raio de $0{,}1\lambda_0$ a) primeira ordem e b) segunda ordem.

Na Figura 4-10a) o erro absoluto de EM de primeira ordem apresenta valores superiores que a de BT em todo o intervalo, sendo os valores máximos de 0,0381 e 0,0069, respectivamente. Os erros médios absolutos são de 0,0299 para EM e de 0,0043 para BT. Para as condições de segunda ordem, Figura 4-10b), os erros absolutos apresentam comportamentos semelhantes, sendo o de EM superior a de BT entre na maioria dos pontos, e os valores máximos observados são de 0,0283 para EM e de 0,0274 para BT. Ademais, os erros médios absolutos são de 0,0191 para EM e de 0,0185 para BT.

Os resultados mostrados na Figura 4-11 são referentes às condições de EM e BT de primeira e segunda ordem, para o cilindro com raio de $0{,}2\lambda_0$, fronteira absorvente com raio de $1{,}4\lambda_0$ e malha com 2749 nós e 5564 elementos.

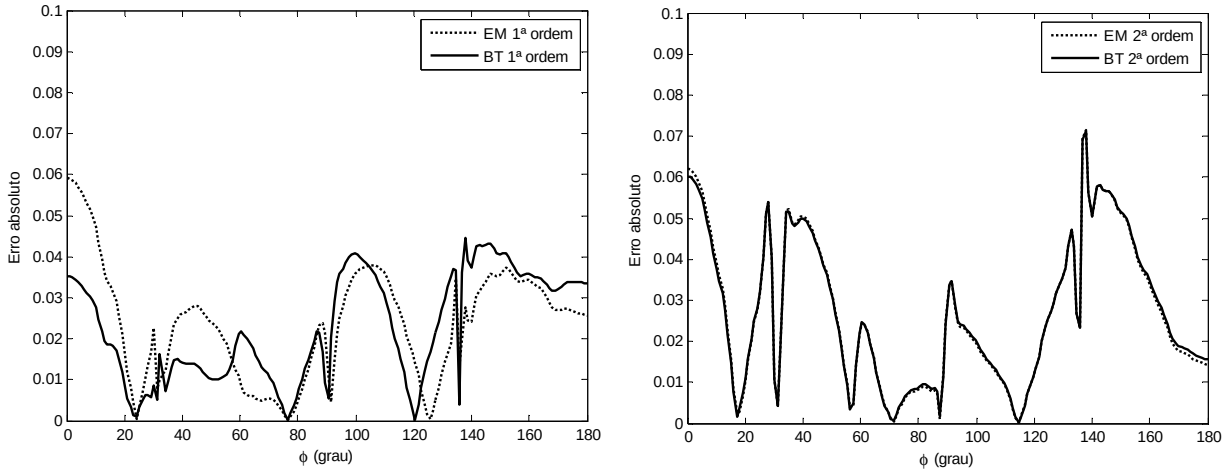


a) b)

Figura 4-11 - Erros percentuais absolutos de EM e BT devido ao cilindro com raio de $0{,}2\lambda_0$ a) primeira ordem e b) segunda ordem.

Na Figura 4-11a) o erro absoluto da condição de EM apresenta-se superior a de BT na maioria dos pontos, com valores máximos de 0,0217 para EM e de 0,0163 para BT, e os erros médios absolutos são de 0,0128 para EM e de 0,0069 para BT. A análise das condições de segunda ordem é feita por meio da Figura 4.11b) que mostra os erros absolutos de EM e BT. Verifica-se que os erros apresentam comportamentos semelhantes, sendo o de EM ligeiramente superior ao de BT e apresentando pontos com maior aproximação. Os erros máximos observados são de 0,0290 para EM e de 0,0270 para BT e os erros médios de 0,0119 para EM e de 0,0109 para BT.

Na Figura 4-12 os erros absolutos percentuais são mostrados para as condições de EM e BT de primeira e segunda ordem, para o cilindro com raio de $0{,}6\lambda_0$, fronteira absorvente com raio de $1{,}8\lambda_0$ e malha com 4175 nós e 8488 elementos.



a) b)

Figura 4-12 - Erros percentuais absolutos de EM e BT devido ao cilindro com raio de $0{,}6\lambda_0$ a) primeira ordem e b) segunda ordem.

Por meio da análise da Figura 4-12a), os erros absolutos para as fronteiras apresentam valores máximos de 0,0593 para EM e de 0,0446 para BT, e erros médios absolutos de 0,0237 e de 0,0228, respectivamente. E, os erros absolutos de segunda ordem, mostrados na Figura 4.12b), apresentam valores máximos de 0,0714 para EM e de 0,0712 para BT, e os erros médios absolutos de 0,0271 para as duas fronteiras.

Na Tabela 4-4 os erros absolutos médios estão sintetizados para cada tipo e ordem de fronteira.

Raio do espalhador	**Raio da fronteira artificial**	**Erro médio de Engquist-Maja**		**Erro médio de Bayliss-Turkel**	
		1ª ordem	**2ª ordem**	**1ª ordem**	**2ª ordem**
$0{,}1\ \lambda_0$	$1{,}3\ \lambda_0$	0,0299	0,0191	0,0043	0,0185
$0{,}2\ \lambda_0$	$1{,}4\ \lambda_0$	0,0128	0,0119	0,0069	0,0109
$0{,}6\ \lambda_0$	$1{,}8\ \lambda_0$	0,0237	0,0271	0,0228	0,0271

Tabela 4-4 – Erros absolutos médios para os espalhadores de $0{,}1\lambda_0$, $0{,}2\lambda_0$ e $0{,}6\lambda_0$.

Por meio da Tabela 4-4, verifica-se que em todos os casos o erro absoluto médio encontra-se na segunda casa decimal.

Com os resultados desta seção é possível verificar a influência da dimensão do espalhador no comportamento do erro absoluto. Observa-se que quando o raio do cilindro é muito menor que o comprimento de onda, o erro apresenta poucas oscilações,

que aumentam com a extensão do raio do objeto. O comportamento do campo elétrico para as dimensões dos espalhadores nesta seção encontram-se relacionados no Apêndice F.

Capítulo 5

Conclusão

Neste trabalho foi desenvolvida a formulação do Método dos Elementos Finitos com o uso de ABC's de primeira e segunda ordem de Engquist-Majda e Bayliss-Tukel. O problema formulado foi o espalhamento eletromagnético bidimensional produzido por um objeto infinito de secção transversal arbitrária. A fim de validar a formulação, a solução numérica foi aplicada em um cilindro dielétrico infinito, sem perdas e com secção transversal circular para que fosse possível comparar os resultados com a solução analítica disponível na literatura. Assim, além do desenvolvimento computacional para o campo elétrico total espalhado pelo uso do FEM-ABC foi necessário implementar a solução analítica.

A análise inicial foi feita para um cilindro de raio $0{,}3\lambda_0$, fronteira absorvente com raio de $1{,}5\lambda_0$ e malha com $r = 10$. Os resultados para condições absorventes de primeira e segunda ordem foram comparados considerando o mesmo tipo de formulação. Nesse caso, as formulações de segunda ordem apresentaram melhor aproximação da solução analítica.

A determinação da eficiência das condições de primeira e segunda ordem é feita por meio da comparação entre os métodos diferentes. Nas duas situações as condições absorventes de Bayliss-Turkel e de Engquist-Majda apresentaram erro percentual médio aproximado para as mesmas características do objeto e malha.

