CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS - CEFET/MG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI - UFSJ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA - PPGEL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Avaliação do Espalhamento Eletromagnético por Estruturas Filamentares Utilizando o Método dos Momentos

Maicon Vaz Moreira

Belo Horizonte
2012

Maicon Vaz Moreira

Avaliação do Espalhamento Eletromagnético por Estruturas Filamentares Utilizando o Método dos Momentos

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica Associação Ampla entre CEFET-MG e UFSJ como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.
Área de concentração: Sistemas Elétricos.
Linha de Pesquisa: Eletromagnetismo Aplicado.

Orientador: Profa. Dra. Úrsula Resende do Carmo
Co-Orientador: Prof. Dr. Márcio Matias Afonso

Belo Horizonte
2012

Banca Examinadora:

Profa. Dra.
Úrsula Resende do Carmo
Orientadora-PPGEL-CEFET-MG

Prof. Dr.
Márcio Matias Afonso
Co-Orientador-PPGEL-CEFET-MG

Prof. Dr.
Ricardo Luiz da Silva Adriano
UFMG

Prof. Dr.
Eduardo Henrique da Rocha Coppoli
CEFET-MG

Dedico esse trabalho a memória de meu pai Amado Moreira.

Agradecimentos

- *Aos Professores Úrsula Resende e Márcio Matias pelos dois anos de valorosa orientação, confiança, dedicação, compreensão, disponibilidade e paciência.*

- *Aos amigos de Mestrado, André Luiz Paganotti e Rodrigo, pela amizade, troca de experiências e a ótima convivência.*

- *Ao Leacopi/CEFET-MG pela ótima estrutura que oferece aos estudantes e pesquisadores.*

- *À CAPES pelo apoio financeiro concedido durante todo o período do mestrado.*

- *A todos que de alguma forma contribuíram com o meu progresso como aluno e como Ser.*

- *À Amália pelo amor, carinho e força sempre e toda sua família*

- *À minha família: Pai, Mãe, Érica, Sinara e Paulo Júnior pelo apoio, e à Deus por tudo.*

Nossa maior fraqueza está em desistir. O caminho mais certo de vencer é tentar mais uma vez.

Thomas Edison

Resumo

Neste trabalho é desenvolvido o ferramental teórico, analítico e numérico para a avaliação do espalhamento eletromagnético modelados por estruturas filamentares. A modelagem é desenvolvida considerando a Equação Integral do Campo Elétrico avaliada numericamente por meio do Método dos Momentos. A validade da formulação desenvolvida é confirmada através de vários testes cujos resultados são comparados com as respectivas soluções obtidas através do *software* $4Nec2^{®}$. Uma vez verificada a validade do algoritmo desenvolvido esse é aplicado na análise de um sistema constituído de dois loops filamentares. Este trabalho, apresenta alguns aspectos inovadores, dentre eles pode-se destacar a utilização da Equação Integral do Campo Elétrico sem aproximações, o emprego de funções triangulares como funções de base e de teste, o tratamento desenvolvido para a avaliação numérica das integrais presentes na solução por meio dos Métodos dos Momentos e a modelagem matemática aplicável à análise de estruturas filamentares de geometria arbitrária.

Palavras chave: Equação Integral do Campo Elétrico, Espalhamento Eletromagnético, Estruturas Filamentares, Método dos Momentos.

Abstract

In this work is developed theoretical, analytical and numerical tools for solutions of electromagnetic scattering from filamentary structures with arbitrary geometry. Accurate analysis of these structures are performed through algorithms based on Eletric Field Integral Equation, numerically evaluated by the Method of the Moments. The formulation is validated through several tests where the results are compared with the respective solutions obtained by software $4Nec2^{®}$. Once checked the reability of the algorithm developed, it is applied in the analysis of a system consisting of two loops filamentary. This work presents some innovative aspects, as the using of Eletric Field Integral Equation with no approaches, the employing of triangular functions as base and weight functions, the development of a new technic to treat the singularities present in the solution by Method of Moments. And finally the development of a mathematical model suitable for analysis of filamentary structures with arbitrary geometry.

Key-words: Electric Field Integral Equation, Electromagnetic Scattering, Filamentary Structures, Method of Moments.

Sumário

Lista de Figuras **xii**

Lista de Tabelas **1**

1 Introdução **3**
1.1 Contextualização do Problema 3
1.2 Objetivos 4
1.3 Organização do Texto 5

2 Avaliação do Espalhamento Eletromagnético para Estruturas Filamentares **7**
2.1 Geometria do Problema Filamentar 7
2.2 EFIE Associada ao Espalhamento por Estruturas Filamentares 8
2.3 Excitação de Problemas Filamentares 11
2.4 Método dos Momentos Aplicado a EFIE Considerando Problemas Filamentares 11
2.4.1 Introdução ao MoM 11
2.4.2 Funcões de Base e Peso 13
2.4.3 Sistema Matricial 14
2.4.4 Avaliação Numérica da Matriz Z e Vetor V 15
2.5 Avaliação Numérica das Integrais 18
2.5.1 Método Normal 19
2.5.2 Método Próximo 19
2.5.3 Método Coincidente 21
2.6 Cálculo de Campo 25
2.6.1 Campo na Região de Campo Próximo 25
2.6.2 Campo na Região de Campo Distante 26
2.7 Conclusões Parciais 27

3 Estudo de Casos **29**
3.1 Cálculo do Erro para Avaliação dos Resultados 29
3.2 Determinação do Número de Pontos de Integração 30
3.3 Avaliação da Aproximação para Filamento Muito Fino 32
3.4 Avaliação da Técnica de Remoção de Singularidade 34

3.5 Avaliação dos Resultados para Diferentes Métodos 36
3.6 Um Filamento Linear 39
3.7 Dois Filamentos Lineares 43
3.8 loop 47
3.9 Espiral 52
3.10 Sistema Constituído de Dois *loops* 56

4 Considerações Finais **61**
4.1 Sugestões para Trabalhos Futuros 63

Referências Bibliográficas **64**

Lista de Figuras

2.1 Filamento genérico 8
2.2 Campos elétricos incidente e espalhado por um filamento 9
2.3 Gerador de Função Delta 12
2.4 Função de base triangular 14
2.5 Funções triangulares sob um segmento 17
2.6 Algoritmo AGM 24

3.1 Filamento modelo 30
3.2 Avaliação dos pontos de Gauss para o Método Coincidente 31
3.3 Avaliação dos pontos de Gauss para os Métodos Próximo e Normal 31
3.4 Distribuição de corrente num filamento de comprimento $L = 0.47\lambda$ 33
3.5 E_{RM} da distribuição de corrente: com e sem remoção de singularidade 34
3.6 Distribuição de corrente para filamento de comprimento $L = 0,47\lambda$ utilizando o MoMLinear com e sem remoção de singularidade 35
3.7 Relação número de condicionamento por segmentos para filamento de comprimento $L = 0,47\lambda$ 35
3.8 Distribuição das funções de base do tipo pulso 37
3.9 Distribuição de corrente para filamento de comprimento $L = 0,47\lambda$ considerando diferentes métodos 38
3.10 E_{RM} da distribuição corrente para filamento de comprimento $L = 0,47\lambda$ considerando diferentes métodos 39
3.11 Relação número de condicionamento e segmentação para filamento de comprimento $L = 0,47\lambda$, empregando MoMLinear, EIP-Triangular e EIP-Pulso 39
3.12 Filamento de comprimento $L = 1\lambda$ 40
3.13 Ditribuição de corrente para um filamento de comprimento $L = 1\lambda$ 41
3.14 Campo elétrico na região de campo próximo para um filamento de comprimento $L = 1\lambda$ 41
3.15 Campo magnético na região de campo próximo para um filamento de comprimento $L = 1\lambda$ 42
3.16 Campo elétrico na região de campo distante para filamento de comprimento $L = 1\lambda$ 42
3.17 Conjunto com dois filamentos separados por um distância D 43

3.18 E_{RM} da distribuição corrente para um arranjo de dois filamentos de comprimento $L = 0.47\lambda$ 44
3.19 Distribuição de corrente ao longo de dois filamentos de comprimento $L = 0.47\lambda$. 44
3.20 Campo elétrico na região de campo próximo para um arranjo de dois filamentos de comprimento $L = 0.47\lambda$ 45
3.21 Campo magnético na região de campo próximo para um arranjo de dois filamentos de comprimento $L = 0.47\lambda$ 46
3.22 Campo elétrico na região de campo distante para um arranjo de dois filamentos de comprimento $L = 0.47\lambda$ 46
3.23 *loop* Circular 47
3.24 Distribuição de corrente ao longo do *loop* de raio $r = 0.01\lambda$ 48
3.25 Distribuição de corrente ao longo de um *loop* circular de raio $r = 0.5\lambda$ 48
3.26 Campo elétrico na região de campo próximo para *loop* circular de raio $r = 0.5\lambda$. 49
3.27 Campo magnético na região de campo próximo para um *loop* circular de raio $r = 0.5\lambda$ 50
3.28 Campo elétrico na região de campo distante para *loop* circular de raio $r = 0.5\lambda$. 51
3.29 Espiral circular 52
3.30 Distribuição de corrente ao longo de um espiral 53
3.31 Campo elétrico na região de campo próximo para um espiral 53
3.32 Campo magnético na região de campo próximo para espiral 54
3.33 Campo elétrico na região de campo distante para um espiral 55
3.34 Sistema constituído de dois *loops* ciirculares 57
3.35 Distribuição de corrente para um arranjo com dois *loops* de raios $r_1 = r_2 = 0.01\lambda$ $a = 0.0001\lambda$ 58
3.36 Campo magnético (A/m) na região de campo próximo para um sistema de dois *loops* separados por 0.01λ 58
3.37 Campo magnético (A/m) na região de campo próximo para um sistema de dois *loops* separados por 0.05λ 59

Lista de Tabelas

3.1 E_{RM} para campos na região de campo próximo para um filamento de comprimento $L = 1\lambda$ 40
3.2 E_{RM} para campos na região de campo próximo para um arranjo com dois filamentos de comprimento $L = 0.47\lambda$ 44
3.3 E_{RM} para campos na região de campos próximos para um *loop* 48
3.4 E_{RM} para campos na região de campo próximo para um espiral 53

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contextualização do Problema

O Fenômeno de espalhamento eletromagnético é definido como a reação de um corpo (espalhador) à incidência de uma onda eletromagnética, que se dá por meio de uma parcela de onda refletida e outra absorvida pelo corpo [1]. Esse fenômeno e as soluções das equações matemáticas que o modelam (Equações de Maxwell juntamente com condições de contorno apropriadas) [2], [3] e [4] têm sido extensivamente investigados na literatura devido à sua presença em muitos problemas práticos, como por exemplo, análise de antenas, realização de radiografias com raios-X, funcionamento de radares, determinação da densidade óptica de uma suspensão de partículas biológicas, caracterização de partículas interplanetárias, sistemas para transmissão de energia sem fio e microondas para terapia em câncer. Entretanto a maioria dos problemas práticos está associado a geometrias complexas, para as quais soluções analíticas são muito complexas, ou até mesmo impossíveis. Porém, devido ao acelerado desenvolvimento na velocidade de processamento e na capacidade de armazenamento dos computadores, atualmente, é possível modelar e analisar sistemas físicos complexos, com elevado grau de precisão, empregando algoritmos numéricos apropriados.

Em problemas de espalhamento os métodos numéricos podem ser basicamente divididos em duas classes: métodos de solução de equações integrais e métodos de solução de equações diferenciais. Na solução de equações integrais um dos métodos mais conhecido e empregado é o Método dos Momentos (*Method of Moments*- MoM) [5]. Ele tem sido aplicado em uma grande variedade de problemas e conduz a resultados muito precisos. Para as aproximações por equações diferenciais dentre os principais métodos destacam-se o Método dos Elementos Finitos (*Finit Element Method* - FEM) [6], o Método de Diferenças Finitas (*Finite Difference Method)* - FDM) [7], [8] e os Métodos sem Malha (*Meshless*) [9] e [10]. Estes métodos envolvem formulações simples e são, portanto, atrativos para simular estruturas complexas. Entretanto, eles não incorporam a condição de radiação de Sommerfeld, fazendo com que o domínio de discretização seja estendido para longe do espalhador, onde a condição de Sommerfeld [11] pode ser imposta. Esta é a maior desvantagem dos métodos de equações diferenciais, a sua aplicação a problemas abertos (problemas onde o campo espalhado se propaga em todas as direções sem limites), sendo assim necessário que uma fronteira artificial seja colocada a certa distância do

objeto espalhador, para truncar a geometria do problema. Esforços recentes têm sido realizados no estudo de condições de fronteiras absorventes, de maneira a reduzir a região de discretização fora do espalhador [12]-[13].

O MoM deve seu nome ao processo de calcular momentos pela multiplicação por funções de peso apropriadas e posterior integração. Ele é um processo bastante geral para resolver equações com operadores lineares (diferenciação, integração ou ambos), sendo um método numérico bastante poderoso que reduz uma equação integral/diferencial a uma simples equação matricial [5]. Entretanto, é de difícil implementação para objetos complexos, e também resulta em uma matriz cheia, cujo tratamento requer uma grande quantidade de memória. Isto é particularmente verdade para aplicações tridimensionais.

A aplicação do MoM em problemas de eletromagnetismo tornou-se consagrada a partir dos trabalhos de Richmond [14] em 1965 e de Harrington [15] em 1967. Embora a concepção e aplicação do conceito central da técnica não seja recente, diferentes aplicações e novos algoritmos [1], [16] [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23] e [24] para tornar o método mais preciso e eficiente têm surgido com muita constância, demonstrando que essa é uma área de pesquisa ainda muito promissora.

Problemas envolvendo espalhadores filamentares são aqueles constituídos por elementos com diâmetro muito menor do que seu comprimento. Atualmente existem diferentes geometrias de estruturas filamentares utilizadas em problemas práticos de espalhamento eletromagnético, dentre as mais importantes pode-se destacar as circulares, helicoidais, retangulares, elípticas e os dipolos [25]. Uma vez os problemas envolvendo essas geometria são do tipo aberto, o MoM é o método mais utilizando.

Para análise do espalhamento eletromagnético por estruturas filamentares utilizando o MoM, embora existam soluções consagradas disponíveis na literatura, como a solução de uma aproximação da Equação Integral do Campo Elétrico (*Electric Field Integral Equaquation* - EFIE), conhecida como Equação de *Pockligton* [25], [26] e também alguns algoritmos comerciais como o *Nec*® [27] e *Mininec*® [28], essas soluções e implementações ainda apresentam restrições e limitações de uso. Assim novas instigações ainda tem sido realizadas [29], [30], [31], [32] e [33]. Os principais fatores que motivam as atuais pesquisas são a utilização da EFIE sem aproximações, a instigação do emprego de diferentes tipos de funções de base e peso, o desenvolvimento de técnicas eficientes para tratamento das singularidades presentes na solução e a construção de soluções gerais para análise de geometrias filamentares arbitrarias além da investigação de diferentes aplicações práticas.

1.2 Objetivos

O objetivo central desta dissertação é o desenvolvimento do ferramental teórico, analítico e numérico e sua aplicação na análise do espalhamento eletromagnético por estruturas condutoras filamentares de geometria arbitrária, como por exemplo, loops, dipolos, espirais, dentro outras. Para alcançar este objetivo principal, outros específicos devem ser realizados:

- Desenvolvimento do modelo teórico e analítico, baseado na EFIE, sendo esta avaliada numericamente pelo MoM, para o cálculo do espalhamento eletromagnético por estruturas

condutoras finalamentares de geometria arbitrária;

- Construção do algoritmo, empregando a modelagem desenvolvida, realizada utilizando o *software Matlab*®;
- Validação dos modelos teórico, analítico e numérico a partir de comparações dos resultados obtidos com aqueles gerados pelo *software* $4Nec2$®;
- Aplicação do algoritmo desenvolvido na avaliação de um modelo preliminar de um sistemas de transmissão de energia sem fio composto de dois elementos filamentares.

Este trabalho se diferencia de outros disponíveis na literatura devido aos seguintes aspectos:

- Utilização da EFIE, sem aproximações, para cálculo do espalhamento eletromagnético por estruturas filamentares empregando o MoM.
- Escolha de funções de base adequadas para a representação da corrente nos filamentos. Neste trabalho são utilizadas funções de base triangulares. Este tipo de função garante uma boa representação do comportamento da corrente e conduz à equações integrais relativamente simples.
- Escolha de funções de peso apropriadas para garantir a precisão e convergência da análise numérica. Para essa função também são utilizadas funções triangulares.
- Desenvolvimento de um tratamento, que combina a utilização de quadraturas Gaussianas, soluções analíticas e a validação da integral elíptica do primeiro tipo empregando à Média Aritmética Geométrica (Arithmetic Geometric Mean - AGM) [34], para as singularidades presentes na EFIE avaliada numericamente através do MoM.
- Desenvolvimento de uma modelagem matemáticas aplicável a estruturas filamentares gerais, isto é, como geometria arbitrária.

1.3 Organização do Texto

Este trabalho é composto por quatro capítulos incluindo este introdutório. No Capitulo 2 é apresentada a técnica para avaliação do espalhamento eletromagnético para estruturas filamentares. A análise acurada destas estruturas é efetuada por um algoritmo baseado na EFIE juntamente com as condições de contorno apropriadas avaliadas numericamente pelo MoM. O modelo de excitação implementado é o Gerador de Função Delta. Para representação das correntes utilizam-se funções de base triangulares. Utilizando a técnica de *Garlekin* as funções de peso utilizadas também são funções triangulares. Avalia-se também as singularidades presentes nas integrais que compõem a matriz do MoM. Esta técnica é baseada nas definições de integrais elípticas do primeiro tipo e também a aplicação da AGM para avaliação destas e finalmente são apresentadas expressões para o cálculo dos campos nas regiões de campo próximo e distante.

No Capítulo 3 são apresentados todos os resultados obtidos empregando a técnica desenvolvida. Inicialmente, são avaliados elementos filamentares lineares e os resultados obtidos

(distribuição de corrente e campos nas regiões de campo próximo e distante) são comparados com aqueles gerados pelo *software* $4Nec2^{®}$. Neste capítulo são apresentados também resultados para outras geometrias como loop e espiral.

Finalmente no Capítulo 4 são apresentadas as conclusões deste trabalho juntamente com as sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Avaliação do Espalhamento Eletromagnético para Estruturas Filamentares

Este capítulo apresenta o ferramental desenvolvido para avaliação do espalhamento eletromagnético por estruturas filamentares CEP (Condutor Elétrico Perfeito). Para tanto é empregada a EFIE avaliada numericamente através do MoM juntamente com as condições de contorno apropriadas. Inicialmente é apresentado o procedimento para o cálculo da distribuição de corrente nas estruturas filamentares sob análise, assim como a técnica desenvolvida para remoção das singularidades presentes na EFIE. Uma vez obtidas as correntes estas são então empregadas no cálculo dos campos nas regiões de campo próximo e distantes.

2.1 Geometria do Problema Filamentar

Neste trabalho é desenvolvida a modelagem matemática para avaliação do espalhamento eletromagnético por estruturas filamentares CEP de geometria arbitrária, isto é, por exemplo, dipolo, conjunto de dipolos, loops, espirais, etc. Assim para representar essas estruturas, seja o filamento de comprimento, L, e raio, a, ilustrado pela Figura 2.1, o qual é descrito por meio de um determinado número de segmentos. Para avaliação da geometria apresentada é conveniente definir os vetores $\hat{t}$, vetor unitário na direção do filamento, e $\hat{n}$, vetor unitário normal ao segmento, conforme ilustrado.

O vetor unitário $\hat{t}$ é definido por:

$$\hat{t} = \frac{\Delta x}{\Delta}\hat{x} + \frac{\Delta y}{\Delta}\hat{y} + \frac{\Delta z}{\Delta}\hat{z}, \tag{2.1}$$

onde, Δ_x, Δ_y e Δ_z, são as projeções do segmento de tamanho Δ sobre os eixos x, y e eixo z respectivamente. Também é conveniente apresentar as seguintes relações para ângulos θ e ϕ:

$$\cos(\phi) = \frac{\Delta x}{\Delta xy}, \tag{2.2}$$

$$\sin(\phi) = \frac{\Delta y}{\Delta xy}, \tag{2.3}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\Delta z}{\Delta}, \tag{2.4}$$

onde,

$$\Delta xy = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \tag{2.5}$$

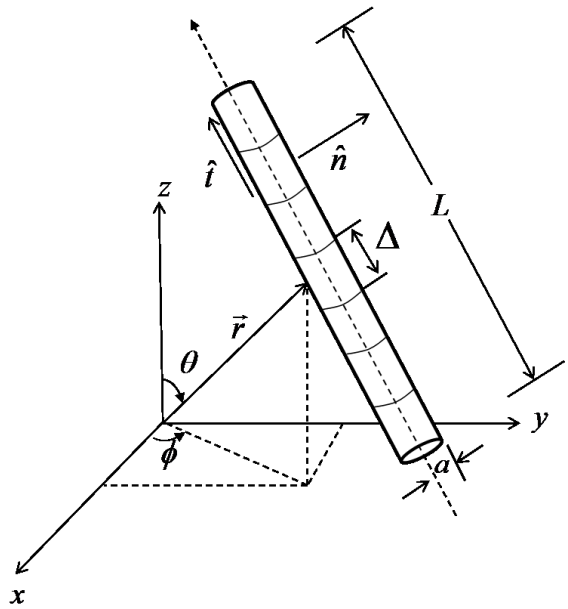


Figura 2.1: Filamento genérico

2.2 EFIE Associada ao Espalhamento por Estruturas Filamentares

Para avaliar o espalhamento eletromagnético associado a estruturas filamentares, em princípio, podem ser empregadas tanto a EFIE como a Equação Integral do Campo Magnético (*Magnetic Field Integral Equation* - MFIE). Porém, essa última não é usualmente empregada nesse tipo de problema, uma vez que ela apresenta uma precisão menor, quando comparada com a

EFIE, e não pode ser aplicada na avaliação de superfícies abertas [26], [27], [28], [35] e [25]. Assim nesse trabalho é empregada somente a EFIE.