A avaliação da distância entre a fronteira artificial e o espalhador foi feita considerando raio de $0{,}3\lambda_0$ para o objeto e raios de $0{,}5\lambda_0$, $1{,}0\lambda_0$, $1{,}5\lambda_0$ e $2{,}0\lambda_0$ para fronteira absorvente. A densidade da malha foi mantida constante com $r = 10$ para a região interna do espalhador e, também, para a região do espaço livre compreendida entre as fronteiras do espalhador e absorvente. O aumento do espaçamento entre as fronteiras implicou na considerável diminuição do valor máximo para o erro relativo e, consequentemente, na diminuição do erro percentual médio. As condições de EM e BT de primeira ordem apresentaram comportamento similar para o erro relativo para a

fronteira absorvente com raio de $2{,}0\lambda_0$, mas o erro percentual médio de BT ficou menor que o de EM. Para essa mesma geometria, a condição de segunda ordem das duas formulações apresentou o mesmo comportamento tanto para o erro relativo como para o erro percentual médio.

Na análise com a variação da resolução da malha foi utilizada a condição de contorno de BT de segunda ordem, o raio da fronteira absorvente foi mantido constante em $1,5\lambda_0$ e a densidade da malha foi variada. O campo total foi analisado e verificou-se a diminuição do erro absoluto máximo e do erro médio absoluto devido ao aumento da resolução da malha. Observou-se também, que a resolução r obedece a teoria de amostragem de Nyquist para $r \geq 2$ e, assim, a solução via FEM-ABC acompanha a solução analítica. Nessa análise, o aumento de r diminui o erro médio absoluto que tende à estabilidade para $r \geq 5$ e acarreta na elevação do custo computacional.

A análise final da formulação foi feita verificando o comportamento do uso de fronteira absorvente para limitar um problema aberto devido à variação do raio do espalhador. Nessa investigação, foram analisados os erros absolutos para os cilindros com raios de $0{,}1\lambda_0$, $0{,}2\lambda_0$ e $0{,}6\lambda_0$, a distância entre as fronteiras do espalhador e absorvente foi mantida constante a $1{,}2\lambda_0$ e $r = 10$. Verificou-se que em todos os casos o erro médio absoluto ficou na segunda casa decimal e houve elevação do custo computacional com o aumento do raio do espalhador.

Devido às características do Método dos Elementos Finitos, verificou-se que essa ferramenta numérica é bastante robusto para a solução do problema de espalhamento eletromagnético. Assim, como trabalhos futuros são sugeridos os seguintes temas:

- Análise vetorial do campo elétrico próximo ao objeto e em regiões distantes;
- Aplicação da formulação desenvolvida para diferentes formatos e composições do objeto;
- Aplicação da formulação desenvolvida para espalhadores com diversas camadas;
- Aplicação das condições de contorno absorvente para análise de problemas tridimensionais que não podem ser reduzidos a problemas bidimensionais;
- Formulação do FEM com utilização de Perflectly Matched Layers (PML);

Referências Bibliográficas

[1] C. A. Balanis, Advanced Engineering Electromagnetics, 1989.

[2] A. G. M. PINTO, M. M. AFONSO, U. C. RESENDE, L. S. BARBOSA e M. A. O. SCHROEDER, *Espalhamento Eletromagnético Solucionado via FEM-ABC,* Nova Friburgo, RJ, 2011.

[3] M. M. Afonso, "Métodos Híbridos na Solução de Problemas de Espalhamento Eletromagnético.," Belo Horizonte, 2003.

[4] A. McCowen, J. Macnab e M. Towers, *FEM Modelling of Electromagnetic Scattering from 2D RAM-coated oblects,* IEEE, Ed., Wales: University College of Swansea, Dept. of Electrical and Electronic Engineering, 1992.

[5] S. P. Savaidis e J. A. Roumeliotis, "Scattering by an Infinite Circular Dielectric Cylinder Coating Eccentrically an Elliptic Dielectric Cylinder," *Transaction on Antennas and Propagation,* pp. 1180 - 1186, 2004.

[6] J. A. Roumeliotis, H. K. Manthopoulos e V. K. Manthopoulos, "Electromagnetic Scattering from an Infinite Circular Metallic Cylinder Coated by an Elliptic Dielectric One," *Transactions on Microwave Theory and Techiques,* pp. 862 - 869, 1993.

[7] J. F. Junior, "Bioeletromagnetismo: Medicina Biofísica," 2000.

[8] F. Storm, R. Elliott, W. Harrison e D. Morton, "Clinical RF Hyperthermia by Magnetic-Loop Induction: A New Approach to Human Cancer Therapy," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques,* pp. 1149-1158, August 1982.

[9] P. d. F. Santos, C. L. Mello, R. M. O. d. Morais e C. d. S. Ribeiro, "Estudo de depósitos da formação barreiras com base em reflexão por ondas de radar," *Geologia USP - Série Científica,* vol. 6, n. 2, pp. 31-42, outubro 2006.

[10] T. Chiu e K. Sarabandi, "Electromagnetic Scattering Interaction Between a Dielectric Cylinder and a Slightly Rough Surface".

[11] C. C. Silva. [Online]. Available: http://www.ifi.unicamp.br/~ghtc/Biografias /Maxwell/Maxwell.html. [Acesso em 02 Outubro 2011].

[12] J. H. Richmond, "Digital Computer Solutions of the Rigorous Equations for Scattering Problems," *Proceeding of the IEEE,* vol. 53, pp. 796-804, 1965.

[13] R. F. Harrington, "Matrix Methods for Field Problems," *Proceedings of the IEEE,* vol. 55, n. 2, pp. 136-149, 1967.

[14] R. F. Harrington, Field Computation by Moment Methods, New York: IEE Press, 1992.

[15] K. Yee, "Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation,* vol. 14, n. 3, pp. 302-307, 1966.

[16] K. S. Kunz e R. J. Luebbers, The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics, CRC Press, 1993.

[17] "ICEI PUC Minas," [Online]. Available: http://www.matematica.pucminas.br/lcn /apostilas/Apostila%20de%20Elementos%20Finitos.pdf. [Acesso em 10 Julho 2012].

[18] R. COURANT, "Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations," *American Mathematical Society,* pp. 1-23, 1943.

[19] P. P. Silvester, "Finite element solution of homogeneous wavegui problems," *Alta Frequenza,* n. 38, pp. 313-317, 1969.

[20] J. Jin, The Finie Element Method in Electromagnetics, New York: John Wiley & Sons, 2002.

[21] B. Engquist e A. Majda, "Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Wave," *Mathematics of Computation,* vol. 31, n. 139, pp. 629-651, 1977.

[22] A. Bayliss e E. Turquel, "Radiation Boundary Conditions fior Wave-like equatins," *Communications on Pure and Applied Mathematics,* vol. 33, pp. 707-725, 1980.

[23] G. Mur, "Absorbing Boundary Conditions for the Finite-Difference Approximation of the Time-Domain Electromagnetic-Field Equations," *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility,* Vols. %1 de %2EMC-23, n. 4, pp. 377-382, 1981.

[24] L. N. Trefethen e L. Halpern, “Well-Posedness of One-Way Wave Equations and Absorbing Boundary Conditions,” *Mathematics of Computation,* vol. 47, n. 16, pp. 421-435, 1986.

[25] R. L. Higdon, “Absorbing Boundary Condition for Difference Approximation to the Multidimensional Wave Equation,” *Mathematics of Computation,* vol. 47, pp. 437-459, 1986.

[26] J.-M. Jin, J. L. Volakis e V. V. Liep, “An engineer's approach for terminating finite element meshes in scattering analysis,” em *Antennas and Propagation Society International Symposium*, 1991.

[27] J.-P. Berenger, “A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves,” *Journal of Computational Physics,* n. 114, pp. 185-200, 1993.

[28] J. A. Vasconcelos e F. S. G. Lisboa, “Análise de problemas de espalhamento eletromagnético inverso 2D via FEM-BEM e SSGA,” *Journal of Microwaves and Optoelectronics,* vol. 2, n. 6, Decembre 2002.

[29] K. Cools, I. Bogaert, J. Fostier, J. Peeters, D. V. Ginste, H. Rogier e D. De Zutter, “Recent Advances in Boundary Element Methods Applied to Conducting and Dielectric Electromagnetic Scattering Problems,” International Symposium on Electromagnetic Theory, 2010.

[30] A. N. Gómez, “Espalhamento Eletromagnético: Análise via Método de Elementos Finitos acoplado ao método de correntes multi-filamentares,” Belo Horizonte, 2000.

[31] A. Noreika e P. Tarvydas, “Electromagnetic Field Modeling Using Edge Finite Elements,” *International Biennial Baltic Electronics Conference,* 6-8 October 2008.

[32] D. Colton, “Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory,” vol. 47, 2003.

[33] M. N. Sadiku e C. N. Obiozor, *Finite Elements in electromagnetics for undergraduated curriculum,* 1993.

[34] R. F. Harrington, Time-Harmonic Electromagnetic Field, Piscataway, NJ: John Wiley & Sons, Inc., 2001.

[35] D. K. Cheng, Field and wave Electromagnetics, Addison-Wesley Publising Company Inc., 1983.

[36] W. E. Boyce e R. C. D. Prima, Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, 6ª ed., LTC, 1997.

[37] K. A. Schneider, *Condições de contorno absorventes para a equação da onda,* Porto Alegre, RS, 2009.

[38] Ú. d. C. Resende, "Análise de antenas refletoras circularmente simétricas com a presença de corpos dielétricos," 2007.

[39] A. Casimiro, V. Lopes e F. Emídio, "Métodos dos Momentos".

[40] J. B. C. Silva e M. D. d. Campos, *O Método de Elementos Finitos aplicado à Simulação Numérica de Escoamentos de Fluidos,* IME/UFG, 2006.

[41] D. A. Salgado e M. P. Pinto, *O Método dos Elementos Finitos como Ferramenta para Projeto de Malhas de Aterramento Subestações,* São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2009.

[42] J. Strikwerda, Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations, 2ª ed., Philadelphia, Pennsylvania: Siam, 2007.

[43] L. C. Wrobel, S. Eiger e P. C. Rosman, Métodos Numéricos em recursos hídricos, ABRH, 1989.

[44] G. Pelosi, "The Finite-Element Method, Part 1: R. L. Courant," *Antennas and Propagation Magazine,* vol. 49, April 2007.

[45] B. Liu, Z. Li e Y. Du, *A Fast Numerical Method for Electromagnetic Scattering From Dielectric Rough Surfaces,* vol. 59, 2011.

[46] R. M. d. Souza, *O Método dos Elementos Finitos Aplicado ao Problema de Condução de Calor,* Belém 2003, Pará: Núcleo de Instrumentação e Computação Aplicada à Engenharia, 2003.

[47] L. S. Barbosa, "FEM - ABC Aplicado à Solução de Probemas de Espalhamento Eletromagnético," 2010.

[48] J. Jin, "The Finite Element Methodin Eletromagnectics," John Wiley & sons, 1993.

[49] A. C. Catigellaris e R. Lee, *A Finite Element Method for solving Electromagnetic Scattering Problems,* vol. 2, Tucson, AZ, 1989, pp. 1116 - 1119.

[50] C. Hirsch, Numerical Computation of Internal & External Flows, JohnWiley & Sons, 2007.

[51] E. Turkel e Y. A. Erlanggay, *Preconditioning a finite element solver of the exterior Helmholtz equation,* 2006.

[52] A. F. Peterson, S. L. Ray e R. Mittra, Computational Methods for Electromagnetics, New York: IEEE Press, 2010.

[53] D. Duhamel e T.-M. Nguyen, "Finite element computation of absorbing boundary conditions for time-harmonic wave problems," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* pp. 37-40, 20 october 2009.

[54] T. G. Moore, J. G. Blaschk, A. Taflove e G. A. Kriegsmann, "Theory and Application of Radiation Boundary Operators," *Transactions on Antennas and Propagation,* vol. 36, n. 12, 1988.

[55] J. B. Ajo-Franklin, "Frequency-Domain Modeling Techniques for the Scalar Wave Equation : An Introduction," Cambridge.

[56] A. M. F. Frasson, "Simulação, por Elementos Finitos 3D, de Problemas Eletromagnéticos no Tempo e na Frequência," Campinas, 2002.

[57] A. G. M. PINTO, M. M. AFONSO, L. S. BARBOSA e U. C. e. C. E. H. R. RESENDE, *Electromagnetic Scattering computed by FEM-ABC,* Ouro Preto, MG, 2011.

[58] A. G. M. PINTO, M. M. AFONSO, U. C. RESENDE, L. S. BARBOSA, T. A. S. OLIVEIRA e E. N. M. BORGES, *Espalhamento Eletromagnético Solucionado via FEM-ABC,* Belo Horizonte, MG, 2012.

[59] C. R. M. ,. P. A. R. Basso, "Solução de Sistemas Lineares com Matrizes e Vetores Esparsos em Computadores Vetoriais," vol. 8, n. 31, 1997.

[60] A. G. M. PINTO, M. M. AFONSO, U. C. RESENDE, L. S. BARBOSA, T. A. S. OLIVEIRA e E. N. M. BORGES, *Espalhamento Eletromagnético solucionado pelo Método dos Elementos Finitos com o uso da Condição de Contorno de Bayliss-Turkel,* São Luiz, MA, 2012.

[61] C. Geuzaine e J. F. Remacle, "Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities.," *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* vol. 79, n. 11, pp. 1309-1331, 2009.

[62] C. Geuzaine e J.-F. Remacle, Gmsh Reference Manual, 2010.

[63] S. S. W., The scientist and engineer's guide to Digital Signal Processing, 2ª ed., San Diego, California: California Technical Publishing, 1999.

[64] H. Anton e C. Rorres, Elementary Linear Algebra, 9ª ed., John Wiley & Sons, 2005.

[65] M. N. O. Sadiku, Elementos de Eletromagnetismo, 3° ed., vol. único, Porto Alegre, Rio Grande do Sul: Bookman, 2004.

[66] R. Lucic, V. Jovic e M. Kurtovic, *Simulation of electromagnetic transients on single transmission lines via the finite element method,* New York, 1999.

[67] J. S. Vieira, "Estudo de propagação de onda eletromagnética em estrutura geológica estratificada," Escola de Enganharia, Porto Alegre, 2003.

Apêndice A

Identidades vetoriais

Nesta seção são apresentadas as identidades vetoriais utilizadas no desenvolvimento do texto.