Considerando o filamento ilustrado na Figura 2.2, onde μ e ε são os parâmetros constitutivos do meio (permeabilidade magnética e permissividade elétrica respectivamente) e $\vec{E}^i$ é o campo elétrico incidente, $\vec{E}^s$, o campo elétrico espalhado é dado por [25]:

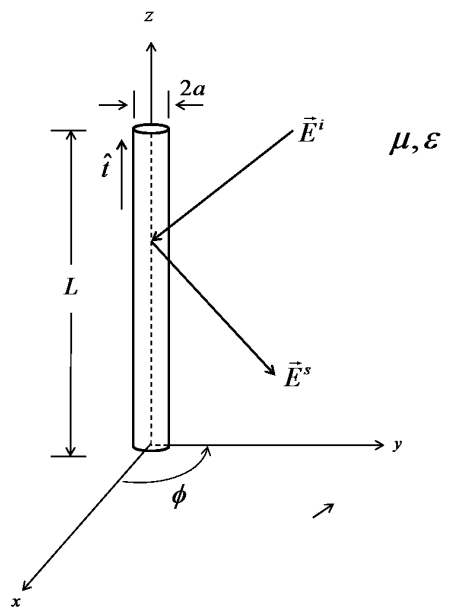


Figura 2.2: Campos elétricos incidente e espalhado por um filamento

$$\vec{E}^s(\vec{r}) = -j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\left[\omega^2\mu\varepsilon\vec{A} + \nabla(\nabla.\vec{A})\right], \tag{2.6}$$

onde, ω é a frequência angular, dada em rad/seg, e o potencial vetor magnético, $\vec{A}$, é dado por:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int\int_{s'}\vec{J}(\vec{r}\,')\frac{e^{-jkR}}{R}ds', \tag{2.7}$$

onde, k é o número de onda, dado por ($k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$), $\vec{J}(\vec{r}\,')$ é a densidade de corrente elétrica na superfície do filamento e R é a distância entre um ponto fonte (ponto de corrente, $\vec{r}\,'$), de coordenada $t'(x', y', z')$, e um ponto de observação , $\vec{r}$, de coordenada $t(x, y, z)$, dada por:

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}. \tag{2.8}$$

Considerando que o filamento ilustrado na Figura 2.2 é muito fino ($a << L$), a distribuição superficial de corrente elétrica, $\vec{J}(\vec{r}\,')$, pode ser considerada como não sendo função do ângulo ϕ, e pode ser reescrita como:

$$\vec{J}(\vec{r}\,') = \frac{I_t(t')}{2\pi a}\hat{t}, \tag{2.9}$$

onde, $I_t(t')$ é a corrente elétrica equivalente localizada na superfície do filamento orientada na direção $\hat{t}$, tangente ao filamento. Assim, substituindo (2.9) em (2.7) obtém-se:

$$A_t(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{t'}\left[\frac{I_t(t')}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-jkR}}{R}d\phi'\right]dt'. \tag{2.10}$$

Como é assumido que o filamento é muito fino, então (2.10) pode, finalmente, ser aproximada e reescrita como [25] e [26]:

$$A_t(\vec{r}) = \mu\int_{t'} I_t(t')G(\vec{r},\vec{r}\,')dt', \tag{2.11}$$

onde, $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ é denominada função de *Green*, definida por:

$$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R}. \tag{2.12}$$

Substituindo (2.11) em (2.6) obtém-se a equação integral do campo elétrico espalhado por estruturas filamentares CEP. Considerando algumas operações vetoriais, a equação (2.6) pode, então ser reescrita como [11] e [25]:

$$\vec{E}^s(\vec{r}) = -\frac{j}{\omega\varepsilon}\int_{t'}\left[k^2 I(t')G(\vec{r},\vec{r}\,') - \nabla' I(t')\nabla' G(\vec{r},\vec{r}\,')\right]dt'. \tag{2.13}$$

Para pontos de observação na superfície do filamento CEP, o campo elétrico tangencial total, E_t^t, se anula. Considerando o meio linear, homogêneo e isotrópico as equações de Maxwell são também lineares, assim :

$$\vec{E}_t^t = \vec{E}_t^i + \vec{E}_t^s = 0, \tag{2.14}$$

onde, E_t^i e E_t^s são as componentes tangenciais de campos elétricos incidente e espalhado, respectivamente. Substituindo (2.13) em (2.14) obtém-se a EFIE associada a estruturas filamentares:

$$\hat{n} \times \vec{E}_t^i(\vec{r}\,') = \hat{n} \times \frac{j}{\omega\varepsilon} \int_{t'} \left(k^2 I(t') G(\vec{r}, \vec{r}\,') - \nabla' I(t') \nabla' G(\vec{r}, \vec{r}\,') \right) dt', \tag{2.15}$$

2.3 Excitação de Problemas Filamentares

Para problemas de radiação por estruturas filamentares a excitação é usualmente realizada de duas formas distintas: Método Gerador de Função de Delta [25] e Método da Corrente Magnética Anelar Equivalente (Gerador de Franja Magnética) [36]. Embora ambos métodos tenham sido implementados, neste trabalho optou-se por apresentar resultados somente para o Método do Gerador de Função de Delta, uma vez que esse gerou resultados mais precisos com um custo computacional menor em relação ao Método Gerador de Franja Magnética, conforme também verificado em [25].

Para utilização do Método Gerador de Função Delta admite-se que a tensão nos terminais de alimentação do filamento tem um valor constante, V, e zero fora dele, conforme ilustrado na Figura 2.3. Assim, o campo elétrico incidente é considerado como sendo devido a uma tensão aplicada no segmento central do filamento de largura Δ [25]:

$$E_t^i = \frac{V}{\Delta} \qquad -\frac{\Delta}{2} \leq t' \leq \frac{\Delta}{2}, \tag{2.16}$$

2.4 Método dos Momentos Aplicado a EFIE Considerando Problemas Filamentares

2.4.1 Introdução ao MoM

Dentre as principais técnicas numéricas utilizadas atualmente na solução de problemas eletromagnéticos destaca-se o Método dos Momentos (MoM) [5], devido principalmente à grande precisão que pode ser alcançada [25]. Essa técnica deve seu nome ao processo de calcular momentos pela multiplicação por funções peso apropriadas e posterior integração [5]. O MoM é um processo bastante geral para resolver equações com operadores lineares (diferenciação, integração ou ambos). A técnica numérica é simples e versátil. A idéia básica é reduzir uma equação funcional a uma uma equação matricial e resolver essa empregando teoria de algebra linear. Suas soluções nos casos práticos são aproximadas, porém com elevada precisão para os propósitos da engenharia [5], [7] e [37].

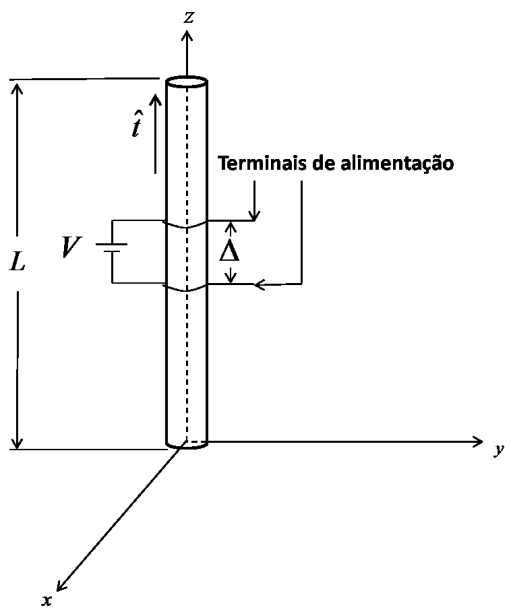


Figura 2.3: Gerador de Função Delta

Uma etapa fundamental na aplicação do MoM é a escolha da função de base a ser empregada. Devem ser escolhidas funções que tem a capacidade de representar precisamente, ou ter a forma da função desconhecida, além de, ao mesmo tempo, minimizar o esforço computacional para seu cálculo [38] e [39]. Existem diversos conjuntos de funções de base, porém, na prática apenas um número limitado é usado. Esses conjuntos podem ser divididos em duas classes: funções de subdomínio e funções de domínio completo. Contudo as funções de subdomínio são as mais comuns, pois podem ser utilizadas sem qualquer conhecimento prévio da natureza da função desconhecida [25]. Assim para aplicação MoM seja [5]:

$$OL(\bar{u}) = f, \tag{2.17}$$

onde, OL é um operador linear, u são funções desconhecidas, f é a fonte ou excitação. Para obtenção da equação matricial, as funções desconhecidas são definidas como sendo a soma de um conjunto de funções independentes conhecidas, g_j, funções de base, multiplicadas por coeficientes desconhecidos, β_j:

$$\bar{u} = \sum_{j}^{N} \beta_j g_j. \tag{2.18}$$

Usando a linearidade do operador OL os coeficientes desconhecidos podem ser levados para fora do operador:

$$\sum_{j}^{N} \beta_j OL(g_j) = f. \tag{2.19}$$

Esses ainda não podem ser determinados porque existem N incógnitas e uma equação funcional. Um conjunto fixo de equações pode ser encontrado através da definição de funções independentes de peso (ou funções de testes), ω_i. A integração das funções de peso com (2.19) pode ser representada como o produto interno de duas funções:

$$\sum_{i}^{N} \beta_j \langle \omega_i, OL(g_j) \rangle = \langle \omega_i, f \rangle, \tag{2.20}$$

onde, o produto interno, $\langle a, b \rangle$, é definido como sendo a integral das duas funções sobre o domínio do operador linear. Desta forma há um número igual de incógnitas e equações independentes, que permitem a solução das amplitudes desconhecidas, β_j. A equação (2.20) é usualmente escrita na forma matricial como:

$$[Z_{i,j}][I_j] = [V_i], \tag{2.21}$$

onde, $[Z_{ij}] = [\langle \omega_i, OL(u_j) \rangle]$, é a matriz de impedância, $[I_j] = [\beta_j]$, é o vetor de coeficientes desconhecidos e $[V_i] = [\langle \omega_i, f \rangle]$, é o vetor de termos independentes.

2.4.2 Funcões de Base e Peso

A escolha de funções de base e peso apropriadas é fundamental para garantir a precisão e a convergência da análise numérica por meio do MoM. Porém o emprego de funções muito sofisticadas pode levar a equações integrais complexas e de difícil tratamento das singularidades. Neste trabalho são utilizadas funções de base triangulares para representação da corrente elétrica $I_t(t')$ da seguinte forma:

$$I_t(t') = \sum_{j=1}^{N} \beta_j T_j(t') \hat{t}', \tag{2.22}$$

onde, $\hat{t}'$ é a direção unitária tangente ao filamento, t' localiza o ponto de fonte e N representa o número de funções triangulares, T_j, empregadas. Cada função triangular, definida pela

equação (2.23), cobre dois segmentos consecutivos, e há superposição de triângulos adjacentes, conforme ilustrado na Figura 2.4.

$$T_j(t') = \begin{cases} (t' - t'_{j-1})/(t'_j - t'_{j-1}) & t'_{j-1} \leq t' \leq t'_j, \\ (t'_{j+1} - t')/(t'_{j+1} - t'_j) & t'_j \leq t' \leq t'_{j+1}, \\ 0 & \textit{qualquer outro } t'. \end{cases} \tag{2.23}$$

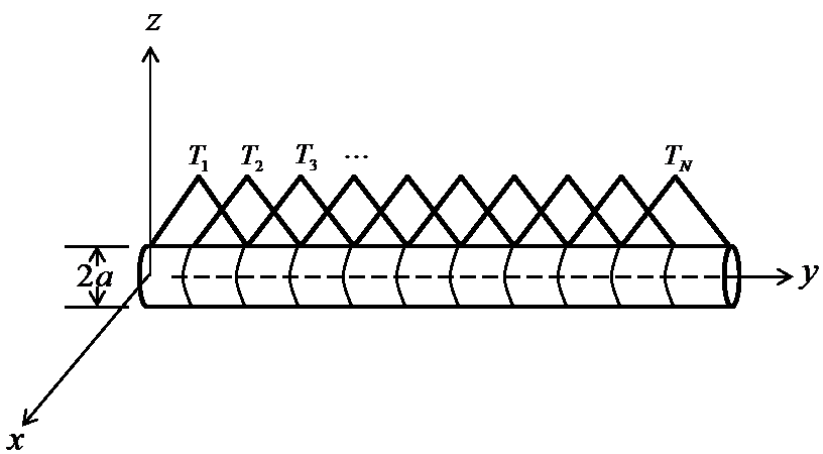


Figura 2.4: Função de base triangular

Para as funções de peso é conveniente o uso de funções que minimizem o esforço computacional e não conduza a equações complexas. Em uma escolha particular, as funções de peso e de base são as mesmas. Esta técnica é conhecida como *método de Galerkin* [40] e é empregada neste trabalho. Assim:

$$\omega(t) = \sum_{i=1}^{N} T_i(t)\hat{t}. \tag{2.24}$$

onde, $\hat{t}$ é a direção unitária tangente ao filamento e t localiza o ponto de observação.

2.4.3 Sistema Matricial

Considerando a avaliação numérica da EFIE definida em (2.15) por meio do MoM, os elementos do sistema matricial apresentado em (2.21) são:

$$Z = \hat{n} \times \frac{j}{\omega\varepsilon} \int_t \int_{t'} \omega(t) \left[k^2 I_t(t')(\vec{r}\,') - \nabla' I_t(t')(\vec{r}\,')\nabla' G(\vec{r}, \vec{r}\,') \right] dt' dt, \tag{2.25}$$

$$= \hat{n} \times \int_t \omega \cdot E_t^i \; dt. \tag{2.26}$$

Substituindo (2.22) e (2.24) em (2.25) os elementos da matriz Z podem ser reescritos como:

$$Z_{ij} = \frac{j}{\omega\varepsilon} \int_t \int_{t'} \left[k^2 T_j(t') T_i(t) \vec{G}(\vec{r}, \vec{r}\,') \hat{t}' \cdot \hat{t} - \left(\frac{\partial T_i(t)}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial T_j(t')}{\partial t'} \right) \vec{G}(\vec{r}, \vec{r}\,') \right] dt' dt, \tag{2.27}$$

onde, $\hat{t}' \cdot \hat{t}$ é:

$$\hat{t}' \cdot \hat{t} = \frac{\Delta_x \Delta'_x}{\Delta\Delta'} + \frac{\Delta_y \Delta'_y}{\Delta\Delta'} + \frac{\Delta_z \Delta'_z}{\Delta\Delta'}. \tag{2.28}$$

Para o vetor V, tem-se:

$$V_i = \int_t T_i(t) E_t^i \; dt. \tag{2.29}$$

2.4.4 Avaliação Numérica da Matriz Z e Vetor V

Nesta seção é feita a avaliação numérica dos elementos da matriz impedância, Z, e do vetor de excitação, V, apresentadas na Seção 2.4.3. Para avaliação rigorosa das integrais presentes na equação (2.27) é proposta uma mudança apropriada de variáveis, afim de reduzir a complexidade numérica. Asssim as coordenadas t e t' são parametrizadas em função das variáveis α e α', respectivamente, da seguinte forma:

$$t' = t'_m + \alpha' \frac{\Delta'}{2} \sin(\theta') \cos(\phi'), \tag{2.30}$$

$$t = t_m + \alpha \frac{\Delta}{2} \sin(\theta) \cos(\phi), \tag{2.31}$$

onde, t'_m e t_m são os pontos centrais dos segmentos fonte de tamanho, Δ' , e observador de

tamanho, Δ, respectivamente, $\alpha = \alpha' = 0$ representam os centros dos respectivos segmentos e $\alpha = \alpha' = \pm 1$ representam os extremos. Dessa forma:

$$x' = x'_m + \alpha' \frac{\Delta'}{2} \sin(\theta') \cos(\phi'), \tag{2.32}$$

$$y' = y'_m + \alpha' \frac{\Delta'}{2} \sin(\theta') \sin(\phi'), \tag{2.33}$$

$$z' = z'_m + \alpha' \frac{\Delta'}{2} \cos(\theta'), \tag{2.34}$$

$$x = x_m + \alpha \frac{\Delta}{2} \sin(\theta) \cos(\phi), \tag{2.35}$$

$$y = y_m + \alpha \frac{\Delta}{2} \sin(\theta) \sin(\phi), \tag{2.36}$$

$$z = z_m + \alpha \frac{\Delta}{2} \cos(\theta), \tag{2.37}$$

onde, θ, ϕ, θ' e ϕ' são os ângulos para os segmentos fonte e observação respectivamente, conforme Figura 2.1, x_m, y_m e z_m são as coordenadas do ponto médio do segmento de observação e x'_m, y'_m e z'_m são as coordenadas do ponto médio do segmento fonte. Utilizando os parâmetros α e α' e a definição de função triangular, as funções $T_i(t)$ e $T_j(t')$ e suas derivadas em cada segmento podem ser representadas por:

$$T_j(t') = \frac{1 - (-1)^{if} \alpha'}{2}, \tag{2.38}$$

$$T_i(t) = \frac{1 - (-1)^{io} \alpha}{2}, \tag{2.39}$$

$$\frac{\partial T_j(t')}{\partial t'} = \frac{-(-1)^{if}}{\Delta}, \tag{2.40}$$

$$\frac{\partial T_i(t)}{\partial t} = \frac{-(-1)^{io}}{\Delta}, \tag{2.41}$$

os índices if e io são iguais a 1 e 2 para os meios triângulos da esquerda e direita (segmentos fontes e observação), respectivamente, conforme representado na Figura 2.5. No seguimento em destaque tem-se um meio triângulo a esquerda, T_1, e um meio triângulo a direita T_2.

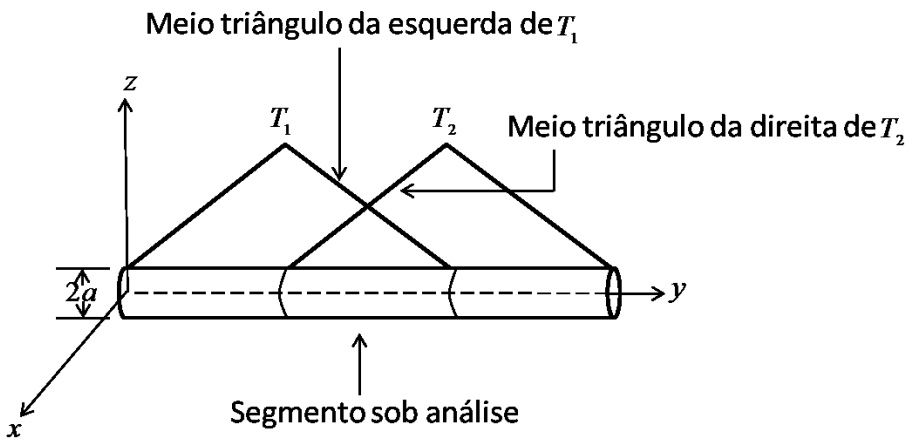


Figura 2.5: Funções triangulares sob um segmento

Utilizando as equações (2.30)-(2.41), as equações (2.27) e (2.29) são reescrita como:

$$Z_{ij} = \frac{j}{\omega\varepsilon}\sum_{io=1}^{2}\sum_{if=1}^{2}\left\{\left[\frac{k^2}{16}\left(\Delta_x\Delta'_x + \Delta_y\Delta'_y + \Delta_z\Delta'_z\right)(G_1+G_2+G_3+G_4)\right] - \frac{\Delta\Delta'}{4}G_5\right\}, \tag{2.42}$$

$$V_i = \sum_{io=1}^{2}\int_{-1}^{1}\left[\left(\frac{1-(-1)^{io}\alpha}{2}\right)E_t^i\right]d\alpha, \tag{2.43}$$

onde,

$$G_1 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} G(\vec{r},\vec{r}\,')d\alpha d\alpha', \tag{2.44}$$

$$G_2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[-(-1)^{if}\right] \alpha G(\vec{r},\vec{r}\,')d\alpha d\alpha', \tag{2.45}$$

$$G_3 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[-(-1)^{io}\right] \alpha' G(\vec{r},\vec{r}\,')d\alpha d\alpha', \tag{2.46}$$

$$G_4 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (-1)^{io}(-1)^{if} \alpha\alpha' G(\vec{r},\vec{r}\,')d\alpha d\alpha', \tag{2.47}$$

$$G_5 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[(-1)^{io}(-1)^{if}\right] G(\vec{r},\vec{r}\,')d\alpha d\alpha'. \tag{2.48}$$

A avaliação numérica da integral presente na equação (2.43) é realizada utilizando uma quadratura Gaussiana de 3 pontos. A avaliação numérica das integrais G_1 a G_5 é apresentada na Seção 2.5.

2.5 Avaliação Numérica das Integrais

A avaliação numérica das integrais nas equações (2.44)-(2.48) apresentam singularidades da ordem $1/R$ sempre que o ponto de observação, $\vec{r}$, está muito perto do ponto fonte, $\vec{r}'$, o que conduz a resultados imprecisos e requer um tratamento mais criterioso. Assim, nesse trabalho é desenvolvido um procedimento para avaliação dessas integrais baseado nas técnicas apresentadas em [1], [16], [28] e [41]. Nesse procedimento, para os casos em que as integrais não apresentam singularidade, a avaliação numérica é inteiramente conduzida utilizando quadraturas Gaussianas. Para os casos em que as singularidades estão presentes, é empregado um tratamento especial que combina a utilização de quadraturas Gaussianas e soluções analíticas, assim como, a solução da integral elíptica de primeiro tipo empregando AGM [34]. Assim, a avaliação numérica associada a integral geral (2.27), nesse trabalho, é realizada considerando três situações distintas, cujo método a ser empregado é descrito nas Seções 2.5.1, 2.5.2 e 2.5.3. Para seleção do método mais apropriado a ser empregado a um par de segmentos fonte e observação específico, define-se:

$$R_c = \sqrt{(x_m - x'_m)^2 + (y_m - y'_m)^2 + (z_m - z'_m)^2}, \tag{2.49}$$

$$C_i = 1.5\Delta, \tag{2.50}$$

$$C_s = 2.0\Delta, \tag{2.51}$$

onde, R_c é a distância entre os pontos centrais dos segmentos fonte e observação, C_i e C_s, são constantes obtidas nesse trabalho, a partir das simulações realizadas, de forma a garantir que o erro médio para distribuição corrente, que é definido na Seção 3.1, não ultrapasse 7%.