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ são campos vetoriais, enquanto V é um campo escalar, então [64]:

$$\boldsymbol{A} \,.\, (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B} \,.\, (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C} \,.\, (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}); \tag{A-1}$$

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \,.\, \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \,.\, \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}; \tag{A-2}$$

$$\nabla \,.\, (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \,.\, (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \,.\, (\nabla \times \mathbf{B}); \tag{A-3}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \,.\, (V\boldsymbol{A}) = V\, \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \,.\, \boldsymbol{\nabla} V; \tag{A-4}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\, \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{A}; \tag{A-5}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \,.\, (\boldsymbol{\nabla} V) = \boldsymbol{\nabla}^2 V; \tag{A-6}$$

Apêndice B

Equação de onda

As equações de Maxwell possuem os campos elétricos e magnéticos acoplados nas leis de Faraday e de Ampère. A partir de manipulações vetoriais estas equações podem ser desacopladas e reescritas de forma a se obter uma equação diferencial de segunda ordem conhecida como equação de onda [65] e [1].

B-1 Formulação para o campo elétrico (TM_z)

A permeabilidade relativa pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}, \tag{B-1}$$

a Lei de Faraday pode ser reescrita:

$$\frac{1}{\mu_r}\nabla \times \boldsymbol{E} = -j\omega\mu_0\boldsymbol{H}, \tag{B-2}$$

e aplicando o rotacional em ambos os lados tem-se:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r}\nabla \times \boldsymbol{E}\right) = -j\omega\mu_0\nabla \times \boldsymbol{H}. \tag{B-3}$$

Considerando um problema cuja geometria é invariante em z, ou seja, $\frac{\partial y}{\partial z} = 0$ em duas dimensões e que o campo elétrico é contínuo ao longo do eixo $\hat{z}$, ou seja, $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_z\hat{\boldsymbol{z}}$.

O rotacional de $\boldsymbol{E}$, com $\boldsymbol{E}_z = u$, é:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial y}u\,\hat{a}_x - \frac{\partial}{\partial x}u\,\hat{a}_y, \tag{B-4}$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r}\nabla \times \boldsymbol{E}\right) = \begin{bmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{1}{\mu_r}\frac{\partial u}{\partial y} & -\frac{1}{\mu_r}\frac{\partial u}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}, \tag{B-5}$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r}\nabla \times \boldsymbol{E}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu_r}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu_r}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{a}_y + \left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu_r}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu_r}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\hat{a}_z. \tag{B-6}$$

Como $\boldsymbol{E}$ é uniforme na direção $\hat{a}_z$:

$$\frac{\partial}{\partial z}\big(f(x,y,z)\big) = 0, \tag{B-7}$$

as derivadas na direção $\hat{a}z$ são nulas o rotacional é reescrito da forma:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r}\nabla \times \boldsymbol{E}\right) = \left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu_r}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu_r}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\hat{a}_z. \tag{B-8}$$

No rotacional do campo magnético a densidade de fluxo elétrico pode ser substituída pela relação $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$:

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + j\omega\varepsilon\boldsymbol{E} \tag{B-9}$$

Substituindo $\mathbf{E} = \mathrm{u}\ \hat{a}_z$ em (B-8), tem:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu_r}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu_r}\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -j\omega\mu_0 J_z + \omega^2\,\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r u \tag{B-10}$$

Se $J_z = 0$ no domínio (ausência de fontes) e $k_0^2 = \omega^2\,\mu_0\varepsilon_0$, então:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu_r}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu_r}\frac{\partial u}{\partial y}\right) - k_0^2\varepsilon_r u = 0. \tag{B-11}$$

A equação (B-11) é conhecida como a equação de onda para o campo elétrico.

B-2 Formulação para o campo magnético (TE_z)

Empregando o mesmo procedimento para obter a equação desacoplada em função do campo magnético com o uso da Lei de Ampère. Assumindo $J_z = 0$, tem-se:

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = j\omega\varepsilon\boldsymbol{E}, \tag{B-12}$$

a permeabilidade do material pode ser escrita como:

$$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r, \tag{B-13}$$

e a equação (B-12) pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{\varepsilon_r}\nabla \times \boldsymbol{H} = j\omega\varepsilon_0\boldsymbol{E}. \tag{B-14}$$

Aplicando o rotacional em ambos os lados da equação (B-14), tem:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon_r}\nabla \times \boldsymbol{H}\right) = j\omega\varepsilon_0\nabla \times \boldsymbol{E}, \tag{B-15}$$

Considerando um problema cuja geometria é invariante em z, ou seja, $\frac{\partial y}{\partial z} = 0$ em duas dimensões e que o campo magnético é contínuo ao longo do eixo $\hat{z}$, ou seja, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_z\hat{\boldsymbol{z}}$.

O rotacional de $\boldsymbol{H}$, com $\boldsymbol{H}_z = u$, é:

tem-se:

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial y}u\,\hat{a}_x - \frac{\partial}{\partial x}u\,\hat{a}_y, \tag{B-16}$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon_r}\nabla \times \boldsymbol{H}\right) = \begin{bmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial u}{\partial y} & -\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial u}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}, \tag{B-17}$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon_r}\nabla \times \boldsymbol{H}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{a}_y + \left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\hat{a}_z. \tag{B-18}$$

Como não há variação de $\boldsymbol{H}$ na direção $\hat{a}_z$, as derivadas nesta direção serão nulas:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \tag{B-19}$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon_r}\nabla \times \boldsymbol{H}\right) = \left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\hat{a}z. \tag{B-20}$$

Eliminando o rotacional da intensidade de campo elétrico da equação (B-15) e efetuando as substituições, tem-se:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \omega^2\, \mu_0\varepsilon_0\mu_r u, \tag{B-21}$$

assumindo $k_0^2 = \omega^2\, \mu_0\varepsilon_0$, portanto:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial u}{\partial y}\right) - k_0^2\mu_r u = 0. \tag{B-22}$$

A equação (B-22) é conhecida como a equação de onda para o campo magnético.

B-3 Formulação geral

Devida à semelhança entre as equações de onda para o campo elétrico e magnético, estas podem ser expressas de uma única forma:

$$\frac{\partial}{\partial_x}\left(\alpha_1\frac{\partial u}{\partial_x}\right) + \frac{\partial}{\partial_y}\left(\alpha_1\frac{\partial u}{\partial_y}\right) + k_0^2\alpha_2 u = 0, \tag{B-23}$$

onde, $\alpha_1 = {}^1/_{\mu_r}$ e $\alpha_2 = \varepsilon_r$ para a formulação do campo elétrico e $\alpha_1 = {}^1/_{\varepsilon_r}$ e $\alpha_2 = \mu_r$ para a formulação do campo magnético.

Assim, a equação (B-23) pode ser escrita como:

$$\nabla(\alpha_1\nabla u) + k_0^2\alpha_2 u = 0. \tag{B-24}$$

Apêndice C

Formulação fraca

A forma fraca amplia o universo das funções empregadas como aproximação, isso se deve ao fato das exigências quanto à continuidade serem menos rigorosas que as da equação original. Nessa equação, a derivada segunda possui solução, mas não é possível a utilização de aproximações lineares [48].

Desta forma, torna-se necessário considerar a existência de uma solução para u que satisfaça a equação a menos de um resíduo. Assim, é possível encontrar a formulação fraca para o problema.

Seja S o espaço das funções admissíveis, onde:

$$S = \{u \in H^1(\Omega)\ e\ u = \phi, \quad \forall\, \vec{x} \in \gamma_g\}, \tag{C-1}$$

$$V = \{w \in H^1(\Omega)\ e\ w = 0, \quad \forall\, \vec{x} \in \gamma_g\}, \tag{C-2}$$

onde H^1 é o espaço das funções de teste e representa o conjunto das funções que possuem derivada primeira de quadrado integrável.

Seja R o resíduo para a forma forte definido por:

$$R = \boldsymbol{\nabla}.(\alpha_1 \boldsymbol{\nabla} u^*) + k_0^2 \alpha_2 u^*, \tag{C-3}$$

onde u^* é uma aproximação para u.

Integrando-se o resíduo e igualando a integral à zero, tem-se:

$$\int_\Omega \{\nabla.(\alpha_1 \nabla u^*) + k_0^2 \alpha_2 u^*\}\, w\, d\Omega = 0, \quad \forall\, w \in V, \tag{C-4}$$

onde w é a função peso.

Utilizando a identidade vetorial (A-4) a primeira a integral do resíduo pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} w[\nabla.(\alpha_1 \nabla u^*)]\ d\Omega = \int_{\Omega} \nabla.(w\alpha_1 \nabla u^*) d\Omega\ - \int_{\Omega} \nabla w.(\alpha_1 \nabla u^*)\ d\Omega. \tag{C-5}$$

Aplicando o teorema da Divergência e as identidades vetoriais apresentadas no Apêndice A, tem-se:

$$\int_{\Omega} w[\nabla.(\alpha_1 \nabla u^*)]\ d\Omega = \int_{\gamma} w\alpha_1 \nabla u^*.\hat{n}\ d\gamma\ - \int_{\Omega} \nabla w.(\alpha_1 \nabla u^*)\ d\Omega, \tag{C-6}$$

sendo:

$$\nabla u^*.\hat{n} = \frac{\partial u^*}{\partial n}, \tag{C-7}$$

assim, tem-se:

$$\int_{\Omega} w.[\nabla.(\alpha_1 \nabla u^*)]\ d\Omega = \int_{\gamma} w\alpha_1 \frac{\partial u^*}{\partial n}\ d\gamma\ - \int_{\Omega} \nabla w.(\alpha_1 \nabla u^*)\ d\Omega. \tag{C-8}$$

Portanto, a integral do resíduo pode ser reescrita como:

$$\int_{\gamma} w\alpha_1 \frac{\partial u^*}{\partial_n}\ d\gamma\ - \int_{\Omega} \nabla w.(\alpha_1 \nabla u^*)\ d\Omega + \int_{\Omega} k_0^2 \alpha_2 w u^*\ d\Omega = 0, \tag{C-9}$$

e a Forma Fraca define-se como achar $u^* \in S$ tal que:

$$\int_{\Omega} \nabla w.(\alpha_1 \nabla u^*)\ d\Omega - \int_{\Omega} k_0^2 \alpha_2 w u^*\ d\Omega - \int_{\gamma} \alpha_1 w \frac{\partial u^*}{\partial n}\ d\gamma\ = 0, \forall\ w\ \in V. \tag{C-10}$$

Apêndice D

Método de Galerkin

A aplicação do método de Galerkin é efeito a partir da equação (C-10). Sejam S^h e V^h subconjuntos de S e V respectivamente [48]. A função e aproximação é escrita como:

$$u^h \in S^h, u^{*h} = \sum_{i=1}^{n} N_i d_i + g^h = v^h + g^h, \tag{D-1}$$

onde:

$$N_i(\vec{x}) = 0, \qquad \forall \vec{x} \in \gamma_g, \tag{D-2}$$

$$g(\vec{x}) = g, \qquad \forall \vec{x} \in \gamma_g, \tag{D-3}$$

$$w^h \in V^h, w^h = \sum_{j=1}^{n} N_j c_j, \tag{D-4}$$

com:

$$N_j(\vec{x}) = 0 \; \forall \vec{x} \in \gamma_g. \tag{D-5}$$

Definindo uma nova notação:

$$\int_{\Omega} \nabla w.(\alpha_1 \nabla u^*)\, d\Omega = a(w, u^*), \tag{D-6}$$

$$\int_{\Omega} k_0^2 \alpha_2 w.u^*\, d\Omega = (w, u^*), \tag{D-7}$$

$$\int_{\gamma} \alpha_1 w \frac{\partial u^*}{\partial_n}\, d\gamma = \int_{\gamma_e} \alpha_1 w \frac{\partial u^*}{\partial_n}\, d\gamma + \int_{\gamma_g} \alpha_1 w \frac{\partial u^*}{\partial_n}\, d\gamma = -\int_{\gamma'_e} \alpha_1 w \psi\, d\gamma, \tag{D-8}$$

$$\psi = \sum_{k=1}^{n} N_k \psi_k \, , onde: \gamma = \gamma_e \cup \gamma_g. \tag{D-9}$$

Escrevendo a forma fraca com essa nova notação tem-se:

$$a(w, u^*) - (w, u^*) + (w, \psi)_\gamma = 0, \tag{D-10}$$

$$a(w^h, v^h + g^h) - (w^h, v^h + g^h) + (w^h, \psi^h)_\gamma = 0, \tag{D-11}$$

$$a(w^h, v^h) + a(w^h, g^h) - (w^h, v^h) - (w^h, g^h) + (w^h, \psi^h)_\gamma = 0, \tag{D-12}$$

$$a\left(\sum_{j=1}^{n} N_j c_j \, , \sum_{i=1}^{n} N_i d_i\right) + a\left(\sum_{j=1}^{n} N_j c_j \, , g^h\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} N_j c_j \, , \sum_{i=1}^{n} N_i d_i\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} N_j c_j \, , g^h\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} N_j c_j \, , \sum_{k=1}^{n} N_k \psi_k\right)_\gamma = 0, \tag{D-13}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \left[a\left(N_j, \sum_{i=1}^{n} N_i d_i\right) - \left(N_j, \sum_{i=1}^{n} N_i d_i\right) + a(N_j, g^h) - (N_j, g^h) + \left(N_j, \sum_{k=1}^{n} N_k \psi_k\right)_\gamma \right] = 0. \tag{D-14}$$

Como c_j aparece em todos os termos:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j G_a = 0, \tag{D-15}$$

onde:

$$G_a = \sum_{i=1}^{n} \left[a(N_j, N_i) - (N_j, N_i)\right] di + a(N_j, g^h) - (N_j, g^h) + \left(N_j, \sum_{k=1}^{n} N_k \psi_k\right)_\gamma, \tag{D-16}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left[a(N_j, N_i) - (N_j, N_i)\right] di + \sum_{k=1}^{n} (N_j, N_k) \psi_k = -a(N_j, g^h) + (N_j, g^h). \tag{D-17}$$

O resultado da aplicação do Método de Galerkin resulta em:

$$\sum_{i \in \eta - \eta_g} \left[a(N_j, N_i) - (N_j, N_i)\right] di + \sum_{k \in \gamma} (N_j, N_k) \psi_k = \sum_{i \in \eta_g} \left[a(N_j, N_i) - (N_j, N_i)\right] gi. \tag{D-18}$$

Na equação (D-18) os termos $\left(N_j, N_i\right)$ representam uma matriz quadrada de terceira ordem que acopla os nós locais de cada elemento. Variando-se os índices pode-se representá-la na forma matricial:

$$[K]\{d\} = \{F\}, \tag{D-19}$$

onde $[K]$ é quadrada de ordem igual a quantidade de incógnitas do domínio, $\{d\}$ é o vetor com os coeficientes ψ_k a serem determinados e $\{F\}$ é um vetor com os termos conhecidos.