2.5.1 Método Normal

Para o caso onde os segmentos observação e fonte são distantes entre si, não existe o problema de singularidade, sendo assim a solução numérica das integrais apresentadas nas equações (2.44)-(2.48) é inteiramente realizada utilizando quadraturas Gaussianas. Este método é empregado sempre que:

$$R_c \geq C_s. \tag{2.52}$$

2.5.2 Método Próximo

Naquelas situações onde o segmento fonte e observação estão próximos, a integral tende à singularidade, sendo assim necessária uma análise especial. Dessa forma, o método descrito nessa seção é empregado sempre que:

$$C_i < R_c < C_s. \tag{2.53}$$

Para solução utilizando esse método, emprega-se quadratura Gaussiana para as integrais em α e uma solução analítica para as integrais em α', que podem ser extraídas das equações (2.44)-(2.48) e reescritas como [1] e [16] :

$$G^a = \int_{-1}^{1} \frac{e^{-jkR}}{R} d\alpha' = \int_{-1}^{1} \left(\frac{e^{-jkR} - 1}{R} \right) d\alpha' + \int_{-1}^{1} \frac{1}{R} d\alpha' = G_1^a + G_2^a, \tag{2.54}$$

$$G^b = \int_{-1}^{1} \alpha' \frac{e^{-jkR}}{R} d\alpha' = \int_{-1}^{1} \alpha' \left(\frac{e^{-jkR} - 1}{R} \right) d\alpha' + \int_{-1}^{1} \alpha' \frac{1}{R} d\alpha' = G_1^b + G_2^b. \tag{2.55}$$

As integrais G_1^a e G_1^b não apresentam problema de singularidade e podem ser avaliadas usando somente quadratura Gaussiana. Neste caso é conveniente usar a relação [16]:

$$\frac{e^{-jkR} - 1}{R} = \frac{\sin\left(\frac{kR}{2}\right)}{\left(\frac{R}{2}\right)} \left[\sin\left(\frac{kR}{2}\right) + j\cos\left(\frac{kR}{2}\right) \right]. \tag{2.56}$$

Para avaliar as integrais G_2^a e G_2^b é conveniente definir alguns parâmetros para simplificar a notação, assim:

$$R = \left[\left(\frac{\alpha' \Delta'}{2} \right)^2 + \alpha' \Delta' \alpha_0 + d_m^2 \right], \tag{2.57}$$

onde,

$$d_m^2 = (x - x'_m)^2 + (y - y'_m)^2 + (z - z'_m)^2, \tag{2.58}$$

$$\alpha_0 = \sin(\theta') \left[\cos(\phi')(x'_m - x) + \sin(\phi')(y'_m - y) \right] + \cos(\theta')(z'_m - z). \tag{2.59}$$

Utilizando (2.57), a integração de G_2^a resulta em:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{R} d\alpha' = \frac{2}{\Delta'} I_1, \tag{2.60}$$

onde,

$$I_1 = ln(\alpha_1) - ln(\alpha_2). \tag{2.61}$$

$$\alpha_1 = |\alpha_0| + \frac{\Delta'}{2} + \alpha_3, \tag{2.62}$$

$$\alpha_2 = |\alpha_0| - \frac{\Delta'}{2} + \alpha_4, \tag{2.63}$$

$$\alpha_3 = \left[\left(|\alpha_0| + \frac{\Delta'}{2}\right)^2 + d^2\right]^{1/2}, \tag{2.64}$$

$$\alpha_4 = \left[\left(|\alpha_0| - \frac{\Delta'}{2}\right)^2 + d^2\right]^{1/2}, \tag{2.65}$$

$$d^2 = dm^2 - \alpha_0^2. \tag{2.66}$$

Para resolver o problema de singularidade associado a equação integral G_2^b, aplica-se o mesmo procedimento, dessa forma, obtém-se:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\alpha'}{R} d\alpha' = |\alpha_0| \left\{ \frac{2\Delta'}{\alpha_4 + \alpha_5} - \frac{4}{(\Delta')^2} I_1 \right\}. \tag{2.67}$$

2.5.3 Método Coincidente

Esse método é aplicado sempre que os segmentos observação e fonte são coincidente, ou quando esses pontos são muitos próximos, e as integrais tendem a singularidade. Assim, emprega-se o Método Coincidente sempre que:

$$R_c \leq C_i. \tag{2.68}$$

A avaliação das equações (2.44)-(2.48), utilizando o Método Coincidente é realizada empregando um procedimento semelhante ao desenvolvido em [1] e [28]. Assim a função de Green, $G(\vec{r},\vec{r}\,')$, nessas equações é redefinida como uma média ao longo da circunferência dos segmentos fonte e observação:

$$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma}\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma'}\frac{e^{-jkR_1}}{4\pi R_1}d\gamma' d\gamma, \tag{2.69}$$

onde, γ e γ' são os ângulos ao longo da circunferência do filamento fonte e observação, respectivamente, e R_1 é:

$$R_1^2 = R^2 + (a+a')^2 - 4aa'\cos\left(\frac{\gamma-\gamma'}{2}\right). \tag{2.70}$$

Considerando a mudança de variável $(\frac{\gamma-\gamma'}{2}) \longrightarrow (\varphi - \frac{\pi}{2})$ [28], a equação (2.69) pode ser reescrita como:

$$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi^2 R_2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{e^{-jkR_1}}{\sqrt{1-\sigma^2\sin^2(\varphi)}}d\varphi, \tag{2.71}$$

onde,

$$\sigma^2 = \frac{aa'}{R_2^2}, \tag{2.72}$$

$$R_2 = \sqrt{R^2 + (a+a')^2}. \tag{2.73}$$

A equação (2.71) pode ser separada em duas parcelas [28]:

$$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{2\pi^2 R_2}\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{1-\sigma^2\sin^2(\varphi)}}d\varphi + \frac{1}{8\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-jkR_1}-1}{R_1}d(\gamma'-\gamma), \tag{2.74}$$

onde, o primeiro termo da equação (2.74) tem a forma de uma integral elíptica do primeiro tipo [42]. Assim (2.74) pode ser reescrita como:

$$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{\sigma}{4\pi^2\sqrt{aa'}}F\left(\frac{\pi}{2},\sigma\right) + \frac{1}{8\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-jkR_1}-1}{R_1}d(\gamma'-\gamma) = G_s + G_{ns}, \tag{2.75}$$

onde, o termo G_{ns}, na equação (2.75) não apresenta singularidade, e considerando que o filamento é muito fino, pode ser aproximado por [28]:

$$G_{ns} = \frac{e^{-jkR_3}-1}{4\pi R_3}, \tag{2.76}$$

sendo,

$$R_3 = \sqrt{R^2 + a^2 + a'^2}. \tag{2.77}$$

Para avaliação numérica da equação (2.76) utilizando quadratura Gussianas, é conveniente, novamente, utilizar a seguinte relação:

$$\frac{e^{-jkR_3}-1}{4\pi R_3} = -\frac{\sin\left(\frac{kR_3}{2}\right)}{4\pi\left(\frac{R_3}{2}\right)}\left[\sin\left(\frac{kR_3}{2}\right) + j\cos\left(\frac{kR_3}{2}\right)\right]. \tag{2.78}$$

O primeiro termo da equação (2.75), representado por G_s, apresenta uma integral elíptica do primeiro tipo, $F\left(\frac{\pi}{2},\sigma\right)$, que nesse trabalho é avaliada empregando a Média Aritmética Geométrica. A AGM é um processo iterativo, cujo algoritmo é apresentado na Figura 2.6, para o cálculo desse tipo de integral. Esse procedimento conduz a resultados altamente precisos mesmo para $\sigma \to 1$ (Singularidade) [43].

Variáveis

$a_0 = 1;$

$b_0 = \sqrt{1-\sigma^2};$

$c_0 = \left(1-\sigma^2\right)/b_0;$

$d_0 = \sigma^2/\left(1-\sigma^2\right);$

início

$f_0 = 0;$

$i_0 = 0.5;$

$s_0 = t_0\sqrt{a_0 - b_0};$

repita

$a_{n+1} = \left(a_n + b_n\right)/2;$

$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n};$

$i_{n+1} = 2i_n;$

$s_{n+1} = s_n + i_{n+1}\sqrt{a_{n+1} - b_{n+1}};$

$c_{n+1} = \left(b_{n+1}/4a_{n+1}\right)\left(2 + c_n + 1/c_n\right);$

$d_{n+1} = \left(c_n d_n + f\right)/\left(1 + c_n\right);$

$f_{n+1} = \left(d_n + f_n\right)/2;$

até $|a_{n+1} - b_{n+1}| < 0.00001$ algoritmo converge

Figura 2.6: Algoritmo AGM

onde,

$$F\left(\frac{\pi}{2}, \sigma\right) = \frac{\pi}{2a_{n+1}}. \tag{2.79}$$

Uma vez, obtido os valores de G_s e G_{ns} esses são aplicados as equações (2.44)-(2.48) para avaliação das integrais em α e α' utilizando quadraturas Gaussianas.

2.6 Cálculo de Campo

Os campos elétrico, $\vec{E}$, e magnético, $\vec{H}$, apresentam um comportamento diferenciado no espaço, que é função da distância, $|\vec{r}|$, do ponto de observação do campo ao elemento gerador, ou fonte, desse campo. Esse comportamento diferenciado depende especificamente da relação entre $|\vec{r}|$ e o comprimento de onda (λ). Assim são definidas duas regiões para o processo de irradiação denominadas região de campo próximo e campo distante.

Para determinar os valores de campo em qualquer ponto do espaço é necessário, primeiramente, conhecer a distribuição espacial de corrente na estrutura irradiante do mesmo. Assim, uma vez, estabelecido o processo para determinação de corrente, $I_t(t')$, nessa seção, essa é utilizada para determinar os campos nas regiões de campo próximo e distante.

2.6.1 Campo na Região de Campo Próximo

A região do campo próximo é a região do espaço $\Re^3$ na qual a distância, $|\vec{r}|$, entre o irradiador e qualquer ponto do espaço, $p(x, y, z)$, é tal que $|\vec{r}| << \lambda$. Nesse caso os campos elétrico e magnético irradiados por um estrutura filamentar é dado por [3], [4] e [11]:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{-j}{4\pi\omega\varepsilon} \int_{t'} \left[k^2 \vec{I}_t(t') G(\vec{r}, \vec{r}\,') + \left(\vec{I}_t(t') \cdot \nabla' \right) \nabla' G(\vec{r}, \vec{r}\,') \right] dt', \tag{2.80}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{t'} \vec{I}_t(t') \times \nabla' G(\vec{r}, \vec{r}\,'), \tag{2.81}$$

onde, $G(\vec{r}, \vec{r}\,')$ é dado pela equação (2.12). Uma vez obtida a distribuição de corrente, $I_t(t')$, dada pela equação (2.22), as componentes de campo elétrico e magnético nas direções x, y e z, respectivamente, associadas a uma estrutura filamentar de geometria arbitrária são:

$$E_x(\vec{r}) = \frac{-jnk^2}{4\pi} \int_{t'} I_t(t') \left\{ (Ge - Gh) \frac{\Delta'_x}{\Delta'} + k^2 (\hat{t} \cdot \hat{R})(x - x') Geh \right\} dt', \tag{2.82}$$

$$E_y(\vec{r}) = \frac{-jnk^2}{4\pi} \int_{t'} I_t(t') \left\{ (Ge - Gh) \frac{\Delta'_y}{\Delta'} + k^2 (\hat{t} \cdot \hat{R})(y - y') Geh \right\} dt', \tag{2.83}$$

$$E_z(\vec{r}) = \frac{-jnk^2}{4\pi} \int_{t'} I_t(t') \left\{ (Ge - Gh) \frac{\Delta'_z}{\Delta'} + k^2 (\hat{t} \cdot \hat{R})(z - z') Geh \right\} dt', \tag{2.84}$$

$$H_x(\vec{r}) = \frac{k^3}{4\pi}\int_{t'} I_t(t')\left[\frac{\Delta'_y}{\Delta'}(z-z') - \frac{\Delta'_z}{\Delta'}(y-y')\right] Ghdt', \tag{2.85}$$

$$H_y(\vec{r}) = \frac{k^3}{4\pi}\int_{t'} I_t(t')\left[\frac{\Delta'_z}{\Delta'}(x-x') - \frac{\Delta'_x}{\Delta'}(z-z')\right] Ghdt', \tag{2.86}$$

$$H_z(\vec{r}) = \frac{k^3}{4\pi}\int_{t'} I_t(t')\left[\frac{\Delta'_x}{\Delta'}(y-y') - \frac{\Delta'_y}{\Delta'}(x-x')\right] Ghdt', \tag{2.87}$$

onde,

$$\hat{t}\cdot\hat{R} = (x-x')\frac{\Delta'_x}{\Delta'} + (y-y')\frac{\Delta'_y}{\Delta'} + (z-z')\frac{\Delta'_z}{\Delta'}, \tag{2.88}$$

$$Ge = \frac{e^{-jkR}}{kR}, \tag{2.89}$$

$$Gh = \left[\frac{1+jkR}{(kR)^2}\right] Ge, \tag{2.90}$$

$$Geh = \frac{3Gh - Ge}{(kR)^2}. \tag{2.91}$$

2.6.2 Campo na Região de Campo Distante

Neste caso considera-se uma região do espaço $\Re^3$ na qual a distância, $|\vec{r}|$, entre um irradiador e qualquer ponto, $p(x,y,z)$, é tal que $(r >> \lambda)$. Assim, o campo elétrico irradiado por uma estrutura filamentar posicionado no centro do sistemas de coordenadas é dada por [3], [4] e [11]:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{-j\omega\mu}{4\pi}\right)\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right)\int_{t'}\left\{I_t(t') - \left[I_t(t')\cdot\hat{r}\right]\hat{r}\right\} e^{jk\vec{r}\cdot\vec{r}\,'} dt'. \tag{2.92}$$

Uma vez que é mais usual tratar problemas de campo distante utilizando coordenadas esféricas, defini-se através da expansão (2.92) as componentes do campo distante nas direções θ, ϕ e r, que são dados por:

$$E_\theta = \frac{-j\omega\mu}{4\pi}\int_{t'} e^{jk\vec{r}\cdot\vec{r}\,'} I_t(t')\left\{cos(\theta)\left[cos(\phi)\frac{\Delta'_x}{\Delta'} + sen(\phi)\frac{\Delta'_y}{\Delta'}\right] - sen(\theta)\frac{\Delta'_z}{\Delta'}\right\}dt', \tag{2.93}$$

$$E_\phi = \frac{-j\omega\mu}{4\pi}\int_{t'} e^{jk\vec{r}\cdot\vec{r}\,'} I_t(t')\left[cos(\phi)\frac{\Delta'_y}{\Delta'} - sen(\theta)\frac{\Delta'_x}{\Delta'}\right]dt', \tag{2.94}$$

$$E_r = 0, \tag{2.95}$$

onde,

$$\vec{r}\cdot\vec{r}\,' = x'sen(\theta)cos(\phi) + y'sen(\theta)sen(\phi) + z'cos(\theta), \tag{2.96}$$

2.7 Conclusões Parciais

Neste capítulo foi desenvolvido a modelagem matemática para resolução de problemas de espalhamento eletromagnético por estruturas filamentares arbitrarias. Uma breve explanação sobre MoM e uma breve discussão sobre funções de base e peso foi realizada. Foi apresentado também o método de excitação Gerador de Função Delta, utilizado para determinar o campo incidente. Foi utilizado um método de mudança de variáveis para avaliar as integrais presentes na matriz Z e no vetor V. Foi também apresentado um método para tratamento das singularidades presentes nas integrais associadas a solução e também, obteve-se as equações para cálculo dos campos nas regiões de campo próximo e distantes.

Capítulo 3

Estudo de Casos

A formulação proposta para o cálculo da distribuição de corrente e de campos nas regiões de campos próximo e distante, apresentada no Capítulo 2 foi implementada em um código computacional, desenvolvido no *software* $Matlab^{®}$. Neste capítulo inicialmente defini-se erro médio, que é utilizado para análise dos resultados, e alguns parâmetros para avaliação das integrais e a seguir são apresentados os resultados obtidos na avaliação de diferentes geometrias filamentares, isto é, dipolo simples, conjunto de dipolos, *loop* e espiral. A precisão da formulação é verificada através da comparação dos resultados obtidos com aqueles gerados a partir do *software* $4Nec2^{®}$. Uma vez confirmada a precisão dos resultados, a formulação desenvolvida é então empregada na avaliação de um sistema constituído de dois *loop*s.

3.1 Cálculo do Erro para Avaliação dos Resultados

Para avaliar os resultados obtidos, conduz-se uma comparação desses com aqueles gerados a partir do *software* $4Nec2^{®}$, empregando o seguinte erro relativo médio:

$$E_{RM} = \frac{100}{N} \times \left[\frac{\sum_j^N \left| X^{MoMLinear}(j) - X^{Nec}(j) \right|}{max \left| X^{Nec}(j) \right|} \right] (\%), \tag{3.1}$$

onde, $X^{MoMLinear}$ e X^{Nec} são os resultados obtidos neste trabalho e aqueles gerados através do $4Nec2^{®}$, respectivamente, e N é o número de pontos considerados. A equação (3.1) é utilizada tanto para o cálculo do erro médio da distribuição de corrente quanto dos campos nas regiões de campos próximo e distante.

Conforme descrito na Seção 2.4.2, neste trabalho são utilizadas funções de base e peso triangulares, assim cada coeficiente desconhecido, β_j, está associado ao centro do respectivo triângulo, T_j, conforme ilustrado na Figura 2.4. Logo cada valor β_j é obtido na extremidade de cada segmento. Porém modelo proposto pelo $4Nec2^{®}$ faz uso de uma interpolação senoidal como função de base e funções de peso do tipo pulso [30], de tal forma que cada coeficiente

desconhecido está associados ao centro do respectivo segmento. Assim para calcular o erro médio de corrente na extremidade de cada segmento, aplica-se uma interpolação linear à distribuição de corrente gerada pelo $4Nec2^{®}$. Ou seja, a cada dois valores de corrente, observados no centro dos respectivos segmentos, aplica-se uma função de primeiro grau para obter o valor de corrente no centro desse intervalo. Sendo assim é possível comparar os valores do MoMlinear com o $4Nec2^{®}$ no mesmo ponto.

3.2 Determinação do Número de Pontos de Integração

Neste trabalho, para avaliação numérica das integrais em α e α', apresentadas nas equações (2.44)-(2.48), são empregadas quadraturas Gaussianas de n_α e $n_{\alpha'}$ pontos, respectivamente, para os três métodos apresentados na Seção 2.5. De forma a definir os valores ótimos de n_α e $n_{\alpha'}$, ou seja, valores que conduzem à resultados precisos sem requerer um custo computacional elevado, investiga-se a distribuição de corrente para o filamento ilustrado na Figura 3.1, onde todos os parâmetros geométricos são apresentados. Para avaliação desse filamento é sempre considerada uma excitação de $1V$ no segmento central do elemento, discretizado em um número ímpar de segmentos.

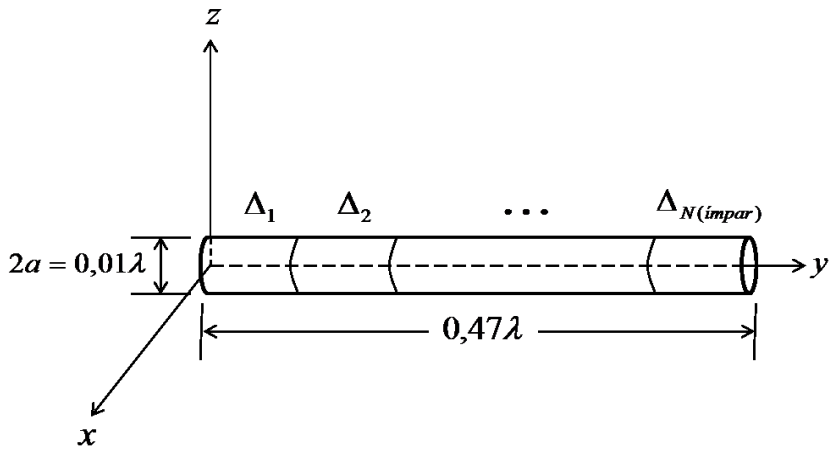


Figura 3.1: Filamento modelo

Inicialmente é investigado o número de pontos de Gauss para aplicação do Método Coincidente. Para esse método, embora a AGM conduza a resultados muito precisos para o cálculo da integral elíptica do primeiro tipo, termo Gs na equação (2.75), até mesmo para regiões muito próximas da singularidade [43] e [44], o emprego do algoritmo apresentado na Figura 2.6 avalia a equação (2.75) sem a extração efetiva da singularidade. Assim, é fundamental a escolha adequada de um par de pontos de Gauss, não coincidentes, para aplicação desse método. Para tanto a estrutura apresentada na Figura 3.1 é avaliada considerando n_α e $n_{\alpha'}$ variando de 2 até 7 para o Método Coincidente. De forma a garantir maior precisão nos resultados para os Métodos Normal e Próximo, defini-se $n_\alpha = n_{\alpha'} = 7$. A Figura 3.2 apresenta o E_{RM} para distribuição de corrente, considerando as possíveis combinações de n_α e $n_{\alpha'}$, e como pode ser verificado a combinação que conduz ao menor erro é $n_{\alpha'} = 2$ e $n_\alpha = 3$.

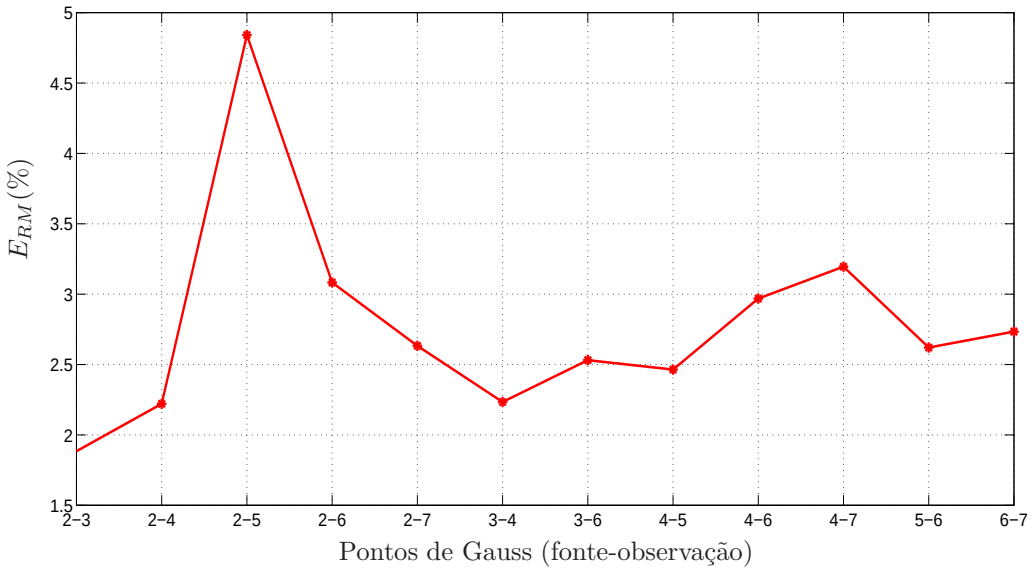


Figura 3.2: Avaliação dos pontos de Gauss para o Método Coincidente

Após a definição do número de pontos de integração para o Método Coincidente, faz-se necessário definir o número de pontos de integração para os Métodos Próximos e Normal. Dessa forma, defini-se $n_{\alpha'} = 2$ e $n_{\alpha} = 3$, para o Método Coincidente, e para os Métodos Próximos e Normal esses são variados de 1 até 7, conforme apresentado na Figura 3.3. Os testes realizados indicam que para as integrais em α e α', utilizar mais que 2 pontos de Gauss não proporciona melhora significativa na precisão dos resultados de correntes. Dessa forma, adota-se para ambos métodos $n_{\alpha} = 3$ e $n_{\alpha'} = 2$, esses valores foram escolhidos de modo a garantir a precisão dos resultados e não serem coincidentes.

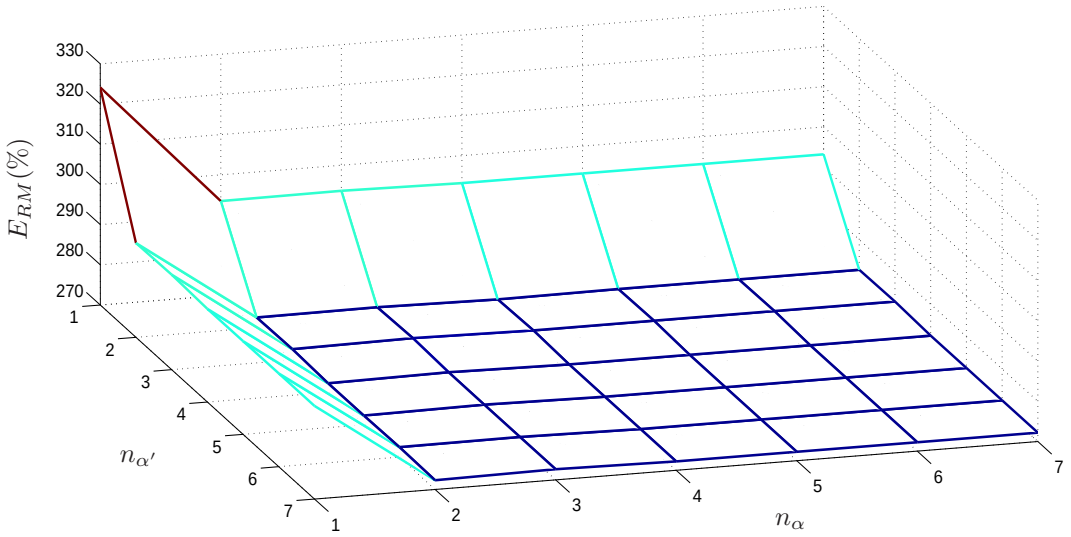
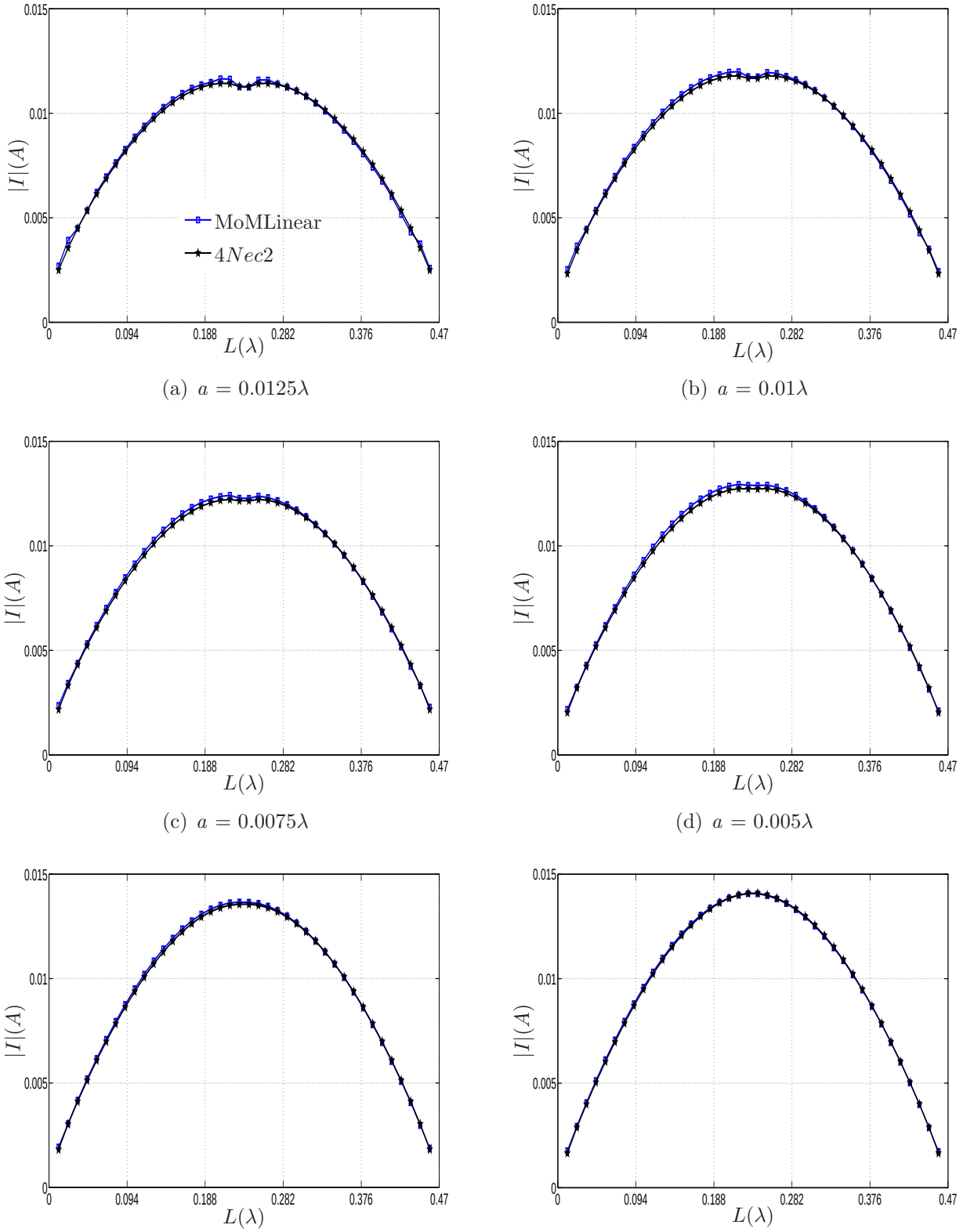


Figura 3.3: Avaliação dos pontos de Gauss para os Métodos Próximo e Normal

3.3 Avaliação da Aproximação para Filamento Muito Fino

Uma das aproximações adotadas na formulação desenvolvida nesse trabalho é que o raio do elemento filamentar sob análise é muito menor que o seu comprimento ($a(\lambda) << L(\lambda)$). É fundamental para garantir a precisão dos resultados gerados pelo MoMLinear estabelecer os limites para os quais essa aproximação é valida. Assim nessa seção é conduzida uma breve investigação com o objetivo de identificar esses limites. Para tanto, é considerado o filamento ilustrado na Figura 3.1, porém, com comprimento $L = 0,47\lambda$. Sabe-se que para o filamento com essa característica a distribuição de corrente é aproximadamente cossenoidal. Assim os valores de raio foram variados até que uma distribuição de corrente mais próxima de uma cossenoidal possível fosse observada ao longo do filamento. Os resultados obtidos pelo MoMLinear e $4Nec2^{®}$ são apresentados na Figura 3.4. Como pode ser verificado, valores de raio maiores que $a = 0.005\lambda$ não conduzem a uma boa aproximação para os resultados obtidos tanto pelo MoMLinear como pelo $4Nec2^{®}$ e para valores de raio menores que $a = 0.005\lambda$, não verifica-se alterações significativas em ambas soluções. Assim, ao longo de todo esse trabalho é adotado o valor de raio $a = 0.005\lambda$.



(a) $a = 0.0125\lambda$

(b) $a = 0.01\lambda$

(c) $a = 0.0075\lambda$

(d) $a = 0.005\lambda$

(e) $a = 0.0025\lambda$

(f) $a = 0.00125\lambda$

Figura 3.4: Distribuição de corrente num filamento de comprimento $L = 0.47\lambda$

3.4 Avaliação da Técnica de Remoção de Singularidade

Para validar a formulação proposta na Seção 2.5, utiliza-se o filamento apresentado na Figura 3.1, considerando diferentes números de segmentos. As análises foram conduzidas utilizando somente o Método Normal (sem remoção de singularidade) e os três métodos apresentados (com remoção de singularidade). Para os casos em que somente o Método Normal é empregado, para evitar problemas de singularidade, desloca-se o ponto de observação para o centro do segmento [25].

Os resultados obtidos de E_{RM} são apresentados na Figura 3.5 e os da distribuição de corrente ao longo do filamento para 13 e 33 segmentos, são apresentados na Figura 3.6. Como pode ser verificado, quando a técnica de remoção de singularidade é aplicada os erros são menores, em especial quando se emprega um número menor de segmentos. Assim essa técnica permite a avaliação de estruturas filamentares empregando um número menor de segmentos, para uma dada precisão.

Para a estrutura sob análise, o número de segmentos foi aumentado até que o valor de E_{RM} da distribuição de corrente fosse menor que 1%, o que foi observado a partir de 41 segmentos. Assim, para garantir uma boa precisão dos resultados adota-se ao longo de todo o trabalho no mínimo 80 seg/λ, o que corresponde, nesse caso, a aproximadamente 40 segmentos.

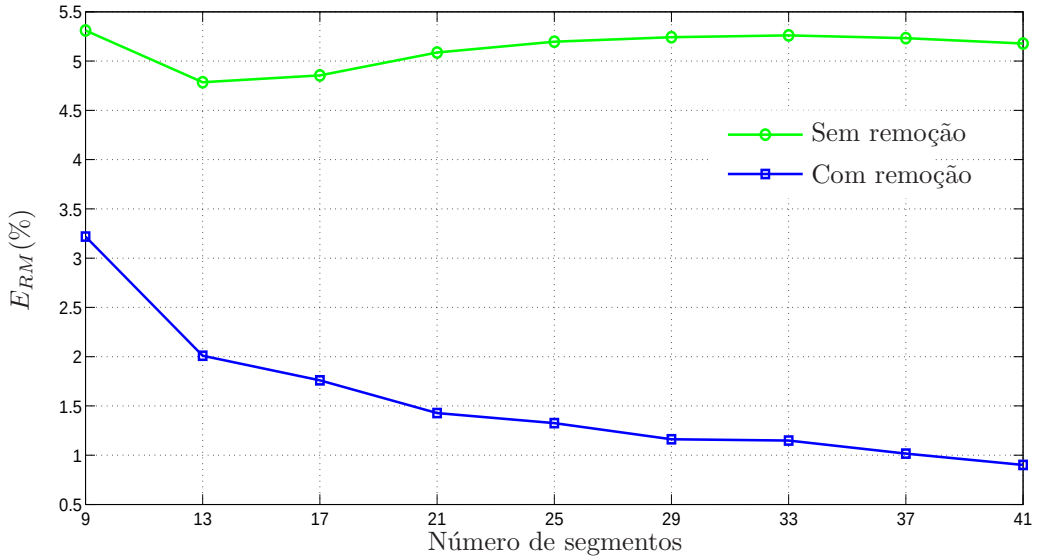
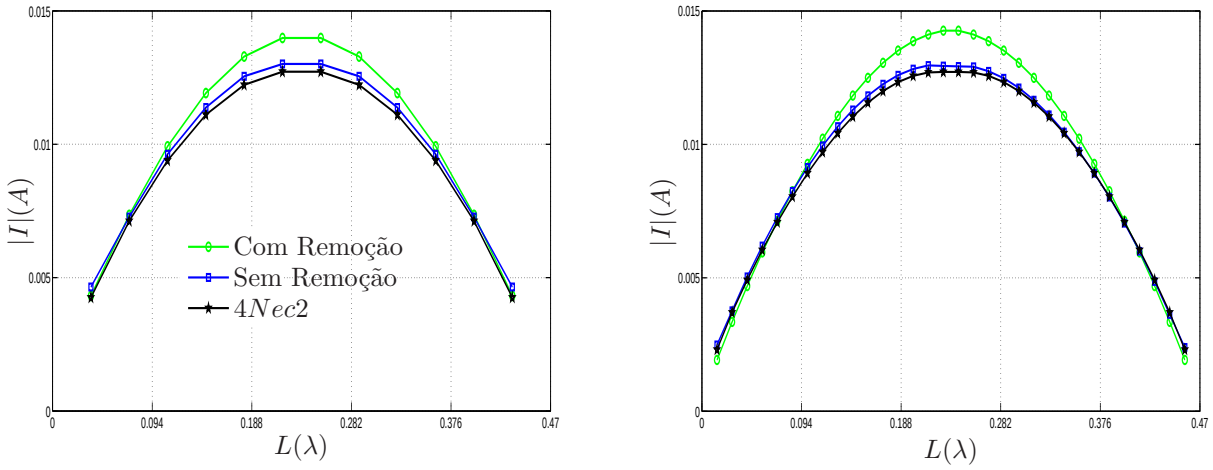


Figura 3.5: E_{RM} da distribuição de corrente: com e sem remoção de singularidade

Como uma análise complementar, para verificar a eficiência do método de remoção de singularidade, na Figura 3.7 é apresentado o número de condicionamento da matriz Z em função do número de segmentos. Conforme pode ser observado o número de condicionamento aumenta na medida que mais segmentos são utilizados. Isso se deve ao fato de que a matriz Z se aproxima de uma matriz singular, uma vez que, as linhas que compõem o sistema linear se tornam mais semelhantes uma das outras. Embora o número de condicionamento aumente quando mais segmentos são empregados, verifica-se a redução do erro, isso sugere que a distribuição de corrente é

melhor representada por um número maior de funções de base. Pode ser verificado que quando o método de remoção de singularidade não é utilizado o número de condicionamento é ligeiramente maior, comprovando assim a eficiência do método de remoção de singularidade desenvolvido e demonstrando que a técnica de remoção não altera, significativamente, as características da matriz Z.



(a) 13 Segmentos (b) 33 Segmentos

Figura 3.6: Distribuição de corrente para filamento de comprimento $L = 0,47\lambda$ utilizando o MoMLinear com e sem remoção de singularidade

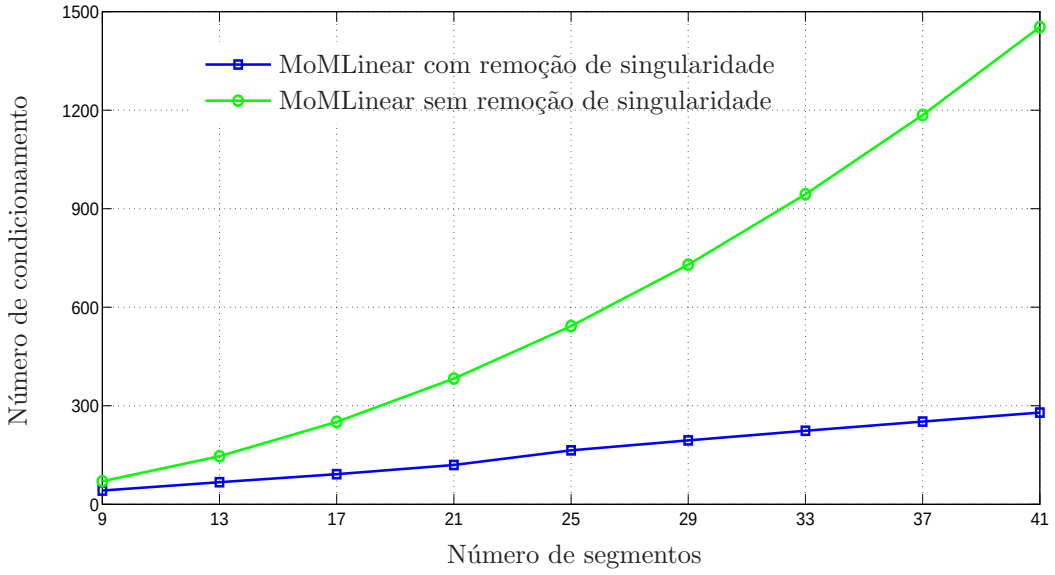


Figura 3.7: Relação número de condicionamento por segmentos para filamento de comprimento $L = 0,47\lambda$

3.5 Avaliação dos Resultados para Diferentes Métodos

Diversos trabalhos têm utilizado a equação (2.15) para tratar problemas de espalhamento eletromagnético por estruturas filamentares, dentre os quais destacam-se [25] e [26]. Assim o objetivo dessa seção é apresentar uma comparação entre os resultados obtidos empregando a modelagem proposta nessa dissertação e outra baseada nas referências [25] e [26], que utiliza a Equação Integral de *Pocklington* (EIP), considerando dois tipos diferentes de funções de base.

As formulações apresentadas em [25] e [26] são aplicáveis somente à problemas filamentares constituídos de um ou mais elementos orientados ao longo do mesmo eixo. Para evitar problemas de singularidade essas formulações consideram que as observações são realizadas nos centros dos filamentos. Nesses trabalhos outra aproximação empregada é considerar que a distribuição de corrente superficial é substituída por uma corrente linear localizada na superfície do filamento, como também é feito nessa dissertação, conforme Seção 2.2. Considerando as restrições e aproximações descritas e o(s) filamento(s) paralelo(s) ao eixo y, a equação (2.15) pode ser reescrita como:

$$\vec{E}_y^i = -\frac{j}{\omega\varepsilon}\int_{-y/2}^{y/2} \vec{I}(\vec{y}')\left[\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) G(\vec{y},\vec{y}')\right] dy. \tag{3.2}$$

A equação (3.2) é a EFIE para problemas lineares, conhecida como a EIP. Uma proposta para avaliação de (3.2) é aproximá-la por [25] e [26]:

$$-j\omega\varepsilon\vec{E}_y^i = \int_{-y/2}^{y/2} \vec{I}(\vec{y}')\frac{e^{-jkR}}{4\pi R}\left[(1+jkR)(2R^2-3a^2)+(kaR)^2\right] dy. \tag{3.3}$$

Os resultados obtidos através do MoMLinear são comparados com aqueles gerados utilizando a EIP, considerando dois tipos de funções de base, triangular e pulso [25] e [26]. Para as análises adota-se o filamento apresentado na Figura 3.1, considerando diferentes números de segmentos. Para o cálculo do campo elétrico incidente, E_i^y, é empregado o método gerador de função delta, descrito na Seção 2.3. As funções triangulares empregadas juntamente com a EIP são as mesmas apresentadas na Seção 2.4.2 , já as funções de base do tipo pulso são inteiramente definidas sobre um único segmento, conforme ilustrado Figura 3.8. A função do tipo pulso é conceitualmente simples e de fácil implementação computacional, é definida com um valor sobre o segmento e zero fora dele:

$$g_n(y') = \begin{cases} 1 & y'_{n-1} \leq y' \leq y'_n, \\ 0 & qualquer\ outro\ y'. \end{cases} \tag{3.4}$$

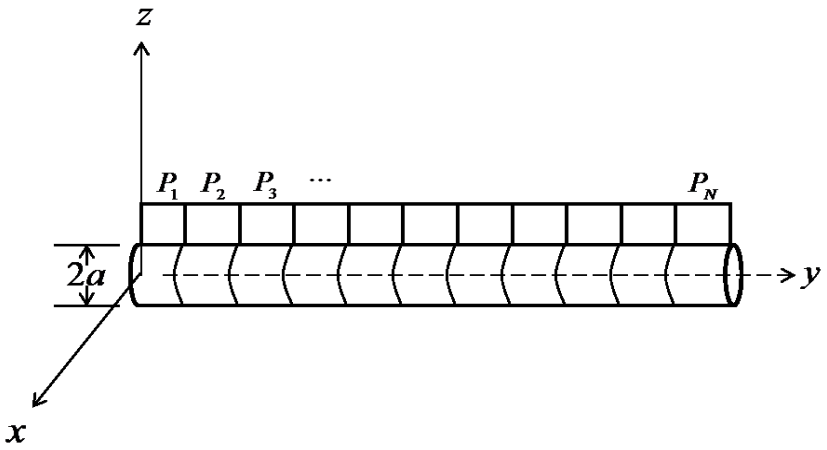


Figura 3.8: Distribuição das funções de base do tipo pulso

Uma vez definido o tipo de função de base a ser utilizado para avaliação da equação (3.3), por meio do MoM essa é imposta no centro dos N segmentos que constituem o elemento. Esse método é conhecido como casamento pontual (*Match-Point*) [25], a partir do qual obtém-se N equações linearmente independentes. A solução desse sistema linear conduz a determinação dos coeficientes, β_j, desconhecidos associados a distribuição de corrente.

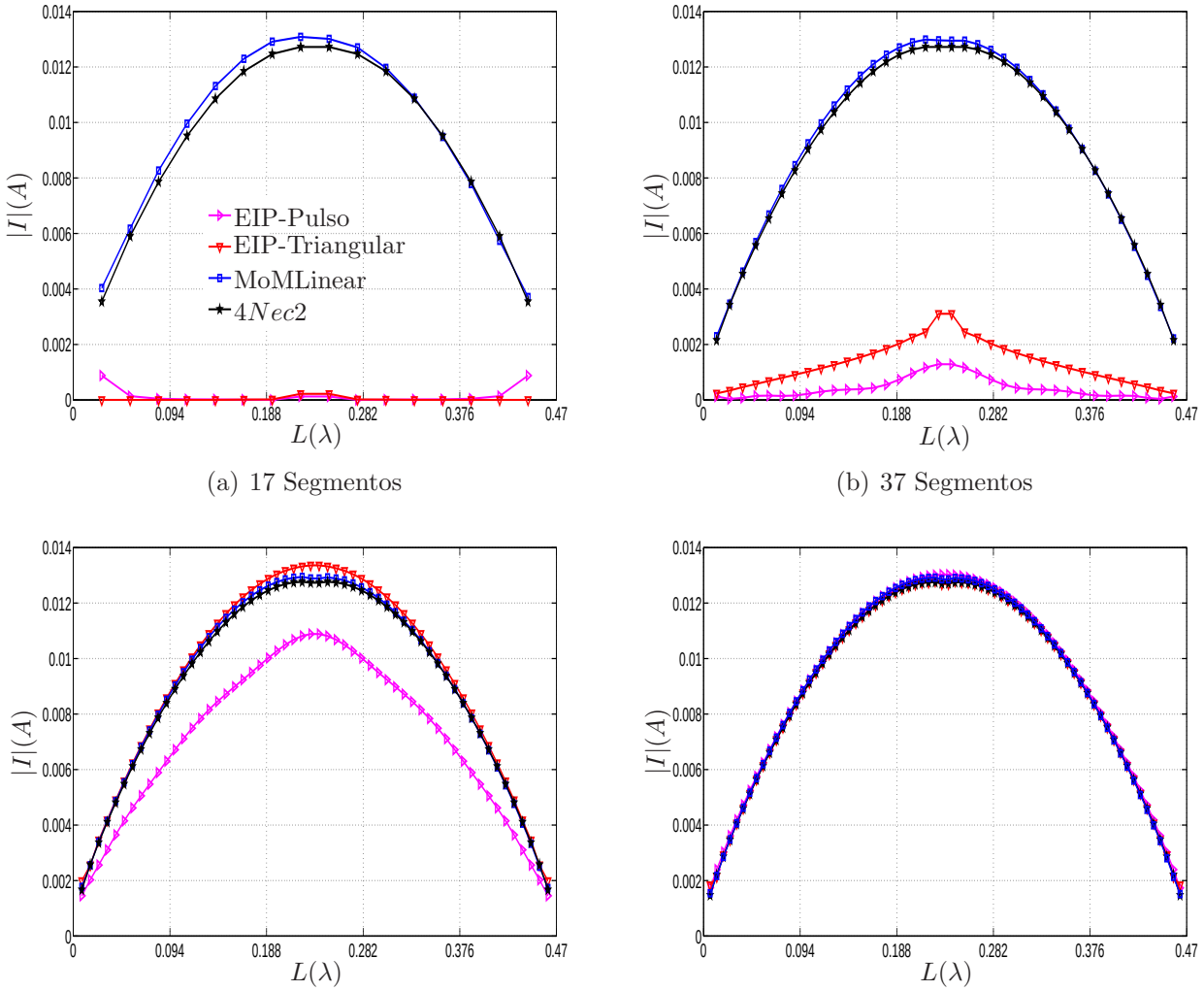
Para os casos em que são utilizados funções de base triangulares os coeficiente desconhecidos, β_j, são determinados nas extremidades dos segmentos, porém para funções de base tipo pulso a solução é definida no centro de cada segmento. Dessa forma, para tornar possível a comparação dos resultados obtidos utilizando MoMLinear e aqueles obtidos utilizando funções de base tipo pulso, no mesmo ponto em cada segmento, é realizada uma interpolação linear, assim como feito com resultados obtidos a partir do $4Nec2^{®}$, conforme descrito na Seção 3.1.

A Figura 3.10 apresenta o E_{RM} da distribuição de corrente para o MoMLinear e os métodos descritos na presente seção para diferentes números de segmentos. Como pode ser verificado a formulação MoMLinear conduz a resultados que convergem com um número menor de segmentos quando comparado com os métodos que empregam a EIP. Esse fato pode também ser confirmado através dos gráficos de distribuição de corrente apresentados na Figura 3.9. Uma informação importante que deve ser destacada é que foi necessário empregar 5 pontos de Gauss para avaliação da integral presente na equação (3.3) para que a convergência apresentada na Figura 3.9 fosse alcançada. O número de pontos de Gauss empregados para avaliação do MoM-Linear é sempre menor que 5, conforme apresentado na Seção 3.2. A necessidade da utilização de um menor número de pontos de Gauss confere ao método um menor requisito computacional. Em relação as duas soluções apresentadas para EIP, verifica-se que aquela que emprega funções de base triangulares apresenta convergência mais rápida, como pode ser verificado nas Figuras 3.10 e 3.9.

Ainda em relação a formulação desenvolvida para o MoMLinear é importante destacar que a matriz Z não é simétrica o que conduz a uma distribuição de corrente também não simétrica em relação ao segmento central do elemento, como pode ser verificado na Figura 3.9(a). A medida que são utilizados mais segmentos essa não simetria continua presente, porém, cada vez menos relevante. A assimetria da matriz Z se deve ao fato do Método Coincidente de remoção

de singularidade, apresentado na Seção 2.5, empregar um número de pontos diferentes para avaliação das integrais em α e α', como definido na Seção 3.2, e ao Método Próximo avaliar a integral α' de forma analítica.

Como uma análise final, nessa seção, é avaliado o número de condicionamento da matriz Z para formulação MoMLinear e as duas EIP sob análise, em função do número de segmentos. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 3.11. Como pode ser verificado, as três formulações apresentam matrizes com um bom condicionamento para todos os números de segmentos considerados, e conforme discutido na Seção 3.4, à medida que o número de segmentos aumenta o valor do número de condicionamento da matriz Z também é incrementado. Uma vez verificada a validade da modelagem empregada no MoMLinear, essa é então utilizada nas Seções 3.6 a 3.9, onde são realizados diferentes estudos de casos.