Apêndice E

Eliminação da derivada de segunda ordem

Na equação (3-50) que é representada por:

$$\sum_{e=1}^{n_e}\left[\sum_{j=1}^{n} c_j \left[\int_{\overline{\Omega}^e}\left[\boldsymbol{\nabla} N_j.\left(\alpha_1 \boldsymbol{\nabla}\sum_{i=1}^{n} N_i d_i\right) - k_0^2 \alpha_2 N_j \sum_{i=1}^{n} N_i d_i\right] d\overline{\Omega}^e \right.\right.$$
$$\left.\left. - \int_{(\gamma_e)^e} N_j \left[q - \left(\gamma_1 + \gamma_2 \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right)\sum_{i=1}^{n} N_i d_i\right] d(\gamma_e)^e\right]\right] = 0. \tag{E-1}$$

O último termo integral apresenta uma derivada parcial de segunda ordem que deve eliminada por meio do uso da técnica de integração por partes. Assim,

$$\int_s N_j \gamma_2 \frac{\partial^2 \sum_{i=1}^{n} N_i d_i}{\partial s^2}\, ds = lm - \int_s m\, dl \tag{E-2}$$

onde

$$l = N_j \gamma_2, \tag{E-3}$$

$$dl = \gamma_2 \frac{\partial N_j}{\partial s} ds, \tag{E-4}$$

$$dm = \frac{\partial^2 \sum_{i=1}^{n} N_i d_i}{\partial s^2}\, ds, \tag{E-5}$$

$$m = \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} N_i d_i}{\partial s}. \tag{E-6}$$

Assim, a equação (E-2) assume a seguinte forma:

$$\int_s N_j \gamma_2 \frac{\partial^2 \sum_{i=1}^{n} N_i d_i}{\partial s^2}\, ds = N_j \gamma_2 \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} N_i d_i}{\partial s} - \int_s \gamma_2 \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} N_i d_i}{\partial s} \frac{\partial N_j}{\partial s}\, ds \qquad \text{(E-7)}$$

A equação (E-7) deve ser substituída em (E-1) e, assim, a derivada parcial de segunda ordem é eliminada.

Apêndice F

Aspectos de integração

Para a construção do sistema matricial, é necessário determinar as funções de forma N_i. O método de elementos finitos fornece uma maneira simples e eficiente para a construção dessas funções através da discretização do domínio.

Com a discretização do domínio, obtêm-se as coordenadas dos nós de todos os elementos. O cálculo da contribuição não é feito em função das coordenadas reais desses nós, mas em um espaço mapeado onde são usadas as funções de interpolação. Tais funções permitem intercalar o valor das coordenadas ξ e η no espaço do elemento de referência em função das coordenadas do espaço real x e y. A Figura E-1 ilustra a definição do elemento de referência a partir do mapeamento de um elemento unidimensional e a Figura E-2 um elemento bidimensional [48] e [66].

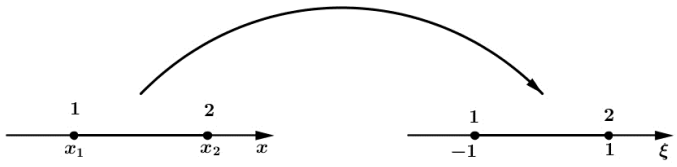


Figura F-1– Mapeamento de elemento linear unidimensional.

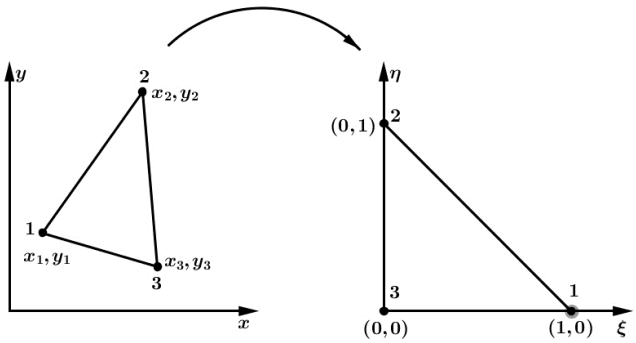


Figura F-2– Mapeamento de elemento linear bidimensional.

No espaço unidimensional, as funções de interpolação são dadas por [48]:

$$N_1 = \frac{1-\xi}{2}, \tag{F-1}$$

$$N_2 = \frac{1+\xi}{2}, \tag{F-2}$$

$$-1 \le \xi \le 1,$$

onde ξ é a coordenada do ponto no espaço mapeado.

A relação entre a coordenada de um ponto qualquer do elemento no espaço *x* e a coordenada ξ correspondente é dada por [48]:

$$x = \sum_{i=1}^{2} N_i(\xi) x_i, \tag{F-3}$$

No espaço bidimensional, as funções de interpolação são dadas por [34]:

$$N_1 = \xi, \tag{F-4}$$

$$N_2 = \eta, \tag{F-5}$$

$$N_3 = 1 - (\xi + \eta), \tag{F-6}$$

$$0 \le \xi \le 1 \text{ e } 0 \le \eta \le 1,$$

onde ξ e η são as coordenadas dos nós no espaço mapeado.

A relação entre as coordenadas nos espaços *xy* e $\xi\eta$ é dada pelas equações (F-7) e (F-8). Assim:

$$x = \sum_{i=1}^{3} N_i(\xi, \eta) x_i, \tag{F-7}$$

$$y = \sum_{i=1}^{3} N_i(\xi, \eta) y_i. \tag{F-8}$$

Para que seja possível essa transformação, é necessário que seja determinado o jacobiano. Assim, em uma dimensão, ele é dado por:

$$J = \frac{dx}{d\xi} = \sum_{i=1}^{2} \frac{dN_i}{d\xi} \cdot x_i = \frac{dN_1}{d\xi} \cdot x_1 + \frac{dN_2}{d\xi} \cdot x_2 = \frac{x_2 - x_1}{2}. \tag{F-9}$$

Em duas dimensões, o jacobiano é obtido pelo determinante da matriz jacobiana, dada por [48]:

$$n = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \tag{F-10}$$

Assim, a equação (F-10) pode ser escrita como:

$$n = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{3} \dfrac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^{3} \dfrac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^{3} \dfrac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^{3} \dfrac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix}. \tag{F-11}$$

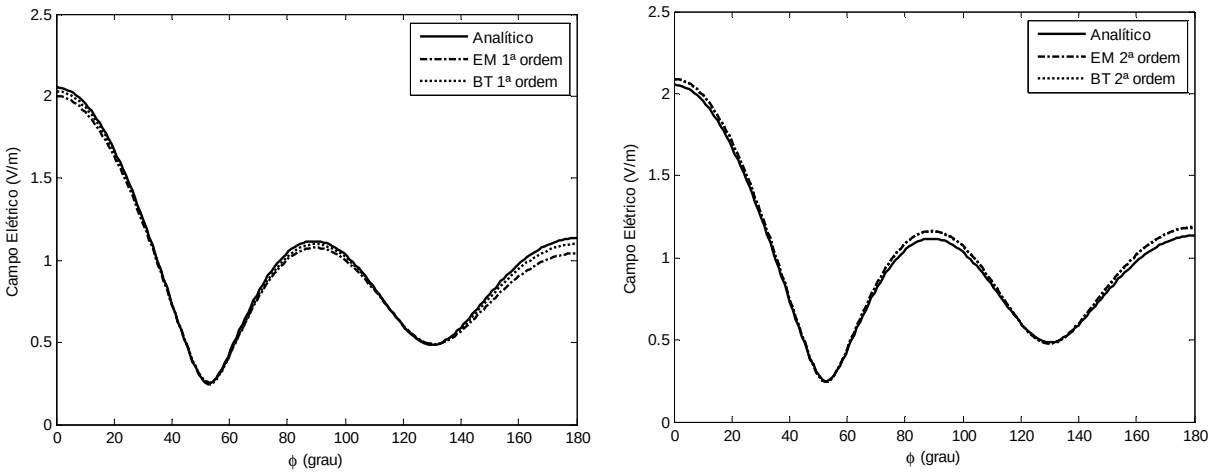
Estabelecida a relação entre os espaços, torna-se possível calcular a contribuição de cada elemento.