(a) 17 Segmentos

(b) 37 Segmentos

(c) 57 Segmentos

(d) 73 Segmentos

Figura 3.9: Distribuição de corrente para filamento de comprimento $L = 0,47\lambda$ considerando diferentes métodos

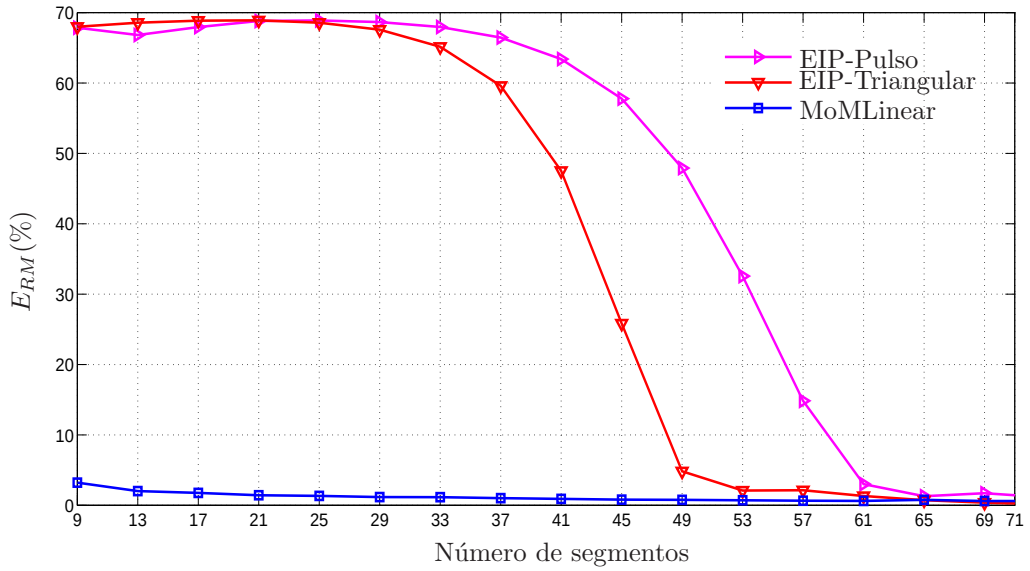


Figura 3.10: E_{RM} da distribuição corrente para filamento de comprimento $L = 0,47\lambda$ considerando diferentes métodos

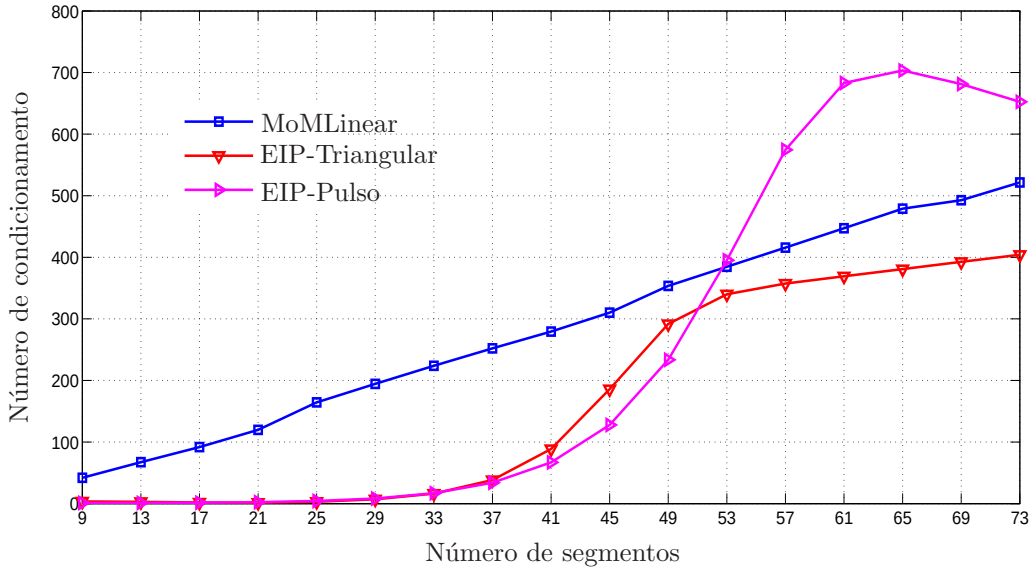


Figura 3.11: Relação número de condicionamento e segmentação para filamento de comprimento $L = 0,47\lambda$, empregando MoMLinear, EIP-Triangular e EIP-Pulso

3.6 Um Filamento Linear

A Figura 3.12 ilustra a estrutura sob análise nesta seção, ou seja, um filamento de comprimento $L = 1\lambda$, orientado ao longo do eixo z, excitado por um gerador de função delta de $1V$, localizado no centro do filamento. A análise foi conduzida utilizando 81 segmentos. O resultado

da distribuição de corrente obtido é apresentado na Figura 3.13 e como pode ser observado foram obtidos resultados precisos em relação ao $4Nec2®$, com $E_{RM} = 1.0687\%$.

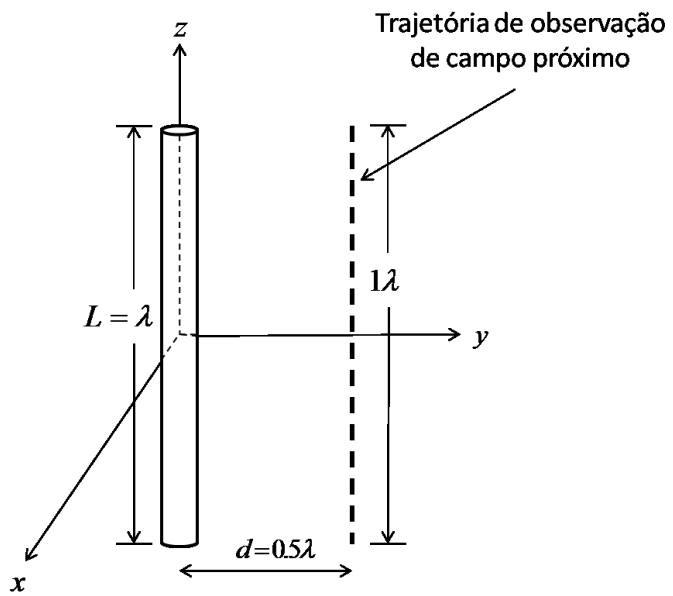


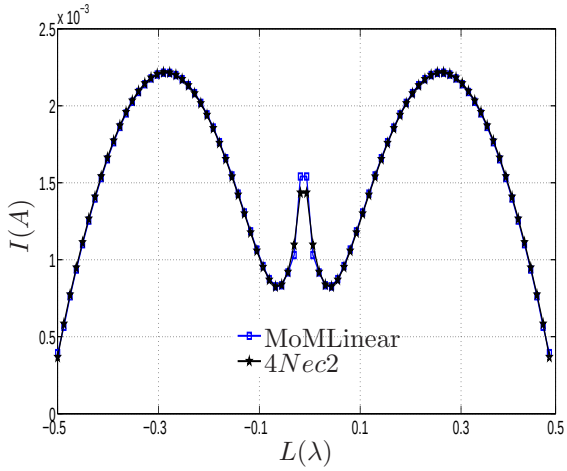
Figura 3.12: Filamento de comprimento $L = 1\lambda$

As Figuras 3.14 e 3.15 ilustram os campos elétrico e magnético na região de campo próximo, na trajetória ilustrada na Figura 3.12. Para a estrutura sob análise a componente $\hat{x}$ do campo elétrico e as componentes $\hat{y}$ e $\hat{z}$ do campo magnético são iguais a zero, por esse motivo essas não são apresentadas. Para as demais componentes, como pode ser verificado, foram obtidos resultados precisos, com erro médio, E_{RM}, para cada componente de campo apresentado na Tabela 3.1.

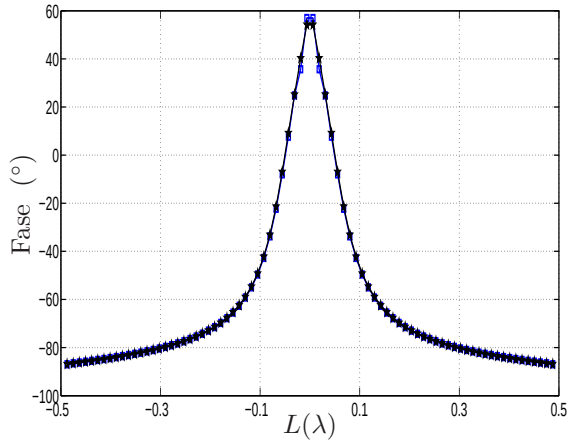
Campo Elétrico			**Campo Magnético**		
E_x	E_y	E_z	H_x	H_y	H_z
-	1.3039 %	1.1194 %	1.0878 %	-	-

Tabela 3.1: E_{RM} para campos na região de campo próximo para um filamento de comprimento $L = 1\lambda$

Ainda para esse dipolo foi avaliado o campo elétrico na região de campo distante, para o plano $\phi = 0°$. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 3.16, e conforme pode ser verificado, novamente foram obtidos resultados precisos com $E_{RM} = 0.5491\%$.

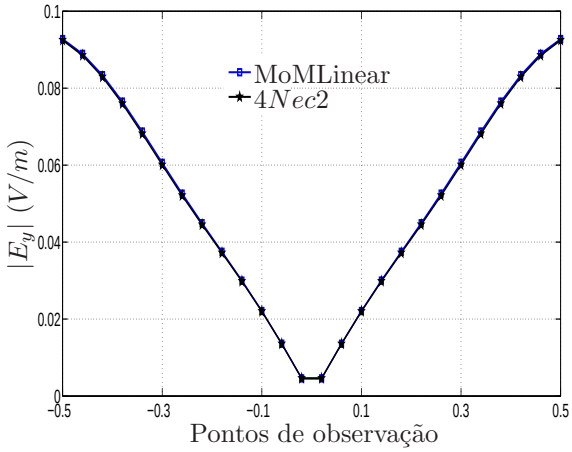


(a) Amplitude

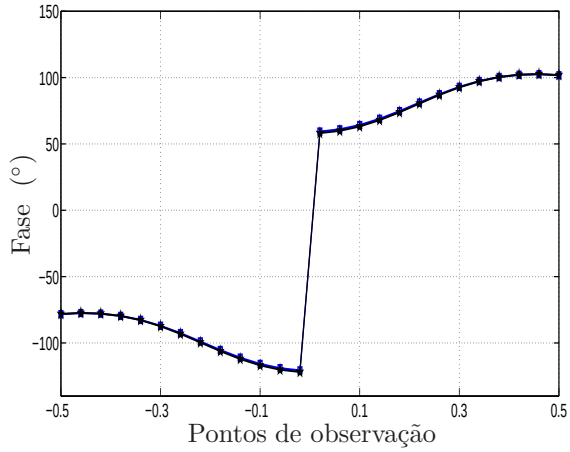


(b) Fase

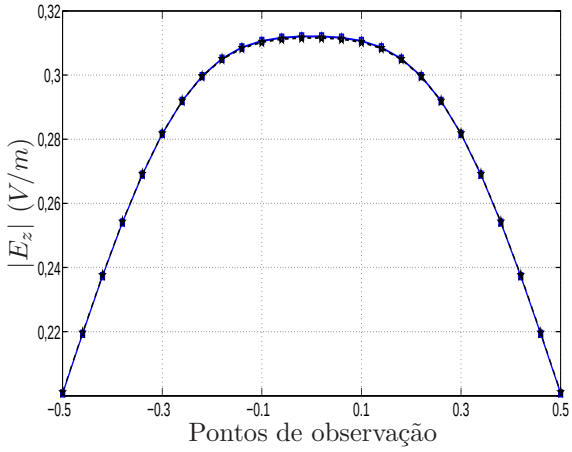
Figura 3.13: Ditribuição de corrente para um filamento de comprimento $L = 1\lambda$



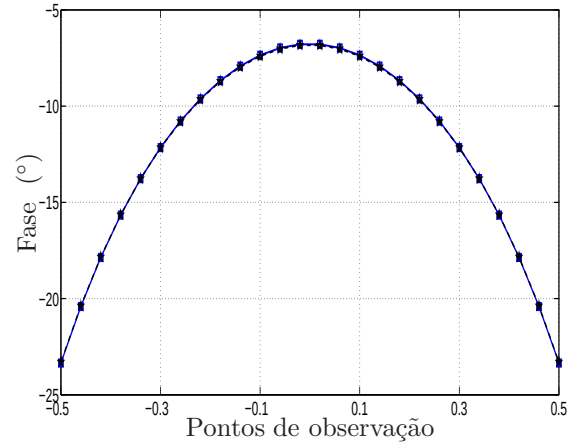
(a) Amplitude de E_y



(b) Fase E_y

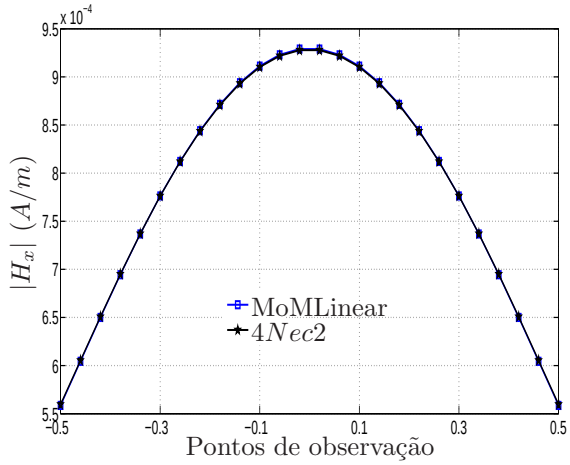


(c) Amplitude E_z

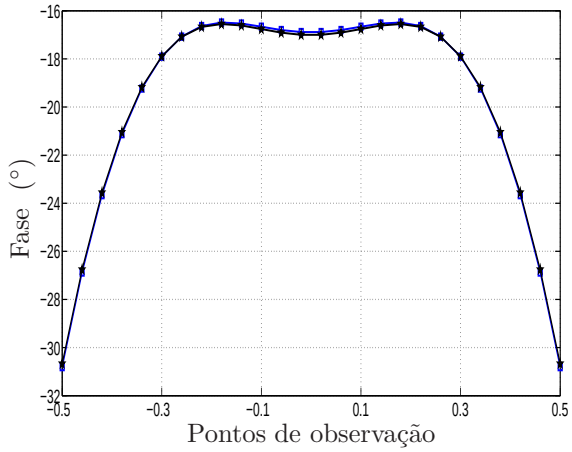


(d) Fase de E_z

Figura 3.14: Campo elétrico na região de campo próximo para um filamento de comprimento $L = 1\lambda$

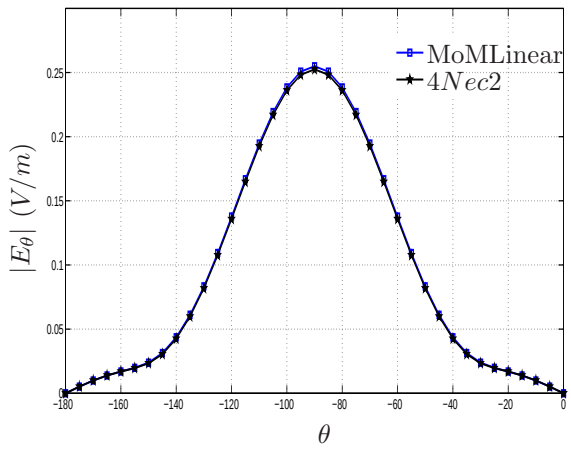


(a) Amplitude H_x

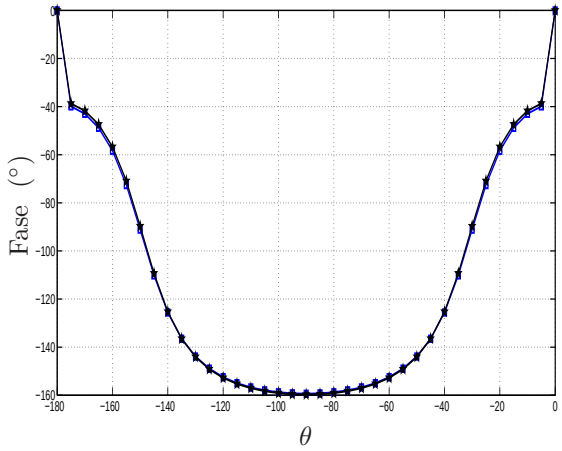


(b) Fase H_x

Figura 3.15: Campo magnético na região de campo próximo para um filamento de comprimento $L = 1\lambda$



(a) Amplitude E_θ



(b) Fase E_θ

Figura 3.16: Campo elétrico na região de campo distante para filamento de comprimento $L = 1\lambda$

3.7 Dois Filamentos Lineares

Como o objetivo de verificar a validade da formulação desenvolvida na análise de estruturas constituídas de mais de um filamento, nessa seção é investigado o espalhamento eletromagnético por dois filamentos iguais de comprimento, $L = 0.47\lambda$, sendo o elemento excitado posicionado ao longo do eixo z, e o elemento receptor tem sua posição definida de acordo com a distância D, conforme ilustrado na Figura 3.17. Para todas as análises cada elemento é discretizado em 41 segmentos. A Figura 3.18 ilustra o E_{RM} da distribuição de corrente para valores de D variando de 0.3λ a 1λ, e como pode ser verificado o E_{RM} obtido é sempre menor que 3%.

Considerando a distância entre os dois filamentos $D = 0.5\lambda$, os resultados obtidos de distribuição de corrente e componentes de campos elétrico e magnético (diferentes de zero) na região de campo próximo, observados na trajetória ilustrada na Figura 3.17, são apresentados nas Figuras 3.19 à 3.21. Verifica-se que para a estrutura sob análise nessa seção também foram obtidos resultados precisos em relação ao $4Nec2^{®}$. O erro para o campo na região campo próximo é apresentado na Tabela 3.2. Ainda para esses filamentos foi avaliado o campo elétrico na região de campo distante, para o plano $\phi = 0°$. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 3.22, e conforme pode ser verificado novamente foram obtidos resultados precisos com $E_{RM} = 2.6234\%$.

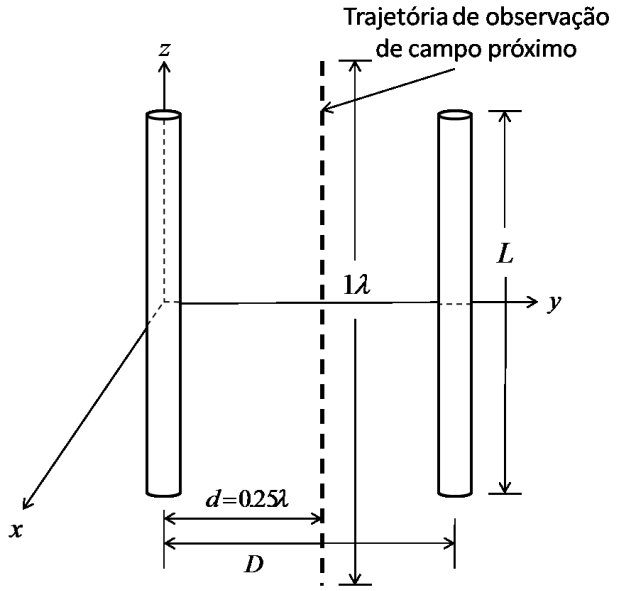


Figura 3.17: Conjunto com dois filamentos separados por um distância D

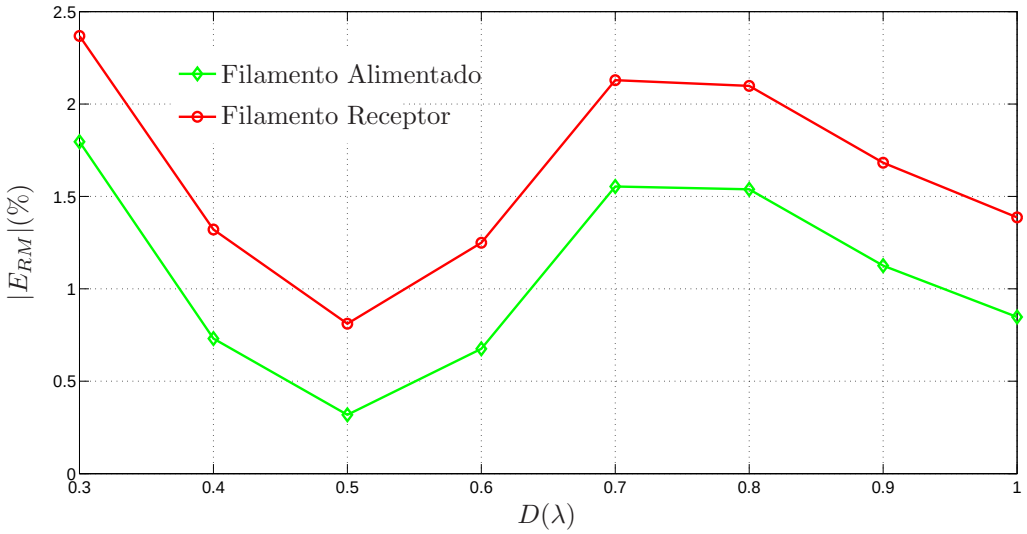
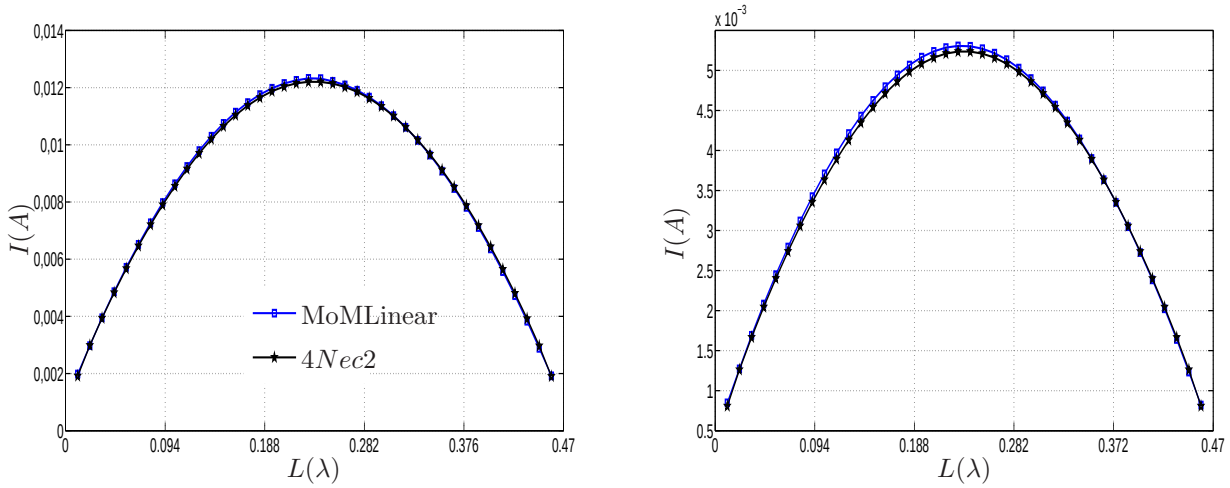


Figura 3.18: E_{RM} da distribuição corrente para um arranjo de dois filamentos de comprimento $L = 0.47\lambda$

Campo Elétrico			**Campo Magnético**		
E_x	E_y	E_z	H_x	H_y	H_z
-	2.1888 %	2.9260 %	1.7508 %	-	-

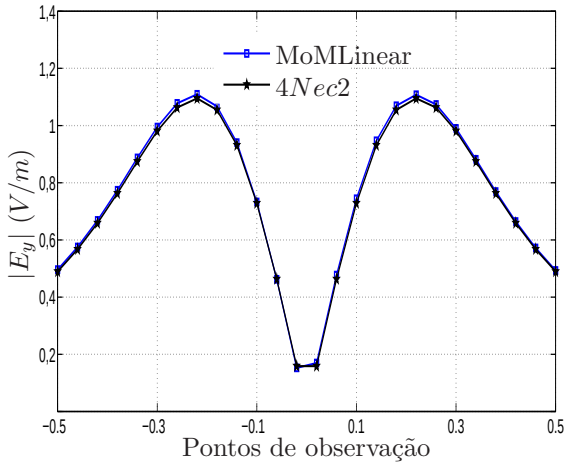
Tabela 3.2: E_{RM} para campos na região de campo próximo para um arranjo com dois filamentos de comprimento $L = 0.47\lambda$



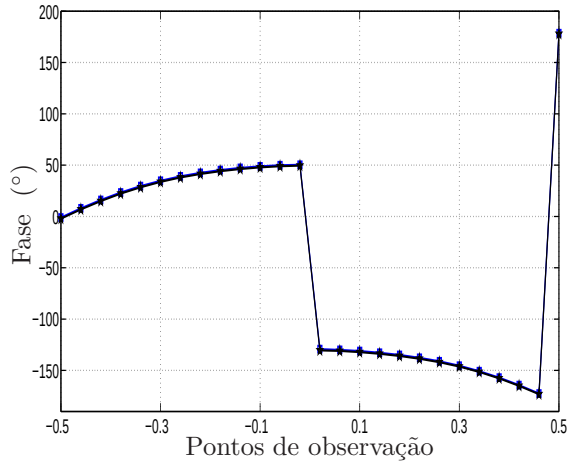
(a) Filamento alimentado

(b) Filamento receptor

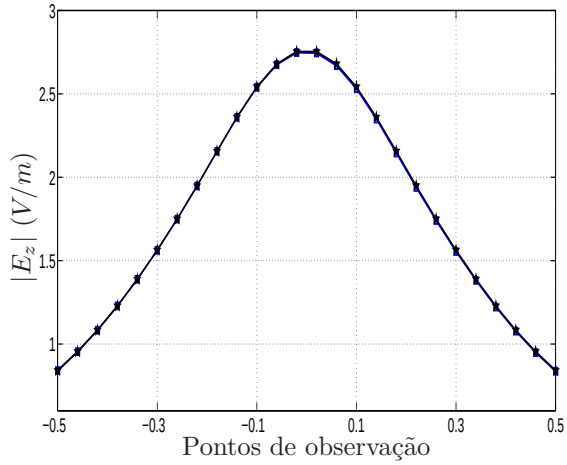
Figura 3.19: Distribuição de corrente ao longo de dois filamentos de comprimento $L = 0.47\lambda$



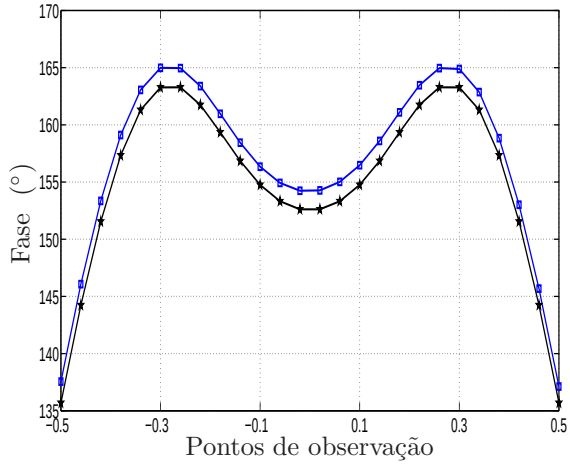
(a) Amplitude E_y



(b) Fase E_y

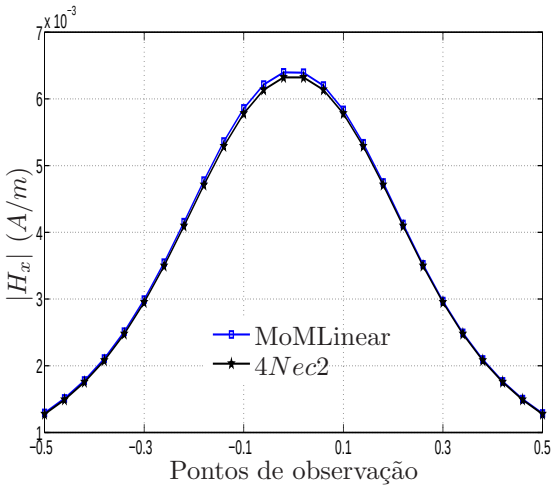


(c) Amplitude E_z

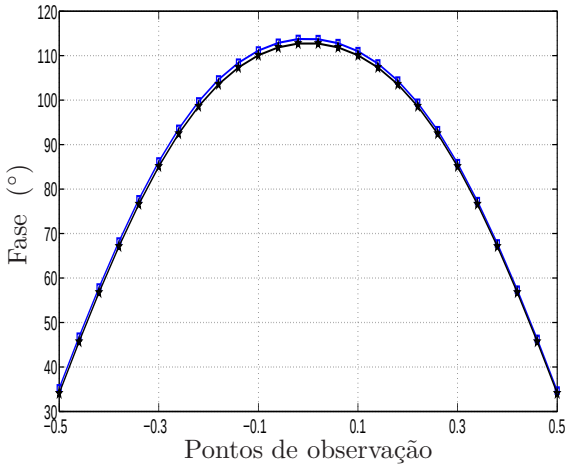


(d) Fase E_z

Figura 3.20: Campo elétrico na região de campo próximo para um arranjo de dois filamentos de comprimento $L = 0.47\lambda$

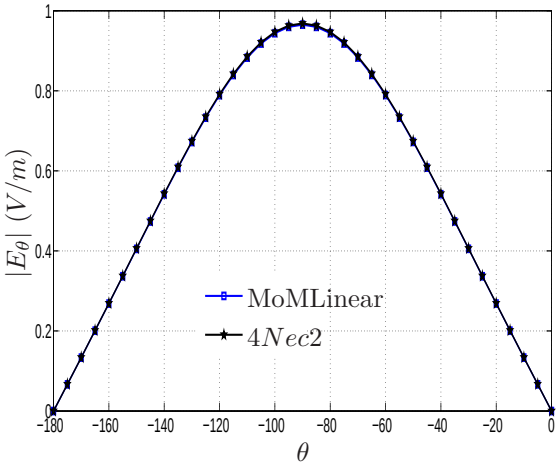


(a) Amplitude H_x

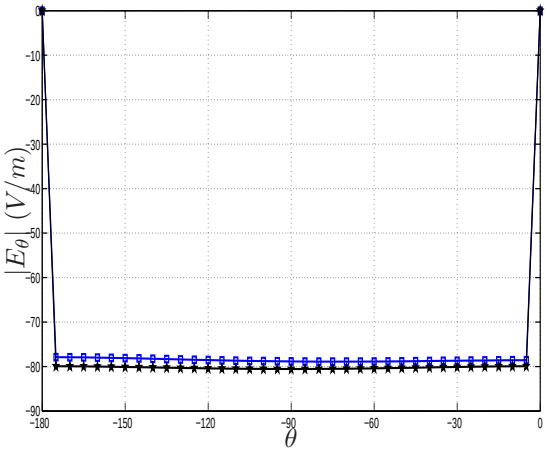


(b) Fase H_x

Figura 3.21: Campo magnético na região de campo próximo para um arranjo de dois filamentos de comprimento $L = 0.47\lambda$



(a) Amplitude E_θ



(b) Fase E_θ

Figura 3.22: Campo elétrico na região de campo distante para um arranjo de dois filamentos de comprimento $L = 0.47\lambda$

3.8 loop

Para avaliar a precisão da técnica desenvolvida na análise do espalhamento eletromagnético por uma estrutura filamentar curva, nesta seção é investigado o *loop* ilustrado na Figura 3.23. Em uma primeira análise é considerado o raio do *loop* igual $r = 0.01\lambda$ e o raio do filamento $a = 0.0001\lambda$, sendo este discretizado por 161 segmentos. Nesse caso foi considerado mais que 80 $segmento/\lambda$ de forma descrever apropriadamente a curvatura do *loop*. O resultado para distribuição de corrente obtido é apresentado na Figura 3.24 e como pode ser verificado existe boa concordância com os resultados obtidos através do $4Nec2^{®}$ com $E_{RM} = 6.4569\%$, e conforme esperado, como nesse caso o perímetro do *loop* é menor que $\lambda/10$, o valor de corrente ao longo do mesmo é constante.

Considerando agora um *loop* de raio igual a $r = 0.5\lambda$ e raio do filamento $a = 0.005\lambda$, o número de segmentos utilizados inicialmente seria 251, que corresponde aproximadamente 80 seg/λ, porém após uma primeira análise dos resultados, observou-se que a discretização por meio de 161 segmentos era suficiente para garantir a precisão desejada. Os resultados obtidos de distribuição de corrente, campos elétrico e magnético na região de campo próximo, observados na trajetória ilustrada na Figura 3.17, e campo elétrico na região de campo distante, para o plano $\phi = 0°$ são apresentados nas Figuras 3.25 a 3.28. Como pode ser observado os resultados obtidos por meio do MoMLinear apresentam uma boa concordância com aqueles gerados pelo $4Nec2^{®}$, o erro para distribuição de corrente é $E_{RM} = 2.6741\%$, para o campo na região de campo distante $E_{RM} = 3.2748\%$ e para os campos na região de camp próximo seguem apresentados na Tabela 3.3.

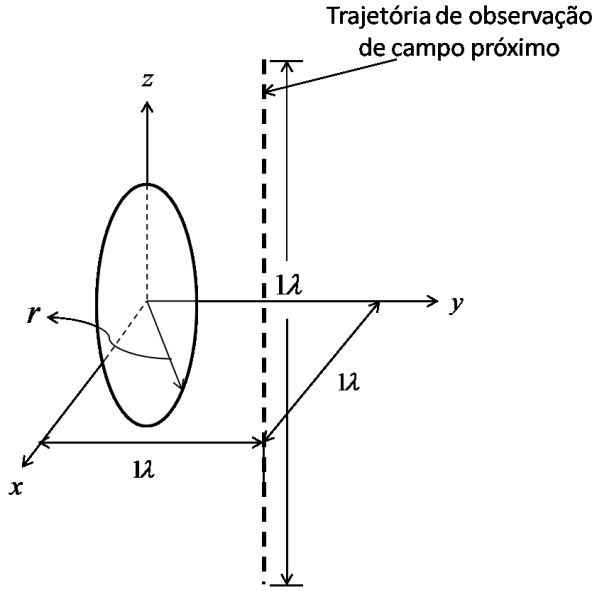


Figura 3.23: *loop* Circular

Campo Elétrico			Campo Magnético		
E_x	E_y	E_z	H_x	H_y	H_z
4.6612%	4.9086%	4.0360%	5.6046%	2.8583%	5.3564%

Tabela 3.3: E_{RM} para campos na região de campos próximos para um *loop*

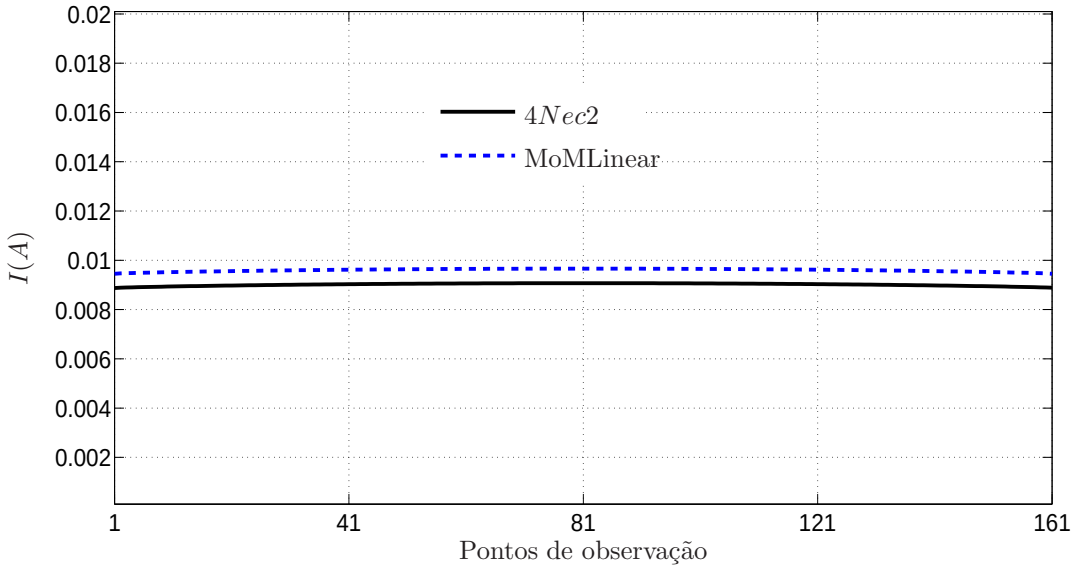
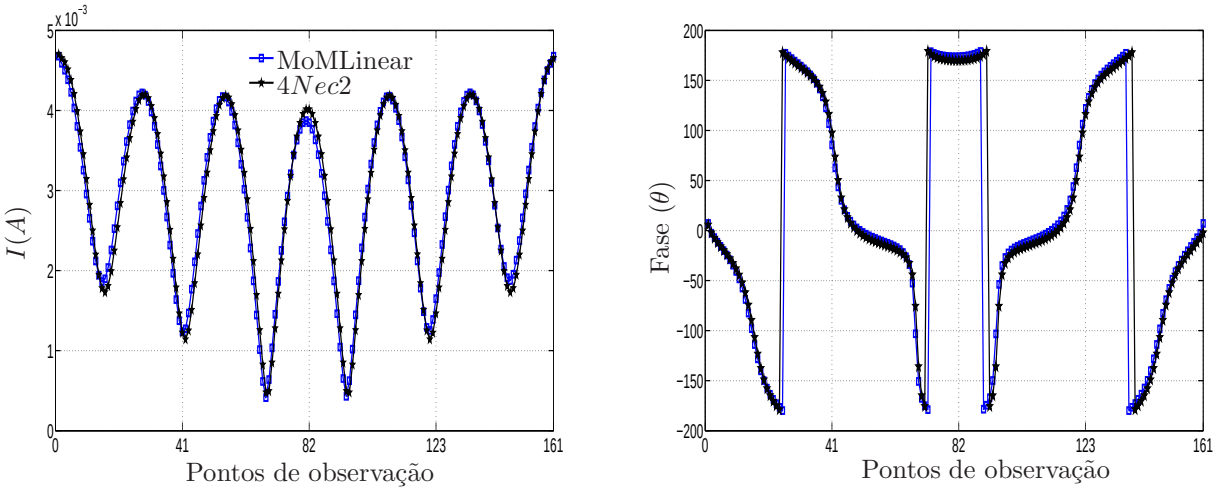
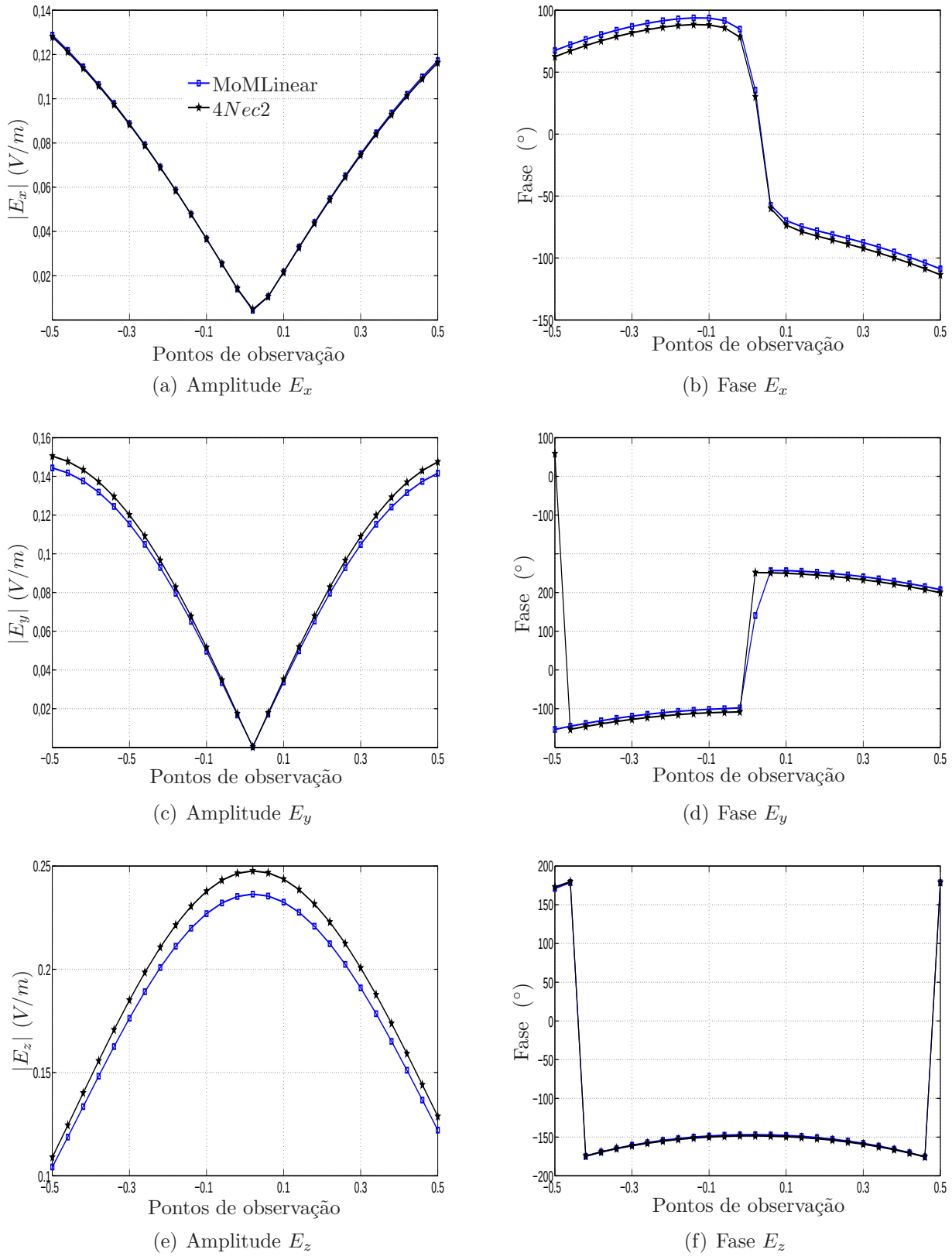


Figura 3.24: Distribuição de corrente ao longo do *loop* de raio $r = 0.01\lambda$



(a) Distribuição de corrente (b) Fase

Figura 3.25: Distribuição de corrente ao longo de um *loop* circular de raio $r = 0.5\lambda$



(a) Amplitude E_x

(b) Fase E_x

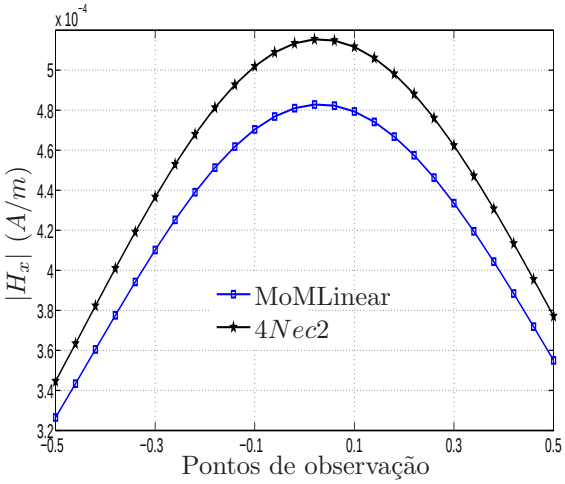
(c) Amplitude E_y

(d) Fase E_y

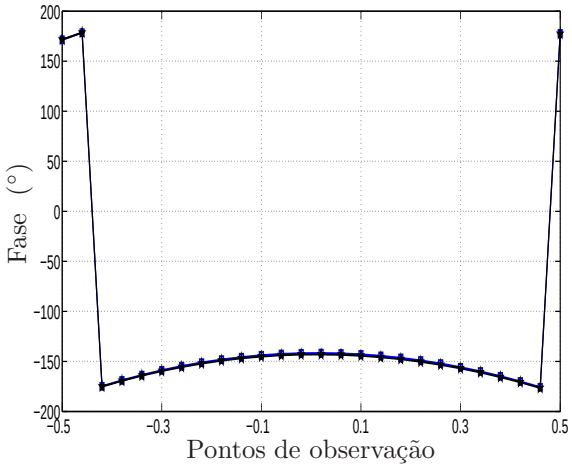
(e) Amplitude E_z

(f) Fase E_z

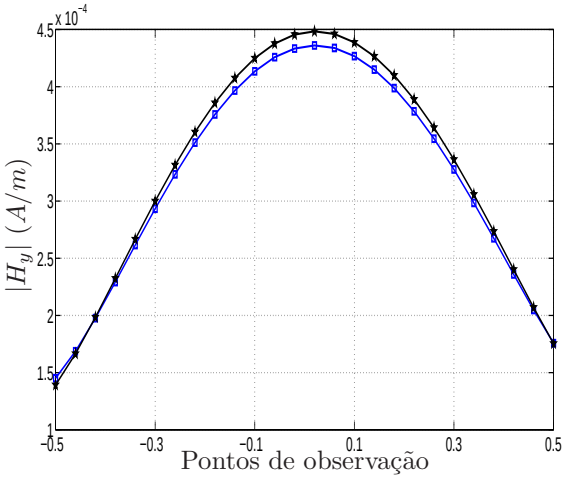
Figura 3.26: Campo elétrico na região de campo próximo para *loop* circular de raio $r = 0.5\lambda$



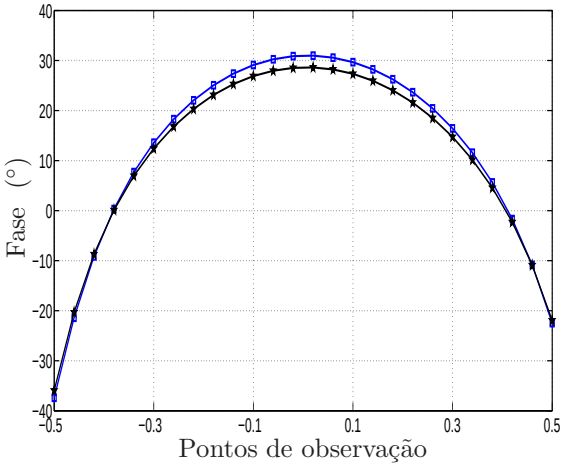
(a) Amplitude H_x



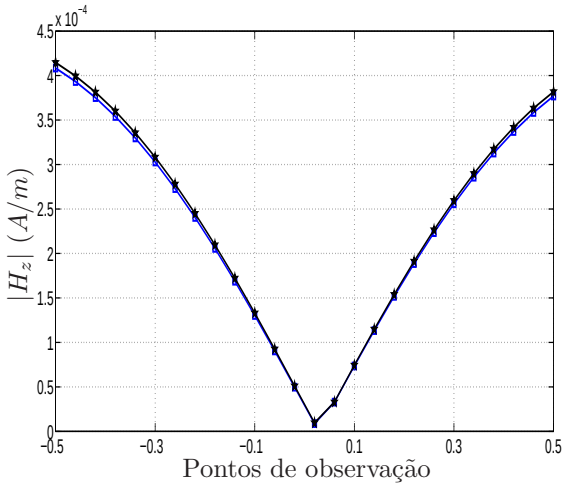
(b) Fase H_x



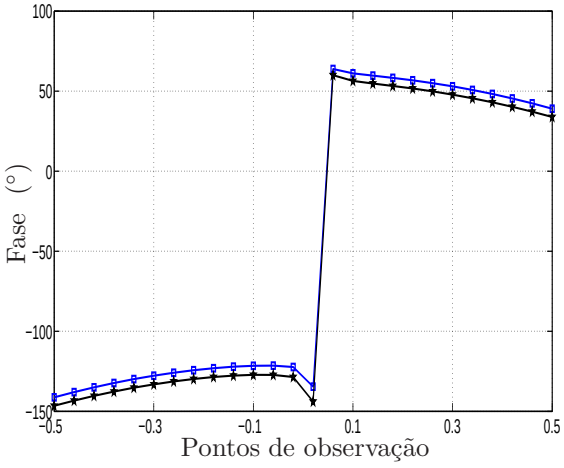
(c) Amplitude H_y



(d) Fase H_y

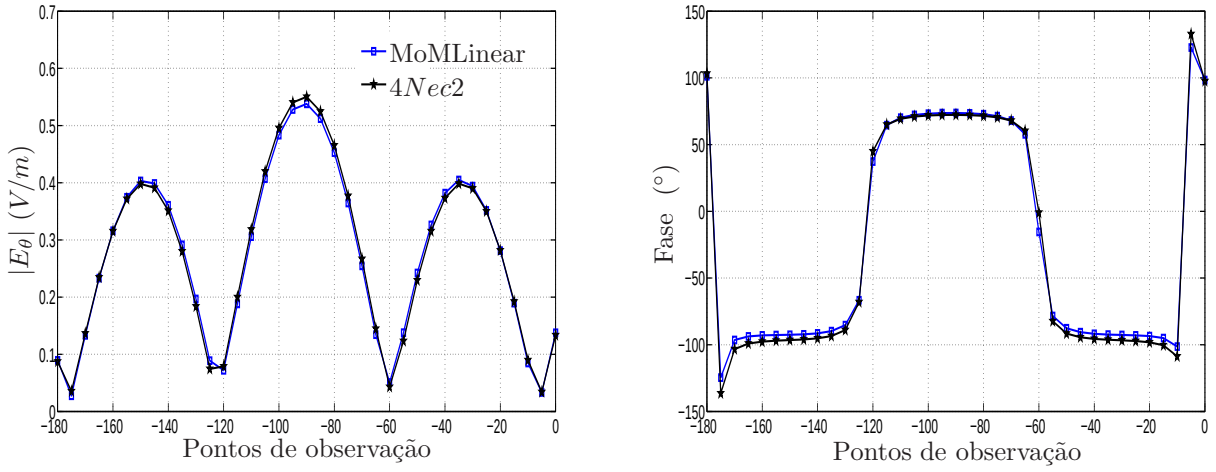


(e) Amplitude H_z



(f) Fase H_z

Figura 3.27: Campo magnético na região de campo próximo para um *loop* circular de raio $r = 0.5\lambda$



(a) Amplitude E_θ

(b) Fase E_θ

Figura 3.28: Campo elétrico na região de campo distante para *loop* circular de raio $r = 0.5\lambda$

3.9 Espiral

Com o objetivo de verificar a precisão da formulação desenvolvida para análise de estruturas curvas mais complexas, nesta seção é avaliado o espalhamento eletromagnético por um espiral orientado ao longo do eixo z. Os parâmetros utilizados para descrever a estrutura sob análise são apresentados na Figura 3.29, a altura inicial é dada no plano $z = 0$, $a = 0.005\lambda$ é o raio do filamento, $r = 0.5\lambda$ é o raio do espiral, $S = 0.5\lambda$ é o espaço entre as voltas.