Apêndice G

Resultados para o campo elétrico

G-1 Espalhamento bidimensional

As Figuras G-1a) e G-1b) mostram os resultados comparativos do campo elétrico total para as condições de primeira e segunda ordem de EM e BT, respectivamente, na seção 4.1.

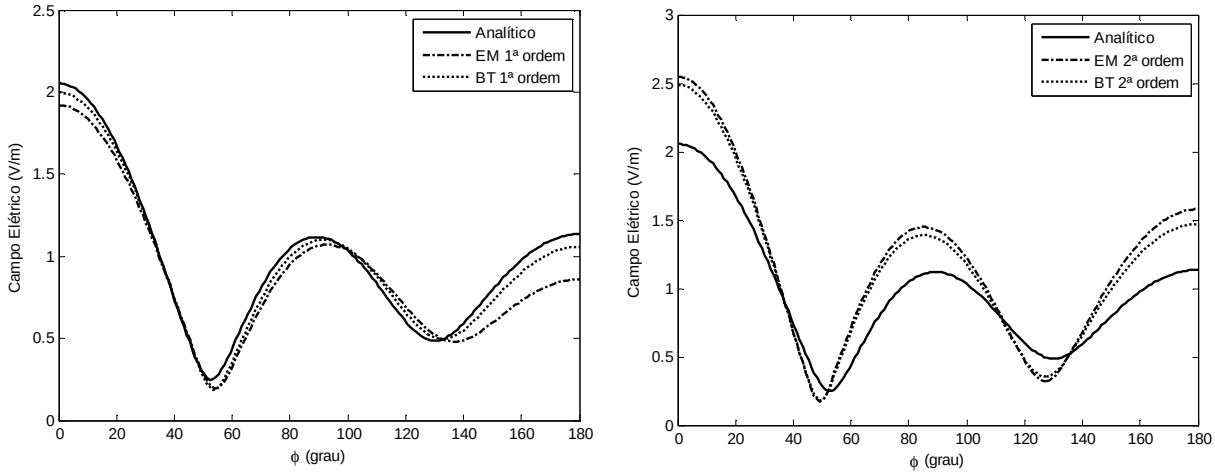


a) b)

Figura G-1 - Campo elétrico analítico e numérico com as ABCs de EM e BT a) primeira ordem b) segunda ordem

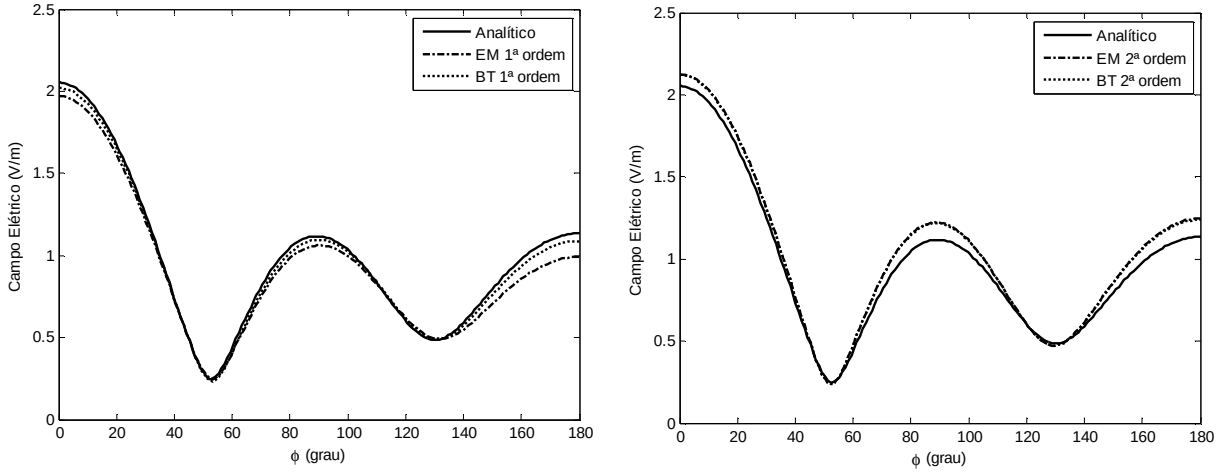
G-2 Variação da distância da fronteira artificial

O resultados a seguir são os campos eletricos devido ao distanciamento da fronteira absorvente de acordo com os erros presentes na seção 4.3. O objeto espalhador é um cilindro circular dielétrico de raio $0{,}3\lambda_0$, infinito ao longo do eixo z, $\varepsilon_r = 3$, $\mu_r = 1$ e $r = 10$. As Figuras G-2 a G-4 mostram os campos elétricos para as fronteiras artificiais com raios de $0{,}5\lambda_0$, $1{,}0\lambda_0$ e $2{,}0\lambda_0$, respectivamente.



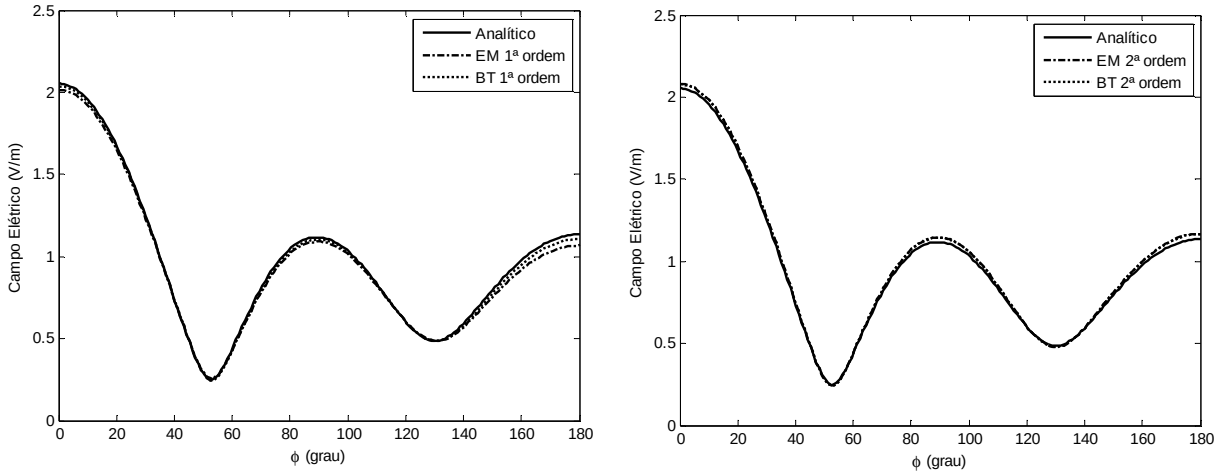
a) b)

Figura G-2 - Campo elétrico analítico e numérico com as ABCs de EM e BT devido à fronteira absorvente com raio de $0{,}5\lambda_0$ a) primeira ordem e b) segunda ordem.



a) b)

Figura G-3 - Campo elétrico analítico e numérico com as ABCs de EM e BT devido à fronteira absorvente com raio de $1{,}0\lambda_0$ a) primeira ordem e b) segunda ordem.

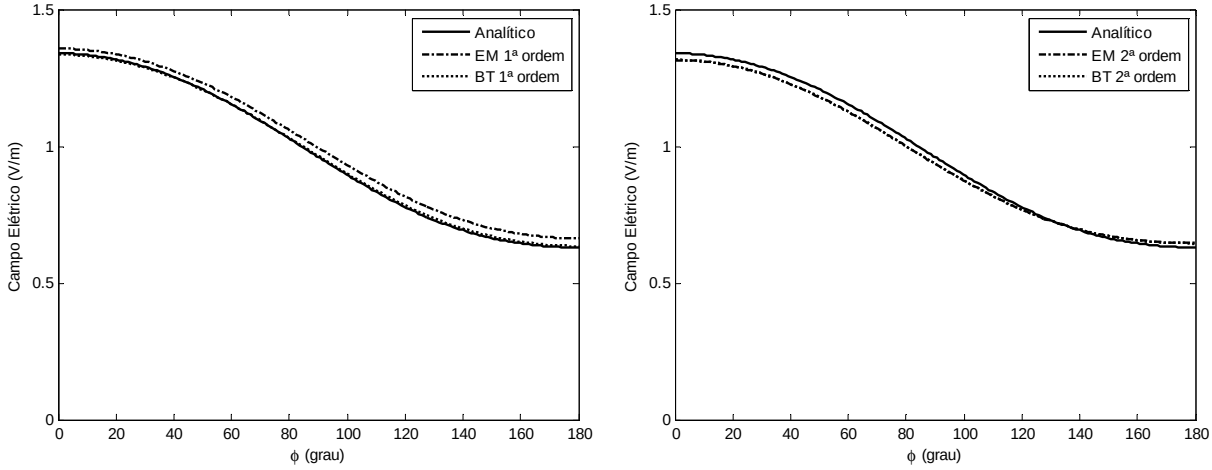


a) b)

Figura G-4 - Campo elétrico analítico e numérico com as ABCs de EM e BT devido à fronteira absorvente com raio de $2{,}0\lambda_0$ a) primeira ordem e b) segunda ordem.

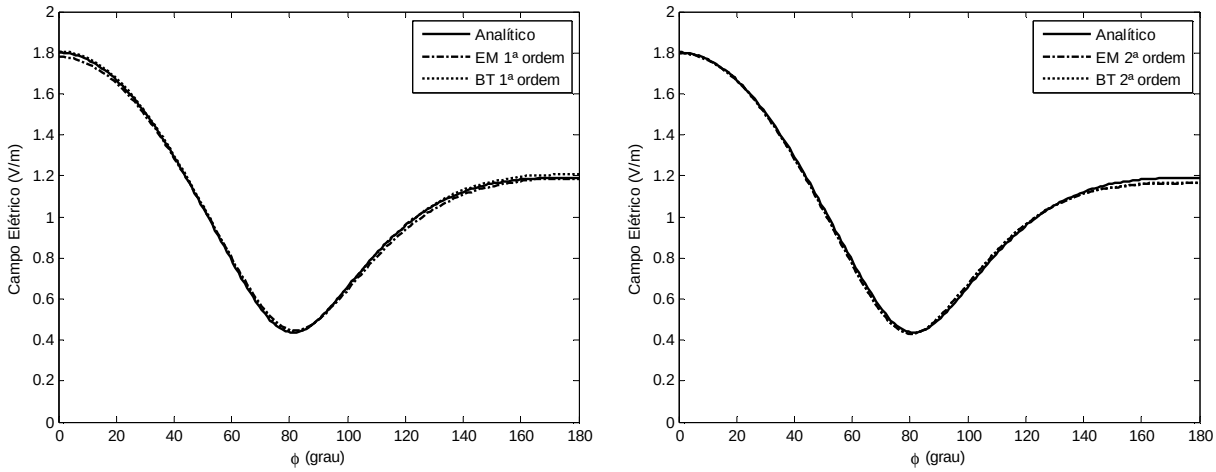
G-3 Variação do raio do espalhador

As Figuras G-5, G-6 e G-7 mostram os campos elétricos para os cilindros de raio $0{,}1\lambda_0$, $0{,}2\lambda_0$ e $0{,}6\lambda_0$ e fronteiras artificiais com raios de $0{,}5\lambda_0$, $1{,}0\lambda_0$ e $3{,}0\lambda_0$, respectivamente. Esses resultados são referentes aos erros presentes na secção 4.5.



a) b)

Figura G-5 - Campo elétrico analítico e numérico com as ABCs de EM e BT devido ao espalhador com raio de $0{,}1\lambda_0$ a) primeira ordem e b) segunda ordem.



a) b)

Figura G-6 - Campo elétrico analítico e numérico com as ABCs de EM e BT devido ao espalhador com raio de $0{,}2\lambda_0$ a) primeira ordem e b) segunda ordem.

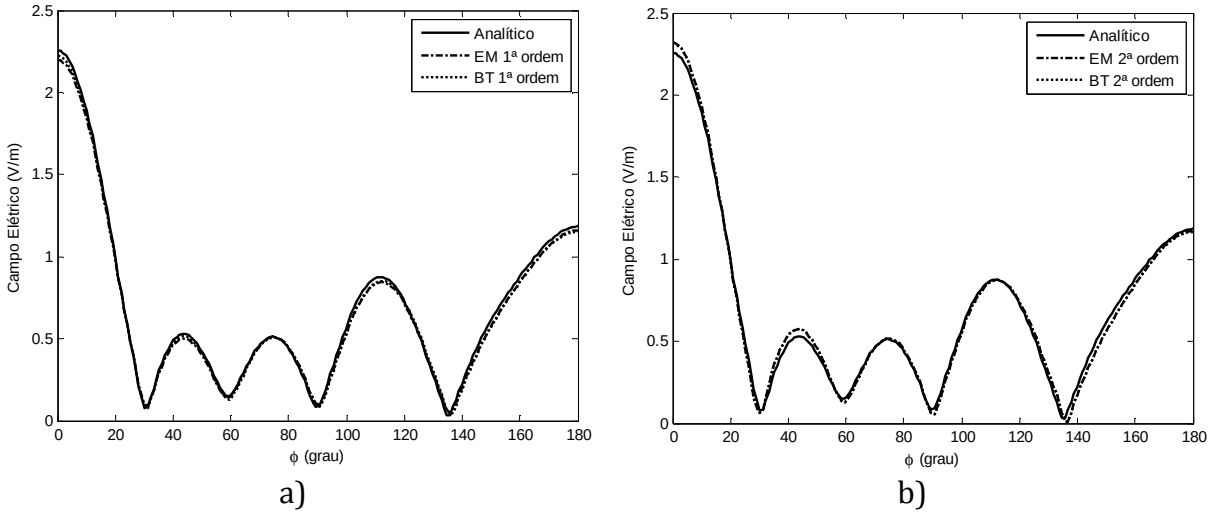


Figura G-7 - Campo elétrico analítico e numérico com as ABCs de EM e BT devido ao espalhador com raio de $0{,}6\lambda_0$ a) primeira ordem e b) segunda ordem.