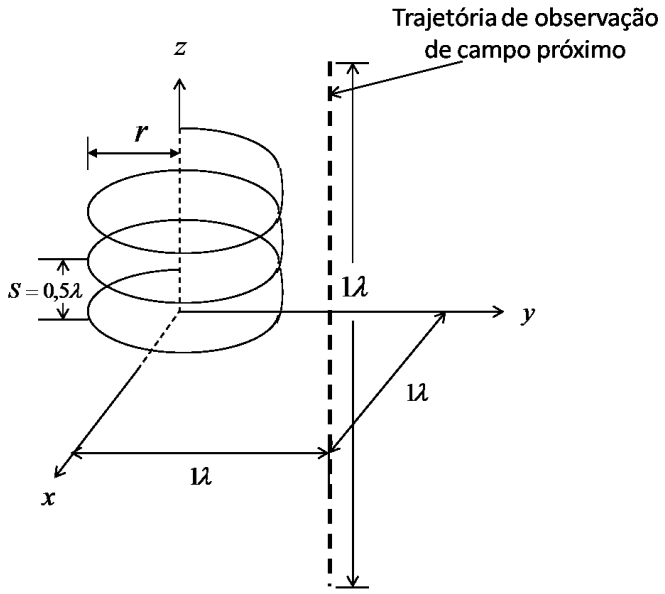


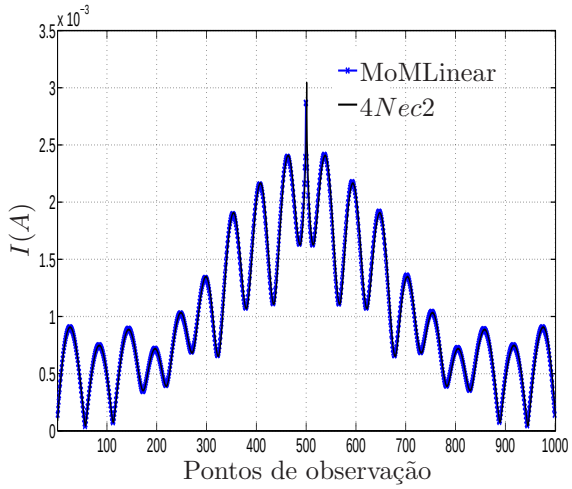
Figura 3.29: Espiral circular

As distribuições de corrente obtidas pelo MoMLinear e pelo $4Nec2^{®}$ são apresentadas na Figura 3.30 e como pode ser observado foi obtida uma concordância satisfatória entre as duas soluções, gerando um erro médio $E_{RM} = 1.1685\%$. Neste caso a corrente apresenta um comportamento muito oscilatório ao longo de todo o espiral, devido a esse fato, para obter resultados corretos para as componentes de campo na região de campo próximo, foi necessário discretizar a estrutura sob análise utilizando 1001 segmentos, o que corresponde a aproximadamente a 100 seg/λ.

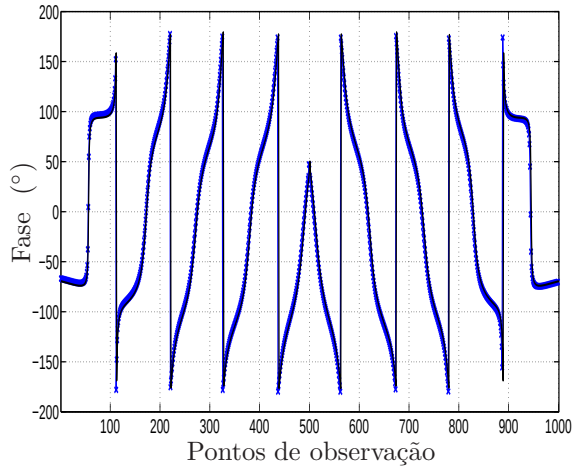
As Figuras 3.31 e 3.32 apresentam os resultados obtidos para campos elétrico e magnético na região de campo próximo, respectivamente, observados na trajetória ilustrada na Figura 3.29, e os resultados obtidos para as componente de campo elétrico na região de campo distante são apresentados nas Figuras 3.33. Estes resultados estão em boa concordância com aqueles obtidos por meio gerados pelo $4Nec2^{®}$. O erro para região campo próximo é apresentado na Tabela 3.4 e para campo distante nas direções θ e ϕ valem $E_{RM} = 1.5585\%$ e $E_{RM} = 3.1689\%$, respectivamente.

Campo Elétrico			Campo Magnético		
E_x	E_y	E_z	H_x	H_y	H_z
2.8337%	2.8776%	2.6814%	2.7270%	2.7730%	2.5978%

Tabela 3.4: E_{RM} para campos na região de campo próximo para um espiral

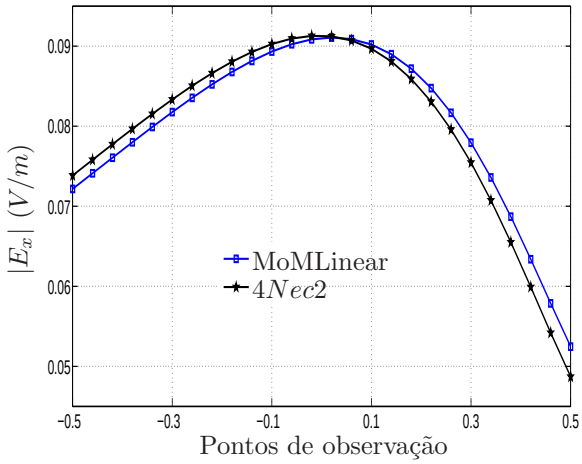


(a) Campo Distante

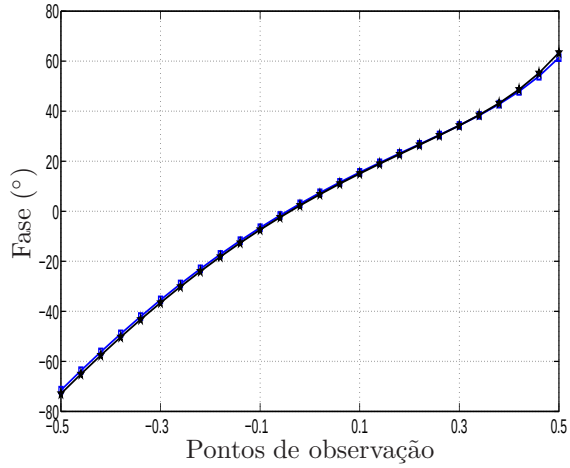


(b) Fase

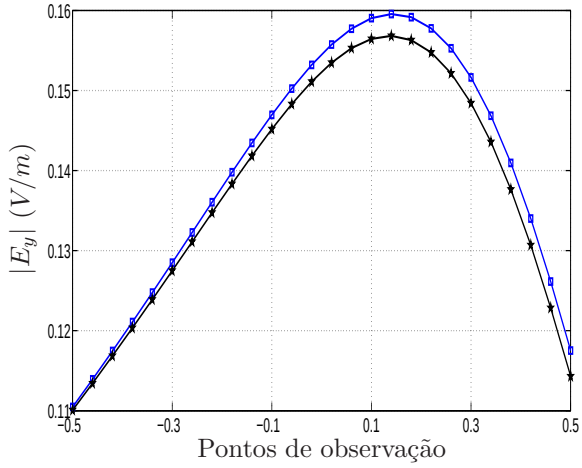
Figura 3.30: Distribuição de corrente ao longo de um espiral

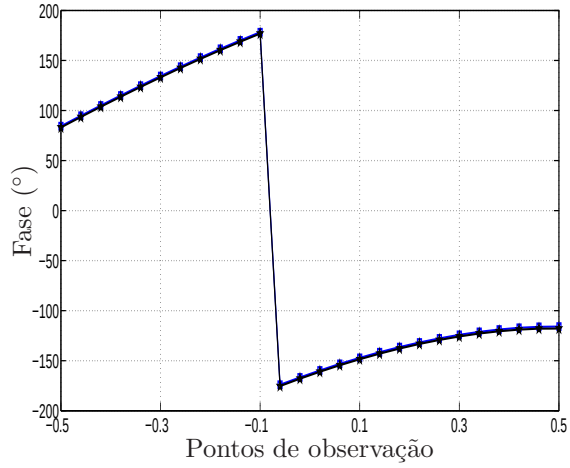


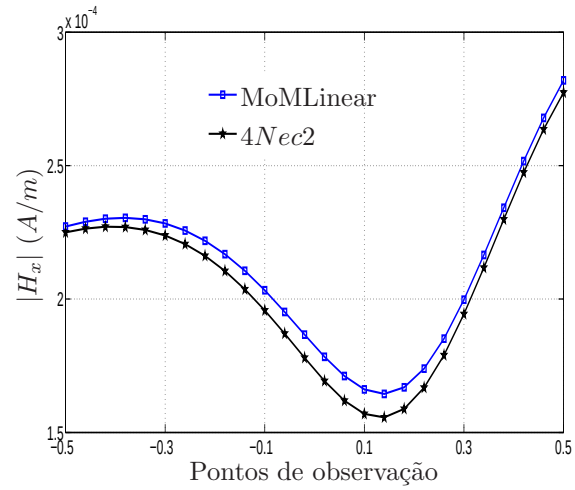
(a) Amplitude E_x



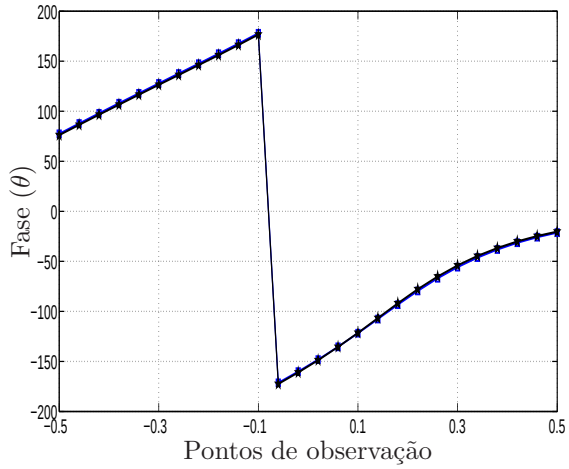
(b) Fase E_x



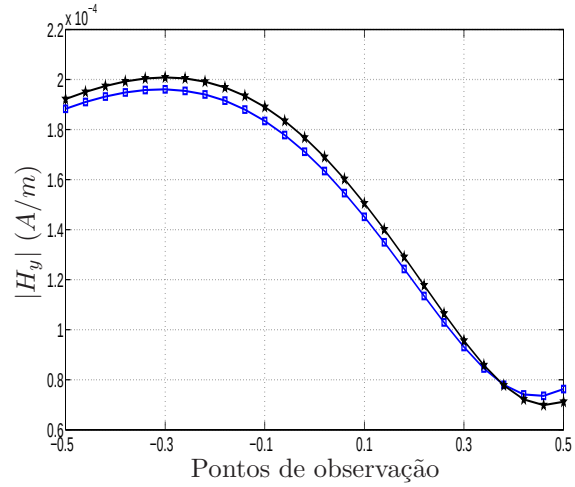




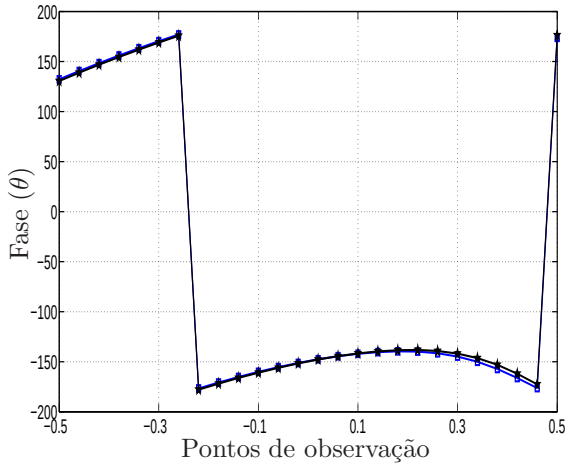
(a) Amplitude H_x



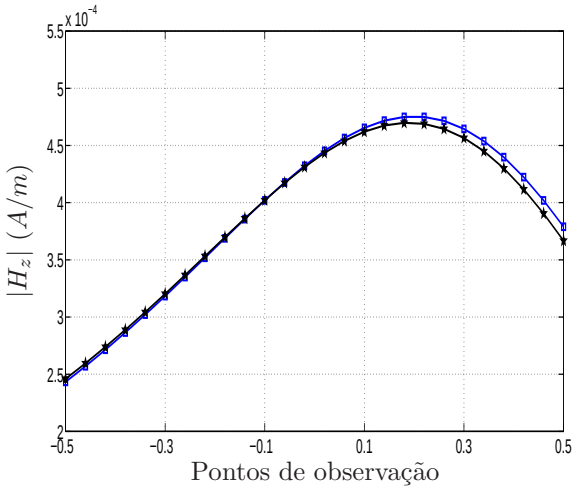
(b) Fase H_x



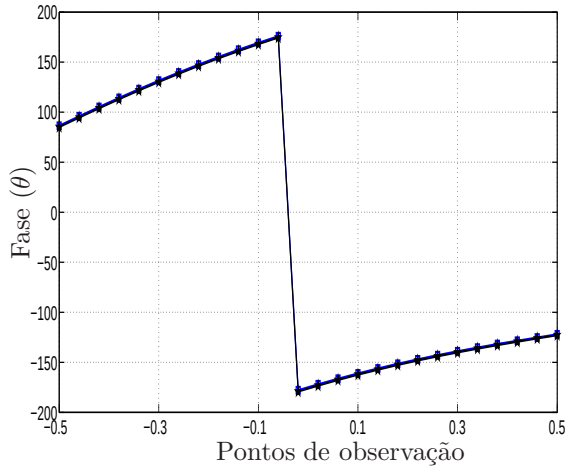
(c) Amplitude H_y



(d) Fase H_y

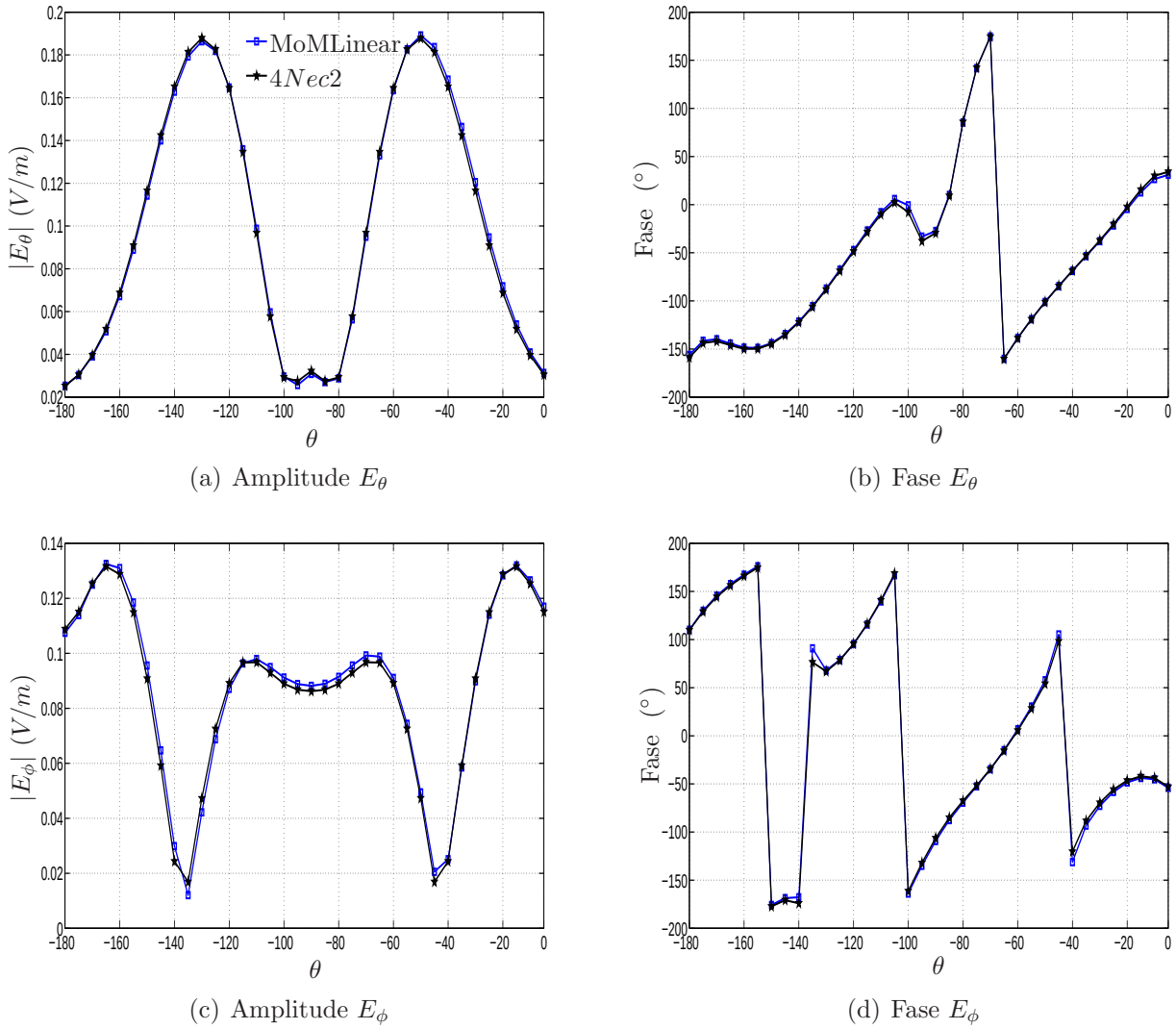


(e) Amplitude H_z



(f) Fase H_x

Figura 3.32: Campo magnético na região de campo próximo para espiral



(a) Amplitude E_θ

(b) Fase E_θ

(c) Amplitude E_ϕ

(d) Fase E_ϕ

Figura 3.33: Campo elétrico na região de campo distante para um espiral

3.10 Sistema Constituído de Dois *loops*

Nessa seção é verificada a convergência da formulação desenvolvida na análise de um sistema constituído de dois *loops*, conforme ilustrado na Figura 3.34. Para essa investigação não é possível obter resultados a partir do $4Nec2^{®}$, assim são apresentados somente aqueles gerados pelo MoMLinear. Sistemas semelhantes a esse, constituídos por duas ou mais bobinas, vem sendo utilizado em investigações para transmissão de energia sem fio, empregando acoplamento indutivo na região de campo próximo. Existem vários esquemas atualmente sendo desenvolvidos e aplicados. Utilizando, por exemplo, bobinas ressonantes acopladas, pesquisadores do Instituto de Tecnologia de Massachusetts - MIT (EUA) chegaram à conclusão de que é possível aumentar a distância entre as bobinas [45] e [46]. Em 2007 eles foram capazes de transmitir energia suficiente para acender uma lâmpada de 60 watts, a uma distância de aproximadamente 2 metros utilizando um acoplamento magnético que oscilava a uma frequência de aproximadamente 10 MHz. Embora os primeiros passos para a transmissão de energia sem fio já tenham sido dados, e esses demonstrem a possibilidade de transmissão de energia sem fio até mesmo entre aparelhos elétricos de maior potência, pode-se verificar uma escassez na literatura de estudos científicos conclusivos a respeito desta tecnologia. O que demonstra o caráter inédito de pesquisas sobre esse tema.

A análise realizada nessa seção tem o objetivo única e exclusivamente de demonstrar a viabilidade e aplicabilidade do MoMLinear para a modelagem eletromagnética completa de um sistema de transmissão de energia sem fio que emprega acoplamento indutivo na região de campo próximo. O sistema apresentado [46] é constituído por duas bobinas de 5.25 espiras com raio igual a $r = 30cm$ e raio do filamento igual a $a = 3mm$, operando em 10MHz. Esses valores de raio da bobina e do filamento correspondem a $r = 0.01\lambda$ e $a = 0.0001\lambda$, respectivamente.

Com o objetivo de conduzir uma análise considerando os mesmos parâmetros geométricos utilizados em [46], exceto pelo fato de que nessa referência são utilizadas duas bobinas e nessa dissertação dois *loops*, para o sistema ilustrado na Figura 3.34 é assumido que $r_1 = r_2 = 0.01\lambda$ e o raio dos filamentos é igual a $a = 0.0001\lambda$. O $loop_1$ é excitado por um Gerador de Função Delta de 1 Volt e é posicionado no plano xz e em $y = 0$ e o $loop_2$ é posicionado também no plano xz a uma distância D do $loop_1$. Cada um dos *loops* é discretizado em 161 seguimentos, o que corresponde a 2562 seg/λ. Uma vez que nesse caso o perímetro dos *loops* é menor que $\lambda/10$, o valor de corrente ao longo dos mesmos é constante para cada valor de D considerado, o qual foi variado de 0.01λ a 0.075λ. Os resultados da distribuição de corrente obtidos nos dois *loops*, em função da distância D, são apresentados na Figura 3.35. Como pode ser verificado, a corrente no $loop_1$ é praticamente constante para todos os valores de D (variação de 1,01%). No $loop_2$ a corrente varia expressivamente, reduz à medida que D aumentar.

Como o sistema de transmissão de energia sem fio proposto por [46] utiliza acoplamento indutivo entre as bobinas, a região do espaço a ser considerada é a região de campo próximo, onde a potência envolvida é predominante indutiva. Assim, para o sistema em estudo, é verificado o valor da amplitude do campo magnético em uma região do espaço próxima aos *loops* 1 e 2 no plano yz em $x = 0$. Os resultados obtidos para $D = 0.01$ e $D = 0.05$ são apresentados nas Figuras 3.36 e 3.37. Como pode ser verificado, o campo magnético é mais intenso nos pontos próximos aos *loops*, em especial em pontos próximos ao $loop_1$, que conduz um valor maior de

corrente, como esperado.

Os resultados de corrente e campo magnético obtidos indicam que uma potência pode ser irradiada pelo elemento transmissor ($loop_1$) e parte dessa potência pode ser capturada pelo(s) elemento(s) receptor(es) (neste caso, $loop_2$). A quantidade de potência a ser capturada está armazenada no campo magnético próximo ao(s) elemento(s) receptor(es) e é função direta do tamanho e da distância entre os elementos transmissor e receptor(es). Os resultados obtidos também sugerem que a formulação desenvolvida nessa dissertação para avaliação do espalhamento eletromagnético por estruturas filamentares de geometria arbitrária, está apta para ser emprega na avaliação completa de um sistema de transmissão sem fio constituído de dois ou mais elementos filamentares.

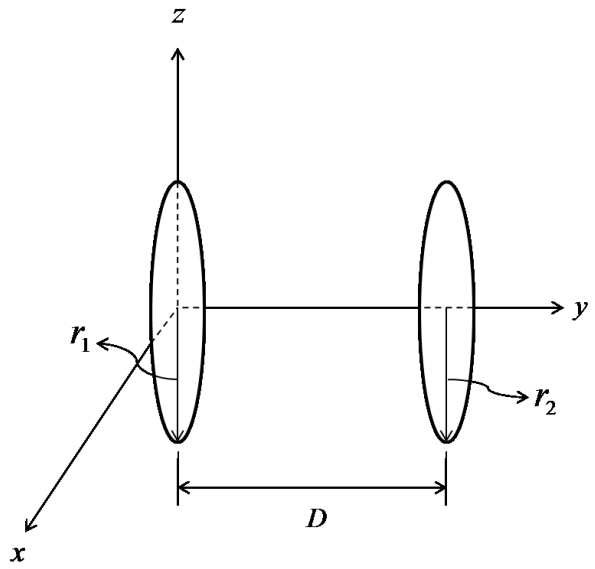
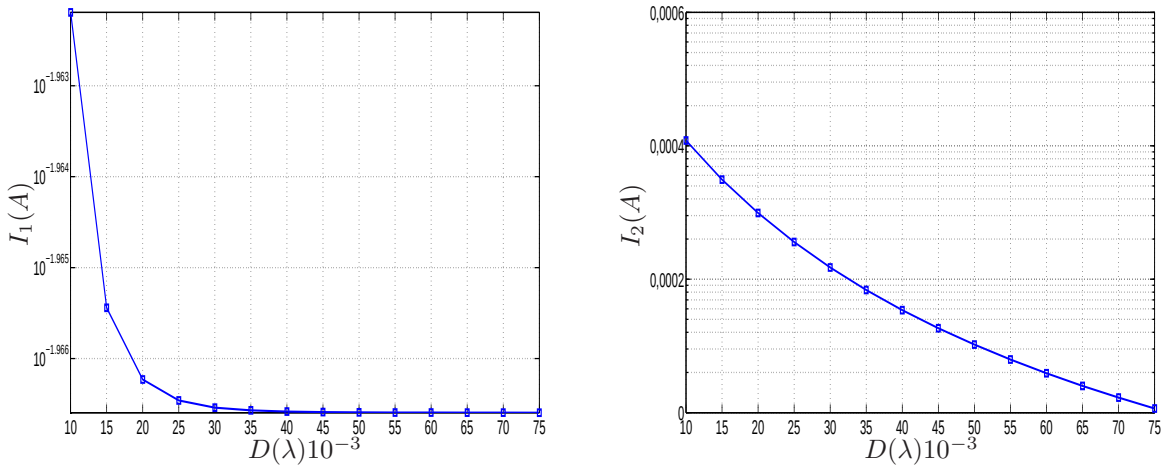


Figura 3.34: Sistema constituído de dois *loops* ciirculares



(a) Distribuição de corrente no *loop* alimentado

(b) Distribuição de corrente no *loop* receptor

Figura 3.35: Distribuição de corrente para um arranjo com dois *loops* de raios $r_1 = r_2 = 0.01\lambda$ $a = 0.0001\lambda$

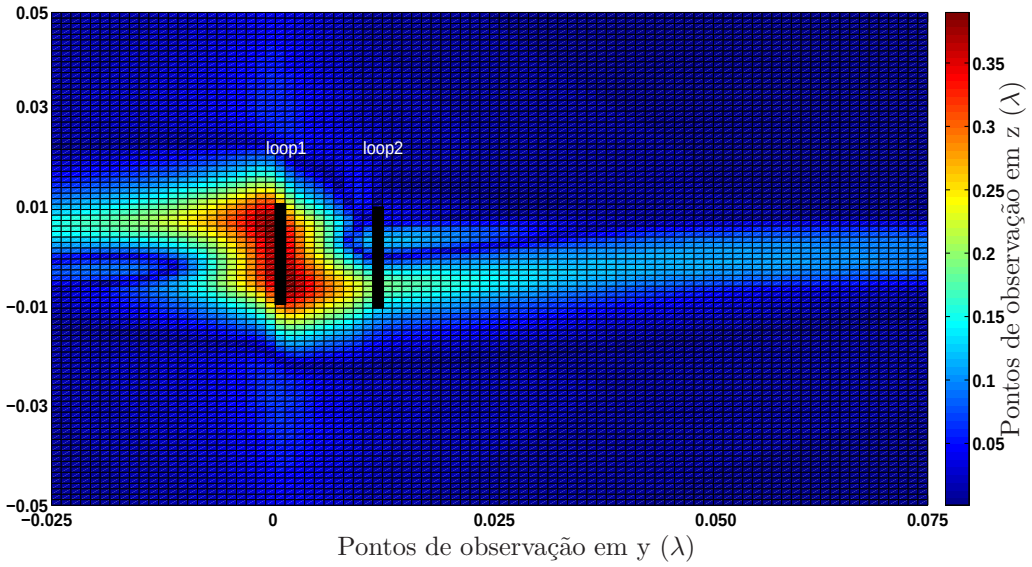


Figura 3.36: Campo magnético (A/m) na região de campo próximo para um sistema de dois *loops* separados por 0.01λ

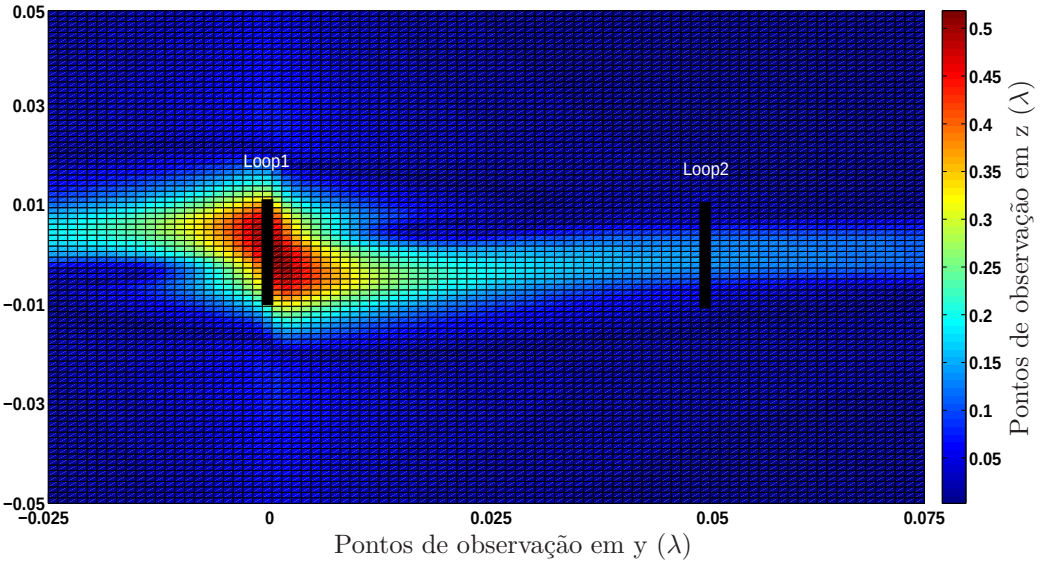


Figura 3.37: Campo magnético (A/m) na região de campo próximo para um sistema de dois *loops* separados por 0.05λ

Capítulo 4

Considerações Finais

Neste trabalho foi desenvolvido o ferramental teórico, analítico e numérico para avaliação do espalhamento eletromagnético por estruturas filamentares CEP de geometria arbitrária. A técnica apresentada é baseada na equação integral do campo elétrico (EFIE) avaliada numericamente por meio do Método dos Momentos. O objetivo central do trabalho é o desenvolvimento de uma ferramenta precisa e eficiente para análise de diferentes problemas práticos envolvendo geometrias filamentares, como, por exemplo, antenas constituídas de dipolos, loops e espirais ou qualquer outro formato filamentar.

Tradicionalmente encontram-se na literatura soluções consagradas para avaliação do espalhamento eletromagnético por estruturas filamentares que empregam a Equação Integral de *Pocklington* avaliada numericamente por meio MoM, juntamente com funções de base do tipo triangular ou pulso e funções de teste do tipo pulso ou empregando o método de casamento pontual [25] e [26]. Embora excelentes resultados possam ser alcançados utilizando essas formulações, elas não permitem a análise de estruturas filamentares de geometria arbitrária, e, além disso, sua convergência está associada ao uso de um número relativamente alto de funções de base. Esses fatos têm motivado o desenvolvimento de diferentes aplicações e novos algoritmos com o objetivo de tornar o método mais preciso e eficiente.

Na análise numérica do espalhamento eletromagnético por meio do MoM, dentre os principais fatores que são determinantes para sua precisão, pode-se destacar: a escolha de técnicas eficientes de solução do sistema linear, a avaliação precisa das integrais presentes na solução, o emprego de funções de base adequadas para a representação da corrente e o uso de funções de testes apropriadas para garantir a rápida convergência da solução. Porém, representações sofisticadas para a corrente e o uso de funções de teste complexas podem conduzir a equações integrais muito complicadas e de difícil tratamento das singularidades. Neste trabalho, a robustez pretendida para a análise do espalhamento por estruturas filamentares de geometria arbitrária é alcançada através de algumas medidas que o diferenciam dos demais existentes na literatura. A primeira delas é a utilização de funções de base e de teste do tipo triangular, como feito em [16] e [1] para corpos de revolução. Este tipo de função garante uma boa representação do comportamento da corrente ao longo do filamento e produz equações integrais relativamente simples, com singularidades da ordem 1/R. Outra medida muito importante para melhorar a precisão e convergência da análise numérica é o tratamento numérico aplicado às integrais presentes na

solução através do MoM. Para os casos em que estas integrais não apresentam singularidades, este tratamento é inteiramente conduzido utilizando quadraturas Gaussianas e para os casos em que as singularidades estão presentes, é desenvolvido um método especial, baseado nas técnicas apresentadas em [1], [16] e [28], que combina a utilização de quadraturas Gaussianas e soluções analíticas assim como, a solução da integral elíptica de primeiro tipo empregando a Média Aritmética Geométrica. E os últimos dois aspectos diferenciadores deste trabalho são a utilização da EFIE sem aproximações e o desenvolvimento de uma modelagem matemática aplicável à analise de estruturas filamentares de geometria arbitrária.

O desenvolvimento da ferramenta apresentada nessa dissertação foi realizado na seguinte seqüência, inicialmente foi apresentada a EFIE para a análise numérica rigorosa do espalhamento eletromagnético por estruturas filamentares, a seguir esta equação foi adequada para a sua aplicação à de geometrias arbitrárias e então numericamente avaliada por meio do MoM, considerando os funções de base e teste triangulares e o tratamento apropriado para as integrais presentes na solução. Para a excitação foi utilizado Gerador de Função Delta. Foram também apresentadas as expressões completas para o cálculo dos campos elétrico e magnético nas regiões de campo próximo e distante.

Uma vez desenvolvida a ferramenta numérica, nomeada MoMlinear, inicialmente foram definidos os parâmetros computacionais que conduzem ao menor erro no cálculo da distribuição de corrente. A avaliação de todos os resultados obtidos foi realizada a partir da aplicação de um erro relativo médio que relaciona os resultados obtidos a partir do MoMLinear com aqueles gerados pelo $4Nec2^{®}$. Em uma primeira análise foi verifica a eficiência da técnica de remoção de singularidades proposta. Essa investigação foi conduzida a partir da comparação da distribuição de corrente obtida na análise de um elemento filamentar linear, para os casos em que a técnica é considerada e quando a remoção de singularidade não é realizada. Os resultados obtidos demonstraram que quando a técnica é aplicada os erros são menores, em especial quando se emprega um número menor de segmentos. Esse fato confere à técnica maior eficiência, uma vez é necessário um número menor de segmentos para alcançar uma determinada precisão.

Em uma segunda análise, foi investigada a precisão e a eficiência da formulação desenvolvida (MoMLinear) em relação à implementação, também realizada neste trabalho, que considera a EIP juntamente com funções de base do tipo pulso e triangular. A partir dos resultados obtidos verificou-se que a formulação MoMLinear conduz a resultados que convergem com um número menor de segmentos quando comparado com os outros dois métodos. Em relação a esses dois métodos, constatou-se que aquele que emprega funções de base triangulares apresenta convergência mais rápida. Adicionalmente a essas duas primeiras análises foi verificado o comportamento do número de condicionamento da matriz Z em função do número de segmentos utilizado. A partir dessa investigação verificou-se que à medida que o número de segmentos empregado aumenta, o número de condicionamento piora (aumenta), como esperado, e que esse não é significativamente alterado pela formulação desenvolvida.

Na sequência, a técnica desenvolvida foi empregada na análise da distribuição de corrente e dos campos nas regiões de campo próximo e distante considerando diferentes tipos de estruturas filamentares (dipolo, conjunto com dois dipolos, loop e espiral). Os resultados obtidos foram comparados com aqueles gerados pelo *software* $4Nec2^{®}$ e verificou-se uma concordância

satisfatória entre as soluções em todos os casos avaliados, o que demonstra a validade, precisão e a robustez da formulação apresentada no Capítulo 2 e a habilita para a análise de estruturas filamentares de geometria arbitrária.

Como uma análise final, uma vez verificada a precisão e convergência da formulação desenvolvida, foi avaliada a distribuição de corrente e valores de campo magnético na região de campo próximo para um sistema constituído de dois loops. Para essa geometria não é possível a análise pelo $4Nec2^{®}$, e assim foram apresentados somente os resultados obtidos pelo MoMLinear. Esse tipo de sistema vem sendo utilizado em diferentes problemas práticos de transmissão de energia sem fio envolvendo acoplamento indutivo ressonante na região de campo próximo [46]. Análise realizada nessa dissertação teve o objetivo unicamente de demonstrar a viabilidade e aplicabilidade do MoMlinear para o projeto e análise de sistemas de transmissão de energia sem fio constituídos de dois ou mais elementos filamentares de geometria arbitrária. Os resultados obtidos nesse estudo preliminar indicaram que uma potência pode ser irradiada pelo elemento transmissor e parte dessa potência pode ser capturada pelo(s) elemento(s) receptore(s). A quantidade de potência a ser capturada está armazenada no campo magnético próximo ao(s) elemento(s) receptore(s) e é função direta do tamanho e da distância entre os elementos transmissor e receptor.

4.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

A pesquisa realizada aponta alguns temas de interesse que podem ser explorados em novas investigações. A seguir são listados alguns desses temas considerados mais promissores:

- Investigar métodos mais simples e diretos para a avaliação rigorosa das singularidades presentes nas integrais associadas à solução do espalhamento eletromagnético por estruturas filamentares utilizando o MoM.
- Averiguar o emprego de outros tipos de funções de base de forma a representar adequadamente a distribuição de corrente e obter equações integrais mais simples.
- Desenvolver uma formulação para a avaliação rigorosa do espalhamento eletromagnético por estruturas filamentares utilizando a MFIE avaliada numericamente por meio do MoM.
- Desenvolver configurações computacionais que permitam a avaliação de problemas de grandes dimensões elétricas com reduzida demanda de tempo.
- Investigar técnicas eficientes para solução de sistemas lineares de forma a reduzir a demanda computacional.
- Realizar o estudo completo de um sistema de transmissão de energia sem fio considerando bobinas constituídas de mais de uma espira, diferentes geometrias para essas bobinas e ainda uma completa modelagem circuital de todo o sistema assim como sua implementação experimental.

Referências Bibliográficas

[1] C. F. V. P. Vidal. *Análise do Espalhamento Eletromagnético por Corpos de Revolução pelo Método dos Momentos Utilizando Integrais Elípticas.* Dissertação de Mestrado, CEFET-MG, Belo Horizonte, Fevereiro 2012.

[2] J. C. Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism.* Oxford Classic Texts in the Physical Sciences, no. 1, New York, 2002.

[3] C. A. Balanis. *Advanced Engineering Electromagnetics.* John Wiley e Sons, 1008 pages, 1989.

[4] R.F. Harrington. *Time-Harmonic Eletromagnetic Fields.* Wiley-IEEE Press, ed. 2, August 2001.

[5] R. F. Harrington. *Field Computation by Moment Methods.* Wiley-IEEE Press, 240 pages, May 1993.

[6] J. Jin. *The Finite Element Method in electromagnetics.* Wiley-IEEE Press, ed. 2, May 1993.

[7] M. N. O. Sadiku. *Numerical Techniques in Eletromagnetics with Matlab.* CRC Press, ed. 3, 2009.

[8] J. L. Randall. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems.* SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.

[9] R. C. Mesquita W. L. Nicomedes and F. J. S. Moreira. *A meshless local Petrov-Galerkin method for three-dimensional scalar problems.* IEEE Transactions on Magnetics, vol. 47, no. 5, pp. 1214-1217, May 2011.

[10] G. R. Liu. *Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method, Second Edition.* CRC Press, ed. 2, 2009.

[11] S. L. Ray A. F. Peterson and R. Mitra. *Computation Methods for Electromagnetics.* IEEE Press, ed.1, 1998.

[12] A. Taflove T. G. Moore, J. G. Blaschak and G. A. Kriegsmann. *Theory and application of radiation boundary operators.* IEEE Trans. Antennas Propagat., vol.AP-36, pp. 1797-1812, 1988.

[13] J. P. Berenger. *A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves.* J. Computational Phys., vol. 114, pp. 185-200., 1994.

[14] J. H. Richmond. *Digital Computer Solutions of the rigorous equations for scatering problems.* Proceedings of the IEEE, v. 53, p.796-804, August 1965.

[15] R.F. Harrington. *Matrix Methods for Fields Problems.* Proceedings of the IEEE, vol. 55, n. 2, p. 136-149, February 1967.

[16] U. C. Resende. *Análise de Antenas Refletoras Circularmente Simétricas com a Presença de Corpos Dielétricos.* Tese de Doutorado, UFMG, Belo Horizonte, p. 266, Maio 2007.

[17] J. L. Volakis M. A. A. Moneun, Z. Shen and O. Graham. *Hibrid PO-MoM Analysis of Large Axi-Symmetric Radomes.* IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 49, no. 12, pp. 1657-1665, December 2001.

[18] A. G. Marut L. C. Kempel S. N. Makarov, S. D. Kulkarini. *Method of moments solution for a printes patch/sltos antenna on a thin finite dieletric substrate using the volume integral equation.* IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 54, n. , p. 1174-1184, 2002.

[19] L. C Trintinalia. *Análise de Espalhamento Eletromagnético por Corpos Condutores e Dielétricos.* Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2008.

[20] F. L. Teixeira and J. R. Bergmann. *Moment-Method Analysis of Circurarly Symmetric Reflector Antennas Using Entire-Domain Functions.* IEEE Proceedings Microwave Antennas an Propagation, vol. 144, no. 3, pp. 179-183, June 1997.

[21] H. O. Uoss and U. Jakobus. *Efficient MoM-Based Calculation Methods to Investigate the Interaction Between Complicated Antenna Structures and Biological.* Telecomunication, v. 54, p. 43-55, 1999.

[22] J. Y. LI and L. W. LI. *Electromagnetic Scattering by a Mixture of Conducting and Dielectric Objects: Analysis using Method of Moments.* IEEE Transactions on Vehicular on Thecnology, v. 53, n. 2, March 2004.

[23] F. Silva C. Calmon, G. Pacheco and M. Terada. *Analysis of a Reconfigurable UWB Log-Periodic Antenna Using the Method of Moments.* Journal of Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications, v. 2, p. 59-64, December 2009.

[24] R. Chen and J. C. West. *Analysis of Scattering from Rough Surfaces at Large Incidence Angles Using a Periodic-Surface Moment Method.* IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, v. 33, n. 5, p. 1206 - 1213, September 1995.

[25] C. A. Balanis. *Antenna Theory: Analysis and Design.* Wiley-Interscience, ed. 3, 2008.

[26] W. L. Stutzman and G. A. Thiele. *Antenna Theory an Design.* John Wiley, ed. 2, 1998.

[27] G. J. Burke and A. J. Poggio. *Numerical Eletromagnetics Code (NEC) - Method of Moments.* January 1981.

[28] W. A. Davis. *Numerical Methods For Wire Structures.* Virginia Polytechnic Institute and State University, March 1995.

[29] G. A. V Castillo. *Modelagem de Estruturas Cilíndricas Finas para Fenômenos Eletromagnéticos a Altas Frequências pelo Método dos Elementos Finitos para Formulações Integrais.* Tese de Doutorado, UFRJ, Rio de Janeiro, Setembro 2007.

[30] E. D. Caswell. *Analysis of a Helix Antenna Using a Moment Method Approach With Curved Basis and Testing Functions.* Tese de Doutorado, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, 1998.

[31] E. E. Altshuler and D. S. Linden. *Wire-Antenna Designs Using Genetic Algorithms.* IEEE Antennas and Propagation Magazine, v. 39, n. 2, p.34-43, April 1997.

[32] V. S. Panda and G. Kumar. *Modeling of Yagi-Uda antenna using method of moments.* IETE Techincal Review, v. 17, n.5, p.283-291, September 2000.

[33] H. T. Anastassiu. *Fast, simple and accurate computation of the currents on an arbitrarily large circular loop antenna.* IEEE Transactions on Antennas and Propagation, v. 54, n.3, p.806-866, March 2006.

[34] M. W. Garrett. *Calculation of Fields, Forces, and Mutual Inductances of Current Systems by Elliptic Integrals.* Journal of Applied Physics, p. 2567-2573, September 1963.

[35] A. W. Glisson. *On the Development of Numerical Techiniques for Treating Arbitrarily Shaped Surfacers.* Ph.D. Dissertation, University of Mississippi, June 1975.

[36] L. L. Tsai. *A Numerical Solution for the Near and Far Fields of an Annular Ring of Mgnetic Current.* IEEE Trans. Antennas Propagat, vol. 20, No. 05, pp. 569-576, September 1972.

[37] M. N. O. Sadiku. *Elemens of Eletromagnetics.* Oxford University Press, ed. 3, 2000.

[38] T. K. Sarkar. *A Note on the Choice Weighting Functions in the Method of Moments.* IEEE Tansf Antennas Propagation, vol 33, p. 436-441, 1985.

[39] R. Mitra and C. A. Klein. *Stability and Covergence of Moment Method Solution.* R. Mitra (Ed), Spring Verlag, New York, 1975.

[40] L. Kantorovich and G. Akilov. *Function Analysis in Normed Spaces.* Pergamon Press, 1964.

[41] J. R. Mautz and R. F. Harrington. *An Improved E-Field Solution for a Conducting Body of Revolution.* Tchenical Report TR-80-1, Syracuse University, New York, 1980.

[42] M. S. Abramowitz and A. S. Irene. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, volume 55 of *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series*. U.S. Government Printing Office, 1964.

[43] C. G. Carvalhes and P. Suppes. *Approximations for the Period of the Simple Pendulum Based on the Arithmetic-Geometric Mean.* American Association of Physics Teachers, 12, 2008.

[44] C. G. Carvalhes and P. Suppes. *O cálculo de Alta Precisão do Período do Pêndulo Simples.* Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 31, n. 2, 2701, 2009.

[45] A. Karalis, J. D. Joannopoulos, and M. Soljacic. *Efficient Wireless Non-Radiative Mid-Range Energy Transfer*. Anais de Física, vol. 323, no. 1, pp 34-48, Jan. 2008.

[46] A. Kurs, A. Karalis, R. Moffatt, J. D. Joannopoulos, P. Fisher, and M. Soljacic. *Wireless Power Transfer via Strongly Coupled Magnetic Resonances*. Science, vol. 317, July 2007